

Δαμιανός Μυραΐτης

Τα Θέμα

στις βυναρτήδες
στη βαταβική
και στις ινδανότητες

παράγωγοι

ακρόποτα

μέση τμή

Παλαιότητα



Περιέχει όλα τα θέματα
όλων των ειδών των
Πανελληνίων εξετάσεων
από το 2000 μέχρι
σήμερα, αδιατηρημένα με
αναλυτικό και
υποδειγματικό τρόπο

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο στον Κώστα, τον Πάνο, τον Γιάννη, την Μαρία, την Αγγελική, τη Χιόνα, τη Λίλα τον . . . και την . . . , σε όλα τέλος πάντων τα χιλιάδες **επώνυμα «παιδιά μου»**, που για μένα, **υπήρξαν πηγή έμπνευσης και πηγή ζωής.**

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στο συνάδελφο (κατά πολύ νεότερο) Γιάννη Βελαώρα γιατί είχε την υπομονή να διαβάσει με προσοχή και επιμονή τα γραφόμενα και να κάνει, όχι μόνο, τις απαραίτητες διορθώσεις αλλά και εύστοχες παρατηρήσεις.

Θερμές ευχαριστίες στο δάσκαλό μου τον **Άλκη Λεβέτα** γιατί του οφείλω πολλά και κυρίως την αγάπη στο διάβασμα.

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα
στις συναρτήσεις,
στη στατιστική και στις
πιθανότητες

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:

Δαμιανός Μωραΐτης

© copyright για την παρούσα έκδοση:

Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

ISBN: 9786188485761

Πρόλογος

Στο βιβλίο, που είναι το δεύτερο μιας πλήρους σειράς για το Λύκειο, παρουσιάζεται για **πρώτη φορά, μια μοναδική στην κυριολεξία συλλογή** που περιέχει:

Όλα τα θέματα των Μαθηματικών από το 2000 έως σήμερα

Σε αυτή τη **μοναδική και πρωτοεμφανιζόμενη** συλλογή, περιλαμβάνονται

ΟΛΑ τα θέματα Μαθηματικών που δόθηκαν σε **ΟΛΕΣ** τις Πανελλήνιες

Εξετάσεις γενικής παιδείας της Γ' Λυκείου από το 2000 έως σήμερα.

Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται τα θέματα από τις Πανελλήνιες:

- Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , ΤΕΛ, Ενιαίο Λύκειο, κλπ.)
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , Ενιαίο, κλπ.)
- Εξετάσεις των Εσπερινών Λυκείων
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων

Τα θέματα είναι λυμένα με **αναλυτικό και κυρίως με υποδειγματικό τρόπο έτσι που και οι μαθητές της Θεωρητικής να τα βρίσκουν «εύκολα».**

Τα θέματα είναι οργανωμένα **ξεχωριστά για κάθε κεφάλαιο :**

- 1. Συναρτήσεις Όριο – Παράγωγοι – Εφαρμογές των Παραγώγων**
- 2. Στατιστική – Πιθανότητες.**

Με τη συλλογή αυτή:

- **Οι μαθητές**

1^{ον} Αποκτούν την **πιο πλούσια συλλογή** από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά, για να μπορέσουν πιο εύκολα **να κατανοήσουν και να μάθουν** την αντίστοιχη ύλη.

2^{ον} Ξεπερνούν σε μεγάλο βαθμό το άγχος και την αγωνία τους, ειδικά οι μαθητές της **Θεωρητικής**, για τα «άγνωστα και δύσκολα» σύμφωνα με τις «φήμες» θέματα γιατί διαπιστώνουν πως είναι εύκολο να λύσουν και οι ίδιοι «ένα τέτοιο θέμα».

- **Οι καθηγητές** έχουν μια πλούσια συλλογή από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για να τα χρησιμοποιήσουν την ώρα που τα χρειάζονται . .

όταν διδάσκουν το αντίστοιχο κεφάλαιο.

Δηλαδή το βιβλίο αυτό αποτελεί τη **«Βίβλο»** των Πανελληνίων Εξετάσεων.

Περιεχόμενα

Το Βιβλίο είναι οργανωμένο σε 2 κεφάλαια

- 1. Συναρτήσεις, Όριο – Παράγωγοι – Εφαρμογές Παραγώγων.**
- 2. Στατιστική – Πιθανότητες.**

Ο διαχωρισμός έγινε με βάση το διαχωρισμό του τρέχοντος σχολικού βιβλίου, για τον, προφανή λόγο, ο μαθητής αλλά και ο καθηγητής, να ανατρέχουν στα περιεχόμενα παράλληλα με την διδασκαλία της αντίστοιχης (εξεταστέας) ύλης.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν

- ✓ **Σύντομη επανάληψη της θεωρίας με εύστοχες παρατηρήσεις, υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα, από αυτά που έχουν «πέσει» στις Πανελλήνιες και κρίσιμες υποδείξεις για τις ασκήσεις.**
- ✓ **Τα θέματα των εξετάσεων, από το 2000 μέχρι και σήμερα, που αφορούν το κεφάλαιο βαλμένα με χρονολογική σειρά, για να φαίνεται η «πορεία μέσα στο χρόνο» του κάθε κεφαλαίου.**
- ✓ **Οι λύσεις, σε πλήρη έκταση, χωρίς παραλείψεις και ευκόλως εννοούμενα, γραμμένες με υποδειγματικό τρόπο για να αποτελούν», εκτός των άλλων και ένα «πρότυπο» γραφής για τους μαθητές, βρίσκονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου και όχι αμέσως μετά το θέμα, δίνοντας έτσι τα περιθώρια στον μαθητή, να προσπαθήσει μόνος του να βρει την απάντηση, πριν καταφύγει στην έτοιμη απάντηση.**

Θ

έ

μ

Πανελλήνιες 2000 - 2008

α

τ

Κ

α

τ

ε

ύ

θ

υ

ν

σ

η

ς

Κεφάλαιο 1^ο

Συναρτήσεις

Το διάβασμα κάνει *κακό* ...
στην αμορφωσιά ...
γι' αυτό πρόσεχε.

Κεφάλαιο 1^ο

Συναρτήσεις

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις	ΣΕ 17
Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΣΘ 41
Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΣΑ 79

Συντομογραφίες

- * * ΣΕ = Συναρτήσεις σύντομη επανάληψη.
- * * ΣΘ = Συναρτήσεις εκφωνήσεις θεμάτων.
- * * ΣΑ = Συναρτήσεις απαντήσεις θεμάτων.

Ειδανάληψη

Ορισμός :

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

Πεδίου ορισμού.

Το πεδίο ορισμού είναι τόσο σημαντικό για τη λειτουργία μιας συνάρτησης όσο και ο τύπος της. Πολλές φορές σου δίνει τον τύπο μιας πραγματικής συνάρτησης χωρίς να σου δίνει το πεδίο ορισμού της.

Αυτό δεν είναι και πολύ «σωστό» αλλά συμβαίνει. Όταν λοιπόν δεν σου δίνει το πεδίο ορισμού μιας **πραγματικής** συνάρτησης, θα το βρίσκεις εσύ, βρίσκοντας το σύνολο που έχει για στοιχεία του όλα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η **$f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.**

Για τις ανάγκες τις εύρεσης του πεδίου ορισμού οι συναρτήσεις χωρίζονται στις πιο κάτω κατηγορίες:

1^η	Πολυωνυμική συνάρτηση : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
2^η	Ρητή συνάρτηση : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
3^η	Άρρητή συνάρτηση : $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$
4^η	Συνάρτηση που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς.
5^η	Συνάρτηση της μορφής $\psi = \log[f(x)]$ ή της μορφής $\psi = \ln[f(x)]$.

1^{ον} Αν η συνάρτηση είναι **πολυωνυμική**, τότε το πεδίο ορισμού της είναι **όλο το $\mathbb{R}$.**

2^{ον} Αν η συνάρτηση είναι ρητή, δηλαδή $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ τότε το πεδίο ορισμού της είναι το **$\mathbb{R}$** αφού αφαιρέσεις τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Δαμιανός Μωραΐτης

Έστω $f(\chi) = \frac{11\chi^2 + 3\chi - 2}{\chi^2 - 3\chi + 2}$. Είναι $\chi^2 - 3\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \chi = 2 \end{cases}$.

Άρα Π Ο είναι το $A = R - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

3^{ov} Αν η συνάρτηση είναι άρρητη, δηλαδή $f(\chi) = \sqrt{P(\chi)}$ τότε το πεδίο ορισμού της, θα είναι το διάστημα ή η ένωση διαστημάτων για τα οποία ισχύει : **$P(\chi) \geq 0$** .

Έστω $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 3\chi + 2}$. Είναι $\chi^2 - 3\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \chi = 2 \end{cases}$. Άρα πίνακας

προσήμου για το $\chi^2 - 3\chi + 2$ είναι:

$-\infty$	1	2	$+\infty$
+	-	+	

Άρα Π Ο είναι το **$A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$** .

4^{ov} Αν η συνάρτηση είναι τριγωνομετρικής μορφής θα θυμάσαι τα εξής :

1. Η $f(\chi) = \eta\mu\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **$A = R$** .
2. Η $f(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **$A = R$** .
3. Η $f(\chi) = \epsilon\phi\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **$A = R - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$** , $\kappa \in R$.
4. Η $f(\chi) = \sigma\phi\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **$A = R - \left\{ \kappa\pi \right\}$** , $\kappa \in R$.

5^{ov} Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $\psi = \log[f(\chi)]$ ή της μορφής $\psi = \ln[f(\chi)]$ τότε το πεδίο ορισμού της, θα είναι **το διάστημα** ή τα **διαστήματα** για τα οποία ισχύει : **$f(\chi) > 0$** .

1. Έστω $f(\chi) = \log(1 - 3\chi)$. Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει :

$$1 - 3\chi > 0 \Leftrightarrow 3\chi < 1 \Leftrightarrow \chi < \frac{1}{3} \text{ άρα πεδίο ορισμού το } A = \left(-\infty, \frac{1}{3} \right)$$

2. Έστω $f(\chi) = \ln(\chi^2 + 3\chi + 2)$. Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει :

$$\chi^2 + 3\chi + 2 > 0.$$

$$\text{Είναι } \chi^2 + 3\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ \chi = -2 \end{cases}.$$

Αιβαδειά

Άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 3\chi + 2$ είναι:

$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
+	-	+	

Άρα Π Ο είναι το $A = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

✓ Το πεδίο ορισμού θα το βρίσκεις **οποσδήποτε**.

Αν $\varphi(A)$ συμβολίζει το πεδίο τιμών τότε :

✓ Μια συνάρτηση φ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει : Αν $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

✓ Μια συνάρτηση φ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει : Αν $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$\varphi(\chi_0) \geq \varphi(\chi)$ για κάθε $\chi \in A$

✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$\varphi(\chi_0) \leq \varphi(\chi)$ για κάθε $\chi \in A$.

Όριο Συνάρτησης

Με την **προϋπόθεση** ότι υπάρχουν τα όρια : $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ ισχύει :

$$1. \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) + g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) + \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi).$$

$$2. \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) \cdot g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi).$$

$$3. \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = \frac{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)}{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)}, \text{ με την προϋπόθεση ότι : } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) \neq 0.$$

$$4. \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \left[(f(\chi))^v \right] = \left(\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \right)^v.$$

Με την **προϋπόθεση** ότι υπάρχει το όριο : $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ ισχύει :

$$5. \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (\kappa \cdot f(\chi)) = \kappa \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbf{R}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Αν έχεις να υπολογίσεις το όριο ρητής συνάρτησης (κλάσματος),

$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, βρίσκεις το Π Ο, βρίσκοντας τις **ρίζες** του παρονομαστή

$Q(\chi)$ και διακρίνεις δυο περιπτώσεις :

α) το $\chi \rightarrow \chi_0$ και το χ_0 **δεν είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ δηλαδή

$Q(\chi_0) \neq 0$ τότε αντικαθιστάς το χ_0 στο κλάσμα και είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)} .$$

β) το $\chi \rightarrow \chi_0$ και το χ_0 **είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ δηλαδή

$Q(\chi_0) = 0$, το χ_0 **θα είναι ρίζα και του αριθμητή** $P(\chi)$ δηλαδή **$P(\chi_0) = 0$** (τουλάχιστον στις περιπτώσεις που θα συναντήσεις). Επειδή ισχύει ότι « το χ_0 είναι ρίζα ενός πολυωνύμου εάν και μόνον εάν το $\chi - \chi_0$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου », παραγοντοποιείς αριθμητή και παρονομαστή και έχεις :

$$\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{(\chi - \chi_0)P_1(\chi)}{(\chi - \chi_0)Q_1(\chi)} = \frac{P_1(\chi)}{Q_1(\chi)} .$$

Την τελευταία διαδικασία την επαναλαμβάνεις διαρκώς, μέχρι το χ_0 να **μην**

είναι πλέον ρίζα του παρονομαστή οπότε και υπολογίζεις

το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ αντικαθιστώντας .

Παρατήρηση : Αν υπάρχει ρίζα σε κάποιον από τους όρους του πηλίκου $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$

αντί να προσπαθήσεις να παραγοντοποιήσεις αριθμητή και παρονομαστή, πολλαπλασιάζεις αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου που περιέχει το ριζικό.

Συνέχεια μιας συνάρτησης φ στο χ_0 .

Έστω μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $\mathbf{A}$ και $\chi_0 \in \mathbf{A}$.

Θα λέμε ότι η φ είναι συνεχής στο χ_0 , όταν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \varphi(\chi_0)$.

- ✓ Μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$** όταν :
 - i) **Δεν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$.**
 - ii) **Υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$ αλλά είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \neq \varphi(\chi_0)$.**
- ✓ Κάθε **πολυνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής.**
- ✓ Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- ✓ Οι συναρτήσεις $f(\chi) = \eta\mu\chi$ και $g(\chi) = \sigma\upsilon\eta\chi$ είναι συνεχείς.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Από τον ορισμό της συνέχειας στο χ_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g **είναι συνεχείς στο χ_0** , τότε και οι συναρτήσεις :

$$f + g, \quad \kappa \cdot f, \quad \kappa \in \mathbf{R}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ με } g(\chi_0) \neq 0, \quad |f| \text{ και } \sqrt[n]{f} \text{ είναι}$$

επίσης συνεχείς στο χ_0 .

- ✓ Από τον συνδυασμό των πιο πάνω προκύπτει ότι :
Οι συναρτήσεις $f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi$ και $g(\chi) = \sigma\varphi\chi$ είναι **συνεχείς** ως πηλικά συνεχών συναρτήσεων.

Παράγωγος της f στο $\chi = \chi_0$

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $\chi_0 \in A$.

Έστω ο λόγος $\frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$.

Ορισμός

Αν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός τότε

λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$

λέγεται παράγωγος της f στο $\chi_0 \in A$ και συμβολίζεται με $f'(\chi_0)$,

Δηλαδή
$$f'(\chi_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. Η **παράγωγος** της **σταθερής** συνάρτησης $f(\chi) = c$ είναι: $c' = 0$.
2. Η **παράγωγος** της **ταυτοτικής** συνάρτησης $f(\chi) = \chi$ είναι: $\chi' = 1$.
3. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^v$ είναι: $(\chi^v)' = v \cdot \chi^{v-1}$ με v φυσικό αλλά και αν $f(\chi) = \chi^p$, όπου p ρητός θα είναι: $(\chi^p)' = p \cdot \chi^{p-1}$.
4. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi) = \eta\mu\chi$ είναι: $(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$.
5. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ είναι: $(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$.
6. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi) = \varepsilon\phi\chi$ είναι: $(\varepsilon\phi\chi)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$.

Αιτιολογία

7. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι: $(e^x)' = e^x$.

8. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Προσοχή Παρατήρηση S O S για τις ασκήσεις :

Από την Β Λυκείου, είναι εξ' ορισμού, $\sqrt[v]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{v}} = x^p$ όπου $p = \frac{\mu}{v}$.

Έτσι λοιπόν **πρακτικά** για να βρεις την παράγωγο μιας συνάρτησης f με τύπο:

1. $f(x) = \sqrt[v]{x^\mu}$ θα γράφεις τη συνάρτηση : $f(x) = \sqrt[v]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{v}}$, οπότε η

παράγωγος της συνάρτησης είναι: $f'(x) = \left(\sqrt[v]{x^\mu}\right)' = \left(x^{\frac{\mu}{v}}\right)' = \frac{\mu}{v} \cdot x^{\frac{\mu}{v}-1}$.

Εφαρμογή : Αν $f(x) = \sqrt{x}$ τότε $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ άρα :

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}}$ θα γράφεις τη συνάρτηση : $f(x) = \frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}} = \frac{1}{x^{\frac{\mu}{v}}} = x^{-\frac{\mu}{v}}$,

οπότε η παράγωγος της είναι: $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}}\right)' = \left(x^{-\frac{\mu}{v}}\right)' = -\frac{\mu}{v} \cdot x^{-\frac{\mu}{v}-1}$.

Κανόνες Παραγώγισης

1. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $\kappa \cdot f(\chi)$ είναι:

$$(\kappa \cdot f(\chi))' = \kappa \cdot f'(\chi).$$

2. Η **παράγωγος** του **αθροίσματος** $f(\chi) + g(\chi)$ είναι:

$$(f(\chi) + g(\chi))' = f'(\chi) + g'(\chi).$$

3. Η **παράγωγος** του **γινομένου** $f(\chi) \cdot g(\chi)$ είναι:

$$(f(\chi) \cdot g(\chi))' = f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi).$$

4. Η **παράγωγος** του **πηλίκου** $\frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ είναι:

$$\left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)}\right)' = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{(g(\chi))^2}.$$

Εφαρμογή :

$$\left(\frac{1}{g(\chi)}\right)' = \frac{1' \cdot g(\chi) - 1 \cdot g'(\chi)}{[g(\chi)]^2} = \frac{0 \cdot g(\chi) - g'(\chi)}{[g(\chi)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{g(\chi)}\right)' = -\frac{g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}$$

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Οι τύποι που έμαθες σου δίνουν τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων χ^v , $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$, e^x , $\ln\chi$.

Πολλές φορές όμως η συνάρτηση δεν είναι απλή αλλά **σύνθετη**, δηλαδή στη θέση της μεταβλητής χ βρίσκεται μια **ολόκληρη** συνάρτηση, όπως π.χ. αν

αντί της $\varphi(\chi) = \eta\mu\chi$ έχεις $f(\chi) = \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right)$ ή αν έχεις την $f(\chi) = \sqrt{3\chi^2 + 1}$

αντί της $\varphi(\chi) = \sqrt{\chi}$.

Αιβαδειά

Παρατήρησε ότι η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \sqrt{3\chi^2 + 1}$ μπορεί να προκύψει από την $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ αν αντικαταστήσεις το χ με το $g(\chi) = 3\chi^2 + 1$.

Δηλαδή είναι, $f(g(\chi)) = \sqrt{g(\chi)} = \sqrt{3\chi^2 + 1} = \varphi(\chi)$.

Γι' αυτό η συνάρτηση φ λέγεται **σύνθεση** της g με την f .

Αποδεικνύεται ότι για την **παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης** ισχύει :

$$[f(g(\chi))] = f'(g(\chi)) \cdot g'(\chi)$$

Δηλαδή για να παραγωγίσεις τη συνάρτηση $f(g(\chi))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζεις την f **σαν** να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την χ και όχι την $g(\chi)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζεις με την παράγωγο $g'(\chi)$ της $g(\chi)$.

Προσοχή Παρατηρήσεις S O S για τις ασκήσεις :

- ✓ Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο χ_0 ($f'(\chi_0)$) είναι **αριθμός** και εκφράζει την «ταχύτητα» με την οποία «θέλει» να μεταβληθούν οι τιμές της f στο χ_0 ή πιο σωστά «**Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο χ_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $\psi = f(\chi)$ ως προς το χ , όταν $\chi = \chi_0$.**

Έτσι λοιπόν **πρακτικά** :

- ✓ Αν πρόκειται για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, η παράγωγος της συνάρτησης f στο χ_0 ($f'(\chi_0)$), είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\psi = f'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$.
- ✓ Αν πρόκειται για κίνηση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $\chi = f(t)$ τότε η παράγωγος της συνάρτησης f στο t_0 ($f'(t_0)$), εκφράζει την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή $v(t_0) = f'(t_0)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

- ✓ Αν η συνάρτηση εκφράζει άλλο μέγεθος, π. χ. οικονομικό μέγεθος όπως είναι το κόστος παραγωγής ή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, τότε η παράγωγος της συνάρτησης f στο χ_0 ($f'(\chi_0)$), εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους, όταν η παραγωγή γίνει χ_0 μονάδες και ονομάζεται « **οριακό κόστος ή οριακό κέρδος κ.λ.π.** ».

Προσοχή Παράδειγμα S O S που αποτελεί μέθοδο.

Η θέση ενός κινητού το οποίο κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τον τύπο :

$$S(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t - 7 \text{ όπου } t \text{ σε min, } t \in [0, 5] \text{ και } S \text{ σε Km.}$$

Να βρείτε :

- Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.
- Πόσα min μετά την εκκίνηση του το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».
- Την επιτάχυνση όταν το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».
- Να βρείτε πότε το κινητό απομακρύνεται από το σημείο εκκίνησης του και πότε επιστρέφει προς αυτό.
- Να βρείτε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό σε 5 min από τη στιγμή εκκίνησης.

- α) Η ταχύτητα του κινητού είναι η πρώτη παράγωγος της $S(t)$:

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t - 7 \right)' = \frac{3t^2}{3} - 2 \cdot 2t + 3 = t^2 - 4t + 3 \Leftrightarrow$$

$v(t) = t^2 - 4t + 3$ και η επιτάχυνσή του είναι η πρώτη παράγωγος της $v(t)$:

$$a(t) = v'(t) = (t^2 - 4t + 3)' = 2t - 4 = 2(t - 2) \Leftrightarrow a(t) = 2(t - 2)$$

- β) Το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» όταν η ταχύτητά του είναι μηδέν. Όμως $v(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \dots$ ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_1 = 3$ άρα το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» **1 min** και **3 min** μετά την εκκίνηση του

Αιτιαδειά

- γ) Η επιτάχυνση όταν το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» είναι αντίστοιχα $a(1) = 2(1-2) = -2$ και $a(3) = 2(3-2) = 2$.
- δ) Για να βρεις πότε το κινητό απομακρύνεται και πότε επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης του πρέπει να μελετήσεις το πρόσημο της ταχύτητας και επειδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού θα πρέπει αναγκαστικά να φτιάξεις πίνακα προσήμου.

Η $v(t) = t^2 - 4t + 3$ έχει ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 3$.

άρα πίνακας προσήμου :

0 min	1 min	3 min	5
+	-	+	

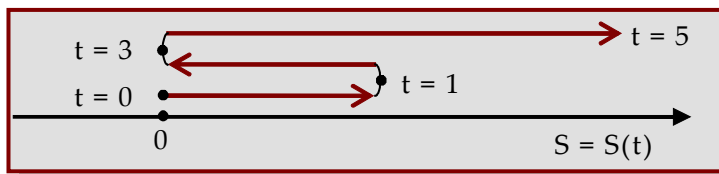
Άρα στα διαστήματα που η $v(t) = t^2 - 4t + 3$ είναι θετική, δηλαδή στο

$A = (0, 1) \cup (3, +\infty)$, το κινητό απομακρύνεται, ενώ στο διάστημα

$B = (1, 3)$ το κινητό επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης του.

- ε) Για να βρεις το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό σε 5 min από τη στιγμή εκκίνησης πρέπει να βρεις τα επί μέρους διαστήματα, δηλαδή τα διαστήματα που διανύει στις διάφορες φάσεις της κίνησής του.
- 1^η φάση από 0 έως 1 min
 - 2^η φάση από 1 έως 3 min
 - 3^η φάση από 3 έως 5 min

Η κίνηση του κινητού στις διάφορες φάσεις είναι όπως στο σχήμα :



Η απόσταση που διανύθηκε από το κινητό είναι:

1^η φάση $S_1 = |S(1) - S(0)| = \left| \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 7 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 7 \right) \right|$

$$= \left| \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 - 7 \right) - (-7) \right| = \left| -\frac{17}{3} + 7 \right| \Leftrightarrow S_1 = \frac{4}{3} \text{ Km.}$$

$$\begin{aligned} 2^{\text{η}} \text{ φάση } S_2 &= |S(3) - S(1)| = \left| \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 7 \right) \right| = \\ &= \left| \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 - 7 \right) - \left(-\frac{17}{3} \right) \right| = \left| (-7) - \left(-\frac{17}{3} \right) \right| = \left| -7 + \frac{17}{3} \right| \Leftrightarrow S_2 = \frac{4}{3} \text{ Km.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{\text{η}} \text{ φάση } S_3 &= |S(5) - S(3)| = \left| \left(\frac{5^3}{3} - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 7 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 7 \right) \right| \\ &= \left| \frac{29}{3} - (-7) \right| = \left| \frac{29}{3} + 7 \right| \Leftrightarrow S_3 = \frac{50}{3} \text{ Km.} \end{aligned}$$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το κινητό σε χρόνο 5 min είναι :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{50}{3} \Leftrightarrow S = \frac{58}{3} \text{ Km.}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (Ένα φαινομενικά δύσκολο πρόβλημα)

Αν $\psi = \varphi(\chi)$ είναι ο τύπος μιας συνάρτησης και $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ ένα σημείο

στην γραφική της παράσταση τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ είναι $\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$, όπου $\varphi'(\chi_0)$ ο παράγωγος αριθμός της $\varphi(\chi)$ στο χ_0 .

Άρα για να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης πρέπει :

1^{ον} Να ξέρεις το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ (αν δεν το δίνει η άσκηση θα είναι το πρώτο πράγμα που θα υπολογίσεις).

2^{ον} Να βρεις $\varphi'(\chi)$ για να υπολογίσεις το $\varphi'(\chi_0)$.

3^{ον} Να αντικαταστήσεις το $\varphi'(\chi_0)$ στην $\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$ και στη συνέχεια να απαιτήσεις αυτή να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$, για να βρεις έτσι και το β .

Αιθαδειά

Έτσι το πρόβλημα εμφανίζεται με **τρεις** μορφές :

1^η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi)$ και το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$, σημείο στην γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο A».

2η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi)$, και ο συντελεστής λ της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

3η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi)$, και ένα σημείο $P(\chi_1, \psi_1)$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης που «περνάει» από το P.

Τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν μέθοδο.

Παραδείγματα :

- 1.** Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ και το σημείο $A(-2, -1)$ στη γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο A

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ είναι :
 $\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$.

Βήμα 1^ο : Το $A(-2, -1)$ είναι το σημείο επαφής (από την εκφώνηση).

Βήμα 2^ο : Βρίσκεις την παράγωγο της συνάρτησης : $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$

$$\Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\chi^2 + 3\chi + 1)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = 2\chi + 3 \text{ και}$$

$$\varphi'(-2) = 2(-2) + 3 \Leftrightarrow \varphi'(-2) = -1$$

Βήμα 3^ο : Αντικαθιστάς το : $\varphi'(-2) = -1$ στην εξίσωση

$$\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta \text{ οπότε αυτή γίνεται } \psi = -\chi + \beta \quad (1) \text{ και}$$

αφού η εφαπτομένη περνάει από το $A(-2, -1)$, που είναι το

Δαμιανός Μωραΐτης

σημείο επαφής, πρέπει οι συντεταγμένες του Α να επαληθεύουν την (1), άρα
 $-1 = -(-2) + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$ επομένως η εξίσωση της

εφαπτομένης είναι $\psi = -\chi - 3$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης, μόνο που δίνεται μέσα από μια «ιδιότητα» της εφαπτομένης, πχ η εφαπτομένη είναι παράλληλη ή κάθετη σε άλλη ευθεία κ λ π.

- ✓ Σε πρώτη «φάση» μέσα από την «ιδιότητα» της εφαπτομένης βρίσκεις τον συντελεστή διεύθυνσης λ.
- ✓ Σε δεύτερη «φάση» προσπαθείς να βρεις το χ_0 από την σχέση $\varphi'(\chi_0) = \lambda$ και στη συνέχεια βρίσκεις το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ οπότε μπορείς πια να βρεις την εξίσωση.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\chi + \psi - 5 = 0$.

Απάντηση : Έστω $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ το σημείο επαφής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο χ_0 είναι : $\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$.

Βήμα 1^ο :

Η ευθεία $\chi + \psi - 5 = 0$ γράφεται $\psi = -\chi + 5$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -1$ και επομένως αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\chi + \psi - 5 = 0$ θα έχει και αυτή συντελεστή διεύθυνσης $\varphi'(\chi_0) = \lambda_1 = -1$.

Βήμα 2^ο :

Στις περιπτώσεις όπως αυτή, που δεν ξέρεις τις συντεταγμένες του $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$, ξεκινάς να βρεις κατ' αρχήν το χ_0 από το συντελεστή διεύθυνσης ως εξής :

Είναι $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1 \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\chi^2 + 3\chi + 1)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = 2\chi + 3$ άρα

Αιτιολογία

Αν χ_0 η τετμημένη του σημείου επαφής $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ τότε $\varphi'(\chi_0) = 2\chi_0 + 3$ είναι και $\varphi'(\chi_0) = \lambda_1 = -1$ άρα $\varphi'(\chi_0) = -1 \Leftrightarrow 2\chi_0 + 3 = -1 \Leftrightarrow 2\chi_0 = -4$
 $\chi_0 = -2$.

Και επειδή το A είναι σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι $\psi_0 = \varphi(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$ άρα $A(-2, -1)$ το σημείο επαφής.

Βήμα 3^ο :

Αντικαθιστάς το : $\varphi'(-2) = -1$ στην εξίσωση

$\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$ οπότε αυτή γίνεται $\psi = -\chi + \beta$, αφού η

εφαπτομένη περνάει από το $A(-2, -1)$ πρέπει οι

συντεταγμένες του A να την επαληθεύουν άρα $-1 = -(-2) + \beta$

$\Leftrightarrow -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$ επομένως η εξίσωση της

εφαπτομένης είναι $\psi = -\chi - 3$

3.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία σχηματίζει με τον άξονα χ' χ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

Θα βρεις πρώτα το συντελεστή διεύθυνσης μιας και είναι $\varphi'(\chi_0) = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -1$

και θα ακολουθήσεις τα βήματα 2 και 3 του προηγούμενου παραδείγματος.



Επίτηδες άφησα τελευταία αυτή την περίπτωση, φαίνεται η πιο δύσκολη αλλά δεν είναι, απλώς έχει λίγες πράξεις παραπάνω.

4.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία περνάει από το σημείο $P(1, -4)$

Απάντηση : Έστω $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ το σημείο επαφής .

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο χ_0 είναι : $\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$.

Βήμα 1^ο :

Έστω χ_0 η τετμημένη του **σημείου επαφής** $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$.

Τότε $\varphi(\chi_0) = \chi_0^2 + 3\chi_0 + 1$.

$$\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1 \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\chi^2 + 3\chi + 1)' = 2\chi + 3 \text{ άρα}$$

$$\varphi'(\chi_0) = 2\chi_0 + 3 .$$

Βήμα 2^ο :

Αντικαθιστάς το : $\varphi'(\chi_0) = 2\chi_0 + 3$ στην εξίσωση

$$\psi = \varphi'(\chi_0) \cdot \chi + \beta \text{ οπότε αυτή γίνεται } \psi = (2\chi_0 + 3)\chi + \beta .$$

Βήμα 3^ο :

α) Αφού η εφαπτομένη περνάει από το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ πρέπει

οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα

$$\psi = (2\chi_0 + 3)\chi + \beta \Leftrightarrow \chi_0^2 + 3\chi_0 + 1 = (2\chi_0 + 3)\chi_0 + \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi_0^2 + 3\chi_0 + 1 = 2\chi_0^2 + 3\chi_0 + \beta \Leftrightarrow \chi_0^2 + \beta - 1 = 0 \quad (1).$$

β) Αφού η εφαπτομένη περνάει από το $P(1, -4)$ πρέπει οι

συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα

$$\psi = (2\chi_0 + 3)\chi + \beta \Leftrightarrow -4 = (2\chi_0 + 3) \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow$$

$$2\chi_0 + \beta + 7 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα } \begin{cases} \chi_0^2 + \beta - 1 = 0 \\ 2\chi_0 + \beta + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\chi_0^2 + 1 \\ 2\chi_0 - \chi_0^2 + 1 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = -\chi_0^2 + 1 \\ \chi_0^2 - 2\chi_0 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\chi_0^2 + 1 \\ \chi_1 = -2 \text{ ή } \chi_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = -2, \beta_1 = -3 \\ \chi_2 = 4, \beta_2 = -15 \end{cases} \text{ ή άρα δυο}$$

εφαπτόμενες ικανοποιούν τις προϋποθέσεις.

Η μια εφάπτεται στο $A(-2, \varphi(-2)) = A(-2, -1)$ και περνάει από το $P(1, -4)$ και για την εξίσωσή της έχεις :

Αιβαδειά

✓ $\varepsilon_1 : \psi = (2\chi_0 + 3)\chi + \beta \Leftrightarrow \varepsilon_1 : \psi = (2 \cdot (-2) + 3)\chi - 3$ άρα είναι

$\varepsilon_1 : \psi = -\chi - 3$ και

Η άλλη εφάπτεται στο $B(4, \varphi(4)) = B(4, -15)$ και περνάει από το $P(1, -4)$ και για την εξίσωσή της έχεις :

✓ $\varepsilon_2 : \psi = (2\chi_0 + 3)\chi + \beta \Leftrightarrow \varepsilon_2 : \psi = (2 \cdot 4 + 3)\chi - 15$ άρα είναι

$\varepsilon_2 : \psi = 11\chi - 15$

Εφαρμογές των Παραγώγων

- ✓ Από παρατηρήσεις έχει διαπιστωθεί πως υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα στην μονοτονία μιας συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της .

Συγκεκριμένα αποδεικνύονται τα εξής :

Θεώρημα 1

- ✓ Αν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε διάστημα Δ και επί πλέον ισχύει : $f'(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ .
- ✓ Αν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε διάστημα Δ και επί πλέον ισχύει : $f'(\chi) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ .

Θεώρημα 2

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** σε διάστημα Δ .

✓ Αν το διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, το $f(\chi_0)$ είναι **μέγιστο** στο

Δ αν ισχύουν

- 1) $f'(\chi_0) = 0$
- 2) $f'(\chi) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) < 0$ στο (χ_0, β) .

✓ Αν το διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, το $f(\chi_0)$ είναι **ελάχιστο** στο

Δ αν ισχύουν

- 1) $f'(\chi_0) = 0$
- 2) $f'(\chi) < 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) > 0$ στο (χ_0, β) .

**** Όταν η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta]$ ή (α, β) και είναι μονότονη τότε ακρότατο είναι και το άκρο που περιέχεται στο διάστημα.**

Παρατηρήσεις :

1. Για να μελετήσεις τη μονοτονία μιας συνάρτησης f μελετάς το πρόσημο της f' :

Αν η παράγωγος της συνάρτησης είναι :

Πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού τότε λύνεις την ανίσωση $f'(\chi) \geq 0$.

Πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού τότε φτιάχνεις πίνακα προσήμου για την $f'(\chi)$.

Πολυωνυμική βαθμού μεγαλύτερου του 2 παραγοντοποιείς την $f'(\chi)$ και στη συνέχεια φτιάχνεις πίνακα προσήμου.

Αν η συνάρτηση f' δεν είναι πολυωνυμική, τότε ανάλογα με την περίπτωση, λύνεις την ανίσωση : $f'(\chi) \geq 0$.

2. Οι προϋποθέσεις που βάζει το **Θεώρημα 2** είναι και οι δυο απολύτως απαραίτητες για να υπάρξει ακρότατο.

Έστω $p\chi$ η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^3$. Είναι $\varphi'(\chi) = 3\chi^2$, $\varphi'(0) = 0$ αλλά παρ'

όλα αυτά το $\chi = 0$ δεν είναι σημείο ακρότατου διότι

Αιβαδειά

- ✓ $\chi < 0 \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \chi^3 < 0 = \varphi(0)$ ενώ
- ✓ όταν $\chi > 0 \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \chi^3 > 0 = \varphi(0)$.

Παρατήρησε πως $\varphi'(\chi) = 3\chi^2 \geq 0$.

3. Αν μια συνάρτηση φ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα τότε το $\varphi(\alpha)$ είναι **ελάχιστο** και το $\varphi(\beta)$ **μέγιστο**.
Ενώ αν μια συνάρτηση φ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως φθίνουσα τότε το $\varphi(\alpha)$ είναι **μέγιστο** και το $\varphi(\beta)$ **ελάχιστο**.

Δυο πολύ καλές και χαρακτηριστικές εφαρμογές.

1.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \cdot \chi(2 - \chi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- A. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° .

Μονάδες 10

- B. Για $\alpha = \frac{1}{2}$ να βρείτε :

- α. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

Μονάδες 5

- β. Τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

Απάντηση :

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \cdot \chi \cdot (2 - \chi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Προφανώς Π Ο το $A = \mathbb{R}$.

- A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° τότε θα

Δαμιανός Μωραΐτης

είναι $f'(0) = \lambda = \varepsilon\phi 45^\circ$ άρα $f'(0) = 1$.

Είναι $f(x) = \alpha \cdot x \cdot (2 - x) \Leftrightarrow f'(x) = (\alpha \cdot x \cdot (2 - x))' = (2\alpha x - \alpha x^2)' = 2\alpha - 2\alpha x$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2\alpha(1 - x) \text{ άρα } f'(0) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha - 2\alpha \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Β. Όταν $\alpha = \frac{1}{2}$

α. Είναι $f(x) = \frac{1}{2}x(2 - x)$ και επομένως $f(1) = \frac{1}{2}1(2 - 1) = \frac{1}{2}$.

Επίσης είναι $f'(x) = 2\alpha(1 - x)$ και $\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - x) \Leftrightarrow$

$$f'(x) = 1 - x \text{ άρα } f'(1) = 1 - 1 = 0.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $\psi = f'(x_0) \cdot x + \beta$, άρα

στο $(1, f(1))$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi = f'(1) \cdot x + \beta \Leftrightarrow \psi = 0 \cdot x + \beta$

$$\Leftrightarrow \psi = \beta \text{ και επειδή περνάει από το } (1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \text{ θα είναι } \psi = \frac{1}{2}.$$

β. Είναι $f(x) = \frac{1}{2}x(2 - x) \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$, άρα $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$x \leq 1.$$

οπότε πίνακας μονοτονίας για την $f(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η

$$f'(1) = 0 \text{ και}$$

$$\psi = \frac{1}{2}$$

Στο $(-\infty, 1)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\downarrow\right)$

Στο $(1, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow\right)$

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το $\psi = \frac{1}{2}$ όταν $x = 1$.

Αιβαδειά

2.

Ημερήσια Τ Ε Λ 2003 (Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση)**Τετάρτη 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 4^ο**

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

- α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$.
Μονάδες 5
- β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .
Μονάδες 7
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
Μονάδες 7
- δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.
Μονάδες 6

Απάντηση :

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t sec δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

- α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος $h = f(0) = 0$.
- β) Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση : $f'(t) = (-3t^2 + 30t)' = (-3t^2)' + (30t)' \Leftrightarrow$
 $f'(t) = -6t + 30$.

- γ) Το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι θετικός αριθμός και κατεβαίνει αν ο ρυθμός

Δαμιανός Μωραΐτης

μεταβολής του ύψους είναι αρνητικός αριθμός.

$$\text{Άρα } f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 30 > 0 \Leftrightarrow t < 5.$$

Άρα το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα $[0, 5]$ και κατεβαίνει το χρονικό διάστημα $[5, 10]$

δ) Όπως είναι φανερό από το προηγούμενο ερώτημα το μέγιστο ύψος θα είναι τη χρονική στιγμή $t = 5$ και θα είναι $h_{\text{μέγιστο}} = -3 \cdot 5^2 + 30t \Leftrightarrow$

$$h_{\text{μέγιστο}} = 75 \text{ m.}$$

Εκφωνήσεις

1.

πανελλήνιες 2000

Σάββατο 3 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

$$F'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

$$c \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{με } g(x) \neq 0 \quad \text{όπου } c \text{ πραγματική σταθερά}$$

Μονάδες 4,5

B. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A Συνάρτηση	Στήλη B πρώτη παράγωγος
α. $x^2 + 3$	1. $1 - \eta\mu x$
β. $x + \sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2 - 8x$
γ. $x \cdot \eta\mu x$	3. $2x + 3$
δ. $x^3 - 4x^2$	4. $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2 - 4x$
	7. $\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

Δαμιανός Μωραΐτης

- β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x}$ είναι :

A : e^x , B : $\frac{e^x - xe^x}{x^2}$, Γ : $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$, Δ : $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$, Ε : $\frac{xe^x - e^x}{x}$
Μονάδες 4,5

2.

Εσπερινά 2000

Παρασκευή 26 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x-3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

- β) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

- γ) Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 + 5x + 3$.

- α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f .

Μονάδες 12

- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 13

3.

πανελλήνιες 2000 – Επαναληπτικές**Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ όπου x πραγματικός αριθμός .

α. Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0 .

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

4.

Εσπερινά 2000 – Επαναληπτικές**Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. Στη στήλη **I** του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα πρώτα μέλη των ισοτήτων οι οποίες εκφράζουν τους κανόνες παραγώγισης.
Στη στήλη **II** υπάρχουν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων αυτών.

A.	$(c \cdot f(x))'$	1.	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
B.	$(f(x) + g(x))'$	2.	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Γ.	$(f(x) \cdot g(x))'$	3.	$\frac{f'(x)}{g'(x)}$
Δ.	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ με $g(x) \neq 0$	4.	$f'(x) + g'(x)$
E.	$[f(g(x))]'$	5.	$f(x) \cdot f'(x)$
		6.	$c \cdot f'(x)$
		7.	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Δαμιανός Μωραΐτης

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης του πίνακα και, ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της δεύτερης στήλης έτσι ώστε να προκύψουν οι γνωστοί κανόνες παραγωγίσης

Μονάδες 12,5

B. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

1. $f_1(x) = x + 1$

2. $f_2(x) = xe^x$

3. $f_3(x) = 2 + \ln x, x > 0$

4. $f_4(x) = \frac{x}{x+2}, x \neq -2$

5. $f_5(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2004$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 3)$.

Μονάδες 9

5.

Εσπερινά 2001

Δευτέρα 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Στη **Στήλη I** του παρακάτω πίνακα δίνονται συναρτήσεις $f(x)$ και στη **Στήλη II** οι παράγωγοί τους $f'(x)$. Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Λ ι β α δ ε ι ά

Στήλη Ι Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη ΙΙ Παράγωγος $f'(x)$
A. x	1. $- \eta \mu x$
B. $\sqrt{x}$, $x > 0$	2. x^{p-1}
Γ. x^p , $x > 0$ και p ρητός	3. $\sigma \nu \eta x$
Δ. $\eta \mu x$	4. 1
E. $\sigma \nu \eta x$	5. $2\sqrt{x}$
	6. ρx^{p-1}
	7. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	8. $\eta \mu x$

Μονάδες 5

β) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ στο $\mathbb{R}$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

$$f(x) + g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{με } g(x) \neq 0, \quad f(g(x)).$$

Μονάδες 7,5

B. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

α) $f_1(x) = x^3 + \eta \mu x + 3 \sigma \nu \eta x$.

β) $f_2(x) = (x-1)^2$.

γ) $f_3(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

δ) $f_4(x) = \sqrt{x^2+3}$.

ε) $f_5(x) = \sigma \nu \eta (2x+3)$.

Μονάδες 12,5

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 + 5\chi + 6$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^3 + 5\chi + 6}{\chi + 1}$

Μονάδες 10

6.

πανελλήνιες 2001

Πέμπτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f με $f(\chi) = \sin \chi + \eta \mu \chi$

A. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) + f''(\chi) = 0$

Μονάδες 8

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση :

$$\lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2$$

Μονάδες 9

7.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές**Σάββατο 30 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A. 1.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ τότε να αποδείξετε ότι : $(cf(\chi))' = cf'(\chi)$, όπου c πραγματικός αριθμός .

