

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

2^{ος} Τόμος

Μηχανικοί
εναρτήσεις
παράγωγα
ολοκληρώματα

Ενβαδόν

Περιέχει μαθήματα
εξανάληψης και
διαγνωστικά σε
κάθε κεφάλαιο



Περιέχει τα θέματα για
κάθε κεφάλαιο
ξεχωριστά, αυξανόμενα
με αναλυτικό και
υποδειγματικό
τρόπο

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο στον Κώστα, τον Πάνο, τον Γιάννη, την Μαρία, την Αγγελική, τη Λίλα τον ... και την ..., σε όλα τέλος πάντων τα χιλιάδες επώνυμα «παιδιά μου», που για μένα, υπήρξαν πηγή έμπνευσης και πηγή ζωής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στο συνάδελφο (κατά πολύ νεότερο) Γιάννη Βελαώρα γιατί είχε την υπομονή να διαβάσει με προσοχή και επιμονή τα γραφόμενα και να κάνει, όχι μόνο, τις απαραίτητες διορθώσεις αλλά και εύστοχες παρατηρήσεις.

Θερμές ευχαριστίες στον αείμνηστο δάσκαλό μου τον **Άλκη Λεβέτα** γιατί του οφείλω πολλά και κυρίως την αγάπη στο διάβασμα.

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα
Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 2^{ος}

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:

Δαμιανός Μωραΐτης

© copyright για την παρούσα έκδοση:

Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

ISBN SET: 9786188485778

ISBN 1^{ου} τόμου: 9786188485792

Πρόλογος

Στο βιβλίο, που είναι το πρώτο μιας πλήρους σειράς για το Λύκειο, παρουσιάζεται για **πρώτη φορά, μια μοναδική στην κυριολεξία συλλογή** που περιέχει:

Όλα τα θέματα των Μαθηματικών από το 1975 έως σήμερα

Σε αυτή τη **μοναδική και πρωτοεμφανιζόμενη** συλλογή, περιλαμβάνονται **ΟΛΑ** τα θέματα Μαθηματικών που δόθηκαν σε **ΟΛΕΣ** τις Πανελλήνιες εξετάσεις της Γ' Λυκείου από το 1975 έως σήμερα.

Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται τα θέματα από τις Πανελλήνιες:

- Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , ΤΕΛ, Ενιαίο Λύκειο, κλπ.)
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , Ενιαίο, κλπ.)
- Εξετάσεις των Εσπερινών Λυκείων
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων
- Εξετάσεις των Ομογενών

Τα θέματα είναι λυμένα με **αναλυτικό και κυρίως με υποδειγματικό τρόπο.**

**Τα θέματα είναι οργανωμένα ξεχωριστά για
κάθε κεφάλαιο :**

Με τη συλλογή αυτή:

- **Οι μαθητές**
1^{ον} Αποκοτούν την **πιο πλούσια συλλογή** από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά, για να μπορέσουν εύκολα **να κατανοήσουν και να μάθουν** την αντίστοιχη ύλη.
2^{ον} Ξεπερνούν σε μεγάλο βαθμό το άγχος και την αγωνία τους για τα «άγνωστα και δύσκολα» σύμφωνα με τις «φήμες» θέματα γιατί διαπιστώνουν πως είναι εύκολο να λύσουν και οι ίδιοι «ένα τέτοιο θέμα».
- **Οι καθηγητές** έχουν μια πλούσια συλλογή από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για να τα χρησιμοποιήσουν την ώρα που τα χρειάζονται . . . **όταν διδάσκουν το αντίστοιχο κεφάλαιο.**

Δηλαδή το βιβλίο αυτό αποτελεί τη **«Βίβλο»** των Πανελληνίων Εξετάσεων.

Φεβρουάριος 2022

Αυταπήδεις

1.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1974

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Αν θέσεις $f(\chi) = \lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi}$ και $g(\chi) = 1 + e^\chi$ τότε

$$\varphi(\chi) = \frac{\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi}}{1 + e^\chi} = \frac{f(\chi)}{g(\chi)}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως αλγεβρικό}$$

άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^χ και $e^{-\chi}$

και η g επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$,

οπότε η φ ως πηλίκο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη.