Μονάδες 6,5

- A.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $(f(\chi) \cdot g(\chi))' = f'(\chi) \cdot g(\chi) - f(\chi) \cdot g'(\chi)$

β. $(f(g(\chi)))' = f'(g(\chi)) \cdot g'(\chi)$

γ. $\left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)}\right)' = \frac{f'(\chi) \cdot g(\chi) + f(\chi) \cdot g'(\chi)}{(g(\chi))^2} \quad g(\chi) \neq 0$

δ. $(\chi^\rho)' = \rho\chi^{\rho-1}$, ρ ρητός , $\chi > 0$.

ε. $(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$

στ. $(\sigma\upsilon\nu\chi)' = \eta\mu\chi$

Μονάδες 6

- B. 1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης **A** και δίπλα τον αριθμό της στήλης **B** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A Συνάρτηση f	Στήλη B Πρώτη παράγωγος της f
α. $2\sqrt{\chi} + \ln 2$, $\chi > 0$	1. $\frac{1}{\sqrt{\chi}} + \frac{1}{2}$
β. $\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$, $\chi \neq 0$	2. $3\sigma\upsilon\nu 3\chi$

Δαμιάνοζ Μωραΐτης

γ. $\eta\mu^3\chi$	3. $\frac{\eta\mu\chi - \chi\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi^2}$
	4. $\frac{1}{\sqrt{\chi}}$
	5. $\frac{\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi}{\chi^2}$
	6. $-3\sigma\upsilon\nu 3\chi$

Μονάδες 7,5

- B. 2.** Αν $f(\chi) = \frac{1}{4}(\chi - 1)^4$ και $f'(a) = 27$, όπου a πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 5

8.

Εσπερινά 2001 – Επαναληπτικές

Τρίτη 11 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} \cdot \eta\mu\chi + \chi + 1$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α) Το $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$

Μονάδες 8

β) Την παράγωγο της συνάρτησης f

Μονάδες 9

γ) Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f'(\chi)$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 8

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

- α) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα
Μονάδες 10
- β) Τα ακρότατα της συνάρτησης f
Μονάδες 5
- γ) Τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$
Μονάδες 5
- δ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.
Μονάδες 5

9.

Εσπερινά 2002

Δευτέρα 20 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.
Μονάδες 9
- β) Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη, θεωρώντας ότι υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$.
1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$3. \quad [f(\chi) \cdot g(\chi)]' = f'(\chi) \cdot g'(\chi)$$

$$4. \quad \left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right]' = \frac{f'(\chi) \cdot g(\chi) + f(\chi) \cdot g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}, \quad g(\chi) \neq 0$$

$$5. \quad (\sqrt{\chi})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}, \quad \chi > 0$$

$$6. \quad [c \cdot f(\chi)]' = c \cdot f'(\chi)$$

$$7. \quad (\sin \chi)' = \eta \mu \chi$$

$$8. \quad (\chi^p)' = \chi^{p-1}, \quad p \text{ ρητός}, \quad \chi > 0$$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3\chi - 10}{\chi - 2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα : $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi)$, $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi)$

Μονάδες 12

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 8

10.

πανελλήνιες 2002

Τρίτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{2\chi}{\chi + 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

Λιβαδεία

- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow 3} f(\chi)$.
Μονάδες 4
- γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .
Μονάδες 7
- δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi = 2\chi + 5$.
Μονάδες 10

11.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. 1. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται συνεχής ;
Μονάδες 4
- A. 2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε λέγεται φθίνουσα ;
Μονάδες 4
- A. 3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(\chi) = \chi$ είναι $f'(\chi) = 1$.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \cdot \chi(2 - \chi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- A. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° .
Μονάδες 10
- B. Για $\alpha = \frac{1}{2}$ να βρείτε :
- α. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Μονάδες 5

β. Τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

12.

Εσπερινά 2002 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 11 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ, τότε να αποδείξετε ότι: $[f(\chi) + g(\chi)]' = f'(\chi) + g'(\chi)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 6\chi^4 + 3\chi^2 + 10$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α. το $\lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi)$,

Μονάδες 5

β. την παράγωγο της συνάρτησης f και

Μονάδες 5

γ. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 15

13.

Εσπερινά 2003

Δευτέρα 19 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2$. Να αποδείξετε ότι : $f'(\chi) = 2\chi$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Λιβαδεία

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

- α) Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x .
- Μονάδες 5
- β) Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- Μονάδες 5
- γ) Την παράγωγο της f .
- Μονάδες 5
- δ) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- Μονάδες 5
- ε) Τα ακρότατα της f .
- Μονάδες 5

14.

πανελλήνιες 2003

Τρίτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.
- Μονάδες 8
- B. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα.
- Μονάδες 6
- A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- γ) Ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

- A.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση .

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο :

- α.** $\mathbb{R}$ **β.** $(-1, 1)$ **γ.** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **δ.** $(1, +\infty)$
Μονάδες 5

- B.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.
Μονάδες 7

- Γ.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$.
Μονάδες 6

- Δ.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$ με τον άξονα x' x .
Μονάδες 7

15.

Ημερήσια Τ Ε Λ 2003 (Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση)

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.
Μονάδες 6

- β)** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$.

Λ ι β α δ ε ι ά

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \ln \chi + \chi - 1$, με $\chi > 0$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $f'(\chi)$ και το $f''(\chi)$.

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\chi > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες 6

16.

Εσπερινά 2003 – Επαναληπτικές**Δευτέρα 30 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$f(x) = x, \quad g(x) = \eta\mu x, \quad h(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad \varphi(x) = c, \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά.}$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Μονάδες 6

β) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f , και

Μονάδες 9

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο t (sec) από τον τύπο :

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόνι βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$,

Μονάδες 6

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h , ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$,

Μονάδες 7

γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό ;

Μονάδες 12

Λ ι β α δ ε ι ά

17.

πανελλήνιες 2003 – Επαναληπτικές**Πέμπτη 3 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(h)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι

πραγματικός αριθμός .

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 - h) - f(\chi_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$.

γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι

πραγματικός αριθμός

δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) + f(h)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $\chi = 3$, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 10

γ. Αν $h(\chi) = \frac{f(\chi) - \sqrt{3}}{\chi - 2}$ για $\chi \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow 2} h(\chi)$.

Μονάδες 10

Δαμιάνος Μωραΐτης

18.

Εσπερινά 2004**Δευτέρα 17 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Ε) Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $R = \frac{f}{g}$ με

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Μονάδες 5

ΣΤ) Υποθέτουμε ότι f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Πότε η f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \in A$;

Μονάδες 2

Ζ) Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \dots\dots\dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \dots\dots\dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \dots\dots\dots, \quad \text{όταν } \sigma\upsilon\nu x \neq 0$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 7

γ) Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$K = 3f'(200) + 819g'(-1).$$

Μονάδες 10

Λιβαδεία

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε :

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 2

β. Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 1$.

Μονάδες 3

γ. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

δ. τα ακρότατα της f .

Μονάδες 5

ε. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$

Μονάδες 5

19.

πανελλήνιες 2004

Τρίτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι ίση με 0.

Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

Δαμιανός Μωραΐτης

B. Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow 3} f(\chi)$

Μονάδες 15

20.

Εσπερινά 2004 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 28 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(\chi) = \chi$ είναι $f'(\chi) = 1$.

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

B. Ισχύει ότι : $(\chi^v)' = v\chi^{v-1}$, όπου v φυσικός αριθμός.

ΣΤ. Η παράγωγος της f στο χ_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $\psi = f(\chi)$ ως προς χ , όταν $\chi = \chi_0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \chi^2 - 4(\chi - 2)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(\chi)$, της $f(\chi)$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι : $\chi \cdot f''(\chi) - f'(\chi) = 4$.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 7

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Λ ι β α δ ε ι ά

πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

21.

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \ell_1$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) = \ell_2$
τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) \cdot g(\chi)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi_1 \in A$, όταν $f(\chi) \leq f(\chi_1)$ για κάθε χ σε μια περιοχή του χ_1 .

γ. Ισχύει $(f(\chi) \cdot g(\chi))' = f'(\chi) \cdot g(\chi) + f(\chi) \cdot g'(\chi)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει $(\sqrt{\chi})' = \frac{1}{\sqrt{\chi}}$, με $\chi > 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi + 2}{e^\chi}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) + f'(\chi) = \frac{1}{e^\chi}$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 8

Δαμιανός Μωραΐτης

22.

πανελλήνιες 2005

Σάββατο 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

β. Ισχύει: $\left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi) \cdot g(\chi) + f(\chi) \cdot g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{1}{\chi}$, $\chi \in (0, +\infty)$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, 1)$.

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο $M(\chi, \psi)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $\chi\chi'$ και $\psi\psi'$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες $O\chi$, $O\psi$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

Λιβαδεία

23.

Εσπερινά 2005**Δευτέρα 23 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $(c)' = 0$.

Μονάδες 10

- B) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

- Γ) Για καθεμία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη

- γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

Μονάδες 2

- δ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

- β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Μονάδες 5

- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 7

Δαμιανός Μωραΐτης

δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(\chi)$, της $f(\chi)$.

Μονάδες 8

24.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(\chi)$, $f(\chi)$ και $g(\chi)$ με $F(\chi) = f(\chi) + g(\chi)$.

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

$$F'(\chi) = f'(\chi) + g'(\chi).$$

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

β. Αν $\chi > 0$, τότε $(\ln \chi)' = \frac{1}{\chi}$.

Μονάδες 2

στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \cdot \ln \chi - \beta \cdot \chi^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε χ , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα α και β , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 1)$ της γραφικής παράστασης της f να είναι $\psi = 3\chi - 2$.

Μονάδες 10

Λιβαδεία

δ. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 2} (f'(\chi)\chi^3)$.

Μονάδες 7

25.

Εσπερινά 2005 – Επαναληπτικές**Τετάρτη 29 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι

$$[c \cdot f(\chi)]' = c \cdot f'(\chi), \text{ όπου } c \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός.}$$

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) $[f(\chi) + g(\chi)]' = f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi)$, όπου f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 3

β) $(\chi^v)' = v \cdot \chi^{v-1}$, όπου v φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός και $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

γ) $(\sin \chi)' = -\eta \mu \chi$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(\chi)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση

Δαμιανός Μωραΐτης

$f'(\chi) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και -1 .

Μονάδες 10

- γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

26.

Εσπερινά 2006

Δευτέρα 23 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(\chi) = \chi$ είναι $f'(\chi) = 1$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α) Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Τότε ισχύει: $[f(g(\chi))] = f'(g(\chi))g(\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

Μονάδες 3

- β) Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

- γ) Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta\mu\chi)' = -\sigma\upsilon\nu\chi$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2 - \alpha\chi - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Λι β α δ ε ι ά

- I. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

- II. Αν $\alpha = -4$,

- α) Να βρεθεί η παράγωγος $f'(\chi)$.

Μονάδες 5

- β) Να βρεθεί το $\chi_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Μονάδες 10

- γ) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)$ στο σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

27.

πανελλήνιες 2006

Πέμπτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ I^ο

- A. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c πραγματική σταθερά.

Να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(\chi))' = c \cdot f'(\chi), \chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B. β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής ;

Μονάδες 4

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$, όταν $f(\chi) \leq f(\chi_0)$ για κάθε χ σε μια περιοχή του χ_0 .

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Για κάθε $\chi \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{\chi}\right)' = \frac{1}{\chi^2},$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = -2\chi^2 + \kappa\chi + 4\sqrt{\chi} + 10, \chi \geq 0.$

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο

$A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

28.

πανελλήνιες 2006 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi_0 \in A$;

Μονάδες 3

B.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

β. Ισχύει: $(\sin \chi)' = \eta \mu \chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi (a\chi^2 + b\chi + 9)$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $\psi = -e^2\chi + 3e^2$, τότε:

Λ ι β α δ ε ι ά

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

29.

Εσπερινά 2007**Δευτέρα 21 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $[f(\chi) + g(\chi)]' = f'(\chi) + g'(\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

δ. Έστω f, g δύο οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, τότε

ισχύει: $[f(\chi) \cdot g(\chi)]' = f'(\chi) \cdot g'(\chi)$

Μονάδες 3

ε. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό

μέγιστο στο $\chi_1 \in A$, όταν $f(\chi) > f(\chi_1)$ για κάθε χ σε μια περιοχή του χ_1 .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^2 + 1$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$. Να βρείτε

α. Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς χ , όταν $\chi = 2$.

Μονάδες 10

β. Τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ. Το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 3$.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

30.

πανελλήνιες 2007

Τρίτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της

$$\text{σύνθετης συνάρτησης ισχύει: } (f(g(\chi)))' = f'(g(\chi)) \cdot g'(\chi)$$

Μονάδες 2

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(\chi_0) = 0$ για $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(\chi_0) > 0$

στο (α, χ_0) και $f'(\chi_0) < 0$ στο (χ_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο

διάστημα (α, β) για $\chi = \chi_0$ ελάχιστο.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(\chi) = \chi^v, \text{ όπου } v \text{ φυσικός}$$

$$f_2(\chi) = \ln \chi, \text{ όπου } \chi > 0$$

$$f_3(\chi) = \sqrt{\chi}, \text{ όπου } \chi > 0$$

$$f_4(\chi) = \sin \chi, \text{ όπου } \chi \text{ πραγματικός.}$$

Μονάδες 4

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi \cdot e^\chi + 3$, όπου χ πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(\chi) = f(\chi) + e^\chi - 3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f'(\chi) - e^\chi}{\chi^2 - \chi}$

Μονάδες 15

31.

Εσπερινά 2007 – Επαναληπτικές

Παρασκευή 29 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Για $\chi > 0$ ισχύει $[\sqrt{\chi}]' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 1}{\chi}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την παράγωγό της.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \cdot f'(\chi)}{f(\chi)}$.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

32.

πανελλήνιες 2007 – Επαναληπτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.
Μονάδες 8

Γ 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Μονάδες 2

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

Γ 2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = e^x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x}, \text{ όπου } x \neq 0$$

$$f_3(x) = \eta \mu x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός}$$

$$f_4(x) = c, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός και } c \text{ σταθερά.}$$

Μονάδες 2

Λιβαδεία

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Μονάδες 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της.

Μονάδες 12

33.**Εσπερινά 2008****Τετάρτη 21 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε να αποδείξετε ότι:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός.}$$

Μονάδες 8

B. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \kappa x + 2$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$.

- A.** Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, 8)$, να βρείτε τον κ .

Μονάδες 5

- B.** Για $\kappa = -1$.

- α.** Να αποδείξετε ότι : $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

- β.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

34.

πανελλήνιες 2008

Πέμπτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου x πραγματικός αριθμός, είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$.

Μονάδες 8

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 2

- δ.** Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$

Μονάδες 2

Λιβαδεία

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2 - x$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 9

35.

πανελλήνιες 2008 – Επαναληπτικές

Τρίτη 1 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1 , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell_1^v$ (v θετικός ακέραιος).

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει

Δαμιανός Μωραΐτης

$f'(\chi) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1).

Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι χ .



Σχήμα 1

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(\chi) = 100\chi - \frac{1}{2}\chi^2$.

Μονάδες 6

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

Μονάδες 7

Των διδασκόντων σου το αποτέλεσμα

Αυταπήδεις

1.

πανελλήνιες 2000

Σάββατο 3 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α.

α) Θεωρία .

$$\beta) (c \cdot f(\chi))' = c \cdot f'(\chi), (f(\chi) \cdot g(\chi))' = f'(\chi) \cdot g(\chi) + f(\chi) \cdot g'(\chi),$$

$$\left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{(g(\chi))^2}.$$

Β. α)

Β. Στήλη Α	Στήλη Β
α.	5
β.	1
γ.	7
δ.	2

$$\beta) \text{ Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης } f(\chi) = \frac{e^x}{\chi} \text{ είναι } f'(\chi) = \frac{e^x \chi - e^x}{\chi^2},$$

$$\text{άρα σωστή απάντηση : } \Delta : \frac{e^x \chi - e^x}{\chi^2}$$

2.

Εσπερινά 2000

Παρασκευή 26 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Έστω η συνάρτηση : } f(\chi) = \frac{\eta\mu\chi}{\chi - 3}.$$

α) Πεδίο ορισμού είναι : το $A = R - \{ 3 \}$.

$$\beta) f'(\chi) = \left(\frac{\eta\mu\chi}{\chi - 3} \right)' = \frac{(\eta\mu\chi)'(\chi - 3) - \eta\mu\chi(\chi - 3)'}{(\chi - 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi(\chi - 3) - \eta\mu\chi}{(\chi - 3)^2}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\gamma) \quad f'(0) = \frac{\sin 0(0-3) - \eta \mu 0}{(0-3)^2} = \frac{1(-3) - 0}{(-3)^2} \Leftrightarrow f'(0) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 + 5x + 3$ Πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R}$.

$$\alpha) \quad f'(x) = (2x^3 + 5x + 3)' \Leftrightarrow f'(x) = 6x^2 + 5$$

β) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 5 \geq 0$ όμως $6x^2 + 5 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

3.

πανελλήνιες 2000 – Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 2^ο

Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου

$$\alpha. \quad \text{Είναι } \Pi \text{ Ο το } A = \mathbb{R} \text{ και } f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)' \Leftrightarrow$$

$$6x^2 - 6x - 12 \Leftrightarrow f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$$

$$\beta. \quad \text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, \Delta = \dots = 9 \\ \Leftrightarrow \rho_1 = -1, \rho_2 = 2$$

$$\gamma. \quad \text{Είναι } f'(x) = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2) \text{ με ρίζες } \rho_1 = -1, \rho_2 = 2.$$

Άρα πίνακας προσήμου για την

$$f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$$

$-\infty$	-1	2	$+\infty$
+	↓	↓	+
	0	0	

οπότε πίνακας μεταβολών μονotonίας για την f :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	↗	↓	↓	↗
		$\psi = 0$	$\psi = -27$	

Λιβαδειά

Από τον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας :

Στο $(-\infty, -1)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left\{ \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \right\}$
 Στο $(-1, 2)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left\{ \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \right\}$
 Στο $(2, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left\{ \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \right\}$

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο όταν $\chi = -1$ το $\psi = 0$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο όταν $\chi = 2$ το $\psi = -27$

4.

Εσπερινά 2000 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. A. 6, B. 4, Γ. 1, Δ. 2, E. 7.

B. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων είναι:

$$1. f_1'(\chi) = 1$$

$$2. f_2'(\chi) = (\chi e^\chi)' = \chi' e^\chi + \chi(e^\chi)' \Leftrightarrow f_2'(\chi) = e^\chi + \chi e^\chi = (\chi + 1)e^\chi$$

$$3. f_3'(\chi) = (2 + \ln \chi)' \Leftrightarrow f_3'(\chi) = \frac{1}{\chi}$$

$$4. f_4'(\chi) = \left(\frac{\chi}{\chi + 2} \right)' \Leftrightarrow f_4'(\chi) = \frac{(\chi)'(\chi + 2) - \chi(\chi + 2)'}{(\chi + 2)^2} \Leftrightarrow$$

$$f_4'(\chi) = \frac{\chi + 2 - \chi}{(\chi + 2)^2} = \frac{2}{(\chi + 2)^2}$$

$$5. f_5'(\chi) = (2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi)' \Leftrightarrow f_5'(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + 2004$. Πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R}$.

$$a. f'(\chi) = (2\chi^3 - 9\chi^2 + 2004)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 6\chi^2 - 18\chi$$

Δαμιανός Μωραΐτης

β. $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 6\chi^2 - 18\chi = 0 \Leftrightarrow 6\chi(\chi - 3) = 0 \Leftrightarrow \chi_1 = 0, \chi_2 = 3$

γ. Είναι $f'(\chi) = 6\chi^2 - 18\chi$ με ρίζες $\chi_1 = 0, \chi_2 = 3$.

Άρα πίνακας προσήμου για την

$$f'(\chi) = 6\chi^2 - 18\chi$$

$-\infty$	0	3	$+\infty$
+		-	+
	↓ 0	↓ 0	

οπότε πίνακας μεταβολών μονοτονίας για την f :

χ	$-\infty$	0	3	+	
$f'(\chi)$	+	0	-	0	+
$f(\chi)$					

Από τον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας :

Στο $(-\infty, 0)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\begin{smallmatrix} \uparrow \\ \lambda \end{smallmatrix} \right)$

Στο $(0, 3)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\begin{smallmatrix} \downarrow \\ \lambda \end{smallmatrix} \right)$

Στο $(3, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\begin{smallmatrix} \uparrow \\ \lambda \end{smallmatrix} \right)$

5.

Εσπερινά 2001

Δευτέρα 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. A. 4 B. 7 Γ. 6 Δ. 3 E. 1

β) $(f(\chi) + g(\chi))' = f'(\chi) + g'(\chi),$

$$\left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi) \cdot g(\chi) - f(\chi) \cdot g'(\chi)}{(g(\chi))^2}, \text{ με } g(\chi) \neq 0,$$

$$(f(g(\chi)))' = f'(g(\chi))g'(\chi).$$

Λιβαδεϊά

Β. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$\alpha) \quad f_1'(\chi) = (\chi^3 + \eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi)' = (\chi^3)' + (\eta\mu\chi)' + (3\sigma\upsilon\nu\chi)' \\ = 3\chi^2 + \sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi.$$

$$\beta) \quad f_2'(\chi) = ((\chi - 1)^2)' = 2(\chi - 1)(\chi - 1)' = 2(\chi - 1).$$

$$\gamma) \quad f_3'(\chi) = \left(\frac{\chi}{\chi^2 + 1} \right)' = \frac{\chi'(\chi^2 + 1) - \chi(\chi^2 + 1)'}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{(\chi^2 + 1) - \chi \cdot 2\chi}{(\chi^2 + 1)^2} = \\ \frac{\chi^2 + 1 - 2\chi^2}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{1 - \chi^2}{(\chi^2 + 1)^2}.$$

$$\delta) \quad f_4'(\chi) = (\sqrt{\chi^2 + 3})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 + 3}}(\chi^2 + 3)' = \frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2 + 3}} = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + 3}}.$$

$$\epsilon) \quad f_5'(\chi) = (\sigma\upsilon\nu(2\chi + 3))' = -\eta\mu(2\chi + 3)(2\chi + 3)' = -2\eta\mu(2\chi + 3).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f_1(\chi) = \chi^3 + 5\chi + 6$, $\chi \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \quad \text{Είναι } f_1'(\chi) = (\chi^3 + 5\chi + 6)' = 3\chi^2 + 5.$$

Άρα $f_1'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 = -5$ που είναι αδύνατη άρα η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Σε κάθε σημείο $A(\chi_0, f_1(\chi_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον παράγωγο αριθμό $f_1'(\chi_0)$ ο οποίος είναι η αριθμητική της παραγώγου $f_1'(\chi) = 3\chi^2 + 5$ στο χ_0 . Επομένως ο ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης δεν θα είναι τίποτε άλλο από την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f_1'(\chi) = 3\chi^2 + 5$.

Δαμιάνός Μωραΐτης

Άρα $f_1'(\chi) = 3\chi^2 + 5 \Rightarrow (f_1'(\chi))' = f_1''(\chi) = (3\chi^2 + 5)' = 6\chi$.

$f_1''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 0$.

Άρα πίνακας μεταβολών

για την $f_1'(\chi)$

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1''(\chi)$	-	0	+
$f_1'(\chi)$			

Επομένως ο συντελεστής είναι ελάχιστος στο σημείο $A(0, f_1(0)) = A(0, 6)$

και είναι $f_1'(0) = 5$

γ) Έστω $f(\chi) = \frac{\chi^3 + 5\chi + 6}{\chi + 1} = \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$. Π Ο είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Είναι $Q(-1) = -1 + 1 = 0$ και $P(-1) = (-1)^3 + 5(-1) + 6 = -1 - 5 + 6 = 0$.

Άρα το $P(\chi) = \chi^3 + 5\chi + 6$ παραγοντοποιείται με το **σχήμα Horner**.

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $P(\chi) = \chi^3 + 5\chi + 6$, με το δεδομένο ότι το $\rho = -1$ θα έχεις

1	0	5	6	$\rho = -1$
↓				
	-1	1	-6	
1	-1	6	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi) = \chi^3 + 5\chi + 6$ με το διώνυμο $\chi + 1$ είναι

$\pi(\chi) = \chi^2 - \chi + 6$ δηλαδή είναι $P(\chi) = (\chi^2 - \chi + 6)(\chi + 1)$

Άρα $f(\chi) = \frac{\chi^3 + 5\chi + 6}{\chi + 1} = \frac{(\chi^2 - \chi + 6)(\chi + 1)}{\chi + 1} = \chi^2 - \chi + 6$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^3 + 5\chi + 6}{\chi + 1} = \lim_{\chi \rightarrow -1} (\chi^2 - \chi + 6) = (-1)^2 - (-1) + 6 = 1 + 1 + 6 = 8 \Leftrightarrow$

$\lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^3 + 5\chi + 6}{\chi + 1} = 8$.

Λ ι β α δ ε ι ά

πανελλήνιες 2001

6.

Πέμπτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η πραγματική συνάρτηση f με $f(x) = \sin x + \eta \mu x$

A. Είναι $f(x) + f''(x) = \sin x + \eta \mu x + (\sin x + \eta \mu x)''$.

Όμως $(\sin x + \eta \mu x)'' = ((\sin x + \eta \mu x)')' = (-\eta \mu x + \sin x)' = -\sin x - \eta \mu x$.

Άρα $f(x) + f''(x) = \sin x + \eta \mu x + (\sin x + \eta \mu x)'' =$
 $\sin x + \eta \mu x + (-\sin x - \eta \mu x) = 0$

B. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$A(x_0, f(x_0))$ είναι: $\psi = f'(x_0) \cdot x + \beta$. Άρα βρίσκεις την παράγωγο της συνάρτησης: $f(x) = \sin x + \eta \mu x \Leftrightarrow f'(x) = (\sin x + \eta \mu x)' = -\eta \mu x + \sin x$.

Οπότε $f'(0) = -\eta \mu 0 + \sin 0 = 1$

Αντικαθιστάς το: $f'(0) = 1$ στην εξίσωση $\psi = f'(x_0) \cdot x + \beta$ οπότε αυτή γίνεται

$\psi = x + \beta$ (1), και αφού η εφαπτομένη περνάει από το $A(0, 1)$, που είναι το σημείο επαφής, πρέπει οι συντεταγμένες του $A(0, 1)$ να επαληθεύουν την (1), άρα $1 = 1 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\psi = x + 1$$

Γ. Είναι $f'(x) = -\eta \mu x + \sin x$ άρα

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \left(-\eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \eta \mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda(-1+0) - 2(0+1) = 2 \Leftrightarrow -\lambda - 2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

7.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές**Σάββατο 30 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. 1. Θεωρία .

Α.2. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό, στ. Λάθος.

Β. 1. α. 4 β. 5 γ. 2

Β. 2. Έστω $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4$ τότε $f'(x) = \left(\frac{1}{4}(x-1)^4\right)' \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{4}((x-1)^4)' = \frac{1}{4}4(x-1)^3(x-1)' \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^3.$$

Άρα $f'(a) = 27 \Leftrightarrow (a-1)^3 = 27 \Leftrightarrow (a-1)^3 = 3^3 \Leftrightarrow a-1 = 3 \Leftrightarrow a = 4$.

8.

Εσπερινά 2001 – Επαναληπτικές**Τρίτη 11 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 3^ο**Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \eta\mu x + x + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.α) Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2+1} \cdot \eta\mu x + x + 1) = \sqrt{0^2+1} \cdot \eta\mu 0 + 0 + 1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

β) $f'(x) = (\sqrt{x^2+1} \cdot \eta\mu x + x + 1)' = (\sqrt{x^2+1} \cdot \eta\mu x)' + (x+1)' =$

$$(\sqrt{x^2+1})' \cdot \eta\mu x + \sqrt{x^2+1}(\eta\mu x)' + 1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' \cdot \eta\mu x + \sqrt{x^2+1} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \eta\mu x}{2\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1$$

Λίβια δειά

γ) Επειδή τα σημεία του άξονα $\psi\psi$ έχουν $\chi = 0$ άρα θα βρεις την

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot \eta\mu\chi}{2\sqrt{0^2+1}} + \sqrt{0^2+1} \cdot \sigma\upsilon\nu 0 + 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1 + 1 = 2 \text{ άρα}$$

η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον $\psi\psi$ στο $A(0, 2)$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi^2+1}$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Για να βρεις διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα θα βρεις την παράγωγο της και θα μελετήσεις το πρόσημο της παραγώγου. Είναι

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi}{\chi^2+1} \right)' = \frac{\chi'(\chi^2+1) - \chi(\chi^2+1)'}{(\chi^2+1)^2} = \frac{(\chi^2+1) - \chi \cdot 2\chi}{(\chi^2+1)^2} =$$

$$\frac{\chi^2+1-2\chi^2}{(\chi^2+1)^2} = \frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\chi^2 \geq 0 \text{ ρίζες } \chi_1 = -1 \text{ και } \chi_2 = 1.$$

Άρα πίνακας προσήμου για την

$$f'(\chi) = \frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2}$$

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-$	0	$+$	$-$
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	0	0	

οπότε πίνακας μεταβολών μονοτονίας για την $f(\chi)$:

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
	$-$	0	$+$	$-$
$f(\chi)$	$\searrow$	$\downarrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Από τον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας :

Στο $(-\infty, -1)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα. $\left\{ \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \right\}$
 Στο $(-1, 1)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα. $\left\{ \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \right\}$
 Στο $(1, +\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα. $\left\{ \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \right\}$

β) Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος είναι φανερό ότι η

συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο όταν $x = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και

τοπικό μέγιστο όταν $x = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο $x_0 = 0$ είναι: $f'(0) = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = 1$

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι $\psi = \lambda x + \beta$
 με $\lambda = f'(0) = 1$, άρα $\psi = x + \beta$ και πρέπει να ικανοποιείται από τις

συντεταγμένες του $A(0, f(0))$, είναι $f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$ άρα

$0 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$ άρα $\psi = x$ (διχοτόμος της γωνίας $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου) η εξίσωση της εφαπτομένης

9.

Εσπερινά 2002

Δευτέρα 20 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Θεωρία

β)

1. Σωστό
2. Σωστό
3. Λάθος
4. Λάθος
5. Σωστό
6. Σωστό
7. Λάθος
8. Λάθος

Λι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α) Προφανώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Είναι : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 - 10}{1 - 2} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

Για να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ πρέπει να παρατηρήσεις ότι ο παρονομαστής

μηδενίζεται και επίσης μηδενίζεται και ο αριθμητής ($2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$) και ρίζες του αριθμητή είναι οι $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -5$ άρα

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2} = x + 5 \text{ επομένως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 2 + 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7.$$

γ) Είναι, από το προηγούμενο ερώτημα $f(x) = x + 5$, για κάθε $x \neq 2$ έτσι στο $(2, +\infty)$ είναι $f'(x) = (x + 5)' = 1 > 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα η f είναι γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow \right)$.

10.

πανελλήνιες 2002

Τρίτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x + 1}$.

α. Π Ο της f προφανώς είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 3} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{2\chi}{\chi+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

γ. Είναι $f(\chi) = \frac{2\chi}{\chi+1} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{2\chi}{\chi+1} \right)' = \frac{2\chi'(\chi+1) - 2\chi(\chi+1)'}{(\chi+1)^2} \Leftrightarrow$
 $f'(\chi) = \frac{2(\chi+1) - 2\chi \cdot 1}{(\chi+1)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{2\chi+2-2\chi}{(\chi+1)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{2}{(\chi+1)^2}$.

δ. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι : $\psi = f'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$.

Η ευθεία $\psi = 2\chi + 5$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 2$ και επομένως αφού η εφαπτομένη, που ζητάς, είναι παράλληλη στην $\psi = 2\chi + 5$ θα έχει και αυτή συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$.

Αφού $\lambda = 2$ και $f'(\chi_0) = \lambda$ άρα $f'(\chi_0) = 2$ και η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται : $\psi = 2\chi + \beta$.

Στις περιπτώσεις όπως αυτή, που δεν ξέρεις τις συντεταγμένες του σημείου επαφής $A(\chi_0, f(\chi_0))$, ξεκινάς να βρεις κατ' αρχή το χ_0 ως εξής :

Έστω χ_0 η τετμημένη του σημείου επαφής A , είναι $f(\chi) = \frac{2\chi}{\chi+1}$ και

$$f'(\chi) = \frac{2}{(\chi+1)^2}.$$

Αφού $\lambda = 2$ άρα $f'(\chi_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{(\chi_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(\chi_0+1)^2 \Leftrightarrow$

$$(\chi_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_0+1=1 \\ \chi_0+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_0=0 \text{ ή} \\ \chi_0=-2 \end{cases}.$$

i) $\chi_0 = 0$.

Επειδή το A είναι σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι :

$$\psi = f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0 \text{ άρα } A(0,0).$$

Λ ι β α δ ε ι ά

Αφού η εφαπτομένη περνάει από το $A(0,0)$ πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση $\psi = 2\chi + \beta$ της εφαπτομένης άρα $0 = 0 + 2 \Leftrightarrow \beta = 0$ επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $\psi = 2\chi$.

ii) $\chi_0 = -2$.

Επειδή το A είναι σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι : $\psi = f(-2) = \frac{2 \cdot (-2)}{-2+1} = 4$ άρα $A(-2, 4)$.

Αφού η εφαπτομένη περνάει από το $A(0,4)$ πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση $\psi = 2\chi + \beta$ της εφαπτομένης άρα $4 = 2(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$ επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi = 2\chi + 8$.

11.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. , A. 2 , A. 3 Θεωρία .

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \cdot \chi \cdot (2 - \chi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Προφανώς $\Pi \cup \Theta$ το $A = \mathbb{R}$.

A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα $\chi\chi'$ γωνία 45° τότε θα είναι

$$f'(0) = \lambda = \epsilon\phi 45^\circ \text{ άρα } f'(0) = 1.$$

$$\text{Είναι } f(\chi) = \alpha \cdot \chi \cdot (2 - \chi) \Leftrightarrow f'(\chi) = (\alpha \cdot \chi \cdot (2 - \chi))' = (2\alpha\chi - \alpha\chi^2)' = 2\alpha - 2\alpha\chi$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = 2\alpha(1 - \chi) \text{ άρα } f'(0) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha - 2\alpha \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

B. Όταν $\alpha = \frac{1}{2}$

Δαμιανός Μωραΐτης

α. Είναι $f(\chi) = \frac{1}{2}\chi(2-\chi)$ και επομένως $f(1) = \frac{1}{2}1(2-1) = \frac{1}{2}$.

Επίσης είναι $f'(\chi) = 2\alpha(1-\chi)$ και $\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\frac{1}{2}(1-\chi) \Leftrightarrow$

$f'(\chi) = 1-\chi$ άρα $f'(1) = 1-1 = 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι : $\psi = f'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$, άρα

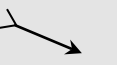
στο $(1, f(1))$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi = f'(1) \cdot \chi + \beta \Leftrightarrow \psi = 0 \cdot \chi + \beta$

$\Leftrightarrow \psi = \beta$ και επειδή περνάει από το $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, θα είναι $\psi = \frac{1}{2}$.

β. Είναι $f(\chi) = \frac{1}{2}\chi(2-\chi) \Leftrightarrow f'(\chi) = 1-\chi$, άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\chi \geq 0 \Leftrightarrow$

$\chi \leq 1$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την $f(\chi)$

χ	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η

$f'(1) = 0$ και

$\psi = \frac{1}{2}$

Στο $(-\infty, 1)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\nearrow\right)$

Στο $(1, +\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\searrow\right)$

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστο το $\psi = \frac{1}{2}$ όταν $\chi = 1$.

12.

Εσπερινά 2002 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 11 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 6\chi^4 + 3\chi^2 + 10$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

α. $\lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -2} (6\chi^4 + 3\chi^2 + 10) = 6(-2)^4 + 3(-2)^2 + 10 \Leftrightarrow$

$\lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi) = 6 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 10 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi) = 118.$

β. $f'(\chi) = (6\chi^4 + 3\chi^2 + 10)' = 24\chi^3 + 6\chi$

γ. $f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 24\chi^3 + 6\chi = 0 \Leftrightarrow 6\chi(4\chi^2 + 1) = 0$ μοναδική ρίζα το

$\chi = 0$ και $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 0$ γιατί $4\chi^2 + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την $f(\chi)$:

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(0) = 0$ και $\psi = 10$

Στο $(-\infty, 0)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\downarrow\right)$

Στο $(0, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow\right)$

Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το $\psi = 10$ όταν $\chi = 0$.

13.

Εσπερινά 2003

Δευτέρα 19 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{3\chi^2}{4\chi^2 + 5}$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

α) Για να βρεις το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $\chi' \chi$ πρέπει να λύσεις την εξίσωση $f(\chi) = 0$.

Είναι $f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\chi^2}{4\chi^2 + 5} = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$, επειδή ένα κλάσμα γίνεται μηδέν όταν ο αριθμητής γίνεται μηδέν.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $\chi' \chi$ στο σημείο $(0, f(0)) = O(0, 0)$

β) Επειδή το $\chi = 0$ δεν μηδενίζει τον παρονομαστή θα είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{3\chi^2}{4\chi^2 + 5} = \frac{3 \cdot 0^2}{4 \cdot 0^2 + 5} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 0.$$

γ) Είναι $f(\chi) = \frac{3\chi^2}{4\chi^2 + 5} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{3\chi^2}{4\chi^2 + 5} \right)' =$

$$\frac{(3\chi^2)'(4\chi^2 + 5) - (3\chi^2)(4\chi^2 + 5)'}{(4\chi^2 + 5)^2} = \frac{6\chi(4\chi^2 + 5) - (3\chi^2)8\chi}{(4\chi^2 + 5)^2} =$$

$$\frac{24\chi^3 + 30\chi - 24\chi^3}{(4\chi^2 + 5)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{30\chi}{(4\chi^2 + 5)^2}$$

δ) Είναι $f'(\chi) = \frac{30\chi}{(4\chi^2 + 5)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{30\chi}{(4\chi^2 + 5)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 0$.

γιατί $(4\chi^2 + 5)^2 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την $f(\chi)$:

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(0) = 0$ και $\psi = 0$

Στο $(-\infty, 0)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\downarrow \right)$

Στο $(0, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow \right)$

ε) Άρα η συνάρτηση f έχει ελάχιστο το $\psi = 0$ όταν $\chi = 0$.

Λι β α δ ε ι ά

14.

πανελλήνιες 2003

Τρίτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία, Β. Θεωρία.

Δ γ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^οΈστω η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.Α. Το Π Ο της συνάρτησης είναι το : $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(Σωστή απάντηση το γ).

Β. Είναι $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)' =$

$$\frac{x'(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \text{ και}$$

επειδή $x^2 + 1 > 0$, $(x^2 - 1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ άρα

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \text{ άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \text{ του πεδίου ορισμού της.}$$

Γ. Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} [(\chi + 1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[(\chi + 1) \cdot \frac{x}{x^2 - 1} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[(\chi + 1) \cdot \frac{x}{(\chi - 1)(\chi + 1)} \right] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x - 1} = \frac{-1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Δ. Η γραφική παράσταση της f στο σημείο $(0, f(0))$ σχηματίζει με τον άξονα x γωνία ω που η $\epsilon\phi\omega = f'(0)$.

$$\text{Άρα } \epsilon\phi\omega = f'(0) = -\frac{0^2 + 1}{(0^2 - 1)^2} = \frac{1}{1^2} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Ημερήσια Τ Ε Λ 2003 (Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση)**15.****Τετάρτη 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Είναι $f(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{0 - 1} = \frac{-7}{-1} = 7$ και $f(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = \frac{9}{1} = 9$.

β) Επειδή όταν $x = 1$ μηδενίζεται ο παρονομαστής και ο αριθμητής άρα βρίσκεις τις ρίζες του αριθμητή που είναι $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = -7$ άρα το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 7)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 7) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = 8.$$

γ) Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση πρέπει $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $\Leftrightarrow \lambda - 2 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 10$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$, με $x > 0$.

α) $f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0 + 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$.

β) Είναι $f'(x) = (\ln x + x - 1)' = (\ln x)' + x' - 1' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ και

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1}{x} + 1\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Λ ι β α δ ε ι ά

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(\chi) = \frac{1}{\chi} + 1$, άρα $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t sec δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος $h = f(0) = 0$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση : $f'(t) = (-3t^2 + 30t)' = (-3t^2)' + (30t)' \Leftrightarrow f'(t) = -6t + 30$.

γ) Το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι θετικός αριθμός και κατεβαίνει ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι αρνητικός αριθμός.

$$\text{Άρα } f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 30 > 0 \Leftrightarrow t < 5.$$

Άρα το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα $(0, 5)$ και κατεβαίνει το χρονικό διάστημα $(5, 10)$

δ) Όπως είναι φανερό από το προηγούμενο ερώτημα το μέγιστο ύψος θα είναι τη χρονική στιγμή $t = 5$ και θα είναι $h_{\text{μέγιστο}} = -3 \cdot 5^2 + 30t \Leftrightarrow h_{\text{μέγιστο}} = 75 \text{ m}$.

16.

Εσπερινά 2003 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 30 Ιουνίου

ΘΕΜΑ I^ο

Β. $f'(\chi) = 1$, $g'(\chi) = \sin \chi$, $h'(\chi) = -\eta \mu \chi$ και $\varphi'(\chi) = 0$.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19} = \frac{0^2 - 1}{0^2 + 19} = -\frac{1}{19}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 19} = \frac{1^2 - 1}{1 + 19} = 0$$

β) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 19} \right)' =$

$$\frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 19) - (x^2 - 1)(x^2 + 19)'}{(x^2 + 19)^2} = \frac{2x(x^2 + 19) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 19)^2} =$$

$$\frac{2x^3 + 38x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 19)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{40x}{(x^2 + 19)^2}$$

γ) Είναι $f'(x) = \frac{40x}{(x^2 + 19)^2}$ οπότε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

γιατί $(4x^2 + 19)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(0) = 0$ και

Στο $(-\infty, 0)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\Downarrow \right)$

Στο $(0, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\Uparrow \right)$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το χελιδόνι βρίσκεται σε ύψος $h = h(0) = 5$.

Λ ι β α δ ε ι ά

β) Είναι $h(t) = 3t^2 - 6t + 5 \Leftrightarrow h'(t) = 6t - 6 = 6(t - 1)$ άρα ο ρυθμός μεταβολής του ύψους h , ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$, θα είναι

$$h'(t) = 6(2 - 1) = 6.$$

γ) Είναι $h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 6(t - 1) \geq 0 \Leftrightarrow t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την h :

χ	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $h'(1) = 0$ και

$$\psi = 0$$

Στο $(0, 1)$ η h' είναι αρνητική άρα η h γνησίως φθίνουσα $\left(\searrow\right)$

Στο $(0, +\infty)$ η h' είναι θετική άρα η h γνησίως αύξουσα $\left(\nearrow\right)$

Άρα το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο τη χρονική στιγμή κατά την οποία $h'(t) = 0$ $t = 1$ και τότε θα είναι :

$$h_{\text{ελάχιστο}} = h(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow h_{\text{ελάχιστο}} = 2$$

17.

πανελλήνιες 2003 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. γ.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 1}$.

α. Για το Π Ο : πρέπει $\chi^2 - 1 \geq 0$. Ρίζες $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 1$.

Άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 1$:

Άρα Π Ο το $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
+			+
	-	-	

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Είναι $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 1} \Leftrightarrow f'(\chi) = (\sqrt{\chi^2 - 1})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 - 1}}(\chi^2 - 1)' =$
 $= \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 - 1}} 2\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}}$, άρα ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν

$\chi = 3$, ισούται με $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow f'(3) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

γ. Αν $h(\chi) = \frac{f(\chi) - \sqrt{3}}{\chi - 2}$ για $\chi \neq 2$, τότε $h(\chi) = \frac{\sqrt{\chi^2 - 1} - \sqrt{3}}{\chi - 2}$ και επειδή

για $\chi = 2$ μηδενίζεται ο παρονομαστής ($2 - 2 = 0$) και ο αριθμητής

$(\sqrt{2^2 - 1} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0)$ άρα για να μπορέσεις να παραγοντοποιήσεις θα

πρέπει να πολλαπλασιάσεις αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή

παράσταση του αριθμητή δηλαδή :

$$h(\chi) = \frac{\sqrt{\chi^2 - 1} - \sqrt{3}}{\chi - 2} = \frac{(\sqrt{\chi^2 - 1} - \sqrt{3})(\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3})}{(\chi - 2)(\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3})} =$$

$$\frac{\chi^2 - 1 - 3}{(\chi - 2)(\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3})} = \frac{\chi^2 - 4}{(\chi - 2)(\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3})} = \frac{(\chi - 2)(\chi + 2)}{(\chi - 2)(\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$h(\chi) = \frac{\chi + 2}{\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3}}.$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow 2} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi + 2}{\sqrt{\chi^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{2 + 2}{\sqrt{2^2 - 1} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} h(\chi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Λιβαδεϊά

18.

Εσπερινά 2004**Δευτέρα 17 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Ε) Είναι $D_{\frac{f}{g}} = A - \{\chi \in A, \text{ με } g(\chi) = 0\}$.

ΣΤ) Θεωρία .

Ζ) $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \eta\mu\chi = \eta\mu\chi_0$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi_0$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\chi_0$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι συναρτήσεις $f(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6$ και $g(\chi) = \chi - 3$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow 2} g(\chi) = 2 - 3$
 $\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 2} g(\chi) = -1$.

β) Στο $\frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ για $\chi = 3$ μηδενίζεται ο αριθμητής ($3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$) και ο

παρονομαστής ($3 - 3 = 0$) άρα πρέπει να παραγοντοποιήσεις τον αριθμητή .

Είναι $f(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6$, ρίζες $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 3 \Leftrightarrow$

$$f(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6 = (\chi - 2)(\chi - 3).$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{\chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{(\chi - 2)(\chi - 3)}{\chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow 3} (\chi - 2) = 3 - 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = 1$$

γ) Είναι $f(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^2 - 5\chi + 6)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\chi - 5$

και $g(\chi) = \chi - 3 \Leftrightarrow g'(\chi) = 1$ οπότε $K = 3f'(200) + 819g'(-1) =$

$$3(2 \cdot 200 - 5) + 819 \cdot 1 \Leftrightarrow K = 2004.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2 + 1} = 2.$

β. Είναι $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2'(\chi^2 + 1) - 2(\chi^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$

$\frac{0 - 4x}{(x^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$ Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f , όταν $x = 1$,

ισούται με $f'(1) = -\frac{4}{(1^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f'(1) = -1$

γ. Είναι $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ οπότε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0.$

γιατί $(x^2 + 1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

οπότε πίνακας μονοτονίας για την f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(0) = 0$ και

Στο $(-\infty, 0)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow \right)$

Στο $(0, +\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα. $\left(\downarrow \right)$

δ. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι προφανές ότι η f παρουσιάζει

μέγιστο στο $x = 0$ το $\psi = f(0) = \frac{2}{0^2 + 1} = 2.$

ε. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$A(x_0, f(x_0))$ είναι: $\psi = f'(x_0) \cdot x + \beta$

Λ ι β α δ ε ι ά

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ θα είναι της μορφής: $\psi = f'(1) \cdot \chi + \beta$

Είναι $f'(1) = -1$, από το προηγούμενο ερώτημα, οπότε $\varepsilon: \psi = -\chi + \beta$ η

εξίσωση της εφαπτομένης. η οποία επειδή περνάει από το $A(1, f(1))$ θα πρέπει να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του A .

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{2}{\chi^2 + 1} \Leftrightarrow f(1) = \frac{2}{1^2 + 1} = 1 \text{ άρα } A(1, 1) \in \varepsilon: \psi = -\chi + \beta \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: 1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ άρα } \varepsilon: \psi = -\chi + 2 \text{ η εξίσωση της εφαπτομένης.}$$

19.

πανελλήνιες 2004

Τρίτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. , **B.** Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\sqrt{\chi} - \sqrt{3}}$.

A. Για το πεδίο ορισμού της f έχεις: $\chi \geq 0$ και $\sqrt{\chi} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$(\sqrt{\chi})^2 = (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \chi = 3. \text{ Άρα } \Pi \text{ Ο το } A = [0, +\infty) - \{3\} = [0, 3) \cup (3, +\infty).$$

B. Επειδή η τιμή $\chi = 3$ είναι προφανές (και από το $\Pi \text{ Ο}$) ότι μηδενίζει τον παρονομαστή και τον αριθμητή, άρα θα πολλαπλασιάσεις με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\sqrt{\chi} - \sqrt{3}} = \frac{(\chi^2 - 4\chi + 3)(\sqrt{\chi} + \sqrt{3})}{(\sqrt{\chi} - \sqrt{3})(\sqrt{\chi} + \sqrt{3})} = \frac{(\chi^2 - 4\chi + 3)(\sqrt{\chi} + \sqrt{3})}{\chi - 3}.$$

Το $\chi^2 - 4\chi + 3$ έχει ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 3$ άρα

Δαμινός Μωραΐτης

$$f(\chi) = \frac{(\chi-1)(\chi-3)(\sqrt{\chi} + \sqrt{3})}{\chi-3} \Leftrightarrow f(\chi) = (\chi-1)(\sqrt{\chi} + \sqrt{3})$$

$$\text{Επομένως το } \lim_{\chi \rightarrow 3} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3} (\chi-1)(\sqrt{\chi} + \sqrt{3}) = (3-1)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 3} f(\chi) = 4\sqrt{3}.$$

20.

Εσπερινά 2004 – Επαναληπτικές**Δευτέρα 28 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. Θεωρία., Β. Σωστό, ΣΤ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 4^οΈστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \chi^2 - 4(\chi - 2)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Είναι $f(\chi) = \chi^2 - 4(\chi - 2) \Leftrightarrow f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 8 \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\chi - 4$.

β. Είναι $f'(\chi) = 2\chi - 4 \Leftrightarrow f''(\chi) = 2$ άρα

$$\chi \cdot f''(\chi) - f'(\chi) = \chi \cdot 2 - (2\chi - 4) = 2\chi - 2\chi + 4 = 4.$$

γ. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$$A(\chi_0, f(\chi_0)) \text{ είναι : } \psi = f'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ θα είναι της μορφής : $\psi = f'(1) \cdot \chi + \beta$

Είναι $f'(\chi) = 2\chi - 4 \Leftrightarrow f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$, οπότε $\varepsilon : \psi = -2\chi + \beta$ η

εξίσωση της εφαπτομένης, η οποία επειδή περνάει από το $A(1, f(1))$ θα πρέπει να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του A .

Είναι $f(\chi) = \chi^2 - 4(\chi - 2) \Leftrightarrow f(1) = 1^2 - 4(1 - 2) = 5$ άρα

$$A(1, 5) \in \varepsilon : \psi = -2\chi + \beta \Leftrightarrow \varepsilon : 5 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 7 \text{ άρα } \varepsilon : \psi = -2\chi + 7$$

Λ ι β α δ ε ι ά

δ. Είναι $f'(\chi) = 2\chi - 4$ οπότε $f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow 2\chi - 4 > 0 \Leftrightarrow \chi > 2$

οπότε πίνακας μονοτονίας για την f :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(2) = 0$ και

Στο $(-\infty, 2)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\searrow\right)$

Στο $(2, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\nearrow\right)$

Άρα η f έχει στο $\chi_0 = 2$ ολικό ελάχιστο το $f(2) = 4$.

πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

21.

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Γ. α. Σωστό.
β. Λάθος.
γ. Σωστό.
δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi+2}{e^\chi}$.

α. Για να βρεις τη μονοτονία και τα ακρότατα πρέπει να μελετήσεις το πρόσημο της παραγώγου.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{\chi+2}{e^\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\chi+2}{e^\chi}\right)' = \frac{(\chi+2)'e^\chi - (\chi+2)(e^\chi)'}{(e^\chi)^2} =$$

$$\frac{e^\chi - (\chi+2)e^\chi}{(e^\chi)^2} = \frac{e^\chi(1 - (\chi+2))}{(e^\chi)^2} = \frac{1 - \chi - 2}{e^\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = -\frac{\chi+1}{e^\chi}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{Είναι } f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\chi+1}{e^\chi} > 0 \Leftrightarrow -\chi-1 > 0 \Leftrightarrow \chi < -1$$

οπότε πίνακας μονοτονίας για την f :

χ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα η $f'(-1) = 0$ και

Στο $(-\infty, -1)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα $\left(\uparrow\right)$

Στο $(-1, +\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα $\left(\downarrow\right)$

Είναι προφανές ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\chi = -1$ το $\psi = f(-1) = \frac{-1+2}{e^{-1}}$

$$\Leftrightarrow \psi = f(-1) = e.$$

$$\beta. \text{ Είναι } f(\chi) + f'(\chi) = \frac{\chi+2}{e^\chi} + \left(-\frac{\chi+1}{e^\chi}\right) = \frac{\chi+2}{e^\chi} - \frac{\chi+1}{e^\chi} = \frac{\chi+2-(\chi+1)}{e^\chi} = \frac{\chi+2-\chi-1}{e^\chi} \Leftrightarrow f(\chi) + f'(\chi) = \frac{1}{e^\chi}.$$

γ. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία η εξίσωση της εφαπτομένης στο

$$A(\chi_0, f(\chi_0)) \text{ είναι : } \psi = f'(\chi_0) \cdot \chi + \beta$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ θα είναι της

$$\text{μορφής : } \psi = f'(0) \cdot \chi + \beta$$

$$\text{Είναι } f'(0) = -\frac{0+1}{e^0} = -1, \text{ οπότε } \varepsilon : \psi = -\chi + \beta \text{ η εξίσωση της}$$

εφαπτομένης, η οποία επειδή περνάει από το $A(0, f(0))$ θα πρέπει να

ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του A .

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{\chi+2}{e^\chi} \Leftrightarrow f(0) = \frac{0+2}{e^0} = 2 \text{ άρα } A(0, 2) \in \varepsilon : \psi = -\chi + \beta \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : 2 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ άρα } \varepsilon : \psi = -\chi + 2$$

Λι β α δ ε ι ά

22.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Σάββατο 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. α. Σωστό, β. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^οΈστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.α. Είναι $f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(1) = 1$ και $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(1) = -1$ Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$ έχει την μορφή

$$\psi = f'(1)x + \beta \Leftrightarrow \psi = -x + \beta \text{ και πρέπει να}$$

ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του $\Lambda(1, 1)$ άρα $1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$ άρα **$\psi = -x + 2$** η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$.β. Έστω $M(x, \psi)$ το τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f από το οποίο φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και $\psi\psi'$.Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται με τους ημιάξονες Ox , $O\psi$ θα έχει περίμετρο $\Pi(x) = 2x + 2\psi$, επειδή το M είναι στη γρ. παράσταση της

$$\psi = f(x) = \frac{1}{x} \text{ άρα } \Pi(x) = 2x + \frac{2}{x}, x > 0.$$

Φτιάχνεις πίνακα μεταβολών για την συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow$

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \Pi'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2}, \Pi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0. \text{ Ρίζες } \rho_1 = -1 \text{ και } \rho_2 = 1.$$

Άρα πίνακας προσήμου για το **$x^2 - 1$** :

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
+	↓	↓	+
	0	0	

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα πίνακας μεταβολών
για το $\Pi(\chi)$:

χ	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\Pi'(\chi)$		-	0	+
$\Pi(\chi)$				

$$\Pi(1) = 4$$

Επομένως για $\chi = 1$ η συνάρτηση $\Pi(\chi)$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την

$\Pi(1) = 4$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1, f(1)) = M\left(1, \frac{1}{1}\right) = M(1, 1)$.

Δηλαδή το ζητούμενο σημείο ταυτίζεται με το $M(1, 1)$.

23.

Εσπερινά 2005

Δευτέρα 23 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Θεωρία, B) Θεωρία.

Γ) γ) Λ, δ) Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

β) $\lim_{\chi \rightarrow 4} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 4} (\chi^2 - 5\chi + 6) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$.

γ) $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} (\chi^2 - 5\chi + 6) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$.

δ) $f'(\chi) = (\chi^2 - 5\chi + 6)' = 2\chi - 5$.

24.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Θεωρία.

B. β. Σωστό, στ. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Λι β α δ ε ι ά

β.
$$f'(\chi) = (\alpha \cdot \ln \chi - \beta \chi^2)' = \alpha \frac{1}{\chi} - 2\beta \chi = \frac{\alpha}{\chi} - 2\beta \chi.$$

γ. Αφού το $A(1, 1)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης, θα είναι

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ln 1 - \beta \cdot 1^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = -1 \text{ και επειδή η εφαπτομένη στο } A \text{ έχει}$$

$$\text{συντελεστή διεύθυνσης } 3 \text{ θα είναι } f'(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1} - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 2 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ άρα } \alpha = 1 \text{ και } \beta = -1.$$

δ.

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} (f'(\chi) \chi^3) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \left(\left(\frac{\alpha}{\chi} - 2\beta \chi \right) \chi^3 \right) = \left(\frac{1}{2} - 2 \cdot (-1) \cdot 2 \right) 2^3 = \left(\frac{1}{2} + 4 \right) 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} (f'(\chi) \chi^3) = 4 + 32 = 36.$$

25.

Εσπερινά 2005 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 29 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία.

B. α) Λ, β) Σ, γ) Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi - 1}$.

α) Πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

β)

$$\checkmark \quad f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi - 1} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 + 3}{\chi - 1} \right)' = \frac{(\chi^2 + 3)'(\chi - 1) - (\chi^2 + 3)(\chi - 1)'}{(\chi - 1)^2}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$= \frac{2\chi(\chi-1) - (\chi^2 + 3)}{(\chi-1)^2} = \frac{2\chi^2 - 2\chi - \chi^2 - 3}{(\chi-1)^2} = \frac{\chi^2 - 2\chi - 3}{(\chi-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \frac{(\chi+1)(\chi-3)}{(\chi-1)^2}.$$

$$\checkmark \quad f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\chi+1)(\chi-3)}{(\chi-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \chi = 3 \text{ ή } \chi = -1.$$

$$\gamma) \quad f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\chi+1)(\chi-3)}{(\chi-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (\chi+1)(\chi-3) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi - 3 \geq 0$$

Το $\chi^2 + 2\chi - 3$ έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-1	3	$+\infty$
+	-	+	

Επομένως το $\chi^2 + 2\chi - 3$, άρα και η f' στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι θετική άρα η f στο ίδιο διάστημα είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει ένα ολικό ελάχιστο το

$$f(1) = \frac{1^2 + 3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Εσπερινά 2006

26.

Δευτέρα 23 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία.

B) α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2 - \alpha\chi - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

I. Αν γνωρίζεις ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ τότε θα είναι $f(1) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 - \alpha \cdot 1 - 8 = -2 \Leftrightarrow -\alpha - 6 = -2$
 άρα $\alpha = -4$.

Λι β α δ ε ι ά

Ι Ι. Αν $\alpha = -4$, τότε $f(\chi) = 2\chi^2 + 4\chi - 8$

α) $f'(\chi) = (2\chi^2 + 4\chi - 8)' = 4\chi + 4.$

β) Για να βρεις το $\chi_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει ακρότατο θα πρέπει να μελετήσεις την μονοτονία της f .

Είναι $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 4\chi + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -1$

Αρα πίνακας μεταβολών
για την $f(\chi)$:

χ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$
$f(\chi)$			

$\psi = -10$

Επομένως για $\chi = -1$ η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 8 = -10.$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)$ στο σημείο $A(1, -2)$ είναι ο $f'(1) = 4 \cdot 1 + 4 = 8.$

27.

πανελλήνιες 2006

Πέμπτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ Ι'

A. Θεωρία.

B. β. Θεωρία

Γ. α. Σωστό γ. Λάθος: $\left[\text{Είναι } \left(\frac{1}{\chi} \right)' = -\frac{1}{\chi^2} \right],$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = -2\chi^2 + \kappa\chi + 4\sqrt{\chi} + 10, \chi \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο

$A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$ τότε θα είναι $f'(1) = 0$,

$$f(\chi) = -2\chi^2 + \kappa\chi + 4\sqrt{\chi} + 10 \Leftrightarrow f'(\chi) = (-2\chi^2 + \kappa\chi + 4\sqrt{\chi} + 10)' \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = -4\chi + \kappa + \frac{4}{2\sqrt{\chi}}. \text{ Άρα } f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 \cdot 1 + \kappa + \frac{4}{2\sqrt{1}} = 0 \Leftrightarrow \kappa - 4 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 2.$$

Άρα $f(\chi) = -2\chi^2 + 2\chi + 4\sqrt{\chi} + 10$ και επειδή η εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον

άξονα $\chi'\chi$ τότε θα έχει εξίσωση $\psi = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 \Leftrightarrow \psi = 14.$

28.**πανελλήνιες 2006 – Επαναληπτικές****Δευτέρα 3 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

B.1 Θεωρία. **B.2** Θεωρία.

Γ. β.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = e^{\chi}(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της

$A(2, e^2)$ είναι $\psi = -e^2\chi + 3e^2$, τότε:

α. Το σημείο $A(2, e^2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f άρα θα είναι

$$f(2) = e^2. \text{ Άρα } f(2) = e^2(\alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 9) = e^2 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + 9 = 1 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha + 2\beta = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4 \quad (1).$$

Λ ι β α δ ε ι ά

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(2, e^2)$ έχει συντελεστή $f'(2)$ και η

$\psi = -e^2\chi + 3e^2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-e^2$ άρα θα είναι $f'(2) = -e^2$

Είναι $f(\chi) = e^{\chi}(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9) \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = (e^{\chi})'(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9) + e^{\chi}(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9)' =$$

$$e^{\chi}(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9) + e^{\chi}(2\alpha\chi + \beta) = e^{\chi}(\alpha\chi^2 + \beta\chi + 9 + 2\alpha\chi + \beta) \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = e^{\chi}(\alpha\chi^2 + (\beta + 2\alpha)\chi + \beta + 9) \text{ άρα } f'(2) = -e^2 \Leftrightarrow$$

$$e^2(\alpha \cdot 2^2 + (\beta + 2\alpha)2 + \beta + 9) = -e^2 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + 4\alpha + \beta = -10 \Leftrightarrow$$

$$8\alpha + 3\beta = -10 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ 8\alpha + 3\beta = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 - 2\alpha \\ 8\alpha + 3(-4 - 2\alpha) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = -4 - 2\alpha \\ 8\alpha - 6\alpha - 12 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 - 2\alpha \\ 2\alpha = -10 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 - 2\alpha \\ 2\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -6 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

β. Όταν $\alpha = 1$ και $\beta = -6$ τότε η $f(\chi) = e^{\chi}(\chi^2 - 6\chi + 9) = e^{\chi}(\chi - 3)^2$ και η

$$f'(\chi) = e^{\chi}(\chi^2 - 4\chi + 3) \text{ επειδή } e^{\chi} > 0 \text{ είναι προφανές ότι } f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\chi^2 - 4\chi + 3 \geq 0$. Η εξίσωση $\chi^2 - 4\chi + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \text{ άρα ρίζες } \rho_1 = \dots = 1 \text{ και } \rho_2 = \dots = 3$$

Άρα πίνακας προσήμου για την

$$f'(\chi) = e^{\chi}(\chi^2 - 4\chi + 3)$$

$-\infty$	1	3	$+\infty$
+	−	+	
	↓ 0	↓ 0	

οπότε πίνακας μεταβολών μονοτονίας για την $f(x)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

$\psi = e$

$\psi = 0$

Από τον πίνακα φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας :

Στο $(-\infty, 1)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα

Στο $(1, 3)$ η f' είναι αρνητική άρα η f γνησίως φθίνουσα

Στο $(3, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f γνησίως αύξουσα



Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο όταν $x = 1$ το $f(1) = e^1(1-3)^2 = 4e$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο όταν $x = 3$ το $f(3) = e^3(3-3)^2 = 0$

29.

Εβδομαστιά 2007

Δευτέρα 21 Μαΐου

A. Θεωρία

B. δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$ άρα $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

β. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

οπότε πίνακας μονοτονίας για την $f(x)$:

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η

συνάρτηση f έχει **ολικό ελάχιστο** όταν

$x = 0$ το $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$\psi = 1$

γ. Επειδή η ευθεία $\psi = 3$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ άρα στην ουσία ζητάς το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη στον $x'x$ δηλαδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 0.

Λιβαδεϊά

Είναι $f'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow 2\chi_0 = 0 \Leftrightarrow \chi_0 = 0$ άρα το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0)) = A(0, f(0)) = A(0, 1)$ δηλαδή το ολικό ακρότατο.

30.

πανελλήνιες 2007

Τρίτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Θεωρία.

Γ1. β. Σωστό. γ. Λάθος

$$\Gamma 2. f_1'(\chi) = \nu \chi^{\nu-1}, \quad f_2'(\chi) = \frac{1}{\chi}, \quad f_3'(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}, \quad f_4'(\chi) = -\eta \mu \chi.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha. f'(\chi) = (\chi \cdot e^\chi + 3)' = (\chi \cdot e^\chi)' = e^\chi + \chi \cdot e^\chi, \text{ όμως } f(\chi) = \chi \cdot e^\chi + 3 \Leftrightarrow$$

$$\chi \cdot e^\chi = f(\chi) - 3 \text{ άρα } f'(\chi) = f(\chi) + e^\chi - 3$$

$$\beta. \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f'(\chi) - e^\chi}{\chi^2 - \chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^\chi + \chi \cdot e^\chi - e^\chi}{\chi(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi \cdot e^\chi}{\chi(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^\chi}{\chi - 1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f'(\chi) - e^\chi}{\chi^2 - \chi} = \frac{e^0}{0 - 1} = -1$$

31.

Εσπερινά 2007 – Επαναληπτικές

Παρασκευή 29 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. α. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 1}{\chi}$.

α. Π. Ορισμού είναι το $R^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

Δαμιανός Μωραΐτης

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 + 1}{\chi} \right)' = \frac{(\chi^2 + 1)' \cdot \chi - (\chi^2 + 1) \cdot \chi'}{\chi^2} = \frac{2\chi^2 - \chi^2 - 1}{\chi^2} = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} \Rightarrow$$

$$f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2}.$$

$$\beta. f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} \geq 0 \\ \chi^2 > 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0.$$

Το $\chi^2 - 1$ έχει ρίζες $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 1$,

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-$		$+$	$-$

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		$-$	$+$	$-$
$f(\chi)$	$\nearrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$	$\nwarrow$

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο στο $\chi_1 = -1$ το $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1} = -2$ και στο $\chi_2 = 1$ παρουσιάζει

τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = 2$

$$\gamma. \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \cdot f'(\chi)}{f(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \cdot \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2}}{\frac{\chi^2 + 1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi^2 - 1}{\chi}}{\frac{\chi^2 + 1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2 + 1} = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 1} = 0.$$

32.

πανελλήνιες 2007 – Επαναληπτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Θεωρία.

Γ 1. β. Σωστό. γ. Σωστό.

Λιβαδειά

$$\Gamma 2. \quad f_1'(\chi) = e^\chi, \quad f_2'(\chi) = -\frac{1}{\chi^2}, \quad f_3'(\chi) = \sin \chi, \quad f_4'(\chi) = 0$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi^2 - \chi + 1}$.

α. Πρέπει $\chi^2 - \chi + 1 \neq 0$.

Το $\chi^2 - \chi + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ άρα η εξίσωση

$\chi^2 - \chi + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα $\chi^2 - \chi + 1 \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Επομένως ΠΟ το $A = \mathbb{R}$.

β. Είναι $\lim_{\chi \rightarrow -1} (\chi^2 - \chi + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi}{\chi^2 - \chi + 1} = \frac{-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} \quad \text{άρα} \quad \lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) = -\frac{1}{3}$$

γ. Θα φτιάξεις πίνακα μεταβολών για την f . Είναι

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi}{\chi^2 - \chi + 1} \right)' = \frac{\chi'(\chi^2 - \chi + 1) - \chi(\chi^2 - \chi + 1)'}{(\chi^2 - \chi + 1)^2} = \frac{\chi^2 - \chi + 1 - \chi(2\chi - 1)}{(\chi^2 - \chi + 1)^2} =$$

$$\frac{\chi^2 - \chi + 1 - 2\chi^2 + \chi}{(\chi^2 - \chi + 1)^2} = \frac{-\chi^2 + 1}{(\chi^2 - \chi + 1)^2} \quad \text{άρα} \quad f'(\chi) = -\frac{\chi^2 - 1}{(\chi^2 - \chi + 1)^2}$$

Επομένως $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\chi^2 - 1}{(\chi^2 - \chi + 1)^2} \geq 0$ και επειδή $(\chi^2 - \chi + 1)^2 > 0$ άρα

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -(\chi^2 - 1) \geq 0 \quad \chi^2 - 1 \leq 0. \quad \text{Το } \chi^2 - 1 \text{ έχει ρίζες } \chi_1 = -1 \text{ και } \chi_2 = 1.$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$	0
$f(\chi)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα μεταβολών της f αυτή παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi_1 = -1$ το $f(\chi) = \frac{-1}{(-1)^2 - (-1) + 1} \Leftrightarrow f(-1) = -\frac{1}{3}$ και

τοπικό μέγιστο στο $\chi_2 = 1$ το $f(\chi) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} \Leftrightarrow f(1) = 1$

33.

Εσπερινά 2008**Τετάρτη 21 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο****A. B. Θεωρία****Γ. α. Λάθος****ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 + \kappa\chi + 2$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$.

A. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, 8)$, θα είναι

$$f(3) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{3}3^3 + \kappa \cdot 3 + 2 = 8 \Leftrightarrow 3\kappa = 8 - 2 - 9 \Leftrightarrow \kappa = -1.$$

B. Για $\kappa = -1$ είναι $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \chi + 2$.

$$\alpha. f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - \chi + 2 \right)' = 3 \cdot \frac{1}{3}\chi^2 - 1 \Rightarrow f'(\chi) = \chi^2 - 1,$$

$$f''(\chi) = (f'(\chi))' = (\chi^2 - 1)' = 2\chi \text{ οπότε :}$$

$$f'(\chi) + f''(\chi) + 2 = \chi^2 - 1 + 2\chi + 2 = \chi^2 + 2\chi + 1 = (\chi + 1)^2.$$

β. Είναι $f'(\chi) = \chi^2 - 1$, $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0$, η $\chi^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες

$\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 1$, πίνακα προσήμου

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
+	-	+	

Λίβανος

Επομένως η f έχει πίνακα μεταβολών

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		+	-	+
$f(\chi)$				

Από τον πιο πάνω πίνακα είναι φανερό ότι η f παρουσιάζει :

✓ Τοπικό μέγιστο στο $\chi_1 = -1$, το $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 2 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

✓ Τοπικό ελάχιστο στο $\chi_2 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{3}1^3 - 1 + 2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

34.

πανελλήνιες 2008

Πέμπτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

Γ. γ. Σωστό δ. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Είναι } \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}.$$

α. Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

β. $f(x) = \frac{x-1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x} \right)' = \frac{(\chi-1)' e^x - (\chi-1)(e^x)'}{(e^x)^2} =$

$$\frac{e^x - (\chi-1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-\chi+1)}{(e^x)^2} \Rightarrow f'(\chi) = \frac{2-\chi}{e^x}.$$

Άρα $e^x f'(\chi) = e^x \frac{2-\chi}{e^x} = 2-\chi.$

γ. Θα βρεις τον πίνακα προσήμου για την f .

Δαμιανός Μωραΐτης

Από το β. ερώτημα είναι $f'(\chi) = \frac{2-\chi}{e^\chi}$, άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\chi}{e^\chi} \geq 0 \Leftrightarrow$

$2 - \chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 2$, γιατί $e^\chi \geq 0$ και η $f(\chi)$ θα έχει πίνακα μεταβολών:

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Άρα η $f(\chi) = \frac{\chi-1}{e^\chi}$ έχει μέγιστη τιμή την $f(2) = \frac{2-1}{e^2} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$.

35.

πανελλήνιες 2008 – Επαναληπτικές

Τρίτη 1 Ιουλίου

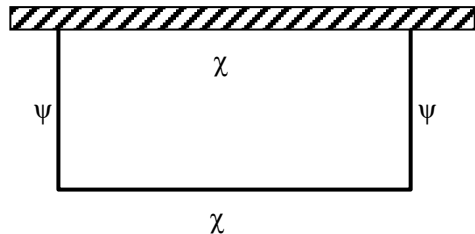
ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία

Γ. β. Σωστό., γ. Σωστό. δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι χ και η άλλη πλευρά του οικοπέδου είναι ψ .



Θα είναι $\chi + 2\psi = 200 \Leftrightarrow \psi = 100 - \frac{1}{2}\chi$.

α Άρα το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από

τον τύπο $f(\chi) = \chi \cdot \left(100 - \frac{1}{2}\chi\right) = 100\chi - \frac{1}{2}\chi^2$.

β. Αρκεί να μελετήσεις τη μονοτονία της συνάρτησης $f(\chi) = 100\chi - \frac{1}{2}\chi^2$ και

να βρεις τα ακρότατα της. Όταν $0 < \chi < 100$, επειδή πρέπει και $\psi > 0$ άρα

$100 - \frac{1}{2}\chi > 0 \Leftrightarrow 200 - \chi > 0 \Leftrightarrow \chi < 200$.

Λιβαδεϊά

**** Παρατήρηση :** πρέπει πάντα να προσέχεις του «φυσικούς περιορισμούς» σε ένα πρόβλημα .

$$\text{Είναι } f'(\chi) = \left(100\chi - \frac{1}{2}\chi^2\right)' = 100 - \frac{1}{2}2\chi = -\chi + 100.$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Rightarrow -\chi + 100 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 100, \text{ άρα για την } f' \text{ ισχύει}$$

ο πίνακας προσημόν:

$-\infty$	0	100	200
		+	-

✓ στο διάστημα $(0, 100)$ η f' είναι θετική επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

✓ στο διάστημα $(100, 200)$ η f' είναι αρνητική επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα στο $\chi_0 = 100$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$$f(100) = 100 \cdot 100 - \frac{1}{2}100^2 = 10000 - 5000 = 5000 \text{ άρα η μεγαλύτερη}$$

δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m είναι 5000 m².

γ. Είναι $f'(\chi) = -\chi + 100$ άρα $f'(100) = -100 + 100 = 0$,

$$f'(101) = -101 + 100 = -1, \quad f'(102) = -102 + 100 = -2,$$

$$f'(103) = -103 + 100 = -3, \quad f'(104) = -104 + 100 = -4.$$

$$\text{Άρα } \overline{\chi} = \frac{0 - 1 - 2 - 3 - 4}{5} = -\frac{10}{5} \Leftrightarrow \overline{\chi} = -2.$$

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$,

$$f'(102), f'(103) \text{ και } f'(104) \text{ τότε είναι } CV = \frac{s}{|\overline{\chi}|} \text{ και } CV' = \frac{s'}{|\overline{\chi}'|}$$

Από εφαρμογή του βιβλίου όταν αυξήσουμε καθεμιά από τις παρατηρήσεις κατά c τότε είναι $\overline{\chi'} = \overline{\chi} + c \Leftrightarrow \overline{\chi'} = c - 2$ και $s' = s$ και επομένως

$$CV' = 2 \cdot CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\overline{\chi'}|} = 2 \cdot \frac{s}{|\overline{\chi}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|c-2|} = 2 \cdot \frac{s}{|-2|} \Leftrightarrow \frac{1}{|c-2|} = 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$|c-2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} c-2=1 \\ c-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ c=1 \end{cases}.$$

Μην ανησυχείς . . . από την επόμενη εβδομάδα

στα καφέ θα σπέρνουνε φραπέ και θα φυτρώνουν Ευρώ

Σύλλογος προστασίας του δικαιώματος στην τεμπελιά ο «Αραχτός»



Θ

έ

μ

Π α ν ε λ λ ή ν ι ε ς 2000 - 2008
τ
α

Κ

α

τ

ε

ύ

θ

υ

ν

σ

η
ς

Κεφάλαιο 2^ο - 3^ο

Στατιστική - Πιθανότητες



Όποιος διαβάζει μορφώνεται ...

Όποιος δεν διαβάζει παραμορφώνεται ...

Κεφάλαιο 1^ο

Στατιστική – Πιθανότητες

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις	ΣΠΕ 129
Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΣΠΘ 141
Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΣΠΑ 215

Συντομογραφίες

- * * ΣΠΕ = Συναρτήσεις σύντομη επανάληψη.
- * * ΣΠΘ = Συναρτήσεις εκφωνήσεις θεμάτων.
- * * ΣΠΑ = Συναρτήσεις απαντήσεις θεμάτων.

Ευθανάτηση

Πιθανότητες

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Τα πειράματα είναι διαδικασίες οι οποίες μπορούν να επαναλαμβάνονται όσες φορές θέλουμε καθορίζοντας τις συνθήκες. Υπάρχουν δυο ειδών πειράματα:

- ✓ Τα **αιτιοκρατικά πειράματα**. Είναι εκείνα τα πειράματα στα οποία γνωρίζοντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες εκτελούνται γνωρίζουμε (εκ των προτέρων) και το αποτέλεσμα ή με άλλα λόγια :
αιτιοκρατικό είναι ένα πείραμα όταν μπορεί να εκτελείται πολλές φορές και το αποτέλεσμα δεν αλλάζει αν δεν αλλάξουν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εκτελείται.

Πειράματα όπως η βολή (κατακόρυφη ή πλάγια) ή η άσκηση δύναμης σε ένα σώμα, μια χημική αντίδραση καθώς επίσης και κάθε άλλο πείραμα που προέρχεται από την Φυσική ή την Χημεία είναι κλασικά παραδείγματα αιτιοκρατικών πειραμάτων.

- ✓ Τα **πειράματα τύχης**. Είναι εκείνα τα πειράματα στα οποία. δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, παρ' όλο που επαναλαμβάνονται κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Κλασικά πειράματα τύχης είναι : Το ρίξιμο ενός ζαριού, ή δυο ζαριών, το στρίψιμο ενός νομίσματος, το τράβηγμα ενός τραπουλόχαρτου από μια τράπουλα κλπ.

Δαμιανός Μωραΐτης

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται **δυνατά αποτελέσματα** ή **δυνατές περιπτώσεις του πειράματος**.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω .

Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**.

Παράδειγμα

Ρίχνεις ένα ζάρι, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Τα σύνολα $A = \{1\}$, $B = \{3\}$, $\Gamma = \{5\}$ είναι ενδεχόμενα όπως επίσης και τα $\Delta = \{1, 3, 5\}$, $E = \{2, 4, 6\}$ είναι ενδεχόμενα.

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο, όπως τα A, B, Γ και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία, όπως τα Δ και Ε.

λέμε ότι ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**, όταν το αποτέλεσμα της εκτέλεσης ενός πειράματος είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $\Delta = \{1, 3, 5\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν ρίχνοντας το ζάρι φέρεις 1 ή 3 ή 5.

Αιβαδειά

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι **είναι ενδεχόμενο**, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω .

Γι' αυτό **το Ω λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο**.

Δεχόμαστε ακόμα ως **ενδεχόμενο** και το **κενό σύνολο** $\emptyset$ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης.

Γι' αυτό λέμε ότι **το $\emptyset$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο**.

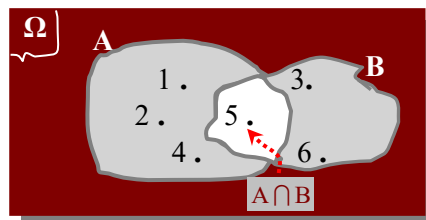
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδες, **τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω** .

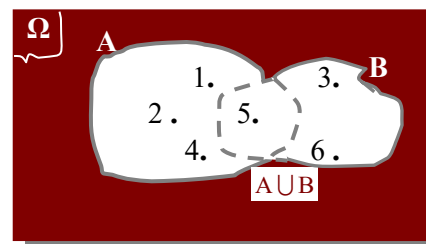
Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα.

Αν λοιπόν Ω είναι ο δειγματικός χώρος και A, B είναι δύο ενδεχόμενα, τότε:

✓ Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που είναι το λευκό μέρος στο διπλανό σχήμα, διαβάζεται «**A τομή B**» ή «**A και B**», περιλαμβάνει **μόνο τα κοινά στοιχεία** των A και B και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B .

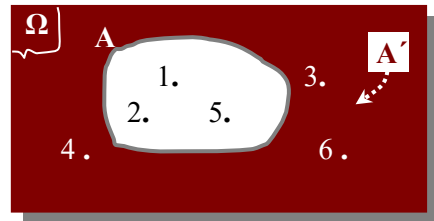


✓ Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που είναι το λευκό μέρος στο διπλανό σχήμα, διαβάζεται «**A ένωση B**» ή «**A ή B**», περιλαμβάνει **όλα τα στοιχεία** των A και B και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B .

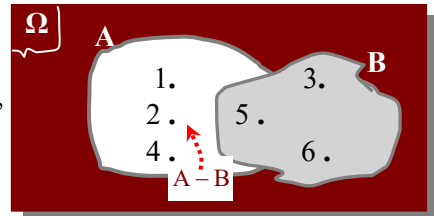


Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Το ενδεχόμενο A , που είναι το **κόκκινο** μέρος στο διπλανό σχήμα, διαβάζεται «**όχι A**» ή «**συμπληρωματικό του A**», περιλαμβάνει **όλα τα** στοιχεία του Ω που **δεν** ανήκουν στο A και πραγματοποιείται, όταν **δεν** πραγματοποιείται το A .



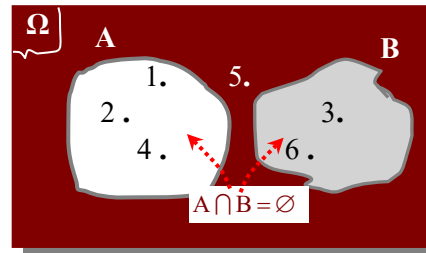
✓ Το ενδεχόμενο $A - B$, που είναι το **λευκό** μέρος στο διπλανό σχήμα, διαβάζεται «**διαφορά του B από το A**» ή «**A μείον B**», περιλαμβάνει **όλα τα** στοιχεία των A που **δεν** ανήκουν στο B και πραγματοποιείται, όταν **πραγματοποιείται το A** και **δεν** πραγματοποιείται το B .



Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Αν λοιπόν Ω είναι ο δειγματικός χώρος και A, B είναι δύο ενδεχόμενα, τότε:

✓ Τα ενδεχόμενα A, B θα λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** εάν είναι $A \cap B = \emptyset$.



Παρατήρηση : Τα **συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A'** είναι **ασυμβίβαστα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**, τα **ασυμβίβαστα** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** **δεν** είναι **κατ' ανάγκη** συμπληρωματικά ενδεχόμενα γιατί όταν είναι $A \cap B = \emptyset$ μπορεί κάλλιστα, όπως στο σχήμα πιο πάνω να υπάρχει στοιχείο του Ω που να μην ανήκει σε κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .

Στον παρακάτω πίνακα τα A και B είναι δυο **ενδεχόμενα** ενός πειράματος τύχης και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού.

Αιβαδειά

Στην αριστερή στήλη του πίνακα είναι οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες σχέσεις για τα **A, B**, όπως εμφανίζονται μέσα στις ασκήσεις και στη δεξιά στήλη είναι οι ίδιες σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A	$\omega \in A$
Δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A	$\omega \in A' \text{ (ή } \omega \notin A)$
Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A ή B	$\omega \in (A \cap B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Πραγματοποιείται : μόνο το A ή μόνο το B	$\omega \in (A - B) \cup (B - A)$
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση και του B	$A \subseteq B$

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε πειράματα όπως είναι το ρίξιμο ενός ζαριού, το ρίξιμο ενός νομίσματος, το τράβηγμα ενός χαρτιού από μια τράπουλα, η τυχαία επιλογή ενός μαθητή από μια τάξη, η τυχαία επιλογή μιας οικογένειας κ. λ. π. όλα τα δυνατά αποτελέσματα λέμε ότι είναι **ισοπίθανα** και η σχετική συχνότητα του καθενός

είναι $\frac{1}{N(\Omega)}$, όπου $N(\Omega)$ είναι ο πληθάρημος ή πληθικός αριθμός του **Ω** .

Εάν το πείραμα εκτελεστή, θεωρητικά, **άπειρες φορές** τότε πάλι η σχετική συχνότητα **τείνει** στο $\frac{1}{N(\Omega)}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Αντίστοιχα αν **A** είναι ένα σύνθετο ενδεχόμενο, δηλαδή αποτελείται από μερικά απλά ενδεχόμενα, με συχνότητα **k**, τότε η σχετική συχνότητα του θα είναι

$$\frac{k}{N(\Omega)} \text{ και εάν το πείραμα εκτελεστή, θεωρητικά, } \textbf{\textcolor{red}{\textit{άπειρες φορές}} \text{ τότε πάλι η}}$$

σχετική συχνότητα **τείνει** στο $\frac{k}{N(\Omega)}$.

Γι' αυτό **σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα** ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου **A** τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι:

$$1. \quad P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. \quad P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι **φυσικά μη αρνητικός αριθμός** και είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Προσοχή : Για να χρησιμοποιήσεις τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, **πρέπει όλα τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.**

Αξιοματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$1. \quad 0 \leq P(\omega_i) \leq 1$$

Λιβαδειά

$$2. P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_v) = 1$$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Έστω A ένα ενδεχόμενο με $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} \neq \emptyset$, όπου

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ είναι κάποια από τα $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_v$

Ως πιθανότητα $P(A)$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \cdots + P(\alpha_k)$,

ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\emptyset$ ορίζουμε τον αριθμό

$$P(\emptyset) = 0.$$

S O S για τις ασκήσεις: Όταν έχεις ένα δειγματικό χώρο

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_v\}$ και στην άσκηση αναφέρεται η φράση «παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω », τότε θα θεωρείς αυτονόητα ότι όλα τα δυνατά

αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{v}$, $i = 1, 2, \cdots, v$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

λέγεται **απλός προσθετικός νόμος** και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα π. χ. για τρία ενδεχόμενα :

Αν A, B και Γ , ανά δύο ασυμβίβαστα ($A \cap B = \emptyset$), ($A \cap \Gamma = \emptyset$),

($B \cap \Gamma = \emptyset$) θα έχεις: $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).$

2. Για ο δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω που δεν ξέρεις αν είναι ασυμβίβαστα ισχύει **προσθετικός νόμος**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. Για ο δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Παραδείγματα

1. **πανελλήνιες 2006 – Επαναληπτικές**

Δευτέρα 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της.

Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια.

Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. «έχει πάρει καταναλωτικό».
- ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

Απάντηση

✓ Έστω **A** το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει **στεγαστικό** δάνειο και

✓ **B** το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει **καταναλωτικό** δάνειο.

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **στεγαστικό** δάνειο είναι το **A – B**

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι το

B – A

Αιτιολογία

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **στεγαστικό** ή μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$

α. Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει και τα δυο δάνεια είναι το $(A \cap B)$

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι, από τον ορισμό τους **ασυμβίβαστα** άρα ισχύει ο **απλός προσθετικός νόμος** :

$$\begin{aligned} P[(A - B) \cup (B - A)] &= P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow 0,7 = P(A - B) + P(B - A) \\ \Leftrightarrow 0,7 &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = \\ [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) &\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 \quad (1) \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να μην έχει πάρει κανένα από τα δυο δάνεια είναι το

$$(A \cup B)'. \text{ Άρα από την εκφώνηση } P[(A \cup B)'] = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - 0,1 = 0,9. \text{ Από την (1) θα είναι}$$

$$0,9 - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,9 - 0,7 = 0,2$$

Επειδή $P(A \cap B) = 0,2 \neq 0$ άρα τα **A** και **B** **δεν είναι ασυμβίβαστα**.