β. Είναι $\varphi(\chi) = \frac{\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi}}{1 + e^\chi} \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = \left(\frac{\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi}}{1 + e^\chi} \right)' \Leftrightarrow$

$$\varphi'(\chi) = \frac{(\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi})'(1 + e^\chi) - (\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi})(1 + e^\chi)'}{(1 + e^\chi)^2} =$$

$$\frac{\left((\lambda e^\chi)' - [(1 + \lambda)e^{-\chi}]' \right)(1 + e^\chi) - (\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi})e^\chi}{(1 + e^\chi)^2} =$$

$$\frac{(\lambda e^\chi + (1 + \lambda)e^{-\chi})(1 + e^\chi) - (\lambda e^\chi - (1 + \lambda)e^{-\chi})e^\chi}{(1 + e^\chi)^2} =$$

$$\frac{\lambda e^\chi + (1 + \lambda)e^{-\chi} + \lambda e^{2\chi} + 1 + \lambda - \lambda e^{2\chi} + 1 + \lambda}{(1 + e^\chi)^2} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = \frac{\lambda e^\chi + (1 + \lambda)e^{-\chi} + 2(1 + \lambda)}{(1 + e^\chi)^2} \text{ οπότε αν θέλεις η συνάρτηση } \varphi \text{ να είναι}$$

φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει $\varphi'(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\varphi'(\chi) < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda e^\chi + (1+\lambda)e^{-\chi} + 2(1+\lambda)}{(1+e^\chi)^2} < 0 \Leftrightarrow \lambda e^\chi + (1+\lambda)e^{-\chi} + 2(1+\lambda) < 0$$

$$\lambda e^\chi + \frac{(1+\lambda)}{e^\chi} + 2(1+\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda e^{2\chi} + (1+\lambda) + 2(1+\lambda)e^{-\chi} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda e^{2\chi} + 2(1+\lambda)e^{-\chi} + (1+\lambda) < 0, \text{ και αν θέσεις } t = e^\chi \text{ γίνεται}$$

$$\lambda t^2 + 2(1+\lambda)t + (1+\lambda) < 0 \text{ η τελευταία είναι ανίσωση δευτέρου βαθμού με}$$

«άγνωστο» το t και αν θές να αληθεύει για κάθε t θα πρέπει να ισχύουν :

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(1+\lambda)^2 - 4\lambda(1+\lambda) < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)^2 - \lambda(1+\lambda) < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \lambda - \lambda^2 < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 1 < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < -1 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda < -1$$

Το 1^ο Θέμα είναι ισοδύναμο (σε βαθμό δυσκολίας) με 2^ο Θέμα σημερινό.

2.

παμελλήμεις 1975

ΘΕΜΑ 1^ο

Έστω $f(\chi \cdot \psi) = f(\chi) + f(\psi)$ (1) για κάθε $\chi, \psi \in Q_+^*$

α. Έστω $f(\chi \cdot \psi) = f(\chi) + f(\psi)$ (1) για κάθε $\chi, \psi \in Q_+^*$ θέσε $\chi = \psi = 1$

$$\text{οπότε } f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0.$$

$$\text{Αν θέσεις στην (1) } \chi = \rho \text{ και } \psi = \frac{1}{\rho} \text{ τότε } f\left(\rho \cdot \frac{1}{\rho}\right) = f(\rho) + f\left(\frac{1}{\rho}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(\rho) + f\left(\frac{1}{\rho}\right) = f(1) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\rho}\right) = -f(\rho)$$

β. Έστω ότι ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t , για τον οποίο ισχύει :

$$f(t) = 0 \text{ είναι ο } t = 1, \text{ έστω επίσης ότι υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί } \rho$$

$$\text{και } \tau \text{ με } \rho \neq \tau \text{ και } f(\rho) = f(\tau) \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{\rho}\right) = f(t) \Leftrightarrow f(t) + f\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

Λιβαδεϊά

$$f\left(t \frac{1}{\rho}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{\rho}\right) = 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ} \quad \text{γιατί } t \neq \rho \Leftrightarrow \frac{t}{\rho} \neq 1 \text{ και επομένως δεν}$$

μπορεί, σύμφωνα με την υπόθεση να είναι $f\left(\frac{t}{\rho}\right) = 0$ αφού $t \neq \rho \Leftrightarrow \frac{t}{\rho} \neq 1$.

3.

παυελλήμεις 1977

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Έστω ότι $\varphi \searrow$, Δ το σύνολο ορισμού της και έστω ότι υπάρχουν σημεία $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$, ώστε $\varphi(\chi_1) = \varphi(\chi_2) = 0$ αυτό είναι άτοπο γιατί $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$ (επειδή $\varphi \searrow$), άρα θα έπρεπε $0 > 0$.

β. $\varphi(\chi) = a^\chi \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (a^\chi)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = a^\chi \ln a < 0$, γιατί $a^\chi > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και $\ln a < 0$ γιατί $a \in (0, 1)$ έτσι λοιπόν για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ η $\varphi'(\chi) < 0$ άρα η $\varphi(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

γ. $3^\chi + 4^\chi = 5^\chi \Leftrightarrow \frac{3^\chi}{5^\chi} + \frac{4^\chi}{5^\chi} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^\chi + \left(\frac{4}{5}\right)^\chi = 1$ οπότε θεωρείς τη

συνάρτηση $\varphi(\chi) = \left(\frac{3}{5}\right)^\chi + \left(\frac{4}{5}\right)^\chi - 1$ και έχεις

$$\varphi'(\chi) = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^\chi + \left(\frac{4}{5}\right)^\chi - 1 \right]' = \left(\frac{3}{5}\right)^\chi \cdot \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^\chi \cdot \ln \frac{4}{5} < 0 \text{ γιατί}$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^\chi > 0, \ln \frac{3}{5} < 0, \left(\frac{4}{5}\right)^\chi > 0, \ln \frac{4}{5} < 0$ (δες προηγούμενο ερώτημα) άρα η

$\varphi(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση επομένως θα έχει μόνο μια ρίζα σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα και επειδή ήδη είναι $\varphi(2) = 0$, μιας και το 2 είναι λύση της $3^\chi + 4^\chi = 5^\chi$ άρα και της $\varphi(\chi)$, η $\varphi(\chi)$ δεν μπορεί να έχει και άλλη λύση

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha) \quad \varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma)' = 2\alpha\chi + \beta$$

1^{ον} $\alpha > 0$ τότε $2\alpha\chi + \beta \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{\beta}{2\alpha}$ και

επομένως ισχύει ο πίνακας μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$-$	0	$+$
$\varphi(\chi)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα όπως φαίνεται και από πίνακα η φ' :

μηδενίζεται όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$, είναι **αρνητική** όταν $\chi < -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και η φ' είναι **θετική** όταν $\chi > -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα

η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

Αρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $\chi_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ **το** $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

2^{ον} $\alpha < 0$ τότε $2\alpha\chi + \beta \leq 0 \Leftrightarrow \chi \leq -\frac{\beta}{2\alpha}$

επομένως ισχύει ο πίνακας μεταβολών της φ .

χ	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$+$	0	$-$
$\varphi(\chi)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η φ' :

μηδενίζεται όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$, είναι **θετική** όταν $\chi < -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$, είναι **αρνητική** όταν $\chi > -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

Αρα παρουσιάζει μέγιστο στο $\chi_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ **το** $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$.

Λ ι β α δ ε ι ά

β) Έστω κ, λ με $\kappa \cdot \lambda \leq 0$ άρα κ, λ ετερόσημοι. Ας υποθέσουμε ότι $\kappa < 0 < \lambda$.