β. i. Έστω ότι η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 δηλαδή

$$P(A - B) = 0,6. \text{ Θα είναι } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$0,6 = P(A) - 0,2 \Leftrightarrow P(A) = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

Από τον **προσθετικό νόμο** θα είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow 0,9 = 0,8 + P(B) - 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,9 - 0,8 + 0,2 = 0,3.$$

ii. Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι το $B - A$ άρα $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B - A) = 0,3 - 0,2 = 0,1.$

2. Έστω δύο **A** και **B** ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A) = 0,3 \text{ και } P(B) = 0,9.$$

α. Να εξεταστεί αν τα **A** και **B** είναι ασυμβίβαστα.

β. Να αποδείξετε ότι $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,3$.

Απάντηση

α. Αν τα **A** και **B** ήταν ασυμβίβαστα, τότε θα ίσχυε ο απλός προθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,9 = 1,2 \text{ δηλαδή, } P(A \cup B) > 1 \text{ **άτοπο**.}$$

Άρα, τα **A** και **B** δεν είναι ασυμβίβαστα..

Β. Από τη θεωρία συνόλων είναι $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, οπότε

$$P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,3 \text{ και } P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,9,$$

$$\text{άρα } P(A \cap B) \leq 0,3 \quad \textbf{(1)}$$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχεις :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,3 + 0,9 - P(A \cap B),$$

$$\text{όμως } P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1 \text{ άρα } 0,3 + 0,9 - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0,3 + 0,9 - 1 \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,2 \leq P(A \cap B) \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2) έχεις ότι: $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,3$.

Εκφωνήσεις

1.

πανελλήνιες 1986 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

A. i) Έστω S το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n .

Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τιμής $x \in S$;

2.

πανελλήνιες 1987 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

A. Έστω $\bar{\chi}$ η μέση τιμή της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\bar{\psi}$ της μεταβλητής

$$Y = \alpha X + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ είναι } \bar{\psi} = \alpha \cdot \bar{\chi} + \beta.$$

(Τώρα παράδειγμα SOS σχολικού βιβλίου)

3.

πανελλήνιες 1988 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

A. Έστω S_X η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα.

Να αποδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση S_Y της μεταβλητής $Y = \alpha X + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{είναι } S_Y = |\alpha| S_X. \text{ (Τώρα παράδειγμα SOS σχολικού βιβλίου)}$$

4.

πανελλήνιες 1995 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

B. Έστω Ω το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

$$(\chi^2 + 4\chi - 5)(\chi - 7) = 0. \text{ Υποθέτουμε ότι } \Omega \text{ είναι ο δειγματικός χώρος ενός}$$

Δαμριανός Μωραΐτης

πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα .

Θεωρούμε το σύστημα
$$\begin{cases} (\alpha - 1995)\alpha\chi + \psi = 0 \\ (\alpha - 1995)(2\alpha - 7)\chi + (\alpha - 6)\psi = 0 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha \in \Omega.$$

Έστω $A \subseteq \Omega$ είναι το ενδεχόμενο το παραπάνω σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις . Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$.

5.

πανελλήνιες 1996 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. β. Έστω ότι Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B ενδεχόμενα του Ω .

Θεωρούμε του πίνακες $Y = \begin{bmatrix} P(A) & P(A') \\ P(A') & P(A) \end{bmatrix}$ και $Y^2 = \begin{bmatrix} P(B) & P(B') \\ P(B') & P(B) \end{bmatrix}$

όπου A' είναι το συμπληρωματικό σύνολο του A και B' το συμπληρωματικό σύνολο του B .

Αν $P(B') = \frac{4}{9}$ και $P(A) < P(A')$ τότε να βρεθούν οι πιθανότητες των

ενδεχομένων A και A' .

Το Θέμα αναφέρεται για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθεί.

6.

πανελλήνιες 1997 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Στην τελευταία Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που έγινε στη Βομβάη, πέντε Έλληνες μαθητές βραβεύτηκαν με μετάλλια.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποφάσισε να δωρίσει σε καθένα από τους πέντε μαθητές από δυο βιβλία, που επιλέγονται από μια συλλογή δέκα διαφορετικών βιβλίων.

Λι β α δ ε ι ά

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τα δέκα αυτά βιβλία μπορούν να διανεμηθούν στους πέντε βραβευθέντες μαθητές;

Β. Θεωρούμε το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών χ τέτοιων ώστε $1000 \leq \chi \leq 9999$.

Όπως είναι γνωστό αυτοί είναι τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς γράφονται με τέσσερα διαφορετικά ψηφία;

7.

πανελλήνιες 1998 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda + 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$ και οι πολυωνυμικές συναρτήσεις :

$f(\chi) = 4(\chi - 1)(\chi^2 - 5\chi + 6)$ και $g(\chi) = \chi^2 + (\kappa^2 - 5\kappa)\chi + 13$ $\chi \in \mathbb{R}$ όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί.

α. Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ με $\omega_1 = \chi_1$, $\omega_2 = \chi_2$, $\omega_3 = \chi_3$, $\omega_4 = 4\chi_1$,

$\omega_5 = 4\chi_2$, $\omega_6 = 4\chi_3$ όπου χ_1, χ_2, χ_3 είναι οι ρίζες της

εξίσωσης $f(\chi) = 0$.

Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1).$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω .

β. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$B = \{\lambda \in \Omega / \text{το σύστημα } AX = 2X \text{ έχει και μη μηδενικές λύσεις}\}$ όπου X ένας 3×1 άγνωστος πίνακας και Ω ο δειγματικός χώρος του **α.** ερωτήματος.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B)$.

Δαμινός Μωραΐτης

γ. Να δείξετε ότι για το ενδεχόμενο Γ του Ω όπου :

$$B = \{\kappa \in \Omega / \eta g(\chi) \text{ παρουσιάζει ακρότατο στη θέση } \chi_0 = 3\} \text{ και } \Omega \text{ ο}$$

δειγματικός χώρος του **α.** ερωτήματος, ισχύει : $P(\Gamma) = P(B)$.

δ. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $B \cap \Gamma$ και $B \cup \Gamma$.

Τα **β.**, **γ.**, και **δ.** αναφέρονται για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθούν.

8.

πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

Β. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$.

α. Να βρείτε το $P(1)$.

β. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi - \frac{\lambda}{2}\chi^2 + 118$, $\chi \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \Omega$.

Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$E = \left\{ \lambda \in \Omega / \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ έχει σημείο καμπής το } (0, f(0)) \right\}.$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου E .

9.

πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν $\lambda \in \Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - 2\chi^2 + 3\chi + \lambda^2, \chi \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα X, Y όπου :

Λιβαδεϊά

X : Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$, είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{68}{3}$.

Y : Η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, 5]$, είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων X , Y , $X \cap Y$ και $X \cup Y$.

10.

πανελλήνιες 2000 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X , Y ενδεχόμενά του τέτοια ώστε $X \subseteq Y$.

Έστω $P(X)$, $P(Y)$ είναι οι πιθανότητες των X , Y αντιστοίχως.

Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί $P(X)$, $P(Y)$ είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f , με $f(\chi) = 4\chi^3 - 5\chi^2 + 2\chi + 2000$ $\chi \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε :

- α.** τις πιθανότητες $P(X)$, $P(Y)$.
- β.** τις πιθανότητες $P(X \cap Y)$, $P(X \cup Y)$ και $P(Y \cap X')$ όπου X' το αντίθετο ενδεχόμενο του X .

11.

πανελλήνιες 2001 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

B. β. Έστω $\Omega = \left\{ \frac{\alpha}{2}, \alpha, \beta, 2\beta \right\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα

απλά ενδεχόμενα, όπου οι α, β έχουν τις τιμές που προκύπτουν στο προηγούμενο ερώτημα. **(Είναι $\alpha = 2$, $\beta = 3$)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi) = \frac{1}{12}\chi^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)\chi^3 + 2\chi^2 + 2001$, $\chi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Omega$,

και το ενδεχόμενο $E = \{ \lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R} \}$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου E .

Δαμινός Μωραΐτης

Ακολουθούν τα θέματα των πανελλήνιων εξετάσεων με το, μέχρι στιγμής, τελευταίο σύστημα εξετάσεων

12.**Εσπερινά 2000****Σάββατο 3 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A.** Ας υποθέσουμε ότι $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$.
- α.** Τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα n_i της τιμής χ_i όπου $i = 1, 2, 3, \dots, k$;
- Μονάδες 4
- β.** Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής χ_i όπου $i = 1, 2, 3, \dots, k$;
- Μονάδες 4
- γ.** Αν $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι : $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.
- Μονάδες 4,5
- B.** Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Αριθμός παιδιών χ_i	Αριθμός οικογενειών n_i
0	7
1	15
2	20
3	5
4	3
Σύνολο:	50

Λιβαδειά

Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής $\chi_3 = 2$ είναι :

- A. 15 B. 0,4 Γ. 0,14 Δ. 20 E. 42

Μονάδες 6

2. Η σχετική συχνότητα της τιμής $\chi_4 = 3$ είναι :

- A. 0,94 B. 0,1 Γ. 5 Δ. 4 E. 47

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων A και B μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το A και σε πέντε διαδρομές για το B.

Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο A ήταν 9, 6, 7, 9, 9, 8 ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο B ήταν 8, 10, 7, 8, 12.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο A.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο B.

Μονάδες 10

γ. Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο A και όχι το B, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε ;

Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο B και όχι το A, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

Μονάδες 5

Δαμινός Μωραΐτης

13.

πανελλήνιες 2000

Σάββατο 3 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα %	Αθροιστική Συχνότητα			
x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$x_i \cdot v_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 50$	1	100				

Μονάδες 16

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 0,49$.

$$\text{Δίνεται ότι : } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. Να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

Λιβαδειά

Β. Να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

Γ. Να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα f_i %
0 – 5	10
5 – 10	15
10 – 15	12
15 – 20	15
20 – 25	18
25 – 30	18
30 – 35	12

Α. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας ;

Μονάδες 5

Β. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια :

α. Πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β. Πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

Δαμινός Μωραΐτης

14.

πανελλήνιες 2000 – Επαναληπτικές**Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A. 1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Μονάδες 6,5

- A. 2.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις :

α. $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$, όταν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

β. $P(A') = \dots\dots\dots$, όπου A' είναι το συμπληρωματικό του A.

Μονάδες 6

- B.** Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος

τύχης με : $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = \frac{1}{2}$.

- α.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι :

A : $\frac{1}{2}$

B : $\frac{1}{6}$

Γ : $\frac{1}{3}$

Δ : $\frac{1}{12}$

Ε : $\frac{1}{8}$

Μονάδες 6,5

- β.** Δίνονται τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω .

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Λ ι β α δ ε ι ά

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A \cup B)$	1. $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	2. $\frac{7}{24}$
γ. $P(A^c)$	3. $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες :

- Α.** Κατηγορία : Απόφοιτοι Γυμνασίου.
Β. Κατηγορία : Απόφοιτοι Λυκείου.
Γ. Κατηγορία : Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης.
Δ. Κατηγορία : Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου.

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην **Α.** κατηγορία ανήκει το 25 % των εργαζομένων της επιχείρησης.

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της **Δ.** κατηγορίας είναι 18° .

Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της **Β.** κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της **Γ.** κατηγορίας.

- α.** Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας.
Μονάδες 20

- β.** Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
Μονάδες 5

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Στις 12 το μεσημέρι, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου, ήταν :

Πόλη Α:	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Πόλη Β:	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

- α.** Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β.
Μονάδες 9
- β.** Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β είναι $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.
Μονάδες 6
- γ.** Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς.
Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Μονάδες 10

15.**Εσπερινά 2000 – Επαναληπτικές****Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 3^ο**

Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν σε κάθε μια από τις πέντε στήλες.

Λ ι β α δ ε ι ά

x_i	v_i	f_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	2	0,1			
2			8		
3	8				
4					
ΣΥΝΟΛΟ		1		100	

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια εταιρεία απασχολεί 15 υπαλλήλους εκ των οποίων οι 8 εργάζονται στο τμήμα Α και οι 7 στο τμήμα Β.

Οι μισθοί (σε χιλιάδες δραχμές) των 8 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι :

300, 325, 330, 305, 315, 310, 320, 315

ενώ των 7 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι :

310, 250, 290, 340, 270, 330, 310.

- α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.

Μονάδες 8

- β.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Β της εταιρείας.

Μονάδες 8

- γ.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας.

Μονάδες 9

Δαμινός Μωραΐτης

16.

Εσπερινά 2001**Δευτέρα 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς :

11 3 7 5 16 14 11 10 11 12

Να βρείτε :

- α. τη διάμεσο,
- β. τη μέση τιμή,
- γ. την επικρατούσα τιμή,
- δ. το εύρος και
- ε. τη διακύμανση της παραπάνω βαθμολογίας.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X :

Κλάσεις [–)	Κεντρικές τιμές χ_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχ. Συχνότητα F_i %
1 – 5				20
5 – 9				50
9 – 13				85
13 – 17				95
17 – 21		2		
Σύνολο			1	

Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα.

Μονάδες 25

Λιβαδειά

17.

πανελλήνιες 2001

Πέμπτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι : $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8,5

- A.2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=, \leq, \geq$) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \cdots 1 - P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \cdots P(A)$.

Μονάδες 2

- B.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

- B.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με :

α. $\frac{1}{4}$ **β.** $\frac{5}{12}$ **γ.** $\frac{2}{3}$ **δ.** $\frac{1}{6}$.

Μονάδες 2,5

- B.3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δαμιάνός Μωραΐτης

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{5}.$$

Στήλη A	Στήλη B
α. $P(A - B)$	1. $\frac{1}{20}$
β. $P((B - A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ. $P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
	4. $\frac{1}{12}$
	5. $\frac{19}{20}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου.

Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις .

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45 – 55	0,2
55 – 65	0,5
65 – 75	
75 – 85	

Λιβαδειά

A. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

A. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

Μονάδες 6

B. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά.

Μονάδες 6

Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά.

Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

Δαμιανός Μωραΐτης

Μονάδες 7

18.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές**Σάββατο 30 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$).

A. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι $24,4^{\circ}\text{C}$, τότε:

α. Να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C
Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.
Μονάδες 5

Τιμές Θερμοκρασίας χ_i	Πλήθος Ημερών ν_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

B. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι $24,5^{\circ}\text{C}$, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24°C και πόσες 25°C .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 10

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Λι β α δ ε ι ά

Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Μονάδες 7

- γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντίστοιχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος.
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

- α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.
Μονάδες 5
- β. Να αποδείξετε ότι : $P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}$
Μονάδες 5
- γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.
Μονάδες 8
- δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.
Μονάδες 7

19.

Εσπερινά 2001 – Επαναληπτικές

Τρίτη 10 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Ας υποθέσουμε ότι $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n, $\kappa \leq n$.

Δαμινός Μωραΐτης

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**) αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α.** Συχνότητα v_i της τιμής x_i της μεταβλητής X είναι ο φυσικός αριθμός, που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.
- β.** Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής X είναι ίσο με 1.
- γ.** Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.
- δ.** Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
- ε.** Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες 12,5

- Β.** Ένα δείγμα οικογενειών μιας περιοχής εξετάστηκε ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και προέκυψε ο πίνακας :

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
0	4			
1	12			
2	14			
3	8			
4	2			
Σύνολο:				

Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 12,5

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 2^ο

Οι βαθμοί επτά μαθητών στο δεύτερο τετράμηνο στα Μαθηματικά ήταν:

19, 10, 16, 9, 20, α , β

και η μέση βαθμολογία τους (μέσος όρος) 14.

Αν ισχύει η σχέση $\alpha = 2\beta$, να βρείτε :

α. Τα α και β

Μονάδες 12

β. Τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή της παραπάνω βαθμολογίας.

Μονάδες 13

20.

Εσπερινά 2002

Δευτέρα 20 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα :

Κόμμα χ_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i
A		0,15
B	150	0,30
Γ		0,35
Δ		
Σύνολο		

α. Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

Μονάδες 10

γ. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα Α και οι 10 στο τμήμα Β.

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος Α είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ.

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα Β είναι :

950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

- α. Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος Α. Μονάδες 6
- β. Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος Β. Μονάδες 9
- γ. Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση. Μονάδες 10

21.

πανελλήνιες 2002

Τρίτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Ας υποθέσουμε ότι $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

- α. Τι ονομάζετε (απόλυτη) συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή χ_i όπου $i = 1, 2, 3, \dots, k$; Μονάδες 3
- β. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής χ_i όπου $i = 1, 2, 3, \dots, k$; Μονάδες 3

Λι β α δ ε ι ά

γ. Να αποδείξετε ότι :

i. $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, 3, \dots, \kappa$.

ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$.

Μονάδες 4,5

B. 1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μονάδες 8

B. 2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων :

i) $P(\Omega)$

ii) $P(\emptyset)$.

Μονάδες 2

*** Σχεδόν ίδιο θέμα με τα Εσπερινά 2000

ΘΕΜΑ 3^ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ :

8,	10,	13,	13,	15,	16,	18,	14,	14,	9.
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(\chi) = (\chi - P(A \cup B))^3 - (\chi - P(A \cap B))^3, \chi \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$\chi = \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι

$$f(P(A)) = f(P(B)).$$

Μονάδες 7

22.

Εσπερινά 2002 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 1 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Ας υποθέσουμε ότι $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους v .

Τότε να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, ώστε να προκύπτει ισότητα των μέτρων της Στήλης Α με τις παραστάσεις της Στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. μέση τιμή $\bar{\chi}$	1. $\sqrt{s^2}$
β. διακύμανση s^2	2. $\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i$
γ. τυπική απόκλιση s	3. $\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i^2$

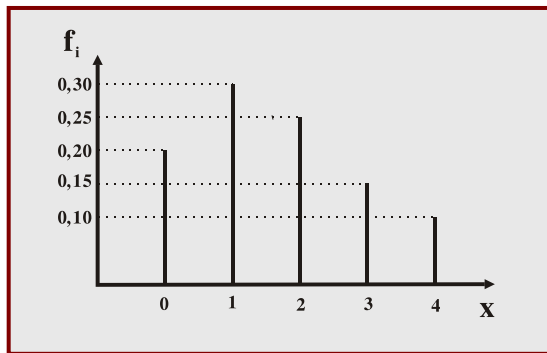
Λ ι β α δ ε ι ά

δ. συντελεστής μεταβολής CV	4. $\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2$
	5. $\frac{s}{\bar{\chi}}$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων ενός δείγματος 80 μαθητών μιας περιοχής στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων που ακολουθεί :



Για το ανωτέρω δείγμα βρείτε :

α. Την επικρατούσα τιμή,

Μονάδες 5

β. Πόσοι μαθητές κάνουν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως.

Μονάδες 6

γ. Το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως.

Μονάδες 6

δ. Το ποσοστό επί τοις εκατό των μαθητών που κάνει δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.

Μονάδες 8

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

Τιμή χ_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
1	8	
2		
3		
4		
5	2	0,1
Σύνολο		

Αν $\bar{\chi} = 2,5$ και $\delta = 2,5$

α. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος n του δείγματος είναι 20 .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα ν_2 της τιμής $\chi_2 = 2$ ισούται με 2 .

Μονάδες 8

γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πιο πάνω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν.

Μονάδες 12

23.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι

$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ αντίστοιχα και n είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{\chi}$;

Μονάδες 4

Λιβαδερά

B. 2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

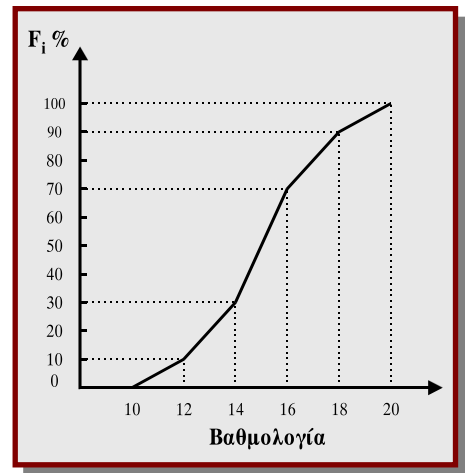
Εάν σε κάθε τιμή $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον μέσο ή μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\overline{\chi} = \dots\dots\dots$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20.

Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

A. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχόμενου κ του Ω .

$$\text{i)} P(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \quad \text{ii)} P(\kappa) = \frac{1}{2^\kappa} \quad \text{iii)} P(\kappa) = \frac{1}{2\kappa}$$

Μονάδες 8

B. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες :

1, 1, 7, κ , κ , 3, 3, 3, όπου κ είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με

$$\text{πιθανότητα } P(\kappa) = \frac{1}{2\kappa}.$$

Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω , όπου

$A = \{ \kappa \in \Omega : \text{η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X \text{ είναι } M_0 = 3 \}$ και $B = \{ \kappa \in \Omega : \text{η μέση τιμή } \overline{\chi} = 2,5 \}$.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Μονάδες 9

24.

Εσπερινά 2003

Δευτέρα 19 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Ας υποθέσουμε ότι $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου κ, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq n$, n_i είναι η συχνότητα και f_i είναι σχετική συχνότητα της τιμής χ_i $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

Λιβαδεία

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής X είναι ίσο με 100.
- β. Η μέση τιμή $\bar{\chi}$ ορίζεται από τη σχέση : $\bar{\chi} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i \cdot v_i$
- γ. Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, \kappa$.
- δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για $\bar{\chi} \neq 0$) από το λόγο :
- $$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}.$$
- ε. Η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση :

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} (\chi_i - \bar{\chi})^2 \cdot v_i$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2^ο

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ωρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Αθροιστική συχνότητα N_i
0 – 2	5
2 – 4	15
4 – 6	20
6 – 8	35
8 – 10	40

Δαμινός Μωραΐτης

Να βρείτε:

- α. το μέγεθος του δείγματος, Μονάδες 5
- β. τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και Μονάδες 10
- γ. τη μέση τιμή. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι :

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5.$$

- α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων. Μονάδες 6
- β. Αν $f(\chi) = (t_1 - \chi)^2 + (t_2 - \chi)^2 + (t_3 - \chi)^2 + (t_4 - \chi)^2 + (t_5 - \chi)^2 + (t_6 - \chi)^2$ τότε :
- i) Να αποδείξετε ότι $f'(\bar{\chi}) = 0$ Μονάδες 6
- ii) Να αποδείξετε ότι $f(\bar{\chi}) = 6s^2$, όπου s^2 είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και Μονάδες 5
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\bar{\chi}, f(\bar{\chi}))$. Μονάδες 8

25.

πανελλήνιες 2003

Τρίτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.
- Μονάδες 6
- Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.
- β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.
- ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.
- Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι.

Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- α. Γυναίκα ή φιλόλογος
- Μονάδες 5
- β. Γυναίκα και όχι φιλόλογος
- Μονάδες 5
- γ. Άνδρας και φιλόλογος
- Μονάδες 7
- δ. Άνδρας ή φιλόλογος.
- Μονάδες 8

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
Μονάδες 6
- β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
Μονάδες 5
- γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
Μονάδες 8
- δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.
Μονάδες 6

26.

Ημερήσια Τ Ε Λ 2003 (Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση)**Τετάρτη 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές : 5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με $\omega > 0$.

α. Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$.

Μονάδες 7

β. Για $\omega = 2$ να βρείτε :

i) Το εύρος των τιμών.

Μονάδες 5

ii) Την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

iii) Την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 8

Για την τυπική απόκλιση να χρησιμοποιηθεί ο τύπος :

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

** Όσο κι αν φαίνεται παράξενο τον πιο πάνω τύπο τον έδινε η εκφώνηση.

27.

Εσπερινά 2003 – Επαναληπτικές**Δευτέρα 30 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Έστω ότι $t_1, t_2, \dots, t_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος, μεγέθους v και $\bar{x}$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = 0$$

Μονάδες 13

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 2^ο

Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης, ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά το μήνα Δεκέμβριο του 2002, έδωσε τις εξής παρατηρήσεις :

0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0 .

- α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν.

Ημέρες απουσία x_i	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
0				
1				
2				
3				
4				
Σύνολο				

Μονάδες 10

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

28.

πανελλήνιες 2003 – επαναληπτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει : $P(A') = 1 - P(A)$

Μονάδες 9

Λιβαδεία

- Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

- α. το εύρος
- β. η διάμεσος
- γ. η διακύμανση
- δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

- Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5. Αν A', B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A και B αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

- α. $P(A)$, $P(B)$

Μονάδες 6

- β. $P(A \cup B)$

Μονάδες 6

- γ. $P(A \cup B')$

Μονάδες 6

- δ. $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50 % των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5 % αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

Δαμινός Μωραΐτης

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.
Μονάδες 6
- β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
Μονάδες 6
- γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.
Μονάδες 6
- δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27.
Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.
Μονάδες 7

29.

Εσπερινά 2004**Δευτέρα 17 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A. Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.
Μονάδες 5
- B. Ας υποθέσουμε ότι $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τις παρατηρήσεις ενός δείγματος, μεγέθους n . Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων του δείγματος
Μονάδες 5

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- Γ. Αν οι τιμές $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη και οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητες τους είναι $v_1, v_2, \dots, v_k$ τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής χ_i είναι :
- $$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Μονάδες 2

Λιβαδερά

- Δ. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής (CV) ξεπερνά το 10 %.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δέκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης, κατά το μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν :

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

- α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ των εισπράξεων .

Μονάδες 5

- β. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα του τα στοιχεία.

Εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ χ_i	Συχνότη τα v_i	Σχετική Συχνότητ α f_i	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i$
15					
20					
30					
50					
ΣΥΝΟΛΟ					

Μονάδες 15

- γ. Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος :

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i \text{ να υπολογίσετε :}$$

- γ_1) Τη διακύμανση των εισπράξεων .

Μονάδες 3

- γ_2) Την τυπική απόκλιση .

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

30.

πανελλήνιες 2004

Τρίτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α. Η συχνότητα της τιμής χ_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.
- β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα : $(\bar{\chi} - s, \bar{\chi} + s)$ όπου $\bar{\chi}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.
- γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής χ_i .

Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη Στήλη Ι αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη Στήλη II σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης II που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη Ι		Στήλη II
α.	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1.	$A \cap B$
β.	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2.	$A - B$
γ.	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3.	$(A \cup B)'$
		4.	$A \cup B$

Στη Στήλη II περισεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα.

Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα :

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης χ_i	Συχνότητα σε χλμ. ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα σε χλμ. N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i \%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

- A.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

- B.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(\chi_i, f_i \%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

- Γ.** Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$

Μονάδες 5

- Δ.** Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = 2\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + \chi + 10$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού

Δαμινός Μωραΐτης

χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του χ , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} \text{ να βρείτε τις πιθανότητες :}$$

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A \cap B)']$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$

Μονάδες 16

31.

Εσπερινά 2004 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 28 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής χ_i , μιας μεταβλητής X , είναι :

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa, \quad v_i \text{ η συχνότητα της τιμής } \chi_i \text{ και } v \text{ το}$$

μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 3

Δ. Αν $f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών

$\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\kappa$, μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n ,

$$\text{ισχύει : } f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 100$$

Μονάδες 3

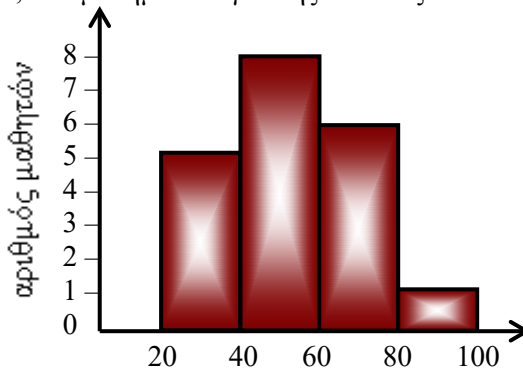
Λιβαδεία

- Ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10 %

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι βαθμολογίες, στην εκατοντάβαθμη κλίμακα, των μαθητών ενός τμήματος της Δ' τάξης κάποιου Εσπερινού Ενιαίου Λυκείου, στα μαθηματικά γενικής παιδείας.



- α. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος.

Μονάδες 7

- β. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές που έχουν βαθμό από 40 μόρια και πάνω.

Μονάδες 7

- γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες v_i , τις κεντρικές τιμές χ_i και τα γινόμενα $\chi_i \cdot v_i$.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών του τμήματος.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ 3^ο

Τα βάρη μια ομάδας, πέντε μαθητών, είναι : 62, 77, 65, 72, 69 κιλά.

- α. Να αποδείξετε ότι το μέσο βάρος των πέντε μαθητών είναι 69 κιλά.

Μονάδες 5

- β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαρών.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Να υπολογίσετε το εύρος των τιμών των βαρών.

Μονάδες 5

δ. Αν προστεθεί στην ομάδα ένας έκτος μαθητής και το μέσο βάρος των έξι μαθητών γίνει 72 κιλά, να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.

Μονάδες 10

32.

πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν A και B είναι δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

B. α. Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης.

β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ε. Για δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

στ. Το μέτρο διασποράς εύρος ισούται με τη διαφορά ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3^ο

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπολοίπων μαθητών.

Μονάδες 12

Λιβαδειά

- β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \kappa x^2 + 4x + 2, \text{ όπου } \kappa \in \Omega.$$

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε :

- α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων : $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$.

Μονάδες 8

- β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου :

A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

B : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός»

Μονάδες 8

- γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ , όπου : Γ : «Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ».

Μονάδες 9

33.

Εσπερινά 2005**Δευτέρα 23 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη

- α. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται

Δαμιανός Μωραΐτης

περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

Μονάδες 2

β. Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οιασδήποτε

μεταβλητής X ορίζεται (για $s \neq 0$) από το λόγο $CV = \frac{\overline{\chi}}{s}$, όπου $\overline{\chi}$ η

μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 2

ε. Σε ένα δείγμα τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής X το εύρος R ορίζεται από τη σχέση: $R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} + \text{μικρότερη παρατήρηση}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι ώρες παρακολούθησης τηλεοπτικών προγραμμάτων από 20 άτομα σε διάστημα μιας εβδομάδας αναγράφονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Ώρες παρακολούθησης χ_i	Συχνότητα	$\chi_i \cdot v_i$	$\chi_i^2 \cdot v_i$
2			
3	6		
9			
11	2		
Σύνολο	$v = 20$		

Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση $\chi_1 = 2$, είναι $\alpha_1 = 72^\circ$.

α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

β. Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος :

Λ ι β α δ ε ι ά

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v} \right] \quad \text{να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση } s$$

- γ. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου:

Ώρες εργασίας μαθητών χ_i	Συχνότητα v_i
1	α
2	5
3	β
4	2
5	1

Όπου α και β είναι οι τιμές του τοπικού μέγιστου και του τοπικού ελάχιστου αντίστοιχα της συνάρτησης : $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi - 1, \chi \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 4$ και $\beta = 3$.
Μονάδες 10
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{\chi}$ και τη διάμεσο δ των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.
Μονάδες 10
- γ. Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.
Μονάδες 5

Δαμινός Μωραΐτης

34.

πανελλήνιες 2005

Σάββατο 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 10

- B. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές ;

Μονάδες 3

- β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής ;

Μονάδες 4

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

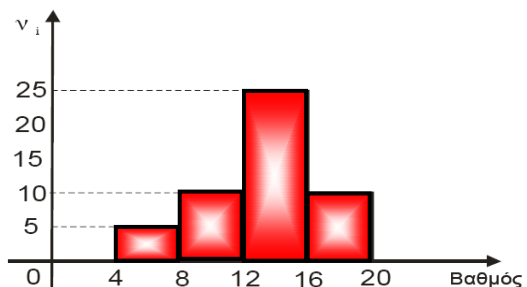
Μονάδες 2

- δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



- α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

Λι β α δ ε ι ά

Κλάσεις βαθ/γιας [)	Κέντρο κλάσης χ_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10 ;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^οΈστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν :

i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα

ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$.ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στοσύνολο $X = \left\{ \kappa, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$, όπου $\kappa = \lim_{\chi \rightarrow 5} \frac{3\chi - 15}{\chi^2 - 6\chi + 5}$.α. Να βρεθεί το κ .

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες :

1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 6

2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 6

Δαμινός Μωραΐτης

35.

Εσπερινά 2005 – Επαναληπτικές**Τετάρτη 29 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- Β.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη
- δ.** Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων δεν είναι μέτρο θέσης.
Μονάδες 3
- ε.** Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ όπου $\bar{x}$ μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 80$ και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2,6$

x_i	v_i
1	12
2	μ
3	λ
4	25
Σύνολο	$n = 80$

- α.** Να αποδείξετε ότι $\mu = 33$ και $\lambda = 10$.
Μονάδες 10
- β.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.
Μονάδες 6
- γ.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση του δείγματος.
Μονάδες 9

Λ ι β α δ ε ι ά

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης του δείγματος μπορείτε να

χρησιμοποιήσετε τον τύπο :

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μιας Αμερικανικής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\overline{\chi_A} = 1.000$ δολάρια και τυπική απόκλιση $s_A = 125$ δολάρια.

Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας Ευρωπαϊκής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\overline{\chi_B} = 800$ ευρώ και τυπική απόκλιση $s_B = 90$ ευρώ.

α. Να βρείτε ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.
Μονάδες 8

β. Η Αμερικανική εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 250 δολάρια. Επίσης η Ευρωπαϊκή εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 20%.

Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μηνιαίων μισθών και για τις δύο εταιρείες.

Μονάδες 10

γ. Ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια των μηνιαίων μισθών μετά τις αυξήσεις ;

Μονάδες 7

*** Όμοιο με το 4^ο Θέμα των εξετάσεων του 2003.

36.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Σάββατο 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής χ , αν $\overline{\chi} > 0$ και πώς, αν $\overline{\chi} < 0$;

Μονάδες 4

Δαμιανός Μωραΐτης

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
- α.** Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Μονάδες 2
- γ.** Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και v_i , χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i και N_i
(Προσοχή στην ερώτηση δεξ την απάντηση οπωσδήποτε). Μονάδες 2
- δ.** Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής. Μονάδες 2
- ε.** Αν για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = P(B)$, τότε είναι πάντοτε $N(A) = N(B)$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20.

Το 81,5 % των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16 , 22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm s$, $\bar{x}$.

- α.** Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$ Μονάδες 10
- β.** Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha s, \bar{x} + \alpha s)$ ανήκει το 95 % περίπου των παρατηρήσεων. Μονάδες 5

Λιβαδειά

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της

$$\text{συνάρτησης } f(\chi) = \frac{R}{2}\chi^2 - (\overline{\chi} + 4)\chi + 9s.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$A \cap B = \{1, 3, 4\}, A - B = \{2, 6\} \text{ και } \Gamma = \left\{ \chi \in \Omega / \frac{\chi+1}{\chi-1} \geq 2 \right\}.$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ .

Μονάδες 3

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ .

Μονάδες 3

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Delta = \{ \lambda \in \Omega / s^2 > 24 \}$.

Μονάδες 10

37.

Εσπερινά 2006

Τετάρτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

δ) Η διάμεσος επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

Δαμιανός Μωραΐτης

- ε) Έστω $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Για τις αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ισχύει: $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη μελέτη του αριθμού των τροχαίων ατυχημάτων, που γίνονται σε μια κεντρική διασταύρωση κάποιας επαρχιακής πόλης, πήραμε δείγμα πέντε παρατηρήσεων που αφορούν στον αριθμό των ατυχημάτων σε κάθε έναν από τους πέντε τελευταίους μήνες.

Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα: 1, 2, 3, 3, 1.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του δείγματος.
Μονάδες 10

- β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.
Μονάδες 5

- γ) Ποια είναι η (απόλυτη) συχνότητα και ποια η σχετική συχνότητα της τιμής 3;
Μονάδες 5

- δ) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος;
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

- I. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

- α) από 4 έως 6 λεπτά.
β) από 3 έως 6 λεπτά.

Μονάδες 10

- II. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

Μονάδες 10

Λ ι β α δ ε ι ά

- III. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Μονάδες 5

38.

πανελλήνιες 2006

Πέμπτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β.α. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- β. Αν το ενδεχόμενο A', συμπληρωματικό του ενδεχομένου A, πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A.

Μονάδες 2

- δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων χ_i	Αριθμός Μαθητών ν_i
0	$a + 4$
1	$5a + 8$
2	$4a$
3	$a - 1$
4	$2a$
Σύνολο	50

Δαμιανός Μωραΐτης

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 3

Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

Μονάδες 7

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν χ αγόρια και $(\chi + 4)^2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του χ την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

Μονάδες 7

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

Μονάδες 8

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = -2\chi^2 + \kappa\chi + 4\sqrt{\chi} + 10$, $\chi \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο

$A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$ και να

βρείτε την εξίσωσή της. (Έχει απαντηθεί)

Μονάδες 5

Λ ι β α δ ε ι ά

- β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση

$$\text{τιμή } \bar{\chi} = f(1) \text{ και τυπική απόκλιση } s = -\frac{2f'(4)}{13}.$$

Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

- (i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.

Μονάδες 10

- (ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

39.

πανελλήνιες 2006 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 9

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

- α. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

Μονάδες 2

- γ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 2

ε. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Τότε ισχύει:

$$P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega).$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της.

Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα

από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια.

Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε

τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Λ ι β α δ ε ι ά

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης χ_i	Σχετική συχνότητα f_i
[... - ...)	...	0,1
[... - 7)	...	...
[... - ...)	...	0,3
[... - ...)	10	...
Σύνολο		1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης f_2 , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή .

Μονάδες 4

γ. ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v}$$

40.

Εσπερινά 2007**Δευτέρα 21 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Β. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων δεν επηρεάζεται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

γ. Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών σε Ευρώ ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε 50 καταστήματα μιας πόλης:

Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [-)	Σχετική Συχνότητα f_i
8 – 10	0,2
10 – 12	f_2
12 – 14	0,3
14 – 16	f_4

α. Αν η μέση τιμή των τιμών του προϊόντος στα καταστήματα αυτά είναι $\bar{\chi} = 11,60$ Ευρώ, να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_2 και f_4 .

Μονάδες 10

Λιβαδειά

β. Αν $f_2 = 0,4$ και $f_4 = 0,1$ τότε,

- i) να βρείτε σε πόσα καταστήματα η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ.

Μονάδες 8

- ii) να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ μιας μεταβλητής X είναι

$$\bar{\chi} = 8 \text{ και } s_{\chi}^2 = 4.$$

- α. Αν $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ είναι το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντιστοίχως από τις $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ όταν κάθε μία αυξηθεί κατά 10 % τότε:

- i) Να εξετάσετε αν το δείγμα $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

- ii) Να συγκριθούν μεταξύ τους τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 5

$$\beta. \text{ Αν } z_i = \frac{\chi_i - \bar{\chi}}{s_{\chi}} \text{ για κάθε } i=1, 2, \dots, n$$

- i) να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{z}$ και την τυπική απόκλιση s_z των

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Μονάδες 10

- ii) να εξετάσετε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

41.

πανελλήνιες 2007

Τρίτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8

B. β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων,
όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\} \text{ όπου } x \text{ ένας}$$

πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι

$$P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$$

Μονάδες 7

Λιβαδερά

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του χ για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$.

Μονάδες 8

γ. Για $\chi = -1$ ναδειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B')$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$.

Δείγμα B: 16, 14, $t_3, t_4, \dots, t_{25}$.

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\overline{\chi_A}$ και $\overline{\chi_B}$ των δύο δειγμάτων A και B

αντίστοιχα είναι $\overline{\chi_A} = \overline{\chi_B} = 15$

Μονάδες 7

β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 είναι η διακύμανση

του δείγματος B, να αποδείξετε ότι $s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25}$.

Μονάδες 8

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να

βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος B.

Μονάδες 10

Δαμιανός Μωραΐτης

42.

Εσπερινά 2007 – Επαναληπτικές**ΘΕΜΑ 1^ο****Παρασκευή 29 Ιουνίου**

- A.** Αν $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$, είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$ και $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών της μεταβλητής, να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1.$$

Μονάδες 8

- B.** Να δώσετε τον ορισμό της μέσης τιμής ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

Μονάδες 5

- Γ.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ) , αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ) , αν αυτή είναι λανθασμένη.

- β.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Μονάδες 3

- γ.** Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

Μονάδες 3

- δ.** Η διακύμανση των τιμών μιας μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών μιας τάξης ενός Λυκείου ακολουθούν κανονική κατανομή.

Το 50 % των μαθητών έγραψε τουλάχιστο 13, ενώ το 34 % από 13 έως 14:

- α.** Να βρείτε τη διάμεσο δ , τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ και την τυπική απόκλιση s των βαθμών των μαθητών.

Μονάδες 12

Λιβαδεία

β. Αν 95 μαθητές της τάξης έγραψαν από 11 έως 13:

i. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 7

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έγραψαν από 14 έως 15 στο διαγώνισμα αυτό.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^3 - s\chi^2 + 2\chi + \overline{\chi}$, όπου $\overline{\chi}$

η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

Αν στο σημείο $M(1, 5)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $\chi'\chi$:

α. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{\chi}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

Μονάδες 15

β. Αν $\overline{\chi} = 4$ και $s = 2$, τότε :

i) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης f στο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 6

43.

πανελλήνιες 2007 – Επαναληπτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .

Μονάδες 4

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\emptyset)$

Μονάδες 3

Γ 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και ότι f_i , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής.

Αν α_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε: $\alpha_i = 360 \cdot f_i$ για $i = 1, 2, \dots, k$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{\chi \in \Omega / 0 \leq \ln(\chi - 1) < \ln 3\}, \quad B = \{\chi \in \Omega / (\chi^2 - 5\chi)(\chi - 1) = -6(\chi - 1)\}$$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(B \cup A')$.

Μονάδες 8

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

Μονάδες 7

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B - A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις :

7, 5, α , 2, 5, β , 8, 6, γ , 5, 3, όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$.

Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{\chi} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ , έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.
Μονάδες 8

β. Για τις τιμές των α, β, γ , που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να
δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_{\chi} = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και
να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
Μονάδες 8

γ. Έστω $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν
πολλαπλασιάσουμε τις $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη
συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2 .

Αν $\bar{\psi} = 9$ και $s_{\psi} = 2 \cdot s_{\chi}$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2 .
Μονάδες 9

44.**Εσπερινά 2008****Τετάρτη 21 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το
γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την
ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

β. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς
μεταβλητές.

Μονάδες 3

γ. Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί

Δαμιανός Μωραΐτης

σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι άρτιος αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 3

δ. Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων : 1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α , 6 όπου α πραγματικός αριθμός, η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$

A. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

B. Για $\alpha = 9$

α. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 8

γ. Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς».

Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι 36° . Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Λ ι β α δ ε ι ά

i	Χαρακτηρισμός βαθμολογίας χ_i	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες α_i
1	Άριστα				
2	Λίαν καλώς				
3	Καλώς				
4	Σχεδόν καλώς				
	Σύνολο				

Μονάδες 16

β. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ($f_i \%$).

Μονάδες 9

45.

πανελλήνιες 2008

Πέμπτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, αν $\overline{\chi} > 0$ και πώς, αν $\overline{\chi} < 0$;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε ο τύπος $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

- ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα.

Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

Μονάδες 5

- β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

- δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3,3$.

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$.

Μονάδες 9

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^3 - \frac{1}{2}\chi^2 + P(B)\chi$, όπου χ

πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 9

46.

πανελλήνιες 2008 – Επαναληπτικές

Τρίτη 1 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- B. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων

$t_1, t_2, \dots, t_n$ μιας μεταβλητής X.

Μονάδες 3

- β. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Δαμιανός Μωραΐτης

- α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.
Μονάδες 2
- β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.
Μονάδες 2
- ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.
Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές χ_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108° .

α. Να δείξετε ότι : $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$

Μονάδες 10

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να

Λ ι β α δ ε ι ά

συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Μονάδες 5

- ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

Μονάδες 5

- iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

- α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

Μονάδες 9

- β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

Μονάδες 8

- γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$.

Μονάδες 8

Αυταπήδεις

1.

πανελλήνιες 1986 **Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 4^ο**

Α. i) Θεωρία.

2.