Η $P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. άρα υπάρχει $\xi \in [\kappa, \lambda]$ έτσι ώστε :

$$P'(\xi) = \frac{P(\lambda) - P(\kappa)}{\lambda - \kappa} = \frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} \Leftrightarrow \left| \frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} \right| = |P'(\xi)|.$$

Είναι $P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta \Leftrightarrow P'(\chi) = 3\alpha\chi^2 + 2\beta\chi + \gamma$, $\alpha > 0$ άρα

σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα η $P'(\chi) = 3\alpha\chi^2 + 2\beta\chi + \gamma$, $\alpha > 0$ έχει

ελάχιστο όταν $\chi = -\frac{2\beta}{6\alpha} = -\frac{\beta}{3\alpha}$ την τιμή :

$$\psi = -\frac{(2\beta)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot \gamma}{4 \cdot 3\alpha} = -\frac{4\beta^2 - 12\alpha\gamma}{12\alpha} = -\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \text{ άρα σε κάθε περίπτωση είναι}$$

$$|P'(\xi)| \geq \left| -\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \right| = \left| \frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \right| \Leftrightarrow |P'(\xi)| \geq \left| \frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \right|.$$

Αρκεί να δείξεις ότι $\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} > \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$..

$$\text{Είναι } \frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \frac{4(\beta^2 - 3\alpha\gamma) - 3(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{12\alpha} =$$

$$\frac{4\beta^2 - 12\alpha\gamma - 3\beta^2 + 12\alpha\gamma}{12\alpha} = \frac{\beta^2}{12\alpha} \geq 0 \text{ γιατί } \beta^2 \geq 0 \text{ και } \alpha > 0. \text{ οπότε}$$

$$\frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \geq \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}.$$

$$\text{Τελικά } |P'(\xi)| \geq \left| \frac{\beta^2 - 3\alpha\gamma}{3\alpha} \right| \geq \left| \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} \right| = \left| \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \right| = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

επειδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Leftrightarrow 4\alpha\gamma - \beta^2 \geq 0$, $\alpha > 0$ άρα $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} > 0$ άρα τελικά

$$|P'(\xi)| \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Δαμινός Μωραΐτης

4.

ωανελλήνικες 1978**ΘΕΜΑ 4^ο**

α. $f(\chi) = \psi = 1 + \sqrt[5]{(\chi + 2)^4}$ προφανώς η f είναι συνεχής στο $\Delta = [-3, -1]$

και είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta = [-3, -1] - \{-2\} = [-3, -2) \cup (-2, -1]$

$$f(\chi) = \psi = 1 + \sqrt[5]{(\chi + 2)^4} = 1 + |\chi + 2|^{\frac{4}{5}} = 1 + \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{2}{5}} \text{ και όταν}$$

$\chi \in [-3, -2) \cup (-2, -1]$ θα είναι :

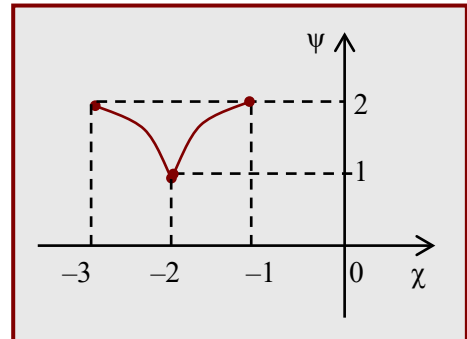
$$f'(\chi) = \left(1 + \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{3}{5}} \left[(\chi + 2)^2\right]' =$$

$$\frac{2}{5} \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{3}{5}} \cdot 2(\chi + 2) \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{4}{5} \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{3}{5}} (\chi + 2) \text{ οπότε προφανώς το}$$

πρόσημο της f' εξαρτάται από το $\chi + 2$.

$$f''(\chi) = \dots = -\frac{4}{25} \left[(\chi + 2)^2\right]^{\frac{3}{5}} < 0 \text{ για κάθε } \chi \in [-3, -2) \cup (-2, -1].$$

χ	-3	-2	-1
$f'(\chi)$	-		+
$f''(\chi)$	-		-
$f(\chi)$	↙ 2	0	↗ 2



β. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi = -2$ άρα δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το

Θ. Rolle στο διάστημα $(-3, -1)$.

Λιβαδειά

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1979

5.

Ένα πολύ ωραίο συνδυαστικό θέμα ανάμεσα στους μιγαδικούς και στις παραγώγους.