πανελλήνιες 1987 **Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 2^ο**Α. $Y = \alpha X + \beta$ σημαίνει ότι :

$\psi_1 = \alpha\chi_1 + \beta$, $\psi_2 = \alpha\chi_2 + \beta$, $\dots$, $\psi_v = \alpha\chi_v + \beta$, όπου v υποτίθεται ότι είναι το μέγεθος του δείγματος.

$$\overline{\psi} = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_v}{v} = \frac{(\alpha\chi_1 + \beta) + (\alpha\chi_2 + \beta) + \dots + (\alpha\chi_v + \beta)}{v} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\psi} = \frac{\alpha\chi_1 + \alpha\chi_2 + \dots + \alpha\chi_v + v \cdot \beta}{v} \Leftrightarrow \overline{\psi} = \frac{\alpha(\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_v)}{v} + \frac{v \cdot \beta}{v} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\psi} = \alpha \overline{\chi} + \beta.$$

3.

πανελλήνιες 1988 **Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 2^ο**Α. Έστω S_X η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X .

$$\begin{aligned} s_{\psi}^2 &= \frac{(\psi_1 - \overline{\psi})^2 + (\psi_2 - \overline{\psi})^2 + \dots + (\psi_v - \overline{\psi})^2}{v} = \\ &= \frac{(\alpha \cdot \chi_1 - \alpha \cdot \overline{\chi})^2 + (\alpha \cdot \chi_2 - \alpha \cdot \overline{\chi})^2 + \dots + (\alpha \cdot \chi_v - \alpha \cdot \overline{\chi})^2}{v} \\ &= \frac{\alpha^2 \left[(\chi_1 - \overline{\chi})^2 + (\chi_2 - \overline{\chi})^2 + \dots + (\chi_v - \overline{\chi})^2 \right]}{v} = \alpha^2 \cdot S_X^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Άρα και $S_{\psi} = |\alpha| S_X$.**Δαμιανός Μωραΐτης**

4.

πανελλήνιες 1995 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

$$B. \quad (\chi^2 + 4\chi - 5)(\chi - 7) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + 4\chi - 5 = 0 \text{ ή } \chi = 7 \Leftrightarrow \chi_1 = -5,$$

$$\chi_2 = 1, \chi_3 = 7. \text{ Άρα } \Omega = \{-5, 1, 7\} \text{ δηλαδή } \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \text{ με } \omega_1 = -5$$

$$\omega_2 = 1, \omega_3 = 7. \text{ Για να έχει και μη μηδενικές λύσεις το σύστημα :}$$

$$\begin{cases} (\alpha - 1995)\alpha\chi + \psi = 0 \\ (\alpha - 1995)(2\alpha - 7)\chi + (\alpha - 6)\psi = 0 \end{cases} \text{ πρέπει και αρκεί η ορίζουσα του να είναι}$$

μηδέν (Θεωρία Α' Λυκείου «Διερεύνηση Συστήματος») άρα πρέπει :

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha - 1995)\alpha & 1 \\ (\alpha - 1995)(2\alpha - 7) & \alpha - 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha - 1995)(\alpha - 6) - (\alpha - 1995)(2\alpha - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1995)(\alpha^2 - 8\alpha + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1995 \\ \alpha = 1, \alpha = 7 \end{cases}$$

και επειδή $\alpha \in \Omega = \{-5, 1, 7\}$ απορρίπτεται η λύση $\alpha = 1995$ και μένει $\alpha = 1$ ή

$$\alpha = 7 \text{ άρα το ενδεχόμενο } A = \{1, 7\} \text{ και άρα } P(A) = \frac{2}{3}$$

5.

πανελλήνιες 1996 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Το Θέμα αναφέρεται για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθεί.

6.

πανελλήνιες 1997 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

A. Για να διαλέξει κανείς το πρώτο βιβλίο του πρώτου ζευγαριού έχει 10 τρόπους, όσα και τα βιβλία, για να γίνει η επιλογή του δεύτερου βιβλίου του

Λιβαδειά

πρώτου ζευγαριού έχει 9 τρόπους, όσα και τα βιβλία που απομένουν, άρα για να διαλέξει κάποιος το πρώτο ζευγάρι βιβλίων έχει $10 \cdot 9 = 90$ διαφορετικούς τρόπους.

- ✓ Για να δώσει το πρώτο ζευγάρι σε κάποιον από τους πέντε μαθητές έχει 5 διαφορετικές επιλογές, άρα **για να επιλέξει και να δώσει** το πρώτο ζευγάρι έχει $90 \cdot 5 = 450$ διαφορετικές επιλογές.
- ✓ Για να επιλέξει το δεύτερο ζευγάρι έχει : 8 επιλογές για το πρώτο και 7 επιλογές για το δεύτερο βιβλίο άρα $8 \cdot 7 = 56$ για το ζευγάρι και 4 διαφορετικούς τρόπου για να το μοιράσει άρα **για να επιλέξει και να δώσει** το δεύτερο ζευγάρι έχει $56 \cdot 4 = 224$ διαφορετικές επιλογές.
- ✓ **Για να επιλέξει και να δώσει** το τρίτο ζευγάρι έχει : $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ διαφορετικές επιλογές.
- ✓ **Για να επιλέξει και να δώσει** το τέταρτο ζευγάρι έχει : $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ διαφορετικές επιλογές.
- ✓ **Για να επιλέξει και να δώσει** το πέμπτο ζευγάρι έχει : 1 επιλογή.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έχει συνολικά $450 + 224 + 90 + 32 + 1 = 797$ διαφορετικούς τρόπους να δωρίσει σε καθένα από τους πέντε μαθητές από δυο βιβλία, που επιλέγονται από μια συλλογή δέκα διαφορετικών βιβλίων.

B. Για το πρώτο ψηφίο ενός τετραψήφιου αριθμού, υπάρχουν 9 διαφορετικές επιλογές, όσα και τα ψηφία 1, 2, $\dots$, 9, το ψηφίο 0 εξαιρείται γιατί δεν είναι τετραψήφιος ένας αριθμός που αρχίζει με 0.
Για το 2^ο ψηφίο υπάρχουν πάλι 9 επιλογές, είναι τα 10 ψηφία (0 – 9) μείον ένα που ήδη έχει επιλεγεί, μιας και «μπαίνει» στο παιχνίδι το 0, αλλά ταυτόχρονα εξαιρείται το ψηφίο που έχει επιλεγεί γιατί πρέπει ο αριθμός να έχει διαφορετικά ψηφία.

Για το 3^ο και το 4^ο ψηφίο υπάρχουν αντίστοιχα 8 και 7 επιλογές, άρα

Δαμιανός Μωραΐτης

συνολικά υπάρχουν : $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ διαφορετικοί τετραψήφιοι με διαφορετικά ψηφία.

7.

πανελλήνιες 1998 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha. \quad f(\chi) = 0 \Leftrightarrow 4(\chi - 1)(\chi^2 - 5\chi + 6) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \text{ ή } \chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\chi_1 = 1, \chi_2 = 2, \chi_3 = 3.$$

Άρα $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 8, \omega_6 = 12$, επομένως

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 8, 12\}.$$

Οι πιθανότητες για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα θα ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\checkmark \quad P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1), \text{ άρα και}$$

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3).$$

$$\checkmark \quad 0 \leq P(\omega_v) \leq 1, \quad v = 1, 2, \dots, 6.$$

$$\checkmark \quad P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_1) + P(\omega_1) + 3P(\omega_1) + 3P(\omega_1) + 3P(\omega_1) = 1 \Leftrightarrow 12P(\omega_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(\omega_1) = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Άρα } P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3 \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \text{ και } P(\omega_3) = P(\omega_2) = P(\omega_1) = \frac{1}{12}.$$

8.

πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

Αιβαδειά

Β. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$.

α. Είναι $0 \leq P(\chi) \leq 1$, $\chi = 0, 1, 3$, και $P(0) + P(1) + P(2) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3} + P(1) + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow 2 + 6P(1) + 1 = 6 \Leftrightarrow 6P(1) = 3 \Leftrightarrow P(1) = \frac{1}{2}.$$

β. Προϋπόθεση για να έχει η γραφική παράσταση της f σημείο καμπής το

$$(0, f(0)) \text{ είναι } f''(0) = 0. \text{ Όμως } f'(\chi) = \left(e^\chi - \frac{\lambda}{2}\chi^2 + 118 \right)' = e^\chi - \lambda\chi \text{ και}$$

$$f''(\chi) = (e^\chi - \lambda\chi)' = e^\chi - \lambda, \text{ άρα } f''(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 - \lambda = 0$$

$$\text{άρα } \lambda = 1, \text{ επομένως } P(E) = P(1) = \frac{1}{2}, \text{ αφού } E = \{1\} \text{ και } P(1) = \frac{1}{2}.$$

9.

πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Επειδή τα ενδεχόμενα X και Y αναφέρονται στο μέγιστο και το ελάχιστο της f , θα μελετήσεις πρώτα την μονοτονία της.

$$\text{Είναι } f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - 2\chi^2 + 3\chi + \lambda^2 \right)' = \chi^2 - 4\chi + 3, \text{ το τριώνυμο}$$

$$\chi^2 - 4\chi + 3 \text{ έχει ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 3$$

$$\text{άρα και } f'(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα και για } \chi \in [0, 5], \text{ άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα και επομένως στο $[0, 5]$ έχει ελάχιστη τιμή το

$$f(0) = \frac{1}{3}0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + \lambda^2 \Leftrightarrow f(0) = \lambda^2 \text{ και μέγιστη τιμή το}$$

$$f(5) = \frac{1}{3}5^3 - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + \lambda^2 = \frac{125}{3} - 50 + 15 + \lambda^2 = \frac{125}{3} - \frac{105}{3} + \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$f(5) = \lambda^2 + \frac{20}{3}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Έστω X το ενδεχόμενο η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$, να είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{68}{3}$, άρα $f(5) \geq \frac{68}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{20}{3} \geq \frac{68}{3} \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 \geq \frac{48}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 16 \Leftrightarrow \lambda \leq -4 \text{ ή } \lambda \geq 4 \text{ και επειδή } \lambda \in \Omega \text{ θα είναι}$$

$$\lambda \in A, \text{ όπου } A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

✓ Έστω Ψ το ενδεχόμενο η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, 5]$, να είναι μικρότερη ή ίση του 4, άρα $f(0) \leq 4 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 2$ και επειδή $\lambda \in \Omega$ θα είναι $\lambda \in B$, όπου $B = \{1, 2\}$.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας :

$$P(\text{ενδεχομένου}) = \frac{\text{Σύνολο ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Σύνολο όλων των περιπτώσεων}} \text{ άρα}$$

$$P(X) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{10}, \quad P(\Psi) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(X \cap \Psi) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{0}{10} = 0 \text{ γιατί } X \cap \Psi = A \cap B = \emptyset.$$

$$\text{και επομένως } P(X \cup \Psi) = P(X) + P(\Psi) - P(X \cap \Psi) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} - 0 \Leftrightarrow$$

$$P(X \cup \Psi) = \frac{9}{10}$$

10.

πανελλήνιες 2000 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. Επειδή τα ενδεχόμενα X και Ψ αναφέρονται στα ακρότατα της f , θα μελετήσεις πρώτα την μονοτονία της .

Αιβαδειά

Είναι $f'(\chi) = (4\chi^3 - 5\chi^2 + 2\chi + 2000)' = 12\chi^2 - 10\chi + 2 = 2(6\chi^2 - 5\chi + 1)$, το

τριώνυμο $6\chi^2 - 5\chi + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 > 0$ και ρίζες $\chi_1 = \frac{1}{3}$ και $\chi_2 = \frac{1}{2}$.

α. Επειδή είναι $X \subseteq Y$ οπότε πρέπει $P(X) \leq P(Y)$, άρα $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(Y) = \frac{1}{2}$.

β.

✓ Επειδή είναι και $X \subseteq Y$ άρα $X \cap Y = X$, οπότε θα είναι $P(X \cap Y) = P(X) = \frac{1}{3}$.

✓ Επειδή είναι και $X \subseteq Y$ άρα $X \cup Y = Y$, οπότε θα είναι $P(X \cup Y) = P(Y) = \frac{1}{2}$.

✓ Είναι $\Psi \cap X' = \Psi - X$ άρα $P(\Psi \cap X') = P(\Psi - X)$.

Τα ενδεχόμενα $\Psi - X$ και X είναι, προφανώς, ξένα μεταξύ τους και $(\Psi - X) \cup X = \Psi$ άρα $P(\Psi) = P[(\Psi - X) \cup X] =$

$$P(\Psi - X) + P(X) \Leftrightarrow P(\Psi - X) = P(\Psi) - P(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$P(\Psi - X) = \frac{1}{6}.$$

11.

πανελλήνιες 2001 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Β.

β. Επειδή από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\alpha = 2$, $\beta = 3$ άρα το Ω γίνεται $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$.

Για να είναι κυρτή στο R η g πρέπει να $g''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Είναι $g'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda-1)x^3 + 2x^2 + 2001 \right)' = \frac{1}{3}x^3 - (\lambda-1)x^2 + 4x$ και

$$g''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - (\lambda-1)x^2 + 4x \right)' = x^2 - 2(\lambda-1)x + 4 \text{ άρα } g''(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 - 2(\lambda-1)x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$

$$\text{πρέπει } \Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta = 4(\lambda-1)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 < 4 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 3 \text{ και επειδή } \lambda \in \Omega = \{1, 2, 3, 6\}$$

άρα $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$, $E = \{\lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}\}$ άρα

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

12.

Εσπερινά 2000**Σάββατο 3 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. Θεωρία.

Β. 1. Α. 20 2. Β. 0,1

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι $\overline{\chi_A} = \frac{9+6+7+9+9+8}{6} = \frac{48}{6} \Leftrightarrow \overline{\chi_A} = 8$ λίτρα ανά 100

χιλιόμετρα.

Το δείγμα Α σε αύξουσα σειρά είναι 6, 7, 8, 9, 9, 9 και επειδή το μέγεθος $n = 6$

άρα $\delta_A = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{8+9}{2} \Leftrightarrow \delta_A = 8,5$ λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα.

β. Είναι $\overline{\chi_B} = \frac{8+10+7+8+12}{5} = \frac{45}{5} \Leftrightarrow \overline{\chi_B} = 9$ λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα

Το δείγμα Β σε αύξουσα σειρά είναι 7, 8, 8, 10, 12 και επειδή το μέγεθος $n = 5$

άρα $\delta_B = t_3 = 8$ λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα.

Αιτιολογία

γ.

- ✓ Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, τότε θα χρησιμοποιήσει τη μέση τιμή.
- ✓ Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, τότε θα χρησιμοποιήσει την διάμεσο.

13.

πανελλήνιες 2000

Σάββατο 3 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Α.

Τιμές Μεταβλητής	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα %	Αθροιστική Συχνότητα			
χ_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$\chi_i \cdot v_i$	χ_i^2	$\chi_i^2 \cdot v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 50$	1	100				

- ✓ Από τον πίνακα είναι $v_1 = 10$ και
- $$N_2 = 35 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 35 \Leftrightarrow 10 + v_2 = 35 \Leftrightarrow v_2 = 25,$$
- $$v = 50 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 50 \Leftrightarrow 10 + 25 + v_3 = 50 \Leftrightarrow v_3 = 15.$$
- ✓ Είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, άρα $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2$, $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{25}{50} = 0,5$,
- $$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{15}{50} = 0,3.$$
- ✓ Είναι $f_i \% = f_i \cdot 100$, άρα $f_1 \% = 20 \%$, $f_2 \% = 50 \%$, $f_3 \% = 30 \%$.
- ✓ $N_1 = v_1 = 10$, από τον πίνακα $N_2 = 35$ και $N_3 = v = 50$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Είναι $\chi_1 v_1 = 1 \cdot 10 = 10$, $\chi_2 v_2 = 2 \cdot 25 = 50$, $\chi_3 v_3 = 3 \cdot 15 = 45$ και

$$\sum_{i=1}^3 \chi_i v_i = 10 + 50 + 45 = 105$$

✓ Είναι $\chi_1^2 v_1 = 1 \cdot 10 = 10$, $\chi_2^2 v_2 = 4 \cdot 25 = 100$, $\chi_3^2 v_3 = 9 \cdot 15 = 135$ και

$$\sum_{i=1}^3 \chi_i^2 v_i = 10 + 100 + 135 = 245$$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος θα είναι :

Τιμές Μεταβλη τής χ_i	Συχνότη τα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i \%$	Άθροιστ. Συχνότητα N_i	$\chi_i \cdot v_i$	χ_i^2	$\chi_i^2 \cdot v_i$
1	10	0,2	20	10	10	1	10
2	25	0,5	50	35	50	4	100
3	15	0,3	30	50	45	9	135
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 50$	1	100		105		245

B. $\bar{\chi} = \frac{\sum_{i=1}^3 \chi_i v_i}{v} = \frac{105}{50} = 2,1$, επειδή το μέγεθος $v = 50$ άρα

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2, \text{ γιατί από τον πίνακα φαίνεται } (N_2 = 35) \text{ ότι οι } 25^{\text{η}} \text{ και}$$

η $26^{\text{η}}$ παρατήρηση είναι 2.

$$\Gamma. \quad s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{50} \left[245 - \frac{105^2}{50} \right] = \frac{1}{50} \left[245 - \frac{11025}{50} \right] =$$

$$\frac{1}{50} [245 - 220,5] = \frac{24,5}{50} = 0,49.$$

Αιβαδειά

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι οι 120 μαθητές του λυκείου, οπότε $N(\Omega) = 120$.

Έστω τα ενδεχόμενα :

- ✓ A: «Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας» και
- ✓ B: «Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών».

A. Το ενδεχόμενο Γ να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς είναι το $\Gamma = A \cup B$, οπότε:

$$P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Είναι $A \cap B$: «Ο μαθητής συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς»,

$$P(A \cap B) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} \text{ και } P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \text{ άρα}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} =$$

$$\frac{6}{30} + \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{15}.$$

B. Για το ενδεχόμενο Δ να συμμετέχει σ' έναν μόνο από τους δύο διαγωνισμούς είναι : $P(\Delta) = P(A - B) + P(B - A)$.

Είναι $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, άρα

$$\begin{aligned} P(\Delta) &= P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow P(\Delta) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(\Delta) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Γ. Το ενδεχόμενο E να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς είναι $E = (A \cup B)'$ άρα

$$P(E) = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{15} \Leftrightarrow P(E) = \frac{11}{15}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Επειδή το πλήθος των εκπαιδευτικών είναι $n = 100$ μπορείς να θεωρήσεις ότι *η στήλη των σχετικών συχνοτήτων* f_i % *ταυτίζεται με την στήλη των συχνοτήτων* v_i , έτσι λοιπόν από τον πίνακα φαίνεται ότι τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας έχουν $15 + 18 + 18 + 12 = 63$ άτομα.

B.

α. Το συγκεκριμένο ερώτημα, με τον τρόπο που διατυπώνεται, έχει περισσότερες από μία διαφορετικές απαντήσεις.

**Απάντηση 1:**

Θα υποθέσεις ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη. Αυτό δε δίνεται σαφώς, αλλά υπονοείται μιας και είναι στο πνεύμα του σχολικού βιβλίου, οπότε στα επόμενα 12,5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας. Τα 22,5 χρόνια υπηρεσίας είναι το μέσο της κλάσης $[20, 25)$, άρα θα έχουν σχετική συχνότητα το μισό του 18, δηλαδή 9 (λόγω της ομοιόμορφης κατανομής), επομένως $9 + 18 + 12 = 39$ εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια.

**Απάντηση 2:**

Θα υποθέσεις ότι η κατανομή δεν είναι ομοιόμορφη άρα δεν μπορείς να δώσεις ακριβή αριθμό, αλλά διάστημα για τα έτη υπηρεσίας.

Τα επόμενα 12,5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν όσοι έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας.

Τα 22,5 χρόνια υπηρεσίας βρίσκονται μέσα στην κλάση $[20, 25)$, άρα μπορείς να πεις ότι :

Θα συνταξιοδοτηθούν τουλάχιστον $18 + 12 = 30$, μέχρι και $18 + 18 + 12 = 48$ εκπαιδευτικοί.



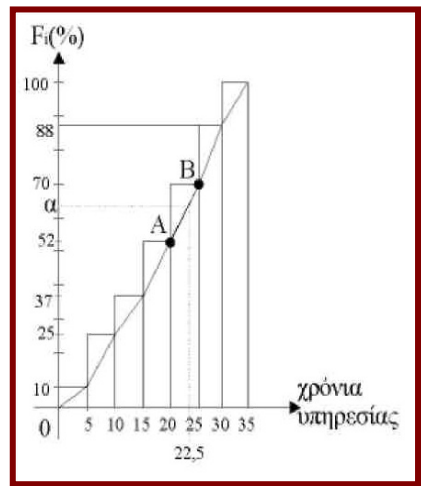
Απάντηση 3:

Η απάντηση 3 είναι «λίγο απίθανο» να βρισκόταν στις προθέσεις της επιτροπής εξετάσεων, αλλά επειδή είναι μια ακριβής απάντηση, αναφέρεται για «ιστορικούς λόγους» και εδώ.

Συμπληρώνεις τον πίνακα που σου δίνει με την στήλη των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και στη συνέχεια

κατασκευάζεις το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων.

Χρόνια υπηρεσίας [-)	Σχετική Συχνότητα f_i %	Σχετική Αθροιστική Συχνότητα F_i %
0 – 5	10	10
5 – 10	15	25
10 – 15	12	37
15 – 20	15	52
20 – 25	18	70
25 – 30	18	88
30 – 35	12	100



Με τη βοήθεια του πολυγώνου των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων έχεις ότι η τεταγμένη α του σημείου $(22,5, \alpha)$ του πολυγώνου είναι το πλήθος των εκπαιδευτικών με υπηρεσία μέχρι 22,5 χρόνια, άρα

το πλήθος των ζητούμενων εκπαιδευτικών είναι : $100 - \alpha$.

Είναι $A(20, 52)$ και $B(25, 70)$, αν $\psi = \lambda\chi + \kappa$ η εξίσωση της ευθείας AB τότε αυτή θα επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των A και B, άρα θα ισχύει

$$\begin{cases} 52 = \lambda \cdot 20 + \kappa \\ 70 = \lambda \cdot 25 + \kappa \end{cases} \text{ και με αφαίρεση κατά μέλη έχεις : } 5\lambda = 18 \text{ άρα}$$

$$\lambda = \frac{18}{5} \text{ οπότε } 52 = \frac{18}{5} \cdot 20 + \kappa \Leftrightarrow 260 = 360 + 5\kappa \Leftrightarrow 5\kappa = -100, \text{ άρα } \kappa = -20,$$

$$\text{επομένως η εξίσωση γίνεται : } \psi = \frac{18}{5}\chi - 20 \Leftrightarrow 18\chi - 5\psi = 100.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Αν θέσεις $\chi = 22,5$, $\psi = \alpha$ θα πάρεις :

$$18 \cdot 22,5 - 5\alpha = 100 \Leftrightarrow 5\alpha = 405 - 100 = 305 \Leftrightarrow \alpha = 61 \text{ άρα θα πάρουν σύνταξη:}$$

$$100 - 61 = 39 \text{ εκπαιδευτικοί.}$$

β. Μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν οι εκπαιδευτικοί που έχουν 30 έως 35 χρόνια προϋπηρεσίας, δηλαδή θα πρέπει να γίνουν 12 νέες προσλήψεις .

14.

πανελλήνιες 2000 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Θεωρία.

A. 2.

α. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

β. $P(A') = 1 - P(A)$.

B.

α. $B : \frac{1}{6}$

β. α. 3. , β. 4. , γ. 2.

ΘΕΜΑ 3^ο

α.

✓ Στην Α. κατηγορία ανήκει το $25\% \cdot 400 = 100$ εργαζόμενοι.

✓ Οι 18° της Δ. κατηγορίας αντιστοιχούν στο $\frac{18^\circ}{360^\circ} 100\% = 5\%$ των εργαζομένων, άρα στην Δ. κατηγορία ανήκει το $5\% \cdot 400 = 20$ των εργαζομένων.

Έστω χ οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Γ. κατηγορίας τότε οι εργαζόμενοι

B. κατηγορίας θα είναι 6 χ και όλοι μαζί είναι $400 - 100 - 20 = 280$, άρα

$$6\chi + \chi = 280 \Leftrightarrow 7\chi = 280 \Leftrightarrow \chi = 40.$$

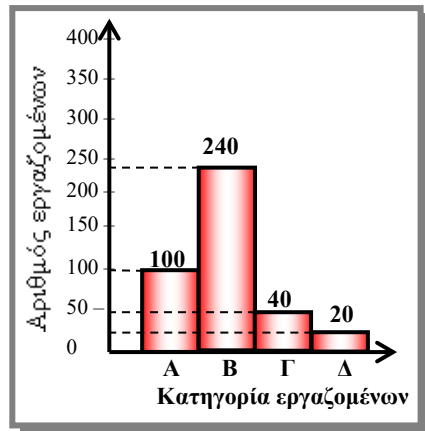
Αιβαδειά

Άρα

✓ Στην Β. κατηγορία ανήκουν $6 \cdot 40 = 240$ εργαζόμενοι.

✓ Στην Γ. κατηγορία ανήκουν 40 εργαζόμενοι

β.



ΘΕΜΑ 4^ο

α.

✓ Είναι $\overline{\chi_A} = \frac{2 \cdot 16 + 3 \cdot 17 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 20 + 10}{10} = \frac{169}{10} \Leftrightarrow \overline{\chi_A} = 16,9^\circ \text{C}.$

Το δείγμα Α σε αύξουσα σειρά είναι 10, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 20, 20 και

επειδή το μέγεθος $n = 10$ άρα $\delta_A = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{17 + 17}{2} \Leftrightarrow \delta_A = 17^\circ \text{C}.$

Στο δείγμα Α επικρατούσες τιμή η 17.

✓ Είναι $\overline{\chi_B} = \frac{12 + 15 + 3 \cdot 16 + 2 \cdot 17 + 18 + 20 + 22}{10} = \frac{169}{10} \Leftrightarrow \overline{\chi_B} = 16,9^\circ \text{C}.$

Το δείγμα β σε αύξουσα σειρά είναι 12, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 20, 22 και

επειδή το μέγεθος $n = 10$ άρα $\delta_B = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{16 + 17}{2} \Leftrightarrow \delta_B = 16,5^\circ \text{C}.$

Στο δείγμα Β επικρατούσα τιμή είναι η 16.

β. Για να μπορέσεις να κάνεις την σύγκριση θα υπολογίσεις το συντελεστή μεταβολής (CV) της κάθε πόλης, θα συγκρίνεις δηλαδή τις σχετικές διακυμάνσεις (ομοιογένειες) των δυο πόλεων.

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{Είναι } CV_A = \frac{S_A}{\chi_A} 100\% = \frac{2,66}{16,9} 100\% \Leftrightarrow CV_A \approx 15,7\%,$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\chi_B} 100\% = \frac{2,59}{16,9} 100\% \Leftrightarrow CV_B \approx 15,3\%$$

Άρα προφανώς η πόλη Β παρουσιάζει την μικρότερη σχετική διασπορά, δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια.

γ. Οι λάθος θερμοκρασίες της πόλης Α είναι :

20 18 20 17 18 17 16 17 16 10

Οι σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α είναι :

15 13 15 12 13 12 11 12 11 5

και επειδή αν συμβολίσουμε με χ τις λάθος τιμές και ψ τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α θα ισχύουν :

$$\psi = \chi - 5 \text{ άρα (εφαρμογή σχολικού βιβλίου) } \overline{\psi} = \overline{\chi} - 5 = 16,9 - 5 = 11,9^\circ\text{C} \text{ και}$$

$S_\psi = S_\chi = 2,66$, οπότε ο σωστός συντελεστής μεταβολής είναι :

$$CV = \frac{S_A}{\psi_A} 100\% = \frac{2,66}{11,9} 100\% \quad CV \approx 22,3\%$$

Άρα με βάση τις σωστές θερμοκρασίες για την πόλη Α, προφανώς η πόλη Β συνεχίζει να έχει την μικρότερη διασπορά, δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια.

15. Εσπερινά 2000 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

χ_i	v_i	f_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	2	0,1			
2			8		
3	8				
4					
ΣΥΝΟΛΟ		1		100	

Λιβαδειά

✓ Από τον πίνακα είναι $v_1 = 2$ και $N_2 = 8 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 8 \Leftrightarrow 2 + v_2 = 8 \Leftrightarrow$

$$v_2 = 6, \quad v_3 = 8 \quad f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow \frac{2}{20} = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$v = 20 \Leftrightarrow v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow 2 + 6 + 8 + v_4 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 4.$$

✓ Είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, άρα $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{20} = 0,1$, $f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{6}{20} = 0,3$,

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{8}{20} = 0,4, \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

✓ Είναι $f_i \% = f_i \cdot 100$, άρα $f_1 \% = 10 \%$, $f_2 \% = 30 \%$, $f_3 \% = 40 \%$,
 $f_4 \% = 20 \%$

✓ $N_1 = v_1 = 2$, από τον πίνακα $N_2 = 8$ και $N_3 = N_2 + v_3 = 8 + 8 = 16$,
 $N_4 = v = 20$

✓ $F_1 \% = f_1 \% = 10 \%$, $F_2 \% = F_1 + f_2 \% = 40 \%$ και
 $F_3 \% = F_2 + f_3 \% = 80 \%$, $F_4 \% = 100 \%$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος θα είναι :

χ_i	v_i	f_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
1	2	0,1	2	10	10
2	6	0,3	8	30	40
3	8	0,4	16	40	80
4	4	0,2	20	20	100
ΣΥΝΟΛΟ	20	1,0		100	

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $\overline{\chi_A} = \frac{300 + 305 + 310 + 2 \cdot 315 + 320 + 325 + 330}{8} = \frac{2520}{8} \Leftrightarrow$

$\overline{\chi_A} = 315$ χιλιάδες δραχμές.

Το δείγμα Α σε αύξουσα σειρά είναι 300, 305, 310, 315, 315, 320, 325, 330

και επειδή το μέγεθος $n = 8$ άρα $\delta_A = \frac{t_4 + t_5}{2} = \frac{315 + 315}{2} \Leftrightarrow$

$\delta_A = 315$ χιλιάδες δραχμές.

β. Είναι $\overline{\chi_B} = \frac{250 + 270 + 290 + 2 \cdot 310 + 330 + 340}{7} = \frac{2100}{7} \Leftrightarrow \overline{\chi_B} = 300$

χιλιάδες δραχμές.

Το δείγμα Β σε αύξουσα σειρά είναι 250, 270, 290, 310, 310, 330, 340 και
επειδή το μέγεθος $n = 7$ άρα $\delta_A = t_4 = 310$ χιλιάδες δραχμές.

γ. Έστω $\overline{\chi_E}$ και δ_E η μέση τιμή και η διάμεσος των μισθών όλων των εργαζομένων της εταιρείας τότε θα είναι :

$$\overline{\chi_A} = \frac{250 + 270 + 290 + 300 + 305 + 3 \cdot 310 + 2 \cdot 315 + 320 + 325 + 2 \cdot 330 + 340}{15}$$

$$= \frac{4620}{15} \Leftrightarrow \overline{\chi_E} = 308 \text{ χιλιάδες δραχμές.}$$

Οι μισθοί σε αύξουσα σειρά είναι :

250, 270, 290, 300, 305, 310, 310, 310, 315, 315, 320, 325, 330, 330, 340 και

επειδή το μέγεθος $n = 15$ άρα $\Leftrightarrow \delta_E = t_8 = 310$ χιλιάδες δραχμές.

16.**Εσπερινά 2001****Δευτέρα 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

α. Οι βαθμοί σε αύξουσα σειρά είναι 3, 5, 7, 10, 11, 11, 11, 12, 14, 16 και

επειδή το μέγεθος $n = 10$ άρα $\delta_A = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{11 + 11}{2} \Leftrightarrow \delta = 11$ χδ

Αιτιολογία

β. Είναι $\bar{\chi} = \frac{3+5+7+10+3 \cdot 11+12+14+16}{10} = \frac{100}{10} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 10.$

γ. Επικρατούσα τιμή είναι ο βαθμός 11.

γ. Το εύρος $R = 16 - 3 = 13.$

ε.
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2}{v} =$$

$$\frac{(3-10)^2 + (5-10)^2 + (7-10)^2 + (10-10)^2 + 3 \cdot (11-10)^2}{10} +$$

$$\frac{(12-10)^2 + (14-10)^2 + (16-10)^2}{10} =$$

$$\frac{49 + 25 + 9 + 0 + 3 \cdot 1 + 4 + 16 + 36}{10} = \frac{142}{10} \text{ άρα } s^2 = 14,2$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i %
1 – 5	3	8	0,2	20
5 – 9	7	12	0,3	50
9 – 13	11	14	0,35	85
13 – 17	15	4	0,1	95
17 – 21	19	2	0,05	100
Σύνολο		40	1,00	

✓ Το πλάτος της κλάσης είναι 4, άρα $\chi_1 = \frac{1+5}{2} = 3$, $\chi_2 = \chi_1 + 4 = 7$,
 $\chi_3 = \chi_2 + 4 = 11$, $\chi_4 = \chi_3 + 4 = 15$, $\chi_5 = \chi_4 + 4 = 19.$

✓ Είναι $F_1 = 20\%$ άρα θα είναι και $f_1 = 0,2$, επειδή είναι $F_2 = 50\%$, άρα
 $f_2 \% = 30\% \Leftrightarrow f_2 = 0,30$, $F_3 = 85\%$, άρα $f_3 \% = 35\% \Leftrightarrow f_3 = 0,35$,

$F_4 = 95\%$, άρα $f_4 \% = 10\% \Leftrightarrow f_4 = 0,1$, $F_5 = 100\%$, άρα $f_5 \% = 5\% \Leftrightarrow$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$f_5 = 0,05.$$

✓ Είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, επειδή είναι $f_5 = 0,05$, άρα $0,05 = \frac{2}{v} \Leftrightarrow v = \frac{2}{0,05} = 40$,

$$f_1 = 0,2, \text{ άρα } 0,2 = \frac{v_1}{40} \Leftrightarrow v_1 = 40 \cdot 0,2 = 8, \quad f_2 = 0,3, \text{ άρα } 0,3 = \frac{v_2}{40} \Leftrightarrow$$

$$v_2 = 40 \cdot 0,3 = 12, \quad f_3 = 0,35, \text{ άρα } 0,35 = \frac{v_3}{40} \Leftrightarrow v_3 = 40 \cdot 0,35 = 14,$$

$$f_4 = 0,1, \text{ άρα } 0,1 = \frac{v_4}{40} \Leftrightarrow v_4 = 40 \cdot 0,1 = 4.$$

17.

πανελλήνιες 2001

Πέμπτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία.

A.2. α. $P(A') = 1 - P(A)$, β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \geq P(A)$.

B.1. α. Λάθος. β. Σωστό.

B.2. β. $\frac{5}{12}$

B.3. α. 2., β. 5., γ. 3. .

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Επειδή $F_1 = 0,2$ άρα και $f_1 = F_1 = 0,2$, $f_2 = F_2 - F_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$,
είναι $f_3 = 2 \cdot f_1$ άρα $f_3 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$ άρα, $F_3 = F_2 + f_3 = 0,5 + 0,4 = 0,9$ και
φυσικά $F_4 = 1$ και $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 = 0,1$.

Τα κέντρα των κλάσεων είναι $\chi_1 = \frac{55 + 45}{2} = 50$, το πλάτος της κλάσης είναι

$55 - 45 = 10$, άρα $\chi_2 = \chi_1 + 10 = 60$, $\chi_3 = \chi_2 + 10 = 70$, $\chi_4 = \chi_3 + 10 = 80$.

Αιτιολογία

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος με τις στήλες της κεντρικής τιμής και της σχετικής συχνότητας είναι :

Βάρος σε κιλά [-)	Κεντρική τιμή χ_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45 – 55	50	0,2	0,2
55 – 65	60	0,3	0,5
65 – 75	70	0,4	0,9
75 – 85	80	0,1	1

Β. Με την προϋπόθεση ότι πρόκειται για ομοιόμορφη κατανομή θα είναι :

$$\bar{\chi} = \sum_{i=1}^4 \chi_i \cdot f_i = 50 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,3 + 70 \cdot 0,4 + 80 \cdot 0,1 = 10 + 18 + 28 + 8 \Leftrightarrow$$

$$\bar{\chi} = 64.$$

Γ. Η σχετική αθροιστική συχνότητα $F_i \%$, εκφράζει **το ποσοστό του πληθυσμού** που ικανοποιεί **μέχρι και την παρατήρηση i** άρα εκφράζει την αντίστοιχη πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο.

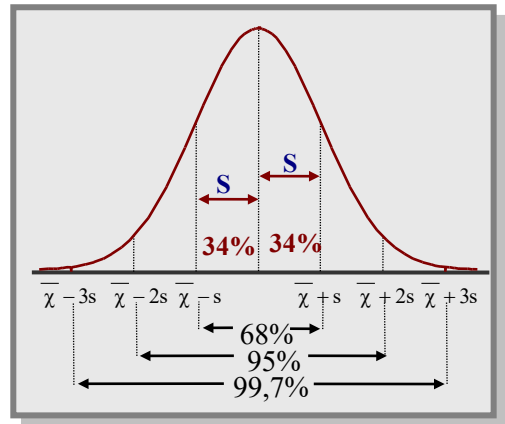
α. $P(\text{να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά}) = F_2 \% = 50\%$, επειδή η παρατήρηση $t = 65$ κιλά ανήκει στην κλάση $[55 - 65)$ και πάντα με την προϋπόθεση πως πρόκειται για ομοιόμορφη κατανομή.

β. $P(55 \text{ κιλά} \leq \text{βάρος του μαθητή} < 75 \text{ κιλά}) =$

$$F_3 \% - F_2 \% = 90\% - 50\% = 40\%.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να σημειώσεις ότι : η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική, οπότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες και η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζεις είναι περίπου κανονική και έχει την εικόνα του σχήματος δίπλα :



- i) το 68 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
- ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

A. Ο μέσος χρόνος διαδρομής των μαθητών συμπίπτει με την διάμεσο, που από την εκφώνηση είναι τα 12 λεπτά (το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά) άρα $\bar{x} = 12$.

Επειδή $16\% = 50\% - 34\%$ άρα το 16% που χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά είναι προφανές, με βάση και το σχήμα πιο πάνω, ότι αναφέρεται στο διάστημα $(0, \bar{x} - s)$, άρα $\bar{x} - s = 10 \Leftrightarrow 12 - s = 10 \Leftrightarrow s = 2$.

B. Για να εξετάσεις, αν το δείγμα είναι ομοιογενές θα πρέπει να βρεις τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{12} \cong 0,16 = 16\%$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αιτιολογία

Γ. Επειδή $s = 2$ λεπτά και $\bar{\chi} = 12$ άρα $\bar{\chi} + s = 14$, $\bar{\chi} + 2s = 16$ και επειδή στο διάστημα $[\bar{\chi} + s, \bar{\chi} + 2s] = [14, 16]$ ανήκει το $47,5\% - 34\% = 13,5\%$ άρα από 14 έως 16 λεπτά κάνουν : $4000 \cdot 13,5\% = 4000 \cdot 0,135 = 540$ παιδιά.

Δ. Όταν σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής προστίθεται ένας (θετικός ή αρνητικός) αριθμός c τότε η νέα μέση τιμή $\bar{\chi}'$ είναι $\bar{\chi}' = \bar{\chi} + c$, ενώ η τυπική απόκλιση s δεν μεταβάλλεται.

Άρα $\bar{\chi}' = 12 + 5 = 17$ και επομένως ο νέος συντελεστής μεταβολής CV' είναι

$$CV' = \frac{s}{\bar{\chi}'} = \frac{2}{17}, \text{ άρα η μεταβολή θα είναι : } CV' - CV = \frac{2}{17} - \frac{1}{6} = -\frac{5}{102} \cong -0,05.$$

18.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές

Σάββατο 30 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Τιμές Θερμοκρασίας χ_i	Πλήθος Ημερών v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i
22	2	2
23	4	6
24	6	12
25	3	15
26	2	17
27	3	20

Α. α. Αν χ , ψ είναι οι συχνότητες των θερμοκρασιών 24 και 25 αντίστοιχα, τότε : $1^{ov} \quad 2 + 4 + \chi + \psi + 2 + 3 = 20 \Leftrightarrow \chi + \psi = 9. \quad (1)$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$2^{\text{ov}} \quad \bar{\chi} = 24,4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 22 + 4 \cdot 23 + \chi \cdot 24 + \psi \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 27}{20} = 24,4 \Leftrightarrow$$

$$44 + 92 + 24\chi + 25\psi + 52 + 81 = 488 \Leftrightarrow 24\chi + 25\psi = 488 - 269 \Leftrightarrow$$

$$24\chi + 25\psi = 219. \quad (2) \quad \text{Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα} \begin{cases} \chi + \psi = 9 \\ 24\chi + 25\psi = 219 \end{cases},$$

το οποίο αν λυθεί δίνει $\begin{cases} \chi = 6 \\ \psi = 3 \end{cases}.$

β. Προφανώς από τον συμπληρωμένο πίνακα είναι :

Επικρατούσα τιμή η θερμοκρασία των 24 βαθμών και επειδή το $n = 20$

$$(20 \text{ πρώτες ημέρες του Μαΐου}) \text{ άρα } \delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{2} = \frac{24 + 24}{2} \text{ άρα } \delta = 24.$$

Β. Επειδή $n = 20$ άρα $\delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{2}$, αν η διάμεσος είναι $24,5^\circ \text{C}$, τότε θα

είναι $t_{10} = 24$ και $t_{11} = 25$. Αν χ η συχνότητα της θερμοκρασίας 24 τότε για να

είναι $t_{10} = 24$ και ταυτόχρονα $t_{11} = 25$ θα πρέπει $2 + 4 + \chi = 10 \Leftrightarrow \chi = 4$ οπότε

αν ψ η συχνότητα τη θερμοκρασίας 25 θα είναι $2 + 4 + \chi + \psi + 2 + 3 = 20 \Leftrightarrow$

$$\chi + \psi = 9 \Leftrightarrow \psi = 5.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Από την εκφώνηση είναι μάλλον προφανές, ότι πρόκειται για ομαδοποιημένη παρατήρηση με κλάσεις, κεντρικές τιμές, συχνότητες και αθροιστικές συχνότητες όπως φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα :

Βάρος σε κιλά [-)	Κεντρική τιμή χ_i	Συχνότητ a v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i
11 – 14	12,5	8	8
14 – 17	15,5	16	24
17 – 20	18,5	24	48
20 – 23	21,5	20	68
23 – 26	24,5	12	80
Σύνολο		80	

Αιβαδειά

α. Επειδή 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, άρα $v_1 = N_1 = 8$, επειδή το 30% των επιβατών, έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, άρα $N_2 = 30\% \cdot 80 = 24$, άρα $v_2 = 24 - 8 = 16$, επειδή 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά άρα $N_3 = 48$, $v_3 = 48 - N_2 = 24$ και επειδή το 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά άρα είναι $v_5 = 15\% \cdot 80 = 12$ και $N_5 = 80$, γιατί η κλάση $[23 - 26)$ είναι η τελευταία, επομένως $v_4 = 80 - 8 - 16 - 24 - 12 = 20$, άρα $N_4 = 68$.

β. Η αθροιστική συχνότητα της κλάσης $[17 - 20)$ είναι $N_3 = 48$ (από την εκφώνηση και τον πίνακα).

Άρα βάρος μεγαλύτερο από 20 κιλά μεταφέρουν $80 - 48 = 32$ επιβάτες άρα το ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής που έχει πρόσθετη

οικονομική επιβάρυνση είναι $\frac{32}{80} 100\% = 40\%$.

$$\gamma. \quad \alpha_1 = \frac{v_1}{80} 360^\circ = \frac{8}{80} 360^\circ = 36^\circ, \quad \alpha_2 = \frac{v_2}{80} 360^\circ = \frac{16}{80} 360^\circ = 72^\circ,$$

$$\alpha_3 = \frac{v_3}{80} 360^\circ = \frac{24}{80} 360^\circ = 108^\circ, \quad \alpha_4 = \frac{v_4}{80} 360^\circ = \frac{20}{80} 360^\circ = 90^\circ \text{ και}$$

$$\alpha_5 = 360^\circ - 36 - 72 - 108 - 90 = 54^\circ.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ το ενδεχόμενο να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα, τότε

$$\alpha. \quad P(A) = \frac{340}{400} = \frac{17}{20} = 0,85 \text{ και } P(\Gamma) = \frac{240}{400} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Επειδή $P(A) + P(\Gamma) = 0,85 + 0,6 = 1,45 \Leftrightarrow P(A) + P(\Gamma) > 1$ άρα τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Είναι $P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{3}{5} - P(A \cap \Gamma) \leq \frac{3}{5}$

γ. Έστω B το ενδεχόμενο «ο μαθητής να παρακολουθεί **μόνο** την αγγλική γλώσσα», τότε : $P(B) = P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma)$ (1).

Επειδή κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί **τουλάχιστον** μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες άρα $P(A \cup \Gamma) = 1$, από τη θεωρία είναι :

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow 0,85 + 0,6 - P(A \cap \Gamma) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap \Gamma) = 0,45, \text{ επομένως η (1) γίνεται } P(B) = P(A - \Gamma) = 0,85 - 0,45 \Leftrightarrow$$

$$P(B) = P(A - \Gamma) = 0,4.$$

δ. Έστω Δ το ενδεχόμενο «ο μαθητής να παρακολουθεί **μία μόνο** ξένη γλώσσα από αυτές», τότε : $P(\Delta) = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A)$ (2).

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι : $P(B) = P(A - \Gamma) = 0,4$, υπολογίζεις με τον ίδιο τρόπο και το : $P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 0,6 - 0,45 \Leftrightarrow$

$$P(\Gamma - A) = 0,15.$$

Άρα από την (2) είναι : $P(\Delta) = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = 0,4 + 0,15 = 0,55.$

19.

Εσπερινά 2001 – Επαναληπτικές

Τρίτη 10 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Σ, β. Λ., γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ.

B. Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται πιο κάτω :

Αιβαδειά

Αριθμός παιδιών χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
0	4	0,1	4	0,1
1	12	0,3	16	0,4
2	14	0,35	30	0,75
3	8	0,2	38	0,95
4	2	0,05	40	1
Σύνολο:	40	1		

✓ Είναι : $f_i = \frac{v_i}{v}$, άρα :

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0,1, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{12}{40} = 0,3, \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0,35,$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{40} = 0,2, \quad f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{2}{40} = 0,05.$$

✓ Είναι : $N_1 = v_1 = 4$ και $N_i = N_{i-1} + v_i$, άρα :

$$N_2 = 4 + 12 = 16, \quad N_3 = 16 + 14 = 30, \quad N_4 = 30 + 8 = 38, \quad N_5 = 38 + 2 = 40.$$

✓ Είναι : $F_1 = f_1 = 0,1$ και $F_i = F_{i-1} + f_i$, άρα :

$$F_2 = 0,1 + 0,3 = 0,4, \quad F_3 = 0,4 + 0,35 = 0,75, \quad F_4 = 0,75 + 0,2 = 0,95,$$

$$F_5 = 0,95 + 0,05 = 1.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω ότι οι βαθμοί επτά μαθητών στο δεύτερο τετράμηνο στα Μαθηματικά ήταν : 19, 10, 16, 9, 20, α , β και η μέση βαθμολογία τους (μέσος όρος) 14.

Έστω, επί πλέον, ότι ισχύει η σχέση $\alpha = 2\beta$ (1) τότε :

$$\alpha. \quad \bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{9+10+16+19+20+\alpha+\beta}{7} = 14 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 74 = 98 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 24 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα $\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha + \beta = 24 \end{cases}$ το οποίο δίνει $\begin{cases} \alpha = 16 \\ \beta = 8 \end{cases}$

β. Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 7$ άρα $\delta = t_4$, Οι βαθμοί βαλμένοι σε αύξουσα σειρά είναι : 8, 9, 10, 16, 16, 19, 20, άρα $\delta = t_4 = 16$.

Η επικρατούσα τιμή είναι ο βαθμός 16.

20.**Εσπερινά 2002****Δευτέρα 20 Μαΐου****ΘΕΜΑ 3^ο**

Τα αποτελέσματα των εκλογών στο συγκεκριμένο εκλογικό τμήμα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

Κόμμα χ_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i
A	75	0,15
B	150	0,30
Γ	175	0,35
Δ	100	0,2
Σύνολο	500	1

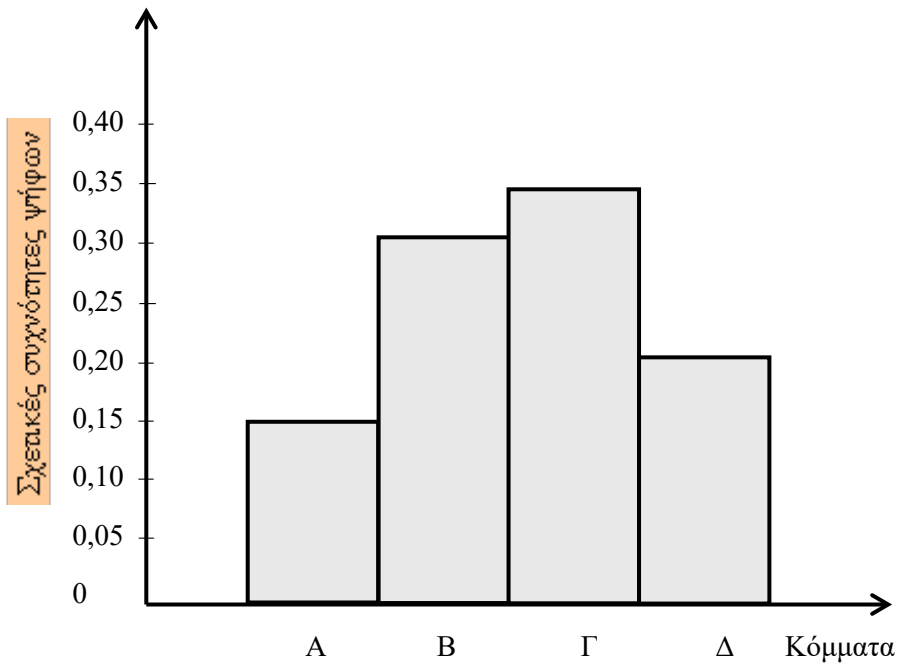
Αιτιολογία

α. Είναι: $f_i = \frac{v_i}{v}$, άρα: $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,30 = \frac{150}{v} \Leftrightarrow v = \frac{150}{0,30} = 500$

β. Είναι: $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$, άρα: $v_1 = 500 \cdot 0,15 = 75$,

$v_3 = 500 \cdot 0,35 = 175$ και $v_4 = 500 - 75 - 150 - 175 = 100$

γ. $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{100}{500} = 0,2$ άρα :



ΘΕΜΑ 4^ο

α. $\bar{\chi}_A = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} t_i = 7200$.

β. $\bar{\chi}_B = \frac{2 \cdot 900 + 920 + 930 + 940 + 945 + 950 + 975 + 980 + 1060}{10} = \frac{9500}{10} \Leftrightarrow$

$\bar{\chi}_B = 950$.

$R_B = 1060 - 900 = 160$, επικρατούσα τιμή, προφανώς είναι τα 900 €.

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Αν $\overline{\chi'}$ είναι η μέση τιμή των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση, $\sum_{i=1}^{10} t_i = 7200$ είναι το άθροισμα όλων των μισθών του τμήματος Α

και $\sum_{i=1}^{10} t'_i = 9500$ είναι το άθροισμα όλων των μισθών του τμήματος Β τότε :

$$\overline{\chi'} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i + \sum_{i=1}^{10} t'_i}{20} = \frac{7200 + 9500}{20} \Leftrightarrow \overline{\chi'} = 835 \text{ €}.$$

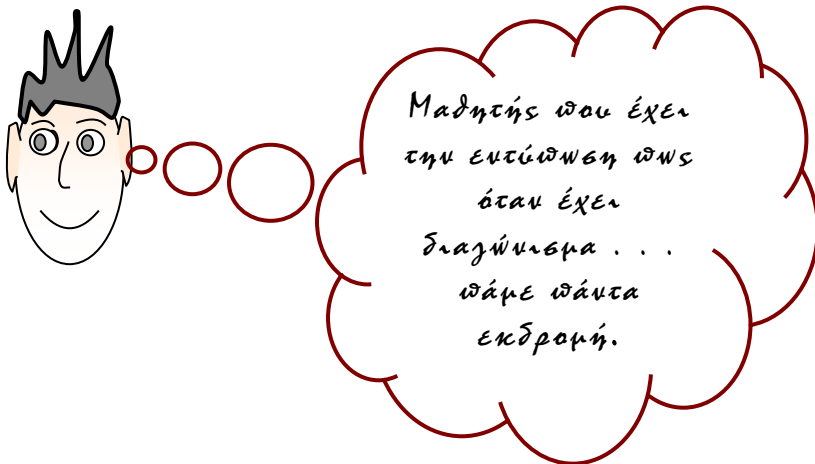
Αφού ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος Α είναι 900 ευρώ άρα οι υπόλοιποι μισθοί $t_1, t_2, \dots, t_9 < 900$ άρα αν βάλεις όλους τους μισθούς σε σειρά

μεγέθους θα είναι : $\underbrace{t_1, t_2, \dots, t_9, t_{10}}_{\text{τμήμα Α}} = 900$,

$\underbrace{t_{11} = 900, 900, 920, 930, 940, 945, 950, 975, 980, t_{20} = 1060}_{\text{τμήμα Β}}$ και επειδή το

μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$ άρα θα είναι $\delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{2} = \frac{900 + 900}{2} \Leftrightarrow$

$\delta = 900.$



21.

πανελλήνιες 2002

Τρίτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Ας υποθέσουμε ότι $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α., β., γ. Θεωρία.

B. 1. Θεωρία

B. 2. α. Θεωρία.

β. i) $P(\Omega) = 1$ και ii) $P(\emptyset) = 0$.

*** Σχεδόν ίδιο θέμα με τα Εσπερινά 2000

ΘΕΜΑ 3^ο

α.
$$\bar{\chi} = \frac{8+9+10+13+13+14+14+15+16+18}{10} = \frac{130}{10} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 13.$$

Αν βάλεις όλες τις τιμές σε σειρά μεγέθους θα είναι :

8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18.

Και επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 10$ άρα θα είναι

$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{13+14}{2} \Leftrightarrow \delta = 13,5 \text{ €}.$$

Δυο επικρατούσε τιμές οι 13 και 14.

β. $R = 18 - 8 = 10 \text{ €}.$

Τυπική απόκλιση

1ος τρόπος θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο
$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}{n} \right\}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

επειδή το $\sum_{i=1}^v t_i = 10 \cdot \bar{\chi} = 130$ είναι έτοιμο από τον υπολογισμό της $\bar{\chi}$

Έτσι λοιπόν είναι : $\frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i\right)^2}{v} = \frac{(130)^2}{10} = \frac{16900}{10} = 1690$ και

$$\sum_{i=1}^v t_i^2 = 8^2 + 9^2 + 10^2 + 13^2 + 13^2 + 14^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 18^2 =$$

$$64 + 81 + 100 + 2 \cdot 169 + 2 \cdot 196 + 225 + 256 + 324 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v t_i^2 = 1780.$$

Άρα $s^2 = \frac{1}{10}(1780 - 1690) = \frac{90}{10} = 9$, άρα $s = \sqrt{s^2} = 3$.

2^{ος} τρόπος θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2$,

$$\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2 = (8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 +$$

$$(14-13)^2 + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2 =$$

$$5^2 + 4^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 25 + 16 + 9 + 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 90$$

Άρα $s^2 = \frac{1}{10} \cdot 90 = 9$ άρα $s = \sqrt{s^2} = 3$.

Ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV = \frac{s}{\bar{\chi}} = \frac{3}{13} \cong 0,23 = 23\%$.

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, τότε θα πολλαπλασιαστούν επί 0,9 και όταν κάθε τιμή μιας μεταβλητής πολλαπλασιασθεί επί ένα (θετικό ή αρνητικό) αριθμό c τότε η νέα μέση τιμή $\bar{\chi}'$ είναι $\bar{\chi}' = c \cdot \bar{\chi}$, ενώ η τυπική απόκλιση s γίνεται $s' = |c| \cdot s$.

Άρα $\bar{\chi}' = 0,9 \cdot \bar{\chi}$ και $s' = |0,9| \cdot s = 0,9 \cdot s$, επομένως ο νέος συντελεστής μεταβολής CV' είναι

$$CV' = \frac{s'}{\bar{\chi}'} = \frac{0,9 \cdot s}{0,9 \cdot \bar{\chi}} = CV, \text{ άρα ΔΕΝ θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.}$$

Αιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B).$$

Έστω ακόμα η συνάρτηση: $f(\chi) = (\chi - P(A \cup B))^3 - (\chi - P(A \cap B))^3$, $\chi \in \mathbb{R}$.

$$\alpha. \quad P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \neq P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$$

$$\beta. \quad \text{Είναι } f'(\chi) = \left[(\chi - P(A \cup B))^3 \right]' - \left[(\chi - P(A \cap B))^3 \right]' = \\ 3(\chi - P(A \cup B))^2 \left[(\chi - P(A \cup B)) \right]' - 3(\chi - P(A \cap B))^2 \left[(\chi - P(A \cap B)) \right]' = \\ 3(\chi - P(A \cup B))^2 - 3(\chi - P(A \cap B))^2 = 3 \left[(\chi - P(A \cup B))^2 - (\chi - P(A \cap B))^2 \right] \\ = 3(\chi - P(A \cup B) + \chi - P(A \cap B))(\chi - P(A \cup B) - \chi + P(A \cap B)) \Leftrightarrow \\ f'(\chi) = 3(2\chi - P(A \cup B) - P(A \cap B))(-P(A \cup B) + P(A \cap B)).$$

Είναι $A \cap B \subseteq A \cup B \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ και επειδή από το **α**.

ερώτημα είναι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ άρα

$$P(A \cap B) < P(A \cup B) \Leftrightarrow -P(A \cup B) + P(A \cap B) < 0 \quad (1).$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 3(2\chi - P(A \cup B) - P(A \cap B))(-P(A \cup B) + P(A \cap B)) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\chi - P(A \cup B) - P(A \cap B)) \leq 0 \Leftrightarrow 2\chi \leq P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

$$\text{Τελικά } f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq \frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{2} = \frac{P(A) + P(B)}{2}.$$

Άρα για την $f(\chi)$ ισχύει ο

πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	$\frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{2}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\chi = \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cap B) = 0$ και

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$$\checkmark \quad f(P(A)) = (P(A) - P(A \cup B))^3 - (P(A) - 0)^3 =$$

$$(P(A) - (P(A) + P(B)))^3 - (P(A))^3 \Leftrightarrow f(P(A)) = -(P(B))^3 - (P(A))^3.$$

$$\checkmark \quad f(P(B)) = (P(B) - P(A \cup B))^3 - (P(B) - 0)^3 =$$

$$(P(B) - (P(A) + P(B)))^3 - (P(B))^3 \Leftrightarrow f(P(B)) = -(P(A))^3 - (P(B))^3.$$

$$\text{Άρα } f(P(A)) = f(P(B)).$$

22.

Εσπερινά 2002 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 1 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. 2., β. 4., γ. 1., δ. 5.

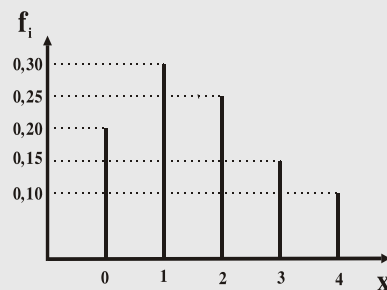
ΘΕΜΑ 2^ο

α. Επικρατούσα τιμή
(τιμή με την μεγαλύτερη συχνότητα)
είναι η 1 επίσκεψη ετησίως.

β. Είναι $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$, αν

v_2 είναι η συχνότητα της τιμής $\chi_2 = 1$, τότε $v_2 = v \cdot f_2$ άρα

$v_2 = 80 \cdot 0,30 = 24$, μαθητές πραγματοποιούν ακριβώς μια επίσκεψη.



Αιτιολογία

γ. Αν f_3 είναι η σχετική συχνότητα της τιμής $\chi_3 = 2$ τότε είναι $f_3 = 0,25$ άρα 25% είναι το ποσοστό των μαθητών που κάνει δύο επισκέψεις.

δ. Αν f_3, f_4, f_5 είναι η σχετικές συχνότητες των τιμών $\chi_3 = 2, \chi_4 = 3, \chi_5 = 4$ αντίστοιχα τότε είναι $f_3 + f_4 + f_5 = 0,25 + 0,15 + 0,10 = 0,50$ άρα 50% είναι το ποσοστό των μαθητών που κάνει δύο τουλάχιστον επισκέψεις.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, από τον πίνακα, η συχνότητα και η σχετική συχνότητα

της τιμής $\chi_5 = 5$ είναι $f_5 = 0,1$ και $v_5 = 2$, άρα θα είναι

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{2}{v} \text{ άρα } v = 20.$$

β. Επειδή $v = 20$ άρα η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα της 10^{ης} και 11^{ης} τιμής. Παρατήρησε ότι $\delta = 2,5$, αυτό σημαίνει ότι 10 τιμή είναι η $\chi_2 = 2$ και 11^η τιμή η $\chi_3 = 3$, άρα η $\chi_2 = 2$ έχει συχνότητα 2.

γ. Έστω $\overline{\chi} = 2,5$ και $\delta = 2,5$

Από την εκφώνηση είναι $v_1 = 8$ και $v_5 = 2$, από το β. ερώτημα είναι $v_2 = 2$ και για τα v_3, v_4 θα ισχύουν τα εξής: $v_3 + v_4 = 20 - 2 - 2 - 8 \Leftrightarrow v_3 + v_4 = 8$

$$(1) \text{ και } \overline{\chi} = 2,5 \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + v_3 \cdot 3 + v_4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{20} = 2,5 \Leftrightarrow$$

$$3v_3 + 4v_4 = 50 - 8 - 4 - 10 \Leftrightarrow 3v_3 + 4v_4 = 28 \quad (2). \text{ Οι (1) και (2) αποτελούν}$$

$$\text{σύστημα: } \begin{cases} v_3 + v_4 = 8 \\ 3v_3 + 4v_4 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_4 = 8 - v_3 \\ 3v_3 + 4(8 - v_3) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_4 = 8 - v_3 \\ -v_3 + 32 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v_3 = 4 \\ v_4 = 4 \end{cases}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Από τον τύπο: $f_i = \frac{v_i}{v}$ και από τον πίνακα βρίσκεις : $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{8}{20} = 0,4$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{2}{20} = 0,1, f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{4}{20} = 0,2, f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,2$$

Ο Πίνακας συμπληρωμένος .

Τιμή χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
1	8	0,4
2	2	0,1
3	4	0,2
4	4	0,2
5	2	0,1
Σύνολο	20	1

23.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Θεωρία.

B. 2. Εάν σε κάθε τιμή $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_v$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_v$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο** που

βρίσκεται από τον τύπο
$$\bar{\chi} = \frac{\chi_1 w_1 + \chi_2 w_2 + \dots + \chi_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v}$$

Αιβαδειά

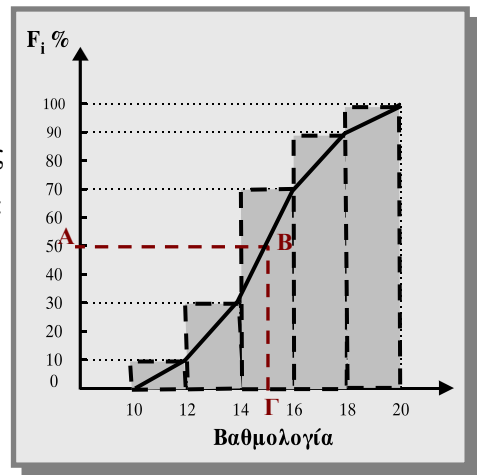
ΘΕΜΑ 3^ο

Σύμφωνα με το πνεύμα του σχολικού βιβλίου, στο οποίο έχει στηριχθεί η άσκηση, θα θεωρήσεις ότι πρόκειται για ομαδοποιημένη κατανομή και μάλιστα **ομοιόμορφη κατανομή** με κλάσεις $[10, 12)$, $[12, 14)$, $[14, 16)$, $[16, 18)$, $[18, 20)$, με κέντρα $\chi_1 = 11$, $\chi_2 = 13$, $\chi_3 = 15$, $\chi_4 = 17$, $\chi_5 = 19$.

α. Επειδή για να κατασκευάσεις το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ενώνεις τα δεξιά άκρα των πάνω βάσεων του ραβδογράμματος άρα το σχήμα γίνεται όπως το διπλανό : Από το διπλανό λοιπόν σχήμα είναι προφανές ότι :

✓ η κλάση $[10, 12)$ έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1 = 10\%$, άρα και $f_1 = F_1 = 10\%$

✓ η κλάση $[12, 14)$ έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_2 = 30\%$, άρα και $f_2 = F_2 - F_1 = 20\%$



Επειδή 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14

$$\text{άρα : } f_2 \% = \frac{v_1}{v} 100\% \Leftrightarrow 20\% = \frac{10}{v} 100\% \Leftrightarrow v = \frac{1000}{20} = 50$$

β. Επειδή η κατανομή έχει θεωρηθεί ως ομοιόμορφη, μπορείς να υποθέσεις ότι η κάθε κλάση αντιπροσωπεύεται από το κέντρο της . Επειδή η διάμεσος αντιστοιχεί σε αθροιστική συχνότητα 50%, θα ακολουθήσεις την διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$ και θα διαπιστώσεις ότι $\delta = \chi_3 = 15$

γ. Από τα προηγούμενα είναι : $f_1 = F_1 = 10\% = 0,1$ και

$f_2 = F_2 - F_1 = 20\% = 0,2$, με όμοιο τρόπο έχεις

Δαμιανός Μωραΐτης

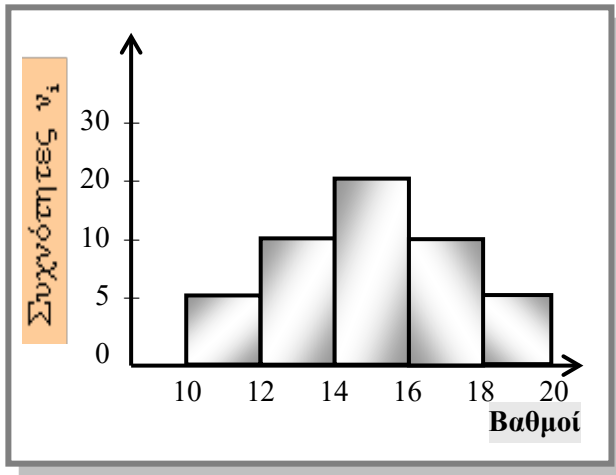
$$f_3 = F_3 - F_2 = 70\% - 30\% = 40\% = 0,4, \quad f_4 = F_4 - F_3 = 90\% - 70\% = 20\% = 0,2$$

$$\text{και } f_5 = 100\% - F_4 = 100\% - 90\% = 10\% = 0,1$$

$$\text{Από } f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i \text{ άρα } v_1 = 50 \cdot 0,1 = 5, \quad v_2 = 50 \cdot 0,2 = 10,$$

$$v_3 = 50 \cdot 0,4 = 20, \quad v_4 = 50 \cdot 0,2 = 10, \quad v_5 = 50 \cdot 0,1 = 5.$$

Άρα το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι :



δ. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Την πιθανότητα του A μπορείς να την βρεις τουλάχιστον με δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος : Η πιθανότητα μιας κλάσης ταυτίζεται με την σχετική συχνότητά της άρα $P([16, 18)) = f_4 = 20\% = 0,2$ και $P([18, 20)) = f_5 = 10\% = 0,1$, άρα

$$P(A) = P([16, 18)) + P([18, 20)) = 20\% + 10\% \Leftrightarrow P(A) = 30\% \text{ ή}$$

$$P(A) = 0,3$$

2ος τρόπος : Είναι $P(A) = 1 - P(A')$. όπου A' το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει βαθμό μικρότερο του 16.

Η πιθανότητα του A' ταυτίζεται με την σχετική αθροιστική συχνότητα της κλάσης $[14, 16)$, δηλαδή είναι : $P(A') = F_3 = 70\% = 0,7$ άρα

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,7 = 0,3 = 30\%$$

Αιτιολογία

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

A. **i)** Ο τύπος $P(\kappa) = \frac{1}{\kappa}$ δεν είναι κατάλληλος να εκφράσει την

πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου κ του Ω γιατί θα ήταν :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+4+1}{6} = \frac{14}{6} \cong 2,3 > 1 \text{ ΑΤΟΠΟ γιατί από τον}$$

αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας πρέπει $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$.

ii) Ο τύπος $P(\kappa) = \frac{1}{2^\kappa}$ δεν είναι κατάλληλος γιατί

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{32+16+8+1}{64} = \frac{57}{64} \cong 0,89 < 1$$

ΑΤΟΠΟ διότι ...

iii) Ο τύπος $P(\kappa) = \frac{1}{2\kappa}$ είναι κατάλληλος γιατί

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+3+2+1}{12} = \frac{12}{12} = 1.$$

B. α.

✓ Αν η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής X είναι $M_0 = 3$, τότε αποκλείεται το $\kappa = 1$, γιατί αλλιώς η επικρατούσα τιμή θα ήταν το 1, προφανώς $\kappa \neq 7$ γιατί $\kappa \in \Omega$. Άρα $A = \{2, 3, 6\}$.

✓ Αν η μέση τιμή $\bar{\chi} = 2,5 \Leftrightarrow 2,5 = \frac{2 \cdot 1 + 7 + 2 \cdot \kappa + 3 \cdot 3}{8} \Leftrightarrow$
 $2 \cdot \kappa + 18 = 8 \cdot 2,5 = 20 \Leftrightarrow \kappa = 1$ άρα $B = \{1\}$.

β. Είναι $P(\kappa) = \frac{1}{2\kappa}$, άρα προφανώς τα ενδεχόμενα του Ω δεν είναι ισοπίθανα.

Έτσι $P(A) = P(2) + P(3) + P(6) = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ άρα

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = P(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} \text{ άρα } P(B) = \frac{1}{2}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ή αλλιώς}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 3, 6\} = \Omega \text{ άρα } P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$$

Εσπερινά 2003

24.

Δευτέρα 19 Μαΐου

Β. α. Λάθος η σωστή απάντηση είναι 1 και όχι 100 θα ήταν **Σωστό** αν υποθέσεις ότι εννοεί τις σχετικές συχνότητες σε % και όχι τις σχετικές συχνότητες.

β. Σωστό , γ. Λάθος ,

δ. Σωστό γιατί έτσι ακριβώς αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

Βέβαια ο σωστός ορισμός είναι $CV = \frac{s}{|\bar{\chi}|} \cdot 100 \%$ για να είσαι

«καλυμμένος» και στην περίπτωση που είναι $\bar{\chi} < 0$ αλλά η περίπτωση $\bar{\chi} < 0$, αναφέρεται σε υποσημείωση του ορισμού.

ε. Σ .

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με την αθροιστική συχνότητα της τελευταίας κλάσης δηλαδή **$v = 40$** .

β. Είναι $v_1 = N_1 = 5$ και $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{40} = 0,125$, επίσης είναι

$$v_2 = N_2 - N_1 = 15 - 5 = 10 \text{ και } f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\%,$$

$$v_3 = N_3 - N_2 = 20 - 15 = 5 \text{ και } f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{5}{40} = 0,125 = 12,5\%,$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 35 - 20 = 15 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{40} = 0,375 = 37,5\%,$$

$$v_5 = N_5 - N_4 = 40 - 35 = 5 \text{ και } f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{5}{40} = 0,125 = 12,5\%.$$

Αιτιολογία

- γ. Τα κέντρα των κλάσεων είναι 1, 3, 5, 7, 9 και οι συχνότητες τους είναι 5, 10, 5, 15, 5 αντίστοιχα άρα

$$\bar{\chi} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot v_i = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 15 + 9 \cdot 5}{40} = \frac{210}{40} = 5,25 \text{ η μέση τιμή.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

- α. Είναι $\bar{\chi} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot v_i = \frac{0 \cdot 2 + 1 + 2 + 4 + 5}{6} = \frac{12}{6} = 2$ η μέση τιμή και

επειδή το δείγμα είναι με αύξουσα σειρά μεγέθους και $v = 6$ άρα

$$\delta = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1,5 \text{ η διάμεσος.}$$

- β. Αν $f(\chi) = (t_1 - \chi)^2 + (t_2 - \chi)^2 + (t_3 - \chi)^2 + (t_4 - \chi)^2 + (t_5 - \chi)^2 + (t_6 - \chi)^2$ τότε :

$$\text{i) } f'(\chi) = \left[(t_1 - \chi)^2 \right]' + \left[(t_2 - \chi)^2 \right]' + \left[(t_3 - \chi)^2 \right]' + \dots + \left[(t_6 - \chi)^2 \right]' \Leftrightarrow$$

Είναι $\left[(t_1 - \chi)^2 \right]' = 2(t_1 - \chi)(t_1 - \chi)' = -2(t_1 - \chi)$ και με όμοιο τρόπο τα

υπόλοιπα, οπότε είναι :

$$f'(\chi) = -2(t_1 - \chi) - 2(t_2 - \chi) - 2(t_3 - \chi) - 2(t_4 - \chi) - 2(t_5 - \chi) - 2(t_6 - \chi) \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = -2[(t_1 - \chi) + (t_2 - \chi) + (t_3 - \chi) + (t_4 - \chi) + (t_5 - \chi) + (t_6 - \chi)] , \text{ άρα}$$

$$f'(\bar{\chi}) = -2[(t_1 - \bar{\chi}) + (t_2 - \bar{\chi}) + (t_3 - \bar{\chi}) + (t_4 - \bar{\chi}) + (t_5 - \bar{\chi}) + (t_6 - \bar{\chi})] \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'(\bar{\chi}) = 0$ αφού, όπως αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο, είναι :

$$(t_1 - \bar{\chi}) + (t_2 - \bar{\chi}) + \dots + (t_6 - \bar{\chi}) = t_1 + t_2 + \dots + t_6 - 6\bar{\chi} =$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_6 - 6 \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_6}{6} = 0$$

$$\text{ii) } f(\bar{\chi}) = (t_1 - \bar{\chi})^2 + (t_2 - \bar{\chi})^2 + (t_3 - \bar{\chi})^2 + (t_4 - \bar{\chi})^2 + (t_5 - \bar{\chi})^2 + (t_6 - \bar{\chi})^2$$

$$\text{και } s^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (t_i - \bar{\chi})^2 \Leftrightarrow$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$6s^2 = \sum_{i=1}^6 (t_i - \bar{\chi})^2 = (t_1 - \bar{\chi})^2 + (t_2 - \bar{\chi})^2 + (t_3 - \bar{\chi})^2 + \dots + (t_6 - \bar{\chi})^2 \Leftrightarrow$$

$$f(\bar{\chi}) = 6s^2$$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\bar{\chi}, f(\bar{\chi}))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(\bar{\chi})$, άρα έχει

$$\text{εξίσωση } \psi = f'(\bar{\chi}) \cdot \chi + \beta \quad \begin{matrix} f'(\bar{\chi})=0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \psi = \beta \text{ και επειδή διέρχεται από το}$$

$$A(\bar{\chi}, f(\bar{\chi})) \text{ άρα θα έχει εξίσωση } \psi = f(\bar{\chi}) = 6s^2.$$

25.

πανελλήνιες 2003

Τρίτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Θεωρία.

Δ. α. Λάθος, β. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Έστω A το ενδεχόμενο ένα μέλος του συλλόγου των καθηγητών να είναι γυναίκα, είναι $P(A) = 55\%$.

Έστω B το ενδεχόμενο ένα μέλος του συλλόγου των καθηγητών να είναι φιλόλογος, είναι $P(B) = 40\%$.

Επειδή το 30% του συλλόγου είναι γυναίκες (και) φιλόλογοι, προφανώς είναι $P(A \cap B) = 30\%$, άρα τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα και αν με Γ συμβολίσεις το ενδεχόμενο γυναίκα ή φιλόλογος, τότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχεις :

$$P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 55\% + 40\% - 30\% \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = 65\% \text{ ή } P(A \cup B) = 0,65$$

Αιτιολογία

β. Το ενδεχόμενο γυναίκα και όχι φιλόλογος είναι το $A - B$ άρα

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 55\% - 30\% \Leftrightarrow P(A - B) = 25\% \text{ ή}$$

$$P(A - B) = 0,25$$

γ. Αφού το 40% του συλλόγου είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι, άρα οι άνδρες (και) φιλόλογοι θα είναι το 10% του συλλόγου.

δ. Το ενδεχόμενο να είναι άνδρας ένα μέλος του συλλόγου είναι το A' , συμπληρωματικό του A και επομένως θα είναι : $P(A') = 100\% - P(A) = 100\% - 55\% = 45\%$ επομένως το ενδεχόμενο άνδρας η φιλόλογος θα είναι η ένωση $A' \cup B$, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχεις :

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B), \text{ η τομή } A' \cap B \text{ είναι το ενδεχόμενο :}$$

να είναι κάποιος άνδρας και φιλόλογος, επομένως από το προηγούμενο ερώτημα είναι $P(A' \cap B) = 10\%$.

$$\text{Άρα } P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 45\% + 40\% - 10\% \Leftrightarrow$$

$$P(A' \cup B) = 45\% + 40\% - 10\% = 75\% \text{ ή } P(A' \cup B) = 0,75.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha. \quad \bar{\chi}_A = \frac{1+3+4+5+8+9}{6} = \frac{30}{6} \Leftrightarrow \bar{\chi}_A = 5, \text{ οι παρατηρήσεις της ομάδας}$$

$$A \text{ σε αύξουσα σειρά είναι : } 1, 3, 4, 5, 8, 9, \text{ άρα η διάμεσος } \delta_A = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{4+5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \delta_A = 4,5$$

$$\bar{\chi}_B = \frac{4+5+6+7+12+14}{6} = \frac{48}{6} \Leftrightarrow \bar{\chi}_B = 8, \text{ οι παρατηρήσεις της ομάδας B σε}$$

$$\text{αύξουσα σειρά είναι : } 4, 5, 6, 7, 12, 14, \text{ άρα η διάμεσος } \delta_B = \frac{t_3 + t_4}{2} = \frac{6+7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \delta_B = 6,5$$

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Για να μπορέσεις συγκρίνεις μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες πρέπει να υπολογίσεις τον συντελεστή μεταβολής της κάθε ομάδας

$$\begin{aligned} \text{Είναι } CV_A &= \frac{S_A}{\bar{\chi}_A}, \text{ και } S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (t_i - \bar{\chi})^2}{6} = \\ &= \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2}{6} = \\ &= \frac{16+4+1+0+9+16}{6} \Leftrightarrow S_A^2 = \frac{46}{6} \text{ άρα } S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{\frac{46}{6}} \cong 2,76, \text{ άρα} \\ CV_A &= \frac{2,76}{5} = 0,552 \Leftrightarrow CV_A \cong 55,2\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } CV_B &= \frac{S_B}{\bar{\chi}_B} \text{ και } S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 (t_i - \bar{\chi})^2}{6} = \\ &= \frac{(4-8)^2 + (5-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (12-8)^2 + (14-8)^2}{6} = \\ &= \frac{16+9+4+1+16+36}{6} \Leftrightarrow S_B^2 = \frac{88}{6} \text{ άρα } S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{\frac{88}{6}} \cong 3,69, \text{ άρα} \\ CV_B &= \frac{3,69}{8} = 0,461 \Leftrightarrow CV_B \cong 46,1\% \end{aligned}$$

Άρα η ομάδα Β έχει καλύτερη ομοιογένεια.

γ. ✓ Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% τότε οι νέες τιμές της ομάδας είναι το 120% των παλιών τιμών άρα η νέα μέση τιμή

$$\text{της ομάδας Α γίνεται : } \bar{\chi}'_A = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^K (t_i \cdot 120\%) = \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^K t_i \right) \cdot 120\% \Leftrightarrow$$

$$\bar{\chi}'_A = \bar{\chi}_A \cdot 120\% = 5 \cdot 120\% \Leftrightarrow \bar{\chi}'_A = \bar{\chi}_A \cdot 120\% = \bar{\chi}_A \cdot 1,2 = 6.$$

Ή με άλλο τρόπο, ελαφρώς κομπογιαννίτικο :

Αιθαδειά

$$\begin{aligned}\overline{\chi}'_A &= \frac{1 \cdot 120\% + 3 \cdot 120\% + 4 \cdot 120\% + 5 \cdot 120\% + 8 \cdot 120\% + 9 \cdot 120\%}{6} \\ &= \frac{1+3+4+5+8+9}{6} \cdot 120\% = \overline{\chi}_A \cdot 120\%.\end{aligned}$$

✓ Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας B προστεθεί το 5 τότε η νέα μέση

$$\text{τιμή της ομάδας B γίνεται : } \overline{\chi}'_B = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^K (t_i + 5) = \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^K t_i \right) + 5 \Leftrightarrow$$

$$\overline{\chi}'_B = \overline{\chi}_B + 5 = 8 + 5 \Leftrightarrow \overline{\chi}'_B = 13.$$

Ή με άλλο τρόπο, ελαφρώς κομπογιαννίτικο :

$$\begin{aligned}\overline{\chi}'_B &= \frac{(4+5) + (5+5) + (6+5) + (7+5) + (12+5) + (14+5)}{6} = \\ &= \frac{4+5+6+7+12+14+6 \cdot 5}{6} = \frac{4+5+6+7+12+14}{6} + \frac{6 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \\ &\overline{\chi}'_B = \overline{\chi}_B + 5 = 13.\end{aligned}$$

δ. Όταν οι τιμές μιας μεταβλητής πολλαπλασιαστούν επί έναν αριθμό α τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί |α|, οπότε αν τιμές της ομάδας A πολλαπλασιαστούν επί 120% = 1,2 τότε για την ομάδα A θα είναι :

$$S'_A = |1,2| S_A = 1,2 \cdot S_A \text{ και ο νέος συντελεστής μεταβολής :}$$

$$CV'_A = \frac{S'_A}{\overline{\chi}'_A} = \frac{1,2 \cdot S_A}{\overline{\chi}_A \cdot 1,2} \Leftrightarrow CV'_A = CV_A \cong 55,2\%.$$

Όταν στις τιμές μιας μεταβλητής προστεθεί ένας αριθμός α τότε η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει οπότε για την ομάδα B θα είναι : $S'_B = S_B = 3,82$ και ο νέος συντελεστής μεταβολής :

$$CV'_B = \frac{S'_B}{\overline{\chi}'_B} = \frac{S_B}{\overline{\chi}_B + 5} = \frac{3,69}{13} = 0,283 \Leftrightarrow CV'_B \cong 28,3\%$$

Άρα εξακολουθεί η ομάδα B να έχει καλύτερη ομοιογένεια.

26.

Ημερήσια Τ Ε Λ 2003 (Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση)**Τετάρτη 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

α. Είναι $\bar{\chi}_A = \frac{\omega + 2\omega + 2 \cdot 3\omega + 3 \cdot 3 + 5}{8} = \frac{9\omega + 14}{8}$, οπότε $\bar{\chi} = 4 \Leftrightarrow$

$$\frac{9\omega + 14}{8} = 4 \Leftrightarrow 9\omega + 14 = 32 \Leftrightarrow \omega = 2.$$

β. Αν $\omega = 2$ τότε οι τιμές γίνονται : 5, 3, 6, 3, 4, 3, 6, 2 και με αύξουσα σειρά 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

i) Το εύρος των τιμών είναι $R = 6 - 2 = 4$.

ii) Η επικρατούσα τιμή είναι η τιμή 3 (μεγαλύτερη συχνότητα).

iii) $\sum_{i=1}^8 t_i^2 = 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 6^2 = 4 + 27 + 16 + 25 + 72 = 144$ και

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^8 t_i\right)^2}{8} = \frac{(2 + 3 \cdot 3 + 4 + 5 + 2 \cdot 6)^2}{8} = \frac{(32)^2}{8} = \frac{1024}{8} = 128, \text{ άρα}$$

$$s^2 = \frac{1}{8} \left\{ \sum_{i=1}^8 t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^8 t_i\right)^2}{8} \right\} = \frac{1}{8} (144 - 128) \Leftrightarrow S^2 = 2 \text{ άρα}$$

η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2}$.

Μπορείς να χρησιμοποιήσεις και τον τύπο : $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2$,

$$\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2 = (2-4)^2 + 3 \cdot (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + 2 \cdot (6-4)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2 = 16 \text{ άρα } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2 \text{ άρα } s = \sqrt{2}.$$

Λιβαδειά

27.

Εσπερινά 2003 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 30 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Είναι :

$$\frac{(t_1 - \bar{\chi}) + (t_2 - \bar{\chi}) + \cdots + (t_v - \bar{\chi})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_v - v \cdot \bar{\chi}}{v} =$$

$$\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_v}{v} - \frac{v \cdot \bar{\chi}}{v} = \bar{\chi} - \bar{\chi} = 0$$

ΘΕΜΑ 2^ο

α.

Ημέρες απουσίας χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
0	10	0,5	10	0,5
1	5	0,25	15	0,75
2	2	0,1	17	0,85
3	2	0,1	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Σύνολο	20	1		

$$\beta. \quad \bar{\chi} = \frac{10 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4}{20} = \frac{19}{20} = 0,95$$

γ. Οι παρατηρήσεις βαλμένες με αύξουσα σειρά είναι :

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4.

Και επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 20$ άρα $\delta = \frac{t_{10} + t_{11}}{20} = \frac{0+1}{2} = 0,5$

28.

πανελλήνιες 2003 – επαναληπτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. και Δ. Θεωρία., Γ. β.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα.

Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

α. $P(A) = \frac{15}{30} = 0,5$, $P(B) = \frac{6}{30} = 0,2$.

β. Είναι $A \cap B = \{10, 20, 30\}$ άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$P(A \cup B) = \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{18}{30} = 0,6 \text{ άρα } P(A \cup B) = 0,6$$

γ. Το ενδεχόμενο B' περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 30 εκτός από τα πολλαπλάσια του 5 που είναι το σύνολο $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$.

Το ενδεχόμενο A περιλαμβάνει όλους τους άρτιους αριθμούς από το 1 έως το 30 άρα $A = \{2, 4, 6, \dots, 30\}$.

Άρα το ενδεχόμενο $A \cup B'$ περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 30 εκτός από τα **περιττά πολλαπλάσια του 5** και είναι

$$A \cup B' = \Omega - \{5, 15, 25\}.$$

Άρα $P(A \cup B') = P(\Omega) - P(\{5, 15, 25\}) = 1 - \frac{3}{30} = 1 - 0,1 = 0,9$

δ.

✓ Επειδή το A περιέχει τους άρτιους από το 1 – 30 άρα το A' περιέχει τους περιττούς από το 1 – 30, το B περιέχει τα πολλαπλάσια του 5 (άρτια και περιττά) άρα το $A' \cap B$ θα περιέχει τα περιττά πολλαπλάσια του 5 δηλαδή $A' \cap B = \{5, 15, 25\}$, άρα $P(A' \cap B) = \frac{3}{30} = 0,1$

✓ Επειδή το A περιέχει τους άρτιους από το 1 – 30, και το ενδεχόμενο B' περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 30 εκτός από τα πολλαπλάσια του 5 (που είναι το σύνολο $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$) άρα το ενδεχόμενο $A \cap B'$ περιέχει τους άρτιους αριθμούς από το 1 – 30 εκτός από τα άρτια πολλαπλάσια του 5 δηλαδή εκτός από τα 10, 20, 30

Αιτιολογία

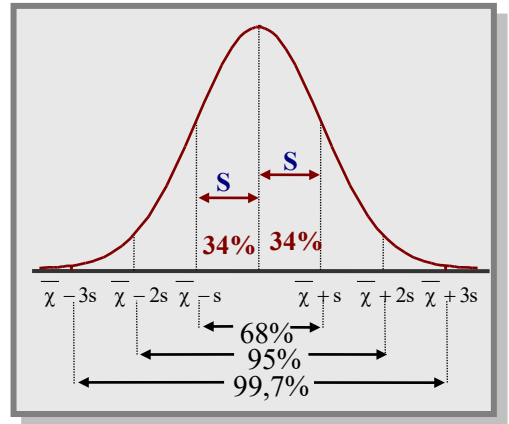
$$\text{Άρα } A \cap B' = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28\} \text{ άρα } P(A \cap B') = \frac{12}{30} = 0,4$$

Τα ενδεχόμενα $A' \cap B$ και $A \cap B'$ είναι προφανώς **ξένα μεταξύ τους** άρα

$$P((A' \cap B) \cup (A \cap B')) = P(A' \cap B) + P(A \cap B') = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Να σημειώσεις ότι : αφού η κατανομή του βάρους είναι κανονική ή περίπου κανονική, η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες και η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζεις είναι περίπου κανονική και έχει την εικόνα του σχήματος δίπλα :



i) το 68 % περίπου των παρατηρήσεων

βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

α. Το μέσο βάρος των μαθητών συμπίπτει με την διάμεσο, που από την εκφώνηση είναι τα 65 Kg (το 50 % των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg) άρα $\delta = \bar{x} = 65 \text{ Kg}$.