ΘΕΜΑ 3^ο

Το $|z| \in \mathbb{R}_+$ δηλαδή το $|z|$ στις συναρτήσεις θεωρείται ως σταθερά .

$$\Pi'(\chi) = \left[\chi^2 + 2|z_1 - z_2| \chi + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \right]' = 2\chi + 2|z_1 - z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Pi'(\chi) = 2\chi + 2|z_1 - z_2| \text{ άρα}$$

$$\Pi'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi + 2|z_1 - z_2| \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -|z_1 - z_2|$$

Επομένως για τη συνάρτηση

$\Pi(\chi)$ ισχύει ο πίνακας

μεταβολών :

χ	$-\infty$	$- z_1 - z_2 $	$+\infty$
$\Pi'(\chi)$		-	+
$\Pi(\chi)$			

Από την μονοτονία της συνάρτησης όπως φαίνεται στον πίνακα γίνεται

φανερό πως η $\Pi(\chi)$ έχει ελάχιστη τιμή για $\chi = -|z_1 - z_2|$ την

$$\Pi(-|z_1 - z_2|) = (-|z_1 - z_2|)^2 + 2|z_1 - z_2|(-|z_1 - z_2|) + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) =$$

$$\Pi(-|z_1 - z_2|) = -|z_1 - z_2|^2 + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \quad (1).$$

Η τριγωνική ανισότητα για τους μιγαδικούς είναι :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ και αν θέσεις όπου}$$

$$z_2 \text{ το } -z_2 \text{ γίνεται } ||z_1| - |-z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| \text{ και επειδή}$$

$$|z_2| = |-z_2| \text{ άρα ισχύει : } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow -|z_1 - z_2|^2 \geq -(|z_1| + |z_2|)^2 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχεις $\Pi(-|z_1 - z_2|) = -|z_1 - z_2|^2 + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \geq$

$$-(|z_1| + |z_2|)^2 + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$$

$$\Pi(-|z_1 - z_2|) \geq -|z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| + 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 =$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$-2|z_1||z_2| + 1 + |z_1|^2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Pi(-|z_1 - z_2|) \geq (|z_1||z_2|)^2 - 2|z_1||z_2| + 1 = (|z_1||z_2| - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi(-|z_1 - z_2|) \geq 0 \text{ που σημαίνει πως}$$

η ελάχιστη τιμή της $\Pi(\chi)$ είναι ≥ 0 άρα και κάθε τιμή της $\Pi(\chi) \geq 0$.

Το ίσον σημαίνει πως η $\Pi(\chi)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή, δηλαδή όταν

$$\chi = -|z_1 - z_2|.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $\Pi(\chi)$ βαθμού ≥ 2 .

α. Έστω ότι ο πραγματικός αριθμός ρ είναι πολλαπλή ρίζα του $\Pi(\chi)$ με βαθμό πολλαπλότητας κ τότε το $\Pi(\chi) = (\chi - \rho)^\kappa \cdot \pi(\chi) \Leftrightarrow$

$$\Pi'(\chi) = \kappa \cdot (\chi - \rho)^{\kappa-1} \cdot (\chi - \rho)' \pi(\chi) + (\chi - \rho)^\kappa \cdot \pi'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\Pi'(\chi) = \kappa \cdot (\chi - \rho)^{\kappa-1} \pi(\chi) + (\chi - \rho)^\kappa \cdot \pi'(\chi) \text{ και επομένως :}$$

$$\Pi'(\rho) = \kappa \cdot (\rho - \rho)^{\kappa-1} \pi(\rho) + (\rho - \rho)^\kappa \cdot \pi'(\rho) = \kappa \cdot 0 \pi(\rho) + 0 \cdot \pi'(\rho) \Leftrightarrow \Pi'(\rho) =$$

0.

Άρα ο ρ είναι ρίζα της παραγώγου του $\Pi(\chi)$.

β. Αν ο 1 είναι ρίζα του $\Pi(\chi)$ τότε

$$\Pi(1) = 0 \Leftrightarrow 1^4 + (\alpha - \beta)1^3 + 2\alpha \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha - \beta = 0 \quad (1)$$

Αν ο 1 είναι πολλαπλή ρίζα του $\Pi(\chi)$ τότε θα είναι και ρίζα του $\Pi'(\chi)$ (προηγούμενη ιδιότητα.)

$$\Pi'(\chi) = (\chi^4 + (\alpha - \beta)\chi^3 + 2\alpha\chi^2 - 5\chi + 4)' \Leftrightarrow \Pi'(\chi) = 4\chi^3 + 3(\alpha - \beta)\chi^2 + 4\alpha\chi - 5$$

$$\Leftrightarrow \Pi'(1) = 4 \cdot 1^3 + 3(\alpha - \beta)1^2 + 4\alpha \cdot 1 - 5 = 4 + 3\alpha - 3\beta + 4\alpha - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Pi'(1) = 7\alpha - 3\beta - 1 \Leftrightarrow \Pi'(1) = 0 \Leftrightarrow 7\alpha - 3\beta - 1 = 0 \quad (2).$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ 7\alpha - 3\beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ 7\alpha - 3\beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ 7\alpha - 3 \cdot 3\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 3\alpha \\ 7\alpha - 9\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 3\alpha \\ -2\alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \text{ και } \beta = \frac{-3}{2}.$$

6.

παυελλήμους 1980**ΘΕΜΑ 3^ο**

α. Για να δέχεται η συνάρτηση $f(\chi) = \psi = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 - 6\chi + 1$ τοπικά ακρότατα στα σημεία $\chi = 1$ και $\chi = -2$ θα πρέπει η παράγωγός της να μηδενίζεται στα σημεία αυτά.

$$f'(\chi) = (\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 - 6\chi + 1)' = 3\alpha\chi^2 + 2\beta\chi - 6 \text{ και επομένως πρέπει :}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 - 6 = 0 \\ f'(-2) = 3\alpha(-2)^2 + 2\beta(-2) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 6 \\ 12\alpha - 4\beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 6 \\ 6\alpha - 2\beta = 3 \end{cases} \text{ με}$$

πρόσθεση κατά μέλη έχεις $9\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = \frac{3}{2}$

β. Όταν $\alpha = 1$ και $\beta = \frac{3}{2}$ η f γίνεται $f(\chi) = \chi^3 + \frac{3}{2}\chi^2 - 6\chi + 1$ και η

$$f'(\chi) = 3\chi^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}\chi - 6 \Leftrightarrow f'(\chi) = 3\chi^2 + 3\chi - 6 = 3(\chi^2 + \chi - 2), \text{ το πρόσημο της}$$

f' είναι το πρόσημο του τριωνύμου $\chi^2 + \chi - 2$ το οποίο έχει ρίζες

$\rho_1 = -2$ και $\rho_2 = 1$ άρα για τη συνάρτηση $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$

Δαμινός Μωραΐτης

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = -2$,
- ✓ είναι αρνητική όταν $-2 < \chi < 1$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2, 1)$.
- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 1$,
- ✓ είναι θετική όταν $\chi > 1$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

7.

ωαυελλήμυες 1982**ΘΕΜΑ 2^ο****α. Θεωρία.****β.** Η φ είναι παραγωγίσιμη στο Δ , ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Εάν } \chi \in \Delta \text{ τότε } \varphi(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)} \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = \left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{(g(\chi))^2}$$

$$\text{άρα } \varphi'(\rho) = \frac{f'(\rho)g(\rho) - f(\rho)g'(\rho)}{(g(\rho))^2}, \varphi'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\rho)g(\rho) - f(\rho)g'(\rho)}{(g(\rho))^2} = 0$$

$$f'(\rho)g(\rho) - f(\rho)g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho)g(\rho) = f(\rho)g'(\rho) \Leftrightarrow \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} = \frac{f(\rho)}{g(\rho)} = \varphi(\rho).$$

8.