Επειδή 47,5 % των μαθητών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg και

$$47,5\% = \frac{95\%}{2}, \text{ άρα όπως φαίνεται και από το σχήμα θα είναι}$$

$$\bar{x} - 2s = 75 \Leftrightarrow 65 - 2s = 75 \Leftrightarrow 2s = 10 \text{ άρα } s = 5.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Για να εξετάσεις, αν το δείγμα είναι ομοιογενές θα πρέπει να βρεις τον συντελεστή μεταβολής CV.

Είναι $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{65} \cong 0,076 = 7,6\% < 10$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Επειδή $s = 5$ Kg και $\bar{x} = 65$ Kg άρα $55 \text{ Kg} = 65 \text{ Kg} - 10 \text{ Kg} = \bar{x} - 2s$,
 $70 \text{ Kg} = 65 \text{ Kg} + 5 \text{ Kg} = \bar{x} + s$, επομένως το ποσοστό που ζητάς είναι το ποσοστό που αντιστοιχεί στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$, και επειδή στο σημείο $\bar{x} - 2s$ αντιστοιχεί το $50\% - 47,5\% = 2,5\%$ και στο σημείο $\bar{x} + s$ αντιστοιχεί το $50\% + 34\% = 84\%$ άρα στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s) = (55, 70)$ ανήκει το $84\% - 2,5\% = 81,5\%$ άρα Βάρος από 55 Kg έως 70 Kg. έχει το 81,5% των μαθητών.

δ. Επειδή $s = 5$ Kg και $\bar{x} = 65$ Kg άρα $55 \text{ Kg} = 65 \text{ Kg} - 10 \text{ Kg} = \bar{x} - 2s$,
 $60 \text{ Kg} = 65 \text{ Kg} - 5 \text{ Kg} = \bar{x} - s$, επομένως οι 27 μαθητές αντιστοιχούν στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} - s) = (55, 60)$, και επειδή στο σημείο $\bar{x} - 2s$ αντιστοιχεί το $50\% - 47,5\% = 2,5\%$ και στο σημείο $\bar{x} - s$ αντιστοιχεί το $50\% - 34\% = 16\%$ άρα στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} - s) = (55, 60)$ ανήκει το $16\% - 2,5\% = 13,5\%$, επομένως :
 Οι 27 μαθητές αντιστοιχούν σε ποσοστό 13,5% άρα το σύνολο των μαθητών του δείγματος θα είναι : $v = \frac{27 \cdot 100}{13,5} = 200$.

29.

Εσπερινά 2004

Δευτέρα 17 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία, B. Θεωρία, Γ. Σ, Δ. Α.

Αιτιολογία

ΘΕΜΑ 3^ο

α.
$$\bar{\chi} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \chi_i \cdot v_i = \frac{4 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 30 + 3 \cdot 50}{10} = \frac{280}{10} = 28$$

β. Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι .

Εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	$\chi_i - \bar{\chi}$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i$
15	4	0,4	-13	169	676
20	2	0,2	-8	64	128
30	1	0,1	2	4	4
50	3	0,3	22	484	1452
ΣΥΝΟΛΟ	10	1			2260

γ. $\gamma_1)$
$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (\chi_i - \bar{\chi})^2 v_i = \frac{1}{10} 2260 \text{ άρα } s^2 = 226$$

$\gamma_2)$ Η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{226}$ άρα $s \approx 15,03$.

30.

πανελλήνιες 2004

Τρίτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. α. Λ, β. Λ, γ. Σ.

Δ. α. 4 β. 2 γ. 1.

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Από τον πίνακα είναι

✓ $v_1 = 60$ άρα $f_1 = \frac{v_1}{v} 100\% = \frac{60}{200} 100\% = 30\%$ και $N_1 = v_1 = 60$

✓ $f_2 = F_2 - F_1 = 68 - 30 = 38$, άρα $f_2 = \frac{v_2}{v} 100\% \Leftrightarrow \frac{v_2}{200} 100\% = 38\% \Leftrightarrow$

$v_2 = 76$ και $N_2 = 136$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ $v_3 = N_3 - N_2 = 180 - 136$ άρα $v_3 = 44$, επομένως

$$f_3 = \frac{v_3}{v} 100\% = \frac{44}{200} 100\% = 22\%, \quad F_3 = 90$$

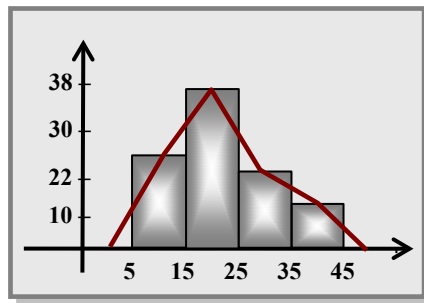
✓ $v_4 = 200 - N_3 = 200 - 180$ άρα $v_4 = 20$, επομένως

$$f_4 = \frac{v_4}{v} 100\% = \frac{20}{200} 100\% = 10\%, \quad F_4 = 100$$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος θα είναι :

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης γ_i	Συχνότητα σε χλμ. v_i	Σχετική συχνότητα f_i %	Αθροιστική Συχνότητα σε χλμ. N_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
Σύνολο		200	100		

B.



$$\Gamma. \bar{\chi} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^4 \chi_i \cdot v_i = \frac{60 \cdot 10 + 76 \cdot 20 + 44 \cdot 30 + 20 \cdot 40}{200} = \frac{4240}{200} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 21,2$$

Δ. Τα οχήματα που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων είναι αυτά που ανήκουν στις κλάσεις [25, 35) και [35, 45) άρα το πλήθος τους είναι $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$

Αιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Θα μελετήσεις την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Είναι $f'(x) = \left(2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10\right)' = 6x^2 - 5x + 1$ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \geq 0$,

ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{1}{3}$.

Άρα για την $f(x)$ ισχύει ο
πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από
τον διπλανό πίνακα η f' :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

μηδενίζεται όταν $x = \frac{1}{3}$ και $x = \frac{1}{2}$

είναι **θετική** όταν $x < \frac{1}{3}$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

είναι **αρνητική** όταν $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

είναι **θετική** όταν $x > \frac{1}{2}$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Η f παρουσιάζει τ. μ. στη θέση $x_1 = \frac{1}{3}$, και τ. ε. στη θέση $x_2 = \frac{1}{2}$ επομένως

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}.$$

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} \text{ να βρείτε τις πιθανότητες :}$$

i. Από τον απλό προσθετικό νόμο είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A - B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{iii. } P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P[(A \cap B)'] = \frac{5}{6}$$

$$\text{iv. } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) - P[(A - B) \cap (B - A)]$$

και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, άρα

$$P[(A - B) \cap (B - A)] = 0 \text{ οπότε } P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{2}.$$

31.

Εσπερινά 2004 – Επαναληπτικές**Δευτέρα 28 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Γ. Σ. Δ. Λ. Ε. Λ.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Οι μαθητές με βαθμό 20 – 40 είναι 5, οι μαθητές με βαθμό 40 – 60 είναι 8,

Οι μαθητές με βαθμό 60 – 80 είναι 6 και 1 (ένας) μαθητής με βαθμό από

80 – 100. Άρα συνολικά είναι $5 + 8 + 6 + 1 = 20$ μαθητές.

β. Οι μαθητές που έχουν βαθμό από 40 μόρια και πάνω είναι $8 + 6 + 1 = 15$ ή αλλιώς 20 (συνολικά) – 5 (με βαθμό κάτω του 40) = 15 έχουν βαθμό πάνω από 40 μόρια.

γ.

Κλάσεις [–)	Κέντρο κλάσης χ_i	Συχνότητα ν_i	$\chi_i \cdot \nu_i$
[20 , 40)	30	5	150
[40 , 60)	50	8	400
[60 , 80)	70	6	420
[80 , 100)	90	1	90
Σύνολο		20	1060

$$\text{Είναι } \bar{\chi} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \chi_i \cdot \nu_i = \frac{1}{20} 1060 = 53.$$

Αιβαδειό

ΘΕΜΑ 3^ο

α.
$$\overline{\chi} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = \frac{62 + 65 + 69 + 72 + 77}{5} = \frac{345}{5} = 69$$

β. Τα βάρη βαλμένα σε σειρά μεγέθους είναι : 62, 65, 69, 72, 77 και το μέγεθος $n = 5$ άρα η διάμεσος είναι $\delta = t_3 = 69$.

γ. Το εύρος των τιμών των βαρών είναι $R = 77 - 62 = 15$.

δ. Έστω $\overline{\chi'}$ το μέσο βάρος των *έξι μαθητών* και χ το βάρος του 6^{ου} μαθητή τότε θα είναι :

$$\overline{\chi'} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 t_i = \frac{62 + 65 + 69 + 72 + 77 + \chi}{6} = 72 \Leftrightarrow \frac{345 + \chi}{6} = 72 \Leftrightarrow$$

$$345 + \chi = 432 \Leftrightarrow \chi = 87 \text{ Kg.}$$

32.

πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία, B. α. και β. Θεωρία.

Γ. ε. Λ., στ. Σ.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_{25}$ οι βαθμοί των 25 μαθητών, άρα

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{25}}{25} = 14 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + \dots + t_{25} = 350 \quad (1).$$

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_{10}$ οι βαθμοί των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία .

Αφού η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη

μικρότερη βαθμολογία είναι 11, άρα θα είναι $\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{10}}{10} = 11 \Leftrightarrow$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{10} = 110 \quad (2).$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Από (1) και (2) προκύπτει ότι για τους βαθμούς των υπολοίπων 25 μαθητών θα

$$\text{ισχύει: } t_{11} + t_{12} + \dots + t_{25} = 350 - 110 = 240 \Leftrightarrow \frac{t_{11} + t_{12} + \dots + t_{25}}{15} = 16$$

είναι η μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπολοίπων μαθητών.

β. Έστω ότι το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών

μαθητών είναι 5000, τότε ο συντελεστή μεταβολής (CV) είναι $CV = \frac{s}{\bar{\chi}}$, τη

μέση τιμή την ξέρεις $\bar{\chi} = 14$.

$$\text{Για τη διακύμανση είναι: } s^2 = \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{25} \right\}, \text{ είναι } \sum_{i=1}^{25} t_i^2 = 5000,$$

σύμφωνα με την εκφώνηση και

$$\sum_{i=1}^{25} t_i = t_1 + t_2 + \dots + t_{25} = 350 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2 = 350^2 = 122500 \text{ άρα}$$

$$s^2 = \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^{25} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{25} t_i \right)^2}{25} \right\} = \frac{1}{25} \left(5000 - \frac{122500}{25} \right) = \frac{1}{25} (5000 - 4900) = \frac{100}{25} = 4,$$

$$\text{άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{Επομένως } CV = \frac{2}{14} = 0,142 = 14,2\%.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη

αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \kappa\chi^2 + 4\chi + 2$, όπου $\kappa \in \Omega$,

έστω ακόμη ότι: $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$ (1).

α. Έστω $P(4) = \chi$ τότε από την (1) θα είναι

$$P(1) = P(3) = P(5) = 4P(4) = 4\chi$$

$$\text{και } 2P(2) = 2P(6) = 4P(4) \Leftrightarrow P(2) = P(6) = 2P(4) = 2\chi.$$

Αιτιολογία

$$\text{Επειδή } P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Leftrightarrow 4\chi + 2\chi + 4\chi + \chi + 4\chi + 2\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$17\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{17}, \text{ άρα}$$

$$P(1) = P(3) = P(5) = \frac{4}{17}, P(4) = \frac{1}{17}, P(2) = P(6) = \frac{2}{17}.$$

β. Αν **A** : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός» τότε

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{17} + \frac{1}{17} + \frac{2}{17} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{17}.$$

Αν **B** : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός» τότε

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{17} = \frac{12}{17}$$

γ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει η f' να

είναι **μη αρνητική για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$** δηλαδή $f'(\chi) \geq 0$.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \kappa\chi^2 + 4\chi + 2,$$

$$f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - \kappa\chi^2 + 4\chi + 2 \right)' = \chi^2 - 2\kappa\chi + 4, \text{ άρα } f'(\chi) \geq 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 - 2\kappa\chi + 4 \geq 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα θα πρέπει η διακρίνουσα}$$

$$\Delta = (-2\kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4\kappa^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 \leq 4 \Leftrightarrow |\kappa| \leq 2$$

$$\text{άρα } \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq \kappa \leq 2 \\ \kappa \in \Omega \end{array} \right\} \text{ άρα } \kappa = 1, 2.$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \{1, 2\} \text{ άρα } P(\Gamma) = P(1) + P(2) = \frac{4}{17} + \frac{2}{17} \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{6}{17}.$$

33.

Εσπερινά 2005

Δευτέρα 23 Μαΐου

ΘΕΜΑ I^ο

Γ. α. Σ., β. Λ., ε. Λ.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

α. είναι $\alpha_1 = v_1 \frac{360^\circ}{v} \Leftrightarrow v_1 \frac{360^\circ}{20} = 72^\circ \Leftrightarrow 18v_1 = 72 \Leftrightarrow v_1 = 4$, άρα

$$v_3 = 20 - 4 - 6 - 2 \Leftrightarrow v_3 = 8$$

Ώρες παρακολούθησης χ_i	Συχνότητα	$\chi_i \cdot v_i$	$\chi_i^2 \cdot v_i$
2	4	8	16
3	6	18	54
9	8	72	648
11	2	22	242
Σύνολο	$v = 20$	120	960

$$\beta. s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{20} \left[960 - \frac{(120)^2}{20} \right] = \frac{1}{20} \left(960 - \frac{14400}{20} \right) =$$

$$\frac{1}{20} (960 - 720) = \frac{1}{20} 240 = 12 \text{ άρα } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{12} \Leftrightarrow s = 2\sqrt{3}.$$

γ. Είναι $CV = \frac{s}{\bar{\chi}}$. Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος είναι :

$$\bar{\chi} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot v_i = \frac{1}{20} 120 = 6 \text{ άρα } CV = \frac{s}{\bar{\chi}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} \cong \frac{3,46}{6} = 0,577 = 57,7\%.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi - 1$.

$$f'(\chi) = (2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi - 1)' = 6\chi^2 - 18\chi + 12 = 6(\chi^2 - 3\chi + 2)$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 3\chi + 2 \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 2$$

Άρα για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών

Αιβαδειά

χ	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

μηδενίζεται όταν $\chi = 1$ και $\chi = 2$

είναι θετική όταν $\chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

είναι αρνητική όταν $1 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$

είναι θετική όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τ. μ. στη θέση $\chi_1 = 1$, το $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 1 = 4$ και τ.

ε. στη θέση $\chi_2 = 2$ το $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 1 = 3$ επομένως $\alpha = 4$ και $\beta = 3$

β. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 4 + 5 + 3 + 2 + 1 = 15$

άρα η μέση τιμή είναι :

$$\bar{\chi} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \chi_i \cdot v_i = \frac{1}{15} (4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5) =$$

$$\frac{1}{20} (4 + 10 + 9 + 8 + 5) = \frac{36}{15} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 2,4,$$

Επειδή $n = 15$ άρα η διάμεσος $\delta = t_g = 2$.

γ. Οι μαθητές που εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες είναι, στην κυριολεξία, όλοι πλην ενός δηλαδή 14 μαθητές. .

34.

πανελλήνιες 2005

Σάββατο 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία. Β. α. Θεωρία, β. Θεωρία.

Γ. γ. Λάθος, δ. Λάθος

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 2^ο**α.**

Κλάσεις βαθ/γιας	Κέντρο κλάσης χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)	6	5	0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	0,2	15	0,3
[12, 16)	14	25	0,5	40	0,8
[16, 20)	18	10	0,2	50	1
Σύνολο		50	1		

$$\beta. \quad \bar{\chi} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \chi_i \cdot v_i = \frac{1}{50} (5 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 14 + 10 \cdot 18) =$$

$$\frac{1}{50} (30 + 100 + 350 + 180) = \frac{660}{50} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 13,2.$$

γ. Σύμφωνα με το τρέχον σχολικό βιβλίο κατά την ομαδοποίηση υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες και **οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση εκπροσωπούνται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή.**

Με αυτή την έννοια άλλωστε συμπληρώνουμε τις στήλες αθροιστικών συχνοτήτων. Άρα οι μαθητές που έχουν βαθμό μέχρι και 10 είναι

$$5 + 10 = 15 = N_2.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha. \quad \kappa = \lim_{\chi \rightarrow 5} \frac{3\chi - 15}{\chi^2 - 6\chi + 5} = \lim_{\chi \rightarrow 5} \frac{3(\chi - 5)}{(\chi - 5)(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 5} \frac{3}{\chi - 1} = \frac{3}{5 - 1} \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4}.$$

Αιβαδειά

β. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$ τότε $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$.

Επειδή $A \cap B \subseteq B \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$, και επειδή $P(A \cap B) \neq P(B)$ άρα $P(A \cap B) < P(B)$ (1).

$P(A \cap B), P(B) \in X$ άρα, κατ' αρχή αποκλείεται να είναι πιθανότητα το

$$\frac{5}{4} > 1, \text{ άρα με βάση και την (1) μένει } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{3}{4}.$$

γ. 1) Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{7}{8} = P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$P(A) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{8}$$

2) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι το

$$A - B, \text{ επομένως } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A - B) = \frac{1}{8}.$$

35.

Εσπερινά 2005 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 29 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. δ. Σ, ε. Σ,

ΘΕΜΑ 3^ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους.

Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 80$ και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2,6$.

x_i	v_i
1	12
2	33
3	10
4	25
Σύνολο	$n = 80$

Δαμιανός Μωραΐτης

α. $v = 80 \Leftrightarrow 12 + \mu + \lambda + 25 = 80 \Leftrightarrow \mu + \lambda = 43 \quad (1).$

$$\bar{\chi} = 2,6 \Leftrightarrow \frac{12 \cdot 1 + \mu \cdot 2 + \lambda \cdot 3 + 25 \cdot 4}{80} = 2,6 \Leftrightarrow 12 + 2\mu + 3\lambda + 100 = 208 \Leftrightarrow$$

$$2\mu + 3\lambda = 96 \quad (2). \quad \text{Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα}$$

$$\begin{cases} \mu + \lambda = 43 \\ 2\mu + 3\lambda = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 43 - \mu \\ 2\mu + 3(43 - \mu) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 43 - \mu \\ -\mu + 129 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 43 - \mu \\ \mu = 129 - 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 10 \\ \mu = 33 \end{cases}$$

β. Επειδή $v = 80$ άρα $\delta = \frac{t_{40} + t_{41}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$ επειδή η τιμή 1 έχει

συχνότητα 12 και η τιμή 2 έχει συχνότητα 33 άρα η 40^η και η 41^η τιμή είναι 2 (δες και πίνακα πιο κάτω).

γ. Ο πίνακας κατάλληλα συμπληρωμένος είναι :

χ_i	v_i	$\chi_i \cdot v_i$	$\chi_i^2 \cdot v_i$
1	12	12	12
2	33	66	132
3	10	30	90
4	25	100	400
Σύνολο	$v = 80$	208	634

β. Είναι $s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \chi_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{80} \left[634 - \frac{(208)^2}{80} \right] =$

$$\frac{1}{80} \left(634 - \frac{43264}{80} \right) = \frac{1}{80} (634 - 540,8) = \frac{93,2}{80} \quad \text{άρα } s^2 = 1,165.$$

Αιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Θα συγκρίνεις τους συντελεστές μεταβολής .

$$CV_A = \frac{s_A}{\chi_A} = \frac{125}{1.000} = 0,125 = 12,5\%, \quad CV_B = \frac{s_B}{\chi_B} = \frac{90}{800} = 0,112 = 11,2\%.$$

Άρα προφανώς η Ευρωπαϊκή εταιρεία έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.

β. Αν σε κάθε παρατήρηση της Αμερικανικής εταιρείας προστεθεί το

$$250 \text{ τότε η νέα μέση τιμή γίνεται: } \overline{\chi'}_A = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (t_i + 250) = \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^k t_i \right) + 250$$

$$\text{άρα } \overline{\chi'}_A = \overline{\chi}_A + 250 \Leftrightarrow \overline{\chi'}_A = 1250 \$ \text{ (δολάρια) και } s'_A = s_A = 125 \$.$$

Αν σε κάθε παρατήρηση της Ευρωπαϊκής εταιρείας γίνει αύξηση 20% τότε οι νέες τιμές της ομάδας είναι το 120% των παλιών τιμών άρα η νέα μέση

$$\text{τιμή γίνεται : } \overline{\chi'}_B = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (t_i \cdot 120\%) = \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^k t_i \right) \cdot 120\% \Leftrightarrow$$

$$\overline{\chi'}_B = \overline{\chi}_B \cdot 120\% = 800 \cdot 1,2 = 960 \text{ € και } s'_B = s_B \cdot 1,2 = 90 \cdot 1,2 = 108 \$.$$

γ. Όταν στις τιμές μιας μεταβλητής προστεθεί ένας αριθμός τότε η

τυπική απόκλιση δεν αλλάζει οπότε θα είναι : $S'_A = S_A = 12,5\%$ και

$$\text{ο νέος συντελεστής μεταβολής : } CV'_A = \frac{S'_A}{\chi'_A} = \frac{125}{1250} = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$CV'_A \cong 10\%$$

Όταν οι τιμές μιας μεταβλητής πολλαπλασιαστούν επί έναν αριθμό α τότε

η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί $|a|$, οπότε αν τιμές της

Ευρωπαϊκής εταιρείας πολλαπλασιαστούν επί $120\% = 0,12$ τότε

$S'_B = |0,12| S_B = 0,12 \cdot S_B$ και ο νέος συντελεστής μεταβολής :

$$CV'_B = \frac{S'_B}{\chi'_B} = \frac{0,12 \cdot S_B}{\chi_B \cdot 0,12} \Leftrightarrow CV'_B = CV_B \cong 11,2\%.$$

Άρα προφανώς, μετά της αυξήσεις η Αμερικανική εταιρεία έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.

Δαμιανός Μωραΐτης

36.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Σάββατο 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Αν $\overline{\chi} > 0$ τότε $CV = \frac{s}{\overline{\chi}}$ και αν $\overline{\chi} < 0$ τότε $CV = \frac{s}{|\overline{\chi}|}$

B. α. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος,

ε. Σωστό. Γιατί για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

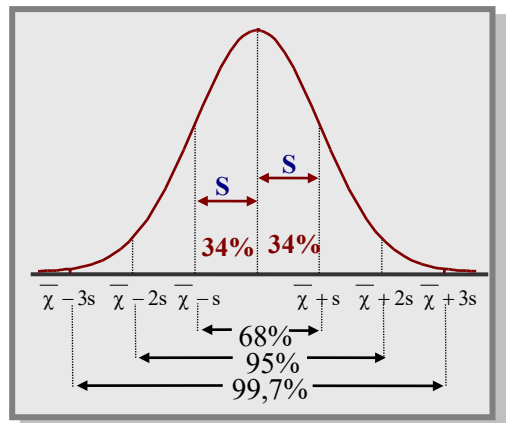
ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ και $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)}$, άρα

$$P(A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A) = N(B)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στην οποία το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20 και το 81,5 % των παρατηρήσεων να βρίσκεται στο διάστημα (16, 22).

Να σημειώσεις ότι αφού η κατανομή του βάρους είναι κανονική ή περίπου κανονική, η τυπική απόκλιση s έχει τις



παρακάτω ιδιότητες και η καμπύλη συχνотήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζεις είναι περίπου κανονική και έχει την εικόνα του σχήματος πιο πάνω:

i) το 68 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{\chi} - s, \bar{\chi} + s).$$

ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi} + 2s)$$

iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$$(\bar{\chi} - 3s, \bar{\chi} + 3s)$$

Αιβαδειά

α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το $\bar{\chi}$ αντιστοιχεί στο 50 % δηλαδή το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μικρότερη από το $\bar{\chi}$ και το 50 % των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη από το $\bar{\chi}$, άρα στην περίπτωση αυτή είναι $\bar{\chi} = 20$.

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 81,5 % = 34% + 47,5%, άρα πρόκειται για το διάστημα $(\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi} + s)$ οπότε

$(20 - 2s, 20 + s) = (16, 22)$, άρα $s = 2$ ή πρόκειται για το διάστημα

$$(\bar{\chi} - s, \bar{\chi} + 2s) \text{ οπότε } (20 - s, 20 + 2s) = (16, 22) \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - s = 16 \\ 20 + 2s = 22 \end{cases} \text{ που}$$

είναι αδύνατο. Άρα $\bar{\chi} = 20$ και $s = 2$.

β. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95 % περίπου των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα $(\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi} + 2s)$, άρα θα πρέπει

$$(\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi} + 2s) = (\bar{\chi} - \alpha s, \bar{\chi} + \alpha s), \text{ οπότε } \alpha = 2.$$

$$\gamma. f(\chi) = \frac{R}{2} \chi^2 - (\bar{\chi} + 4)\chi + 9s \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{R}{2} \chi^2 - (\bar{\chi} + 4)\chi + 9s \right)' = R\chi - \bar{\chi} - 4$$

άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow R\chi - \bar{\chi} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow R\chi \geq \bar{\chi} + 4$ και επειδή το εύρος R είναι

πάντοτε θετικό άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{\bar{\chi} + 4}{R}$.

Άρα για την $f(\chi)$ ισχύει ο

πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από

τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	$\frac{\bar{\chi} + 4}{R}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	-		+
$f(\chi)$			

μηδενίζεται όταν $\chi = \frac{\bar{\chi} + 4}{R}$, είναι αρνητική όταν $\chi < \frac{\bar{\chi} + 4}{R}$, άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{\bar{\chi} + 4}{R} \right)$

Δαμιανός Μωραΐτης

είναι **θετική** όταν $\chi > \frac{\bar{\chi} + 4}{R}$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο

$$\left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}, +\infty \right)$$

Η f παρουσιάζει τ. ε. στη θέση $\chi = \frac{\bar{\chi} + 4}{R}$, το $f\left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}\right)$. Είναι $s = 2$, $\bar{\chi} = 20$

$$\begin{aligned} \text{άρα } R = 6 \cdot s = 12, \text{ οπότε } f\left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}\right) &= \frac{R}{2} \left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}\right)^2 - (\bar{\chi} + 4) \left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}\right) + 9s \\ &= \frac{(\bar{\chi} + 4)^2}{2R} - \frac{(\bar{\chi} + 4)^2}{R} + 9s = \frac{24^2}{24} - \frac{24^2}{12} + 9 \cdot 2 = -\frac{24^2}{24} + 18 = -24 + 18 = -6 \end{aligned}$$

άρα τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{\bar{\chi} + 4}{R}\right) = -6$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. **1^{ος} τρόπος** $A - B = \{2, 6\}$ και $A \cap B = \{1, 3, 4\}$ άρα

$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ και επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, επομένως
 $B = \{1, 3, 4, 5\}$.

$$\text{Άρα } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ και } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Για να βρεις την $P(\Gamma)$ πρέπει πρώτα να βρεις το Γ με αναγραφή των στοιχείων του. Αρχικά να παρατηρήσεις πως $\chi \neq 1$ για να έχει νόημα το κλάσμα και στη συνέχεια ότι $\chi - 1 > 0$.

$$\text{Επίσης } \frac{\chi + 1}{\chi - 1} \geq 2 \Leftrightarrow \chi + 1 \geq 2(\chi - 1) \Leftrightarrow \chi + 1 \geq 2\chi - 2 \Leftrightarrow -\chi \geq -3 \Leftrightarrow \chi \leq 3$$

$$\text{άρα } \Gamma = \{2, 3\} \text{ άρα } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

$$\text{2^{ος} τρόπος } A - B = \{2, 6\} \text{ άρα } P(A - B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ και}$$

Αιτιολογία

$$A \cap B = \{1, 3, 4\} \text{ άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

$$\text{Είναι } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,2 = P(A) - 0,3 \Leftrightarrow$$

$$P(A) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

$$\text{Είναι } P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ και}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = 0,5 + P(B) - 0,3 \Leftrightarrow$$

$$P(B) = 0,6 - 0,5 + 0,3 = 0,4.$$

Για την $P(\Gamma)$ ισχύουν τα ίδια με πιο πάνω.

- β. Η πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ είναι η $P(B - \Gamma)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $B = \{1, 3, 4, 5\}$ και $\Gamma = \{2, 3\}$, άρα

$$B - \Gamma = \{1, 4, 5\} \text{ άρα } P(B - \Gamma) = \frac{N(B - \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

- γ. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ είναι το ενδεχόμενο $(B - \Gamma) \cup (\Gamma - B)$.

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $B = \{1, 3, 4, 5\}$ και $\Gamma = \{2, 3\}$,

$B - \Gamma = \{1, 4, 5\}$ άρα θα είναι $\Gamma - B = \{2\}$ άρα

$$(B - \Gamma) \cup (\Gamma - B) = \{1, 2, 4, 5\}.$$

$$\text{Άρα } P((B - \Gamma) \cup (\Gamma - B)) = \frac{N((B - \Gamma) \cup (\Gamma - B))}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

- δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, τότε θα είναι

$$s^2 = \frac{1}{3} \left\{ \sum_{i=1}^3 t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 t_i \right)^2}{3} \right\}, \quad \sum_{i=1}^3 t_i^2 = \lambda^2 + (3\lambda)^2 + (5\lambda)^2 = \lambda^2 + 9\lambda^2 + 25\lambda^2 = 35\lambda^2$$

$$\text{και } \frac{\left(\sum_{i=1}^3 t_i \right)^2}{3} = \frac{(\lambda + 3\lambda + 5\lambda)^2}{3} = \frac{(9\lambda)^2}{3} = \frac{81\lambda^2}{3} = 27\lambda^2, \text{ άρα}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$s^2 = \frac{1}{3} \left\{ \sum_{i=1}^3 t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 t_i \right)^2}{3} \right\} = \frac{1}{3} \{ 35\lambda^2 - 27\lambda^2 \} = \frac{8\lambda^2}{3}.$$

Αν είναι $s^2 > 24 \Leftrightarrow \frac{8\lambda^2}{3} > 24 \Leftrightarrow 8\lambda^2 > 72 \Leftrightarrow \lambda^2 > 9$ και

$\lambda \in \Omega$ άρα $\Delta = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ και επομένως $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{7}{10} = 0,7$

37.

Εσπερινά 2006**Τετάρτη 24 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

B) δ) Λ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα: 1, 2, 3, 3, 1.

α) $\bar{\chi} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{v} = \frac{1 + 2 + 3 + 3 + 1}{5} = \frac{10}{5} = 2$ και

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{5} \left[(t_1 - \bar{\chi})^2 + (t_2 - \bar{\chi})^2 + (t_3 - \bar{\chi})^2 + (t_4 - \bar{\chi})^2 + (t_5 - \bar{\chi})^2 \right] =$$

$$\frac{1}{5} \left[(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2 \right] = \frac{1}{5} (1+0+1+1+1) \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{4}{5}$$

β) Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι αντίστοιχα: 1, 1, 2, 3, 3

άρα η διάμεσος του δείγματος είναι $\delta = 2 = t_3$.

γ) Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής 3 είναι $v_3 = 2$ και η σχετική συχνότητα

είναι $f_3 = \frac{v_3}{5} = \frac{2}{5}$

Αιτιολογία

δ) Το εύρος του δείγματος είναι $R = 3 - 1 = 2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Σύμφωνα με την εκφώνηση η κατανομή είναι κανονική και $\bar{\chi} = 5$, $s = 1$.

I. α) Επειδή $\bar{\chi} - s = 5 - 1 = 4$ λεπτά και $\bar{\chi} + s = 5 + 1 = 6$ λεπτά, σύμφωνα με τις ιδιότητα της τυπικής απόκλισης σε κανονική κατανομής στο διάστημα από 4 έως 6 λεπτά $= (\bar{\chi} - s, \bar{\chi} + s)$ θα βρίσκεται περίπου το 68 % των παρατηρήσεων.

β) Επειδή $\bar{\chi} - 2s = 5 - 2 = 3$ λεπτά και $\bar{\chi} + s = 5 + 1 = 6$ λεπτά, σύμφωνα με τις ιδιότητα της τυπικής απόκλισης σε κανονική κατανομής το διάστημα από 3 έως 6 λεπτά $= (\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi}) \cup (\bar{\chi}, \bar{\chi} + s)$.

✓ Στο $(\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi})$ ανήκει περίπου το 47,5 % των παρατηρήσεων και

✓ $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + s)$ ανήκει περίπου το 34 % των παρατηρήσεων.

Επομένως στο διάστημα από 3 έως 6 λεπτά $= (\bar{\chi} - 2s, \bar{\chi}) \cup (\bar{\chi}, \bar{\chi} + s)$ θα βρίσκεται περίπου το $47,5 \% + 34 \% = 81,5 \%$ των παρατηρήσεων.

II. Η διάμεσος είναι $\delta = \bar{\chi} = 5$ και το εύρος $R = 6 \cdot s = 6 \cdot 1 = 6$.

III. $CV = \frac{s}{\bar{\chi}} = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$.

38.

πανελλήνιες 2006

Πέμπτη 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

B.α. Θεωρία.

Γ. β. Σωστό., δ. Λάθος.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 2^ο**α.** Είναι

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = v \Leftrightarrow (\alpha + 4) + (5\alpha + 8) + 4\alpha + (\alpha - 1) + 2\alpha = 50 \Leftrightarrow$$

$$13\alpha + 11 = 50 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = 3. \text{ Άρα ο πίνακας γίνεται :}$$

Αριθμός Βιβλίων χ_i	Αριθμός Μαθητών v_i
0	7
1	23
2	12
3	2
4	6
Σύνολο	50

$$\beta. \quad \bar{\chi} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \chi_i \cdot v_i = \frac{1}{50} (0 \cdot 7 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6) =$$

$$\frac{1}{50} (0 + 23 + 24 + 6 + 24) = \frac{77}{50} \Leftrightarrow \bar{\chi} = 1,54.$$

γ. Επειδή $v = 50$ άρα η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα της 25^{ης} και 26^{ης} τιμής. Επειδή η τιμή $\chi_1 = 0$ έχει συχνότητα 7 και η τιμή $\chi_2 = 2$ έχει συχνότητα 23 άρα η 25^η και 26^η παρατήρηση είναι 2 άρα διάμεσος

$$\delta = \frac{1+1}{2} = 1$$

δ. Έστω A το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3

$$\text{βιβλία, τότε } P(A) = P(3) + P(4) = \frac{2}{50} + \frac{6}{50} = \frac{8}{50} = 0,16 \Leftrightarrow$$

$$P(A) = 0,88 = 88\%$$

Αιβαδειά

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο χορευτικό όμιλο συμμετέχουν χ αγόρια και $(\chi + 4)^2 = \chi^2 + 8\chi + 16$

κορίτσια άρα συνολικά συμμετέχουν $\chi + \chi^2 + 8\chi + 16 = \chi^2 + 9\chi + 16$ παιδιά.

Αν Ω ο δειγματικός χώρος τότε $N(\Omega) = \chi^2 + 9\chi + 16$.

α. Έστω **A** το ενδεχόμενο να εκπροσωπήσει τον όμιλο αγόρι τότε είναι :

$$N(A) = \chi \text{ οπότε } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\chi}{\chi^2 + 9\chi + 16}$$

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο όμιλος

$$\text{περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη τότε } P(A) = \frac{\chi}{\chi^2 + 9\chi + 16} = \frac{1}{19} \Leftrightarrow$$

$$19\chi = \chi^2 + 9\chi + 16 \Leftrightarrow \chi^2 - 10\chi + 16 = 0, \text{ λύσεις είναι } \chi_1 = 2 \text{ και } \chi_2 = 8.$$

✓ Η $\chi = 2 \Leftrightarrow N(\Omega) = 2^2 + 9 \cdot 2 + 16 = 4 + 18 + 16 = 38 < 100$ δεκτή .

✓ Η $\chi = 8 \Leftrightarrow N(\Omega) = 8^2 + 9 \cdot 8 + 16 = 64 + 72 + 16 = 152 > 100$

απορρίπτεται γιατί ο όμιλος θα είχε περισσότερα από 100 μέλη .

Άρα τα αγόρια είναι 2 και τα κορίτσια $(2 + 4)^2 = 36$ και ο όμιλος έχει

$$2^2 + 9 \cdot 2 + 16 = 4 + 18 + 16 = 38 \text{ μέλη και αν } B \text{ είναι το ενδεχόμενο να επιλεγεί}$$

$$\text{κορίτσι τότε } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}.$$

* Στο ίδιο αποτέλεσμα θα κατέληγες αν παρατηρούσες πως το ενδεχόμενο **B**

είναι το συμπληρωματικό A' του **A** άρα $P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$.

γ. Η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, από το **α.** ερώτημα είναι

$$P(A) = \frac{\chi}{\chi^2 + 9\chi + 16}, \text{ όπου προφανώς το } \chi \text{ είναι φυσικός αριθμός γιατί}$$

εκφράζει αριθμό ανθρώπων και επομένως δεν μπορεί να είναι ούτε αρνητικός

Δαμιανός Μωραΐτης

αλλά ούτε να ανήκει γενικά στο $\mathbb{R}$. Οπότε για να απαντήσεις στο ερώτημα

έπρεπε να θεωρήσεις την αντίστοιχη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9x + 16}$ με $x \in \mathbb{R}$

και $x \geq 0$. Η f είναι προφανώς συνεχής ως ρητή στο πεδίο ορισμού της, οπότε μπορεί να μελετηθεί η μονοτονία της.

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{x}{x^2 + 9x + 16} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x'(x^2 + 9x + 16) - x(x^2 + 9x + 16)'}{(x^2 + 9x + 16)^2} =$$

$$\frac{x^2 + 9x + 16 - x(2x + 9)}{(x^2 + 9x + 16)^2} = \frac{x^2 + 9x + 16 - 2x^2 - 9x}{(x^2 + 9x + 16)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x^2 - 16}{(x^2 + 9x + 16)^2}$$

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2 - 16) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \text{ άρα}$$

για την f ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

μηδενίζεται όταν $x = 4$.

είναι θετική όταν $x < 4$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 4)$

είναι αρνητική όταν $x > 4$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(4, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τ. μ. στη θέση $x = 4$.

Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι μεγιστοποιείται όταν ο αριθμός των αγοριών του ομίλου είναι $x = 4$ και η μέγιστη πιθανότητα είναι

$$P(A) = \frac{4}{4^2 + 9 \cdot 4 + 16} = \frac{4}{68} = \frac{1}{17}.$$

Αιθαδειά

ΘΕΜΑ 4ο

Από το α. ερώτημα είναι $\kappa = 2$, οπότε $f(\chi) = -2\chi^2 + 2\chi + 4\sqrt{\chi} + 10$, $\chi \geq 0$ και

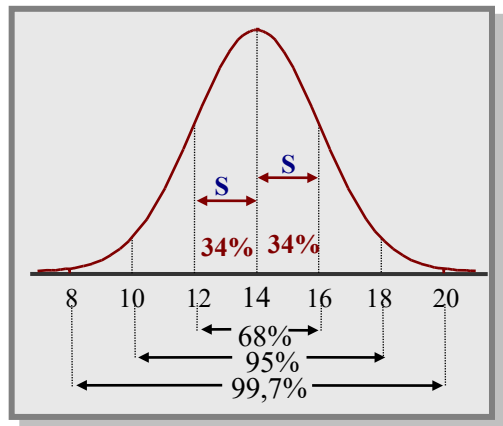
$$f'(\chi) = -4\chi + 2 + \frac{2}{\sqrt{\chi}}.$$

β. Η μέση τιμή $\bar{\chi} = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 \Leftrightarrow \bar{\chi} = 14$ και η τυπική

απόκλιση $f'(4) = -4 \cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow f'(4) = -16 + 2 + 1 = -13$ άρα

$$s = -\frac{2(-13)}{13} = 2.$$

Αφού η μεταβλητή X ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή τότε το $\bar{\chi} = 14$ θα αντιστοιχεί στο 50 % των παρατηρήσεων, είναι και $s = 2$ άρα να σημειώσεις ότι η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που



εξετάζεις έχει την εικόνα του σχήματος πιο πάνω και η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

α. το 68 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(12, 16)$.

β. το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(10, 18)$.

γ. το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(8, 20)$

Έστω λοιπόν ότι τρεις παρατηρήσεις του δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Από τα διαστήματα, αλλά και το σχήμα πιο πάνω είναι φανερό ότι τιμές μικρότερες του 8 και μεγαλύτερες του 20 αντιστοιχούν στο 0,3 % και επειδή η κατανομή είναι κανονική άρα μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα ότι οι τρεις τιμές που είναι μικρότερες ή ίσες με 8 θα αντιστοιχούν σε ποσοστό 0,15 %.

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{Άρα θα είναι } 0,15\% \cdot v = 3 \Leftrightarrow \frac{0,15}{100} v = 3 \Leftrightarrow v = 2000$$

Στο διάστημα $(10, 16)$ όπως φαίνεται και από τα διαστήματα, αλλά και το σχήμα πιο πάνω είναι φανερό ότι ανήκει το 81,3% που αναλύεται ως εξής :

✓ Το 47,5% ανήκει στο διάστημα $(10, 14)$ και

✓ Το 34% ανήκει στο διάστημα $(14, 16)$

Άρα $81,5\% \cdot 2000 = 1630$ παρατηρήσεις ανήκουν στο διάστημα $(10, 16)$.

(ii) Για να εξετάσεις την ομοιογένεια ενός δείγματος βρίσκεις το συντελεστή

μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 14\% > 10\%$ άρα το δείγμα των παρατηρήσεων

που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Όταν στις τιμές ενός δείγματος προστεθεί ένας αριθμός α τότε η νέα μέση τιμή $\bar{x}' = \bar{x} + \alpha$ ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια άρα για να είναι το δείγμα

ομοιογενές θα πρέπει $CV' = \frac{s}{\bar{x}'} \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{14 + \alpha} \leq 10\% \Leftrightarrow 1,4 + 0,1 \cdot \alpha \geq 2 \Leftrightarrow$

$0,1 \cdot \alpha \geq 0,6 \Leftrightarrow \alpha \geq 6$, **άρα η μικρότερη τιμή για το α είναι $\alpha = 6$.**

39.

πανελλήνιες 2006 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

Γ. α. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

✓ Έστω **A** το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει **στεγαστικό** δάνειο και

✓ **B** το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει **καταναλωτικό** δάνειο.

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **στεγαστικό** δάνειο είναι το **A – B**

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι το

B – A

Αιτιολογία

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **στεγαστικό** ή μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$

α. Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει και τα δυο δάνεια είναι το

$$(A \cap B)$$

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι, από τον ορισμό τους **ασυμβίβαστα** άρα ισχύει ο **απλός προσθετικός νόμος** :

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow$$

$$0,7 = P(A - B) + P(B - A) \Leftrightarrow 0,7 = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$$

$$= [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 \quad (1)$$

Το ενδεχόμενο ο πελάτης να μην έχει πάρει κανένα από τα δυο δάνεια είναι

$$\text{το } (A \cup B)'. \text{ Άρα από την εκφώνηση } P[(A \cup B)'] = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - 0,1 = 0,9. \text{ Από την (1) θα είναι}$$

$$0,9 - P(A \cap B) = 0,7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,9 - 0,7 = 0,2$$

Επειδή $P(A \cap B) = 0,2 \neq 0$ άρα τα **A** και **B** **δεν είναι ασυμβίβαστα**.