ωαυελλήμυες 1983**ΘΕΜΑ 3^ο**

$$\begin{aligned} f(\chi) = \psi = \frac{5\chi}{\chi^2 + \chi + 1} &\Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{5\chi}{\chi^2 + \chi + 1} \right)' = \frac{(5\chi)'(\chi^2 + \chi + 1) - (5\chi)(\chi^2 + \chi + 1)'}{(\chi^2 + \chi + 1)^2} \\ &= \frac{5(\chi^2 + \chi + 1) - 5\chi(2\chi + 1)}{(\chi^2 + \chi + 1)^2} = \frac{5\chi^2 + 5\chi + 5 - 10\chi^2 - 5\chi}{(\chi^2 + \chi + 1)^2} = \frac{-5\chi^2 + 5}{(\chi^2 + \chi + 1)^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -5(\chi^2 - 1) \geq 0, \text{ το τριωνόμου } -5(\chi^2 - 1) \text{ έχει ρίζες}$$

Λιβαδερά

$\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$ άρα για τη συνάρτηση $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	$+$	$-$	
$f(\chi)$				

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < -1$, άρα η ψ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$.
- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -1$,
- ✓ είναι όταν **θετική** $-1 < \chi < 1$, άρα η ψ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$.
- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$,
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 1$, άρα η ψ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση έχει δυο ακρότατα , ένα μέγιστο όταν $\chi = 1$, το $\psi = \frac{5 \cdot 1}{1^2 + 1 + 1}$

$$\Leftrightarrow \psi_{\max} = \frac{5}{3} \text{ και ένα ελάχιστο όταν } \chi = -1 \text{ το } \psi = \frac{5 \cdot (-1)}{(-1)^2 + (-1) + 1}$$

$$\psi_{\min} = -5$$

9.

ωανελλήνικες 1983 Α Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

α . Επειδή $c \notin [\alpha, \beta]$ η F ορίζεται σ' ολόκληρο το $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και έχει παράγωγο

Δαμιανός Μωραΐτης

$$F'(\chi) = \frac{f'(\chi)(\chi - c) - f(\chi)(\chi - c)'}{(\chi - c)^2} = \frac{f'(\chi)(\chi - c) - f(\chi)}{(\chi - c)^2}.$$

$$\text{Από τον τύπο της } F \text{ έχουμε } F(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - c} = \frac{0}{\alpha - c} = 0 \text{ και } F(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta - c} = \frac{0}{\beta - c} = 0.$$

Άρα από ότι φαίνεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και επομένως θα υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(c_0) = 0.$$

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραμμής με εξίσωση $\psi = f(\chi)$ στο τυχαίο σημείο $(c_0, f(c_0))$ είναι $\psi - f(c_0) = f'(c_0)(\chi - c_0)$, αν η εφαπτομένη, λοιπόν, περνάει από το $(c, 0)$ τότε η εξίσωση της θα επαληθεύετε από τις συντεταγμένες $(c, 0)$, δηλαδή πρέπει να ισχύει $0 - f(c_0) = f'(c_0)(c - c_0) \Leftrightarrow$

$$f'(c_0) = -\frac{f(c_0)}{(c - c_0)}.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε να είναι

$$F'(c_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c_0)(c_0 - c) - f(c_0)}{(c_0 - c)^2} = 0$$

$$f'(c_0)(c_0 - c) - f(c_0) = 0 \Leftrightarrow f'(c_0) = \frac{f(c_0)}{c_0 - c} \Leftrightarrow f'(c_0) = -\frac{f(c_0)}{c - c_0}, \text{ άρα}$$

προφανώς το ζητούμενο σημείο $(c_0, f(c_0))$ είναι αυτό που προκύπτει από το c_0 του προηγούμενου ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Επειδή $\chi - 1 \leq |\chi - 1|$ (ιδιότητα των απόλυτων τιμών $a \leq |a|$) αρκεί να

$$\text{δείξεις ότι } \ln \chi \leq \chi - 1 \leq |\chi - 1|$$

Έστω η συνάρτηση $g(\chi) = \ln \chi - \chi + 1$, $\chi > 0$.