β. i. Έστω ότι η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 δηλαδή

$$P(A - B) = 0,6. \text{ Θα είναι } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$0,6 = P(A) - 0,2 \Leftrightarrow P(A) = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

Από τον **προσθετικό νόμο** θα είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow 0,9 = 0,8 + P(B) - 0,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,9 - 0,8 + 0,2 = 0,3.$$

ii. Το ενδεχόμενο ο πελάτης να έχει πάρει μόνο **καταναλωτικό** δάνειο είναι

$$\text{το } B - A \text{ άρα } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B - A) = 0,3 - 0,2 = 0,1.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης χ_i	Σχετική συχνότητα f_i
[... - ...)	...	0,1
[... - 7)	...	...
[... - ...)	...	0,3
[... - ...)	10	...
Σύνολο		1

- α. Αν c είναι το πλάτος των κλάσεων, τότε με βάση τον πίνακα η δεύτερη κλάση θα είναι $[7 - c - 7)$ οπότε η 1^η κλάση θα είναι $[7 - 2c - 7 - c)$ και η 3^η θα είναι $[7 - 7 + c)$ και η 4^η θα είναι $[7 + c - 7 + 2c)$ όπως στο «πινακάκι» :

Απουσίες μαθητών
[7 - 2c - 7 - c)
[7 - c - 7)
[7 - 7 + c)
[7 + c - 7 + 2c)

Και επειδή το κέντρο της 4^{ης} κλάσης είναι 10 άρα

$$10 = \frac{(7+c) + (7+2c)}{2} \Leftrightarrow 14 + 3c = 20 \Leftrightarrow 3c = 6 \Leftrightarrow c = 2$$

Άρα οι κλάσεις είναι

Απουσίες μαθητών
[3 - 5)
[5 - 7)
[7 - 9)
[9 - 11)

β. Αν $f_2 = \chi$ είναι η σχετική συχνότητα της 2^{ης} κλάσης τότε η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης που είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2^{ης} κλάσης θα είναι $f_4 = 2\chi$.

Άρα θα ισχύει $0,1 + \chi + 0,3 + 2\chi = 1 \Leftrightarrow 3\chi = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6 \Leftrightarrow f_2 = \chi = 0,2$

και επομένως $f_4 = 2\chi = 0,4$ η σχετική συχνότητα της 4^{ης} κλάσης

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος θα είναι :

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης χ_i	Σχετική συχνότητα f_i
[3 – 5)	4	0,1
[5 – 7)	6	0,2
[7 – 9)	8	0,3
[9 – 11)	10	0,4
Σύνολο		1

γ. i. Για να βρεις την τη μέση τιμή θα πρέπει να χρησιμοποιήσεις τον τύπο :

$$\bar{\chi} = \sum_{i=1}^k \chi_i f_i = 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,4 = 0,4 + 1,2 + 2,4 + 4 \Leftrightarrow \bar{\chi} = 8.$$

$$\gamma. \text{ ii. Από τον τύπο } f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i \cdot v \text{ οπότε } \begin{cases} v_1 = f_1 \cdot v = 0,1 \cdot v \\ v_2 = f_2 \cdot v = 0,2 \cdot v \\ v_3 = f_3 \cdot v = 0,3 \cdot v \\ v_4 = f_4 \cdot v = 0,4 \cdot v \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ Είναι } \sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i = 4^2 \cdot 0,1 \cdot v + 6^2 \cdot 0,2 \cdot v + 8^2 \cdot 0,3 \cdot v + 10^2 \cdot 0,4 \cdot v =$$

$$16 \cdot 0,1 \cdot v + 36 \cdot 0,2 \cdot v + 64 \cdot 0,3 \cdot v + 100 \cdot 0,4 \cdot v = 1,6 \cdot v + 7,2 \cdot v + 19,2 \cdot v + 40 \cdot v$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \chi_i^2 v_i = 68 \cdot v$$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Είναι $\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i v_i = 4 \cdot 0,1 \cdot v + 6 \cdot 0,2 \cdot v + 8 \cdot 0,3 \cdot v + 10 \cdot 0,4 \cdot v =$

$$0,4 \cdot v + 1,2 \cdot v + 2,4 \cdot v + 4 \cdot v \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i v_i = 8 \cdot v$$

$$\text{Άρα } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i v_i \right)^2}{v} \right] = \frac{1}{v} \left[68 \cdot v - \frac{(8 \cdot v)^2}{v} \right] = \frac{68 \cdot v}{v} - \frac{64 \cdot v^2}{v^2} =$$

$$s^2 = 68 - 64 \Leftrightarrow s^2 = 4 \Leftrightarrow s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

40.

Εξωεργασία 2007

Δευτέρα 21 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^οΑρχικά θα συμπληρώσεις τον πίνακα με τις κεντρικές τιμές χ_i

Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [-)	Κεντρικές τιμές χ_i	Σχετική Συχνότητα f_i
8 – 10	9	0,2
10 – 12	11	f_2
12 – 14	13	0,3
14 – 16	15	f_4

α. Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 0,2 + f_2 + 0,3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,5 \quad (1).$$

Αιτιολογία

Και αν για την μέση τιμή χρησιμοποιήσεις τον τύπο $\bar{\chi} = \sum_{i=1}^4 \chi_i \cdot f_i$ θα έχεις :

$$0,2 \cdot 9 + f_2 \cdot 11 + 0,3 \cdot 13 + f_4 \cdot 15 = 11,60 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 11,60 - 5,7 = 5,9 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα

$$\begin{cases} f_2 + f_4 = 0,5 \\ 11f_2 + 15f_4 = 5,9 \end{cases} \begin{vmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -11f_2 - 11f_4 = -5,5 \\ 11f_2 + 15f_4 = 5,9 \end{cases} \Rightarrow 4f_4 = 0,4 \Rightarrow f_4 = 0,1$$

και από την πρώτη εξίσωση είναι $f_2 = 0,4$.

β. Για να απαντήσεις στα ερωτήματα πρέπει να βρεις τις απόλυτες συχνότητες και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες.

i) Είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$ άρα $0,2 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 10$, $0,4 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 20$,

$$0,3 = \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 15, \quad 0,1 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

Άρα τα καταστήματα στα οποία η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ είναι όλα εκτός από εκείνα στα οποία η τιμή είναι μικρότερη από 10 € δηλαδή $v - v_1 = 50 - 10 = 40$.

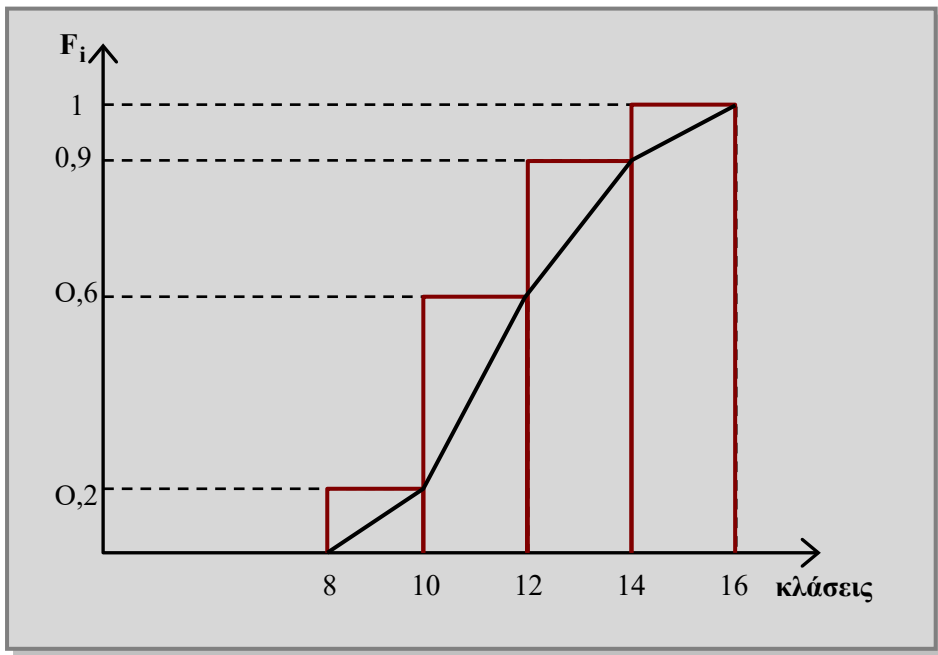
Θα μπορούσε να υπολογισθεί και αλλιώς : $v_2 + v_3 + v_4 = 20 + 15 + 5 = 40$

ii) ο αρχικός πίνακας παίρνει την μορφή :

Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [-)	Κεντρικές τιμές χ_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Σχ. Συχνότητα F_i
8 – 10	9	0,2	0,2
10 – 12	11	0,4	0,6
12 – 14	13	0,3	0,9
14 – 16	15	0,1	1

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι



ΘΕΜΑ 4^ο

α.

i) Αν ψ_i προκύπτει από την χ_i με αύξηση κατά 10 % τότε $\psi_i = \chi_i + \frac{10}{100}\chi_i$

$\Leftrightarrow \psi_i = \chi_i + 0,1 \cdot \chi_i = 1,1 \cdot \chi_i$ και σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του

σχολικού βιβλίου θα είναι $\overline{\psi} = 1,1 \cdot \overline{\chi}$ και $s_\psi = 1,1 \cdot s_\chi$.

Είναι $CV_\psi = \frac{s_\psi}{\overline{\psi}} = \frac{1,1 \cdot s_\chi}{1,1 \cdot \overline{\chi}} = \frac{s_\chi}{\overline{\chi}} = CV_\chi$ από $s_\chi^2 = 4 \Leftrightarrow s_\chi = 2$ άρα

$CV_\psi = \frac{2}{8} = 0,25 = 25\% > 10\%$ **άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές**

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $CV_\psi = CV_\chi$ άρα τα δύο δείγματα έχουν την ίδια ομοιογένεια.

Αιβαδειά

β.

$$\text{i) Αν } z_i = \frac{\chi_i - \bar{\chi}}{s_\chi} = \frac{1}{s_\chi} \chi_i - \frac{\bar{\chi}}{s_\chi} = c_1 \chi_i + c_2 \text{ με } c_1 = \frac{1}{s_\chi} \text{ και } c_2 = -\frac{\bar{\chi}}{s_\chi}$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου θα είναι

$$\bar{z} = c_1 \bar{\chi} + c_2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{s_\chi} \bar{\chi} - \frac{\bar{\chi}}{s_\chi} = 0.$$

$$s_z = |c_1| s_\chi \Leftrightarrow s_z = \frac{1}{s_\chi} s_\chi = 1.$$

ii) Δεν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των $z_1, z_2, \dots, z_n$ γιατί

$$\text{είναι } CV_z = \frac{s_z}{\bar{z}} \text{ αλλά } \bar{z} = 0.$$

41.

πανελλήνιες 2007

Τρίτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία.

B. β. Θεωρία.

Γ1. α. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

Θέσε $P(3) = P(4) = P(5) = \kappa$ άρα $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2\kappa$

Επειδή $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow$

$$2\kappa + 2\kappa + 2\kappa + 2\kappa + \kappa + \kappa + \kappa = 1 \Leftrightarrow 11\kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{11} \text{ άρα}$$

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2\kappa = \frac{2}{11} \text{ και } P(3) = P(4) = P(5) = \kappa = \frac{1}{11}$$

β. Επειδή $A \cap B = \{-1, 3\}$, πρέπει $-1 \in A$ άρα $\chi^2 - \chi - 3 = -1 \Leftrightarrow$

$\chi^2 - \chi - 2 = 0$, η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 > 0$ άρα

Δαμιανός Μωραΐτης

ρίζες $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 2$.

✓ Αν $\chi = 2$ τότε $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{-3, 2, 3, 8\}$ και $A \cap B = \{3\}$ άτοπο.

✓ Αν $\chi = -1$ τότε $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$ οπότε $A \cap B = \{-1, 3\}$.

Επομένως $\chi = -1$.

γ. Για $\chi = -1$ είναι $A = \{-1, 1, 3\}$ και $B = \{-1, 0, 2, 3\}$

$$\text{δηλαδή } P(A) = P(-1) + P(1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$$

$$\text{και } P(B) = P(-1) + P(0) + P(2) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$$

$$\text{και } P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = \frac{5}{11} + 1 - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{5 + 11 - 7 - 2}{11} = \frac{7}{11}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $\overline{\chi_A} = \frac{12 + 18 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25}}{25} \Leftrightarrow \overline{\chi_A} = \frac{30 + 345}{25} = \frac{375}{25} = 15$ και

$$\overline{\chi_B} = \frac{14 + 16 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25}}{25} \Leftrightarrow \overline{\chi_B} = \frac{30 + 345}{25} = \frac{375}{25} = 15$$

β. Αν συμβολίσεις με α_i τις παρατηρήσεις του δείγματος A θα είναι $\alpha_1 = 12$,

$$\alpha_2 = 18, \alpha_3 = t_3, \dots, \alpha_v = t_v.$$

Αν συμβολίσεις με β_i τις παρατηρήσεις του δείγματος B θα είναι $\beta_1 = 14$,

$$\beta_2 = 16, \beta_3 = t_3, \dots, \beta_v = t_v.$$

Με βάση τους τύπους του σχολικού βιβλίου θα είναι :

Αιβαδειά

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^v \alpha_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v \alpha_i \right)^2}{25} \right\} - \frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^v \beta_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v \beta_i \right)^2}{25} \right\} =$$

$$\frac{1}{25} \left\{ \sum_{i=1}^v \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^v \beta_i^2 \right\} - \frac{1}{25} \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^v \alpha_i \right)^2}{v} - \frac{\left(\sum_{i=1}^v \beta_i \right)^2}{v} \right\}, \text{ είναι } \overline{\chi_A} = \overline{\chi_B} = 15 \text{ άρα}$$

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = 12 + 18 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 25 \cdot \overline{\chi_A} = 25 \cdot 15 = 375 ,$$

$$\sum_{i=1}^v \beta_i = 14 + 16 + t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 25 \cdot \overline{\chi_B} = 25 \cdot 15 = 375 .$$

$$\text{Επομένως } s_A^2 - s_B^2 = \frac{1}{25} \{ 12^2 + 18^2 + t_3^2 + \dots + t_{25}^2 - 14^2 - 16^2 - t_3^2 - \dots - t_{25}^2 \}$$

$$- \frac{1}{25} \left\{ \frac{(12 + 18 + t_3 + \dots + t_{25})^2}{25} - \frac{(14 + 16 + t_3 + \dots + t_{25})^2}{25} \right\} \Leftrightarrow$$

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{1}{25} \{ 144 + 324 - 196 - 256 \} - \frac{1}{25} \left\{ \frac{375^2}{25} - \frac{375^2}{25} \right\} \Leftrightarrow$$

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25} - \frac{1}{25} = \frac{16}{25} .$$

$$\gamma. \text{ } CV_A = \frac{1}{15}, \text{ } CV_A = \frac{s_A}{\chi_A} \text{ άρα } \frac{s_A}{15} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow s_A = 1 \text{ οπότε από την σχέση του}$$

$$\text{προηγούμενου ερωτήματος } s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25} \text{ θα είναι } 1 - s_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} s_B^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow s_B = \frac{3}{5} . \text{ Άρα } CV_B = \frac{s_B}{\chi_B} = \frac{\frac{3}{5}}{15} = \frac{3}{75} = \frac{1}{25} \\ s_B > 0 \end{cases}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

42.

Εσπερινά 2007 – Επαναληπτικές**Παρασκευή 29 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

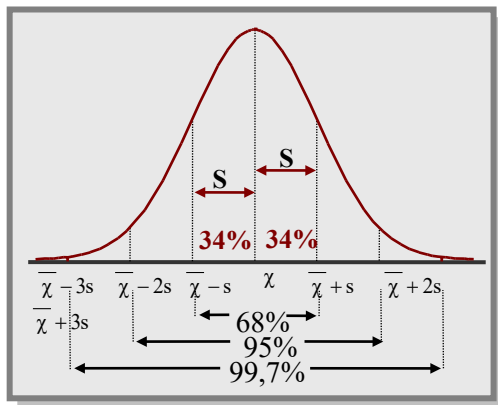
Α. Θεωρία, Β. Θεωρία

Γ. β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

Όταν η κατανομή είναι κανονική, τότε η τυπική απόκλιση S έχει τις παρακάτω ιδιότητες και η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζεις είναι περίπου κανονική και έχει την εικόνα του σχήματος δίπλα :

- i) το 68 % περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.
- ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$



α. Αφού οι βαθμοί των μαθητών ακολουθούν κανονική κατανομή άρα

το $\delta = \bar{x} = 13$, που αντιστοιχεί στο 50 % των παρατηρήσεων και επειδή το

34 % που έγραψε από 13 έως 14 ανήκει στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + s) =$

$(13, 13 + s)$ θα είναι $13 + s = 14 \Leftrightarrow s = 1$.

β. i. Το διάστημα $(11, 13)$ ταυτίζεται με το διάστημα $(13 - 2s, 13)$ και σε αυτό

το διάστημα όπως φαίνεται από τον πίνακα της κατανομής ανήκει το 47,5 %

δηλ 95 μαθητές άρα με απλή μέθοδο των τριών βρίσκεις ότι το σύνολο των

μαθητών της τάξης είναι $\frac{95 \cdot 100}{47,5} = 200$

Αιβαδειά

ii. Στο διάστημα $(\bar{\chi}, \bar{\chi} + s) = (13, 14)$ «πέφτει» το 34 % ενώ στο

$$(\bar{\chi}, \bar{\chi} + 2s) = (13, 15) \text{ πέφτει το } 47,5 \% \text{ άρα στο διάστημα}$$

$$(\bar{\chi} + s, \bar{\chi} + 2s) = (14, 15) \text{ πέφτει το } 47,5 \% - 34 \% = 13,5 \% \text{ των}$$

μαθητών άρα ο αριθμός των μαθητών που έγραψαν από 14 ως 15 είναι

$$200 \frac{13,5}{100} = 2 \cdot 13,5 = 27 \text{ μαθητές}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^3 - s\chi^2 + 2\chi + \bar{\chi}$, όπου $\bar{\chi}$

η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

Αν στο σημείο $M(1, 5)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

α. Επειδή το $M(1, 5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση, θα είναι $f(1) = 5 \Leftrightarrow$

$$1^3 - s \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \bar{\chi} = 5 \Leftrightarrow \bar{\chi} - s = 2 \quad (1).$$

Επειδή η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $\chi'\chi$ θα είναι

$$f'(1) = \tan 45^\circ. \text{ Είναι } \tan 45^\circ = 1 \text{ και}$$

$$f'(\chi) = (\chi^3 - s\chi^2 + 2\chi + \bar{\chi})' = 3\chi^2 - 2s\chi + 2 \text{ γιατί το } \bar{\chi} \text{ είναι σταθερά.}$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2s \cdot 1 + 2 = -2s + 5 \text{ επομένως } f'(1) = 1 \Leftrightarrow -2s + 5 = 1 \Leftrightarrow$$

$$s = 2 \text{ οπότε από την (1) προκύπτει } \bar{\chi} - 2 = 2 \Leftrightarrow \bar{\chi} = 4.$$

$$\beta. \text{ i) Αν } \bar{\chi} = 4 \text{ και } s = 2, \text{ τότε } CV = \frac{s}{\bar{\chi}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\% > 10\% \text{ άρα}$$

το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

$$\text{ii) Είναι } f'(\chi) = 3\chi^2 - 2s\chi + 2 = 3\chi^2 - 4\chi + 2 \text{ άρα}$$

$$(f'(\chi))' = (3\chi^2 - 4\chi + 2)' = 6\chi - 4 \Leftrightarrow f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

43.

πανελλήνιες 2007 – Επαναληπτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. α. Θεωρία., **β.** i) $P(\Omega)=1$ ii) $P(\emptyset)=0$

Γ 1. α. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{\chi \in \Omega / 0 \leq \ln(\chi - 1) < \ln 3\}, \quad B = \{\chi \in \Omega / (\chi^2 - 5\chi)(\chi - 1) = -6(\chi - 1)\}$$

α. Για το A : Αρχικά πρέπει $\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$, για να έχει νόημα ο $\ln$.

$$0 \leq \ln(\chi - 1) < \ln 3 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln(\chi - 1) < \ln 3 \Leftrightarrow, \ln \text{ γνησίως αύξουσα} \Leftrightarrow$$

$$1 \leq \chi - 1 < 3 \Leftrightarrow 2 \leq \chi < 4, \chi \in \Omega, \text{ άρα } A = \{2, 3\}.$$

$$\text{Για το B: } (\chi^2 - 5\chi)(\chi - 1) = -6(\chi - 1) \Leftrightarrow (\chi^2 - 5\chi)(\chi - 1) + 6(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\chi - 1)(\chi^2 - 5\chi + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \chi_1 = 1, \chi_2 = 2, \chi_3 = 3, \chi \in \Omega$$

$$\text{άρα } B = \{1, 2, 3\}.$$

Άρα $A - B = \emptyset$ άρα $P(A - B) = 0$.

$$A = \{2, 3\} \Leftrightarrow A' = \{1, 4, 5\} \text{ άρα } B \cup A' = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \Omega \text{ άρα}$$

$$P(B \cup A') = P(\Omega) = 1$$

β. Από ερώτημα **α.** είναι $A' = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ άρα $B' = \{4, 5\}$ άρα

$$A' \cup B' = \{1, 4, 5\} = A' \text{ άρα } P(A' \cup B') = P(A').$$

$$\text{Αν } P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ άρα } P(A' \cup B') = \frac{3}{4}.$$

Λιβαδειά

γ. $A \cup X = B$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ άρα το X μπορεί να είναι :

$X = \{1\}$ στην «ελάχιστη περίπτωση» ή $X = \{1, 2, 3\}$ στην «μέγιστη

περίπτωση» κα αν ονομάσεις $\Gamma = \{1\}$ θα ισχύει : $\Gamma \subseteq X \subseteq B$ οπότε

$$P(\Gamma) \leq P(X) \leq P(B) \quad (1).$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) \Leftrightarrow P(B) = P(B - A) + P(B \cap A) \Leftrightarrow$$

$$P(B) = \frac{1}{8} + P(B \cap A) \quad (2). \text{ Από το α. ερώτημα είναι } P(A - B) = 0,$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap A) = P(A \cap B) = \frac{1}{4}. \quad (2) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$B - A = \{1, 2, 3\} - \{2, 3\} = \{1\} \Leftrightarrow P(\Gamma) = P(\{1\}) = P(B - A) = \frac{1}{8}.$$

Άρα $P(\Gamma) \leq P(X) \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq P(X) \leq \frac{3}{8}$ επομένως η μικρότερη τιμή της

πιθανότητας $P(X)$ είναι $\frac{1}{8}$ και η μεγαλύτερη είναι $\frac{3}{8}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις :

7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3, όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$.

Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων

είναι $\bar{\chi} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Η $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$ (1) είναι μια εξίσωση για τα α, β, γ, χρειάζεσαι και

$$\text{άλλες δυο. Από } \bar{\chi} = 6 \Rightarrow \frac{7+5+\alpha+2+5+\beta+8+6+\gamma+5+3}{11} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma + 41 = 66 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 25 \quad (2) \text{ προκύπτει η δεύτερη εξίσωση.}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=11$ άρα η διάμεσος $\delta = 6$ συμπίπτει με την παρατήρηση χ_6 άρα $\chi_6 = 6$ και επειδή αν βάλεις τις ήδη γνωστές παρατηρήσεις, μέχρι την $\chi_6 = 6$ σε σειρά μεγέθους θα έχεις :

$\chi_1 = 2, \chi_2 = 3, \chi_3 = 5, \chi_4 = 5, \chi_5 = 5, \chi_6 = 6$, είναι προφανές ότι δεν μπορεί, τα α, β, γ να είναι μικρότερα από 6 άρα $\alpha, \beta, \gamma \geq 6$.

Επειδή το εύρος $R = 8$ και η μικρότερη τιμή είναι η $\chi_1 = 2$ άρα η μεγαλύτερη τιμή είναι $\chi_{11} = 10$. Επειδή το 10 δεν είναι μεταξύ των γνωστών παρατηρήσεων άρα πρέπει ένας από τους α, β, γ να είναι η μεγαλύτερη τιμή και επειδή $\alpha < \beta < \gamma$ άρα $\gamma = 10$ (3).

$$\text{Οι (1), (2), (3) αποτελούν σύστημα} \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217 & (1) \\ \alpha + \beta + \gamma = 25 & (2) \\ \gamma = 10 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + 100 = 217 & (1) \\ \alpha + \beta + 10 = 25 & (2) \\ \gamma = 10 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 117 & (1) \\ \alpha + \beta = 15 & (2) \\ \gamma = 10 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + (15 - \alpha)^2 = 117 & (1) \\ \beta = 15 - \alpha & (2) \\ \gamma = 10 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Η (1)} \quad \alpha^2 + (15 - \alpha)^2 = 117 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha^2 + 15\alpha + 54 = 0.$$

Η τελευταία έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $\alpha = 9$ ή $\alpha = 6$.

✓ Η $\alpha = 9$ άρα $\beta = 15 - 9 = 6$ απορρίπτεται γιατί $\alpha < \beta$.

✓ Η $\alpha = 6$ άρα $\beta = 15 - 6 = 9$ είναι δεκτή άρα τελικά

$\alpha = 6, \beta = 9, \gamma = 10$ οι λύσεις.

β. Αν $\alpha = 6, \beta = 9, \gamma = 10$ τότε οι παρατηρήσεις με σειρά μεγέθους είναι

2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10. Η τυπική απόκλιση του δείγματος $s_\chi = \sqrt{s_\chi^2}$

και για την διακύμανση ή διασπορά θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{\chi})^2. \text{ Είναι } 2 - 6 = -4, 3 - 6 = -3, 5 - 6 = -1, 5 - 6 = -1,$$

$$5 - 6 = -1, 6 - 6 = 0, 6 - 6 = 0, 7 - 6 = 1, 8 - 6 = 2, 9 - 6 = 3, 10 - 6 = 4.$$

Αιβαδειά

άρα είναι :

$$s^2 = \frac{1}{11} \left((-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \right) =$$

$$\frac{1}{11} (16 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 9 + 16) \Rightarrow s^2 = \frac{58}{11} \text{ άρα } s_\chi = \sqrt{s_\chi^2} = \sqrt{\frac{58}{11}}.$$

$$\text{Είναι } CV_\chi = \frac{s_\chi}{\left| \bar{\chi} \right|} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} \approx \frac{1}{6} \sqrt{5,27} \approx \frac{1}{6} \cdot 2,2 \approx 0,38 = 38\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

γ. Αν $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2 τότε σύμφωνα με το παράδειγμα του σχολικού θα είναι $\bar{\psi} = c_1 \bar{\chi} + c_2$ και $s_\psi = |c_1| \cdot s_\chi$.

Αν $\bar{\psi} = 9$, $\bar{\chi} = 6$ και $s_\psi = 2 \cdot s_\chi$ από την εκφώνηση τότε $c_1 \cdot 6 + c_2 = 9$

και $|c_1| = 2$ και επειδή c_1 θετική σταθερά άρα $c_1 = 2$ οπότε $2 \cdot 6 + c_2 = 9$

$\Rightarrow c_2 = -3$.

44.

Εσπερινά 2008

Τετάρτη 21 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω το δείγμα των 10 παρατηρήσεων : 1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α, 6

όπου α πραγματικός αριθμός, η μέση τιμή είναι $\bar{\chi} = 4$

$$\text{Α. } \bar{\chi} = 4 \Leftrightarrow \frac{1+2+4+2+6+1+3+6+\alpha+6}{10} = 4 \Leftrightarrow \alpha + 31 = 40 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

B.

α. Αν $n = 9$ τότε οι 10 παρατηρήσεις βαλμένες σε αύξουσα σειρά είναι :

1, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 6, 6, 9 και επειδή ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι 10

«ζυγός» άρα $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$.

$$\begin{aligned} \beta. s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{\chi})^2 = \frac{(1-4)^2 + (1-4)^2 + (2-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 +}{10} + \\ &\frac{(4-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2 + (6-4)^2 + (9-4)^2}{10} = \\ &\frac{9+9+4+4+1+0+4+4+4+25}{10} \Leftrightarrow s^2 = \frac{64}{10} = 6,4. \end{aligned}$$

γ. Με βάση την αντίστοιχη εφαρμογή του σχολικού είναι :

$$\bar{\chi}' = \bar{\chi} + 2008 = 4 + 2008 = +2012.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α.

✓ Αφού το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς» τότε η συχνότητα

$$v_2 \text{ του «Λίαν καλώς» θα είναι } v_2 = 150 \cdot 20\% = 150 \cdot \frac{20}{100} = 30.$$

$$\text{Άρα η σχετική συχνότητα του θα είναι } f_2 = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ και } f_2\% = 20\%$$

$$\text{Η γωνία του κυκλικού τομέα } \alpha_2 = 360^\circ \cdot f_2 = 360^\circ \cdot 0,2 = 72^\circ$$

✓ Αφού η γωνία α_1 του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι 36°

$$\text{άρα από τον τύπο } \alpha_1 = 360^\circ \cdot f_1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{36}{360^\circ} = 0,1 \text{ και } f_1\% = 10\% \text{ και}$$

$$\text{από τον τύπο } f_1 = \frac{v_1}{150} \Leftrightarrow v_1 = 0,1 \cdot 150 = 15.$$

✓ Αφού οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με

$$\text{«Άριστα» άρα } v_3 = 4 \cdot v_1 = 4 \cdot 15 = 60, \quad f_3 = 4 \cdot f_1 = 4 \cdot 0,1 = 0,4 \text{ άρα}$$

Αιτιολογία

$$f_3\% = 40\% \text{ και } \alpha_3 = 4 \cdot \alpha_1 = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ.$$

✓ Άρα οι μαθητές με βαθμό είναι ότι «απομένει» δηλαδή :

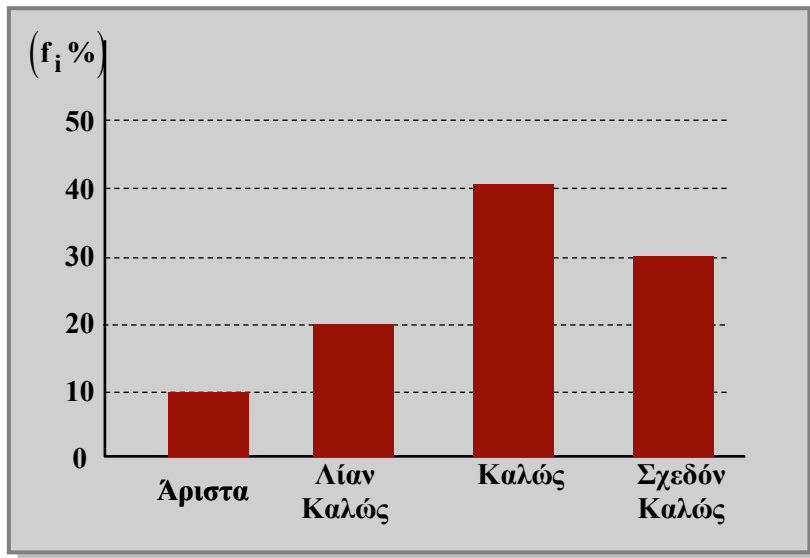
$$v_4 = 150 - 30 - 15 - 60 = 45, \quad f_4 = 1 - 0,2 - 0,1 - 0,4 = 0,3, \text{ άρα}$$

$$f_4\% = 30\%, \quad \alpha_4 = 360^\circ - 72^\circ - 36^\circ - 144^\circ = 108^\circ$$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

i	Χαρακτηρισμός βαθμολογίας χ_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες α_i
1	Άριστα	15	0,1	10	36
2	Λίαν καλώς	30	0,2	20	72
3	Καλώς	60	0,4	40	144
4	Σχεδόν καλώς	45	0,3	30	108
	Σύνολο	150	1	100	360

β.



Δαμιανός Μωραΐτης

45.

πανελλήνιες 2008

Πέμπτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Θεωρία.

Γ. α. Λάθος., β. Λάθος., ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha. \begin{cases} \bar{\chi}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \\ \bar{\chi}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \end{cases}$$

β. Αν K_A και K_B είναι η σχέση $\frac{\text{Κόστος}}{\text{Διάρκεια ζωής}}$ των δυο μπαταριών, τότε :

$$K_A = \frac{38}{22} = \frac{19}{11} \cong 1,73 \frac{\text{€}}{\text{χίλιες ώρες}} \text{ και } K_B = \frac{40}{24} \cong 1,67 \frac{\text{€}}{\text{χίλιες ώρες}}.$$

Επειδή $K_A > K_B$ προφανώς συμφέρει να αγοράσεις την μπαταρία τύπου Β.

γ. Θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο $s_A^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{\chi})^2$.

$$\checkmark \text{ Είναι } s_A^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^v (t_i - 22)^2 \Rightarrow$$

$$s_A^2 = \frac{1}{5} \{ (20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2 \} \Rightarrow$$

$$s_A^2 = \frac{1}{5} \{ 4+16+4+0+16 \} = \frac{40}{5} \Rightarrow s_A^2 = 8 \Rightarrow s_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\checkmark \text{ Είναι } s_B^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^v (t_i - 24)^2 \Rightarrow$$

$$s_B^2 = \frac{1}{5} \{ (26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2 \} \Rightarrow$$

$$s_B^2 = \frac{1}{5} \{ 4+64+25+16+1 \} = \frac{110}{5} \Rightarrow s_B^2 = 22 \Rightarrow s_B = \sqrt{22} = \sqrt{11}\sqrt{2}$$

Αιβαδειά

$$\delta. CV_A = \frac{s_A}{\chi_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}, \quad CV_B = \frac{s_B}{\chi_B} = \frac{\sqrt{11}\sqrt{2}}{24} \cong \frac{3,3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Είναι } \frac{3,3\sqrt{2}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow 11 \cdot 3,3\sqrt{2} > 24\sqrt{2} \Leftrightarrow 36,3\sqrt{2} > 24\sqrt{2} \text{ που}$$

ισχύει. Άρα $CV_B > CV_A$ που σημαίνει ότι το δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το B.

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν A το ενδεχόμενο οι κάτοικοι της πόλης να διαβάσουν την εφημερίδα α θα είναι $P(A) = 50\% = 0,5$ και αν B το ενδεχόμενο να διαβάσουν την εφημερίδα β, επειδή το 30% των κατοίκων διαβάσουν την εφημερίδα α και δεν διαβάσουν την εφημερίδα β θα είναι $P(A - B) = 30\% = 0,3$.

- α. Το ενδεχόμενο ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β είναι το $A' \cup B$, επομένως ψάχνεις το $P(A' \cup B)$.

Από τον προσθετικό νόμο είναι $P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$.

Είναι $A' \cap B = B - A$ (δες στο σχολικό τον πίνακα στη σελίδα 141 τότε πραγματοποιείται ένα ενδεχόμενο).

Άρα $P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A)$.

Είναι $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$ (σχολικό, εφαρμογή).

Άρα $P(A' \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(B \cap A)] =$

$1 - P(A) + P(B \cap A) = 1 - [P(A) - P(A \cap B)]$.

Είναι $P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$

Άρα $P(A' \cup B) = 1 - P(A - B) = 1 - 0,3 = 0,7 = 70\%$.

β. Σύμφωνα με εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι : $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow$

$$P(B) \leq P(A' \cup B) \Rightarrow P(B) \leq \frac{7}{10} \quad (1).$$

$$P(A - B) = 0,3 = \frac{3}{10} \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{5}{10} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ και επειδή } A \cap B \subseteq B \text{ άρα } P(A \cap B) \leq P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B) \quad (2). \text{ Από (1) και (2) } \Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

γ. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$.

Επειδή η συνάρτηση ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και είναι πολυωνμική αν είχε ακρότατα αυτά θα ήταν ρίζες της πρώτης παραγώγου. Όμως

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x \right)' = 3x^2 - x + P(B) \text{ και}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot P(B) = 1 - 12 \cdot P(B).$$

$$\text{Από } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{12}{5} \leq 12 \cdot P(B) \leq \frac{84}{10} \Leftrightarrow 2,4 \leq 12 \cdot P(B) \leq 8,4 \Leftrightarrow$$

$$-2,4 \geq -12 \cdot P(B) \geq -8,4 \Leftrightarrow 1 - 8,4 \leq 1 - 12 \cdot P(B) \leq 1 - 2,4 \Leftrightarrow$$

$$-7,4 \leq 1 - 12 \cdot P(B) \leq -1,4 \text{ άρα } \Delta = 1 - 12 \cdot P(B) < 0.$$

Επομένως η $f'(x)$ δεν έχει ρίζες άρα η $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$ δεν έχει ακρότατα.

46.

πανελλήνιες 2008 – Επαναληπτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. α. , Β. β. Θεωρία

Γ. α. Σωστό, β. Σωστό, ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

α Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $f_1 = f_2$, $\alpha_4 = 360^\circ \cdot f_4 \Leftrightarrow f_4 = \frac{108^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow$

$$f_4 = \frac{3}{10} = 0,3.$$

$$\checkmark \quad f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 2f_1 + f_3 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow 2f_1 + f_3 = 0,7 \quad (1)$$

$$\checkmark \quad \bar{\chi} = \sum_{i=1}^v \chi_i f_i \Leftrightarrow 70 = \sum_{i=1}^v \chi_i f_i \Leftrightarrow 30f_1 + 50f_1 + 70f_3 + 0,3 \cdot 90 = 70 \Leftrightarrow$$

$$80f_1 + 70f_3 = 70 - 27 \Leftrightarrow 80f_1 + 70f_3 = 43 \quad (2)$$

Οι (1), (2) αποτελούν σύστημα η λύση του οποίου δίνει $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$,

$$f_3 = \frac{5}{10}.$$

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε: $f_1 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{v_1}{50}$

$$\Leftrightarrow v_1 = 5 \text{ άρα και } v_2 = 5, \quad f_3 = \frac{v_3}{50} \quad \frac{5}{10} = \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 25, \quad f_4 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{10} = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 15$$

ι. άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

Δαμιανός Μωραΐτης

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40	30	5	0,1
40 – 60	50	5	0,1
60 – 80	70	25	0,5
80 – 100	90	15	0,3
Σύνολα		50	1

ii. Το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60 είναι :

$$v_3 + v_4 = 25 + 15 = 40 .$$

iii. Το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70 είναι :

$$\frac{f_2}{2}100 + \frac{f_3}{2}100 = \frac{0,1 \cdot 100}{2} + \frac{0,5 \cdot 100}{2} = 30\% .$$

Στον τύπο χρησιμοποιείς τα $\frac{f_2}{2}$ και $\frac{f_3}{2}$ και όχι τα f_2 και f_3 γιατί η κατανομή θεωρείται κανονική ή περίπου κανονική οπότε στα διαστήματα $[50, 60)$ και $[60, 70]$ ανήκουν οι μισές παρατηρήσεις ακριβώς.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$,

$P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και

αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

a. Αρχικά να παρατηρήσεις ότι αν $0 < p < 1 \Rightarrow -1 < p-1 < 0$ και $1 < p+1 < 2$

οπότε τα $p-1$ και $p+1$ αποκλείονται ως πιθανότητες ενδεχομένων και ως πιθανότητες των ενδεχομένων $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ μένουν τα p , p^2 , p^3 .

Αιτιολογία

Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους άρα ισχύει $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$ (1).

Από την άλλη μεριά είναι γνωστό από την B' Λυκείου ότι η συνάρτηση

$$f(x) = p^x \text{ με } 0 < p < 1 \text{ είναι γνησίως φθίνουσα άρα } 1 < 2 < 3 \Leftrightarrow$$

$$f(1) > f(2) > f(3) \Leftrightarrow f(3) < f(2) < f(1) \Leftrightarrow p^3 < p^2 < p \quad (2).$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $P(A \cup B) = p < P(A) = p^2 < P(A \cap B) = p^3$.

β. Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow p = p^2 + P(B) - p^3 \Leftrightarrow$

$$P(B) = p^3 - p^2 + p.$$

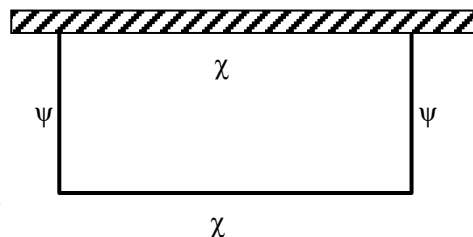
γ. Έστω $P(B - A) > P(A - B) \Leftrightarrow P(B) - P(B \cap A) > P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$p^3 - p^2 + p - p > p^2 - p \Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + p > 0 \Leftrightarrow p(p^2 - 2p + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$p(p-1)^2 > 0 \text{ που ισχύει γιατί } 0 < p < 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι χ και η άλλη πλευρά του οικοπέδου είναι ψ .



Θα είναι $\chi + 2\psi = 200 \Leftrightarrow \psi = 100 - \frac{1}{2}\chi$.

α Άρα το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από

$$\text{τον τύπο } f(\chi) = \chi \cdot \left(100 - \frac{1}{2}\chi\right) = 100\chi - \frac{1}{2}\chi^2.$$

β. Αρκεί να μελετήσεις τη μονοτονία της συνάρτησης $f(\chi) = 100\chi - \frac{1}{2}\chi^2$ και

να βρεις τα ακρότατα της. Όταν $0 < \chi < 100$, επειδή πρέπει και $\psi > 0$ άρα

$$100 - \frac{1}{2}\chi > 0 \Leftrightarrow 200 - \chi > 0 \Leftrightarrow \chi < 200.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

**** Παρατήρηση :** πρέπει πάντα να προσέχεις του «φυσικούς περιορισμούς» σε ένα πρόβλημα .

$$\text{Είναι } f'(\chi) = \left(100\chi - \frac{1}{2}\chi^2\right)' = 100 - \frac{1}{2}2\chi = -\chi + 100.$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Rightarrow -\chi + 100 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 100, \text{ άρα για την } f' \text{ ισχύει}$$

ο πίνακας προσήμου:

$-\infty$	0	100	200
		+	-

- ✓ στο διάστημα $(0, 100)$ η f' είναι θετική επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ✓ στο διάστημα $(100, 200)$ η f' είναι αρνητική επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα στο $\chi_0 = 100$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$$f(100) = 100 \cdot 100 - \frac{1}{2}100^2 = 10000 - 5000 = 5000 \text{ άρα η μεγαλύτερη}$$

δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m είναι 5000 m².

γ. Είναι $f'(\chi) = -\chi + 100$ άρα $f'(100) = -100 + 100 = 0$,

$$f'(101) = -101 + 100 = -1, \quad f'(102) = -102 + 100 = -2,$$

$$f'(103) = -103 + 100 = -3, \quad f'(104) = -104 + 100 = -4.$$

$$\text{Άρα } \overline{\chi} = \frac{0 - 1 - 2 - 3 - 4}{5} = -\frac{10}{5} \Leftrightarrow \overline{\chi} = -2.$$

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$,

$$f'(102), f'(103) \text{ και } f'(104) \text{ τότε είναι } CV = \frac{s}{\overline{\chi}} \text{ και } CV' = \frac{s'}{\overline{\chi'}}$$

Αιθαδειά

Από εφαρμογή του βιβλίου όταν αυξήσουμε καθεμιά από τις παρατηρήσεις κατά c τότε είναι $\overline{\chi'} = \overline{\chi} + c \Leftrightarrow \overline{\chi'} = c - 2$ και $s' = s$ και επομένως

$$CV' = 2 \cdot CV \Leftrightarrow \frac{s'}{|\overline{\chi'}|} = 2 \cdot \frac{s}{|\overline{\chi}|} \Leftrightarrow \frac{s}{|c-2|} = 2 \cdot \frac{s}{|-2|} \Leftrightarrow \frac{1}{|c-2|} = 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$|c-2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} c-2=1 \\ c-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ c=1 \end{cases}.$$

Αρχές Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων



Δαμιανός Μωραΐτης

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας



Δαμιανός Μωραΐτης