Λιβαδεϊά

Είναι $g'(\chi) = (\ln \chi)' - (\chi)' = \frac{1}{\chi} - 1 \Leftrightarrow g'(\chi) = \frac{1-\chi}{\chi}, \chi > 0.$

$g'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow (1-\chi)\chi \geq 0 \Leftrightarrow -\chi^2 + 1 \geq 0$, το τριώνυμο $-\chi^2 + 1 \geq 0$ έχει ρίζες

$\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$ άρα για τη συνάρτηση $g(\chi)$ με $\chi > 0$ ισχύει ο πίνακας

μεταβολών :

χ	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(\chi)$	-			+	-
$g(\chi)$	↘			↗	↘

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η g' :

- ✓ είναι όταν **θετική** $0 < \chi < 1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$.
- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$,
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 1$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστο όταν $\chi = 1$, το $g(1) = \ln 1 - 1 + 1 \Leftrightarrow g(1) = 0$

άρα γενικά θα ισχύει : $g(\chi) \leq g(1) = 0 \Leftrightarrow \ln \chi - \chi + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\ln \chi \leq \chi - 1 \leq |\chi - 1| \Leftrightarrow \ln \chi \leq |\chi - 1|$

β.

i) Η f είναι συνεχής στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi \ln \chi}{1-\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\ln \chi}{\frac{1}{\chi} - 1} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \chi)'}{\left(\frac{1}{\chi} - 1\right)'} = - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi^2}{\chi} \Leftrightarrow$

$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \chi = 0 = f(0)$ **άρα η f είναι συνεχής στο 0 .**

Επίσης $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \ln \chi}{1-\chi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi \ln \chi)'}{(1-\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \frac{1}{\chi} + \ln \chi}{-1} \Leftrightarrow$

$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = - \lim_{\chi \rightarrow 1} (1 + \ln \chi) = -1 = f(1)$ **άρα η f είναι συνεχής στο 1 .**

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

ii) Για κάθε $\chi \in (0, 1)$ είναι έχουμε

$$f'(\chi) = \frac{(\chi \ln \chi)'(1-\chi) - (\chi \ln \chi)(1-\chi)'}{(1-\chi)^2} = \frac{(\ln \chi + 1)(1-\chi) + (\chi \ln \chi)'}{(1-\chi)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\ln \chi - \chi + 1}{(1-\chi)^2} \text{ και επειδή στο } \alpha \text{ απέδειξες πως}$$

$\ln \chi \leq \chi - 1 \Leftrightarrow \ln \chi - \chi + 1 \leq 0$ άρα $f'(\chi) \leq 0$ στο $(0, +\infty)$ και επειδή η

παράσταση $\ln \chi - \chi + 1 = 0$ μόνο όταν $\chi = 1$ άρα $f'(\chi) < 0$ στο $(0, 1)$ άρα η

f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$.

iii) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου είναι :

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi \ln \chi}{1-\chi} + 1}{\chi - 1} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi \ln \chi - \chi + 1}{(\chi - 1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$- \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi \ln \chi - \chi + 1)'}{[(\chi - 1)^2]'} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\ln \chi}{2(\chi - 1)} = \frac{0}{0} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\ln \chi)'}{2(\chi - 1)'} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\chi}}{2} = - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\chi) = - \frac{1}{2}.$$

10.

πανελλήνιες 1983 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Θεωρία.

β. $f(\chi) = \psi = \chi^3$ άρα $f'(\chi) = (\chi^3)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 3\chi^2$ επομένως $f'(1) = 3$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 1 = 3(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = 3\chi - 2$$

Λιβαδερά

ΘΕΜΑ 4^ο

Η συνάρτηση f έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .

Ο τύπος της f , χωρίς απόλυτα, γράφεται :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \geq 0 \\ x^2 + x - 2, & x < 0 \end{cases}, \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, επειδή ακριβώς περιέχει απόλυτη τιμή, τυπικά όμως θα βρεις τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - 2 - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2 - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ και επομένως η } f \text{ δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 0.

$$\text{Για την δεύτερη παράγωγο έχεις } f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \quad f''(x) = 2 > 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Για να βρεις το πρόσημο της f' , θα λύσεις δυο ανισώσεις

$$✓ \text{ Αν } x > 0 \text{ τότε } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$✓ \text{ Αν } x < 0 \text{ τότε } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Άρα οι μεταβολές της f φαίνονται στον πίνακα της επόμενης σελίδας

Δαμιανός Μωραΐτης

χ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+			-
$f''(\chi)$	+		+			+
$f(\chi)$	$+\infty$	$\tau.\varepsilon.$ $-\frac{9}{4}$	$\tau.\mu. - 2$		$\tau.\varepsilon.$ $-\frac{9}{4}$	$+\infty$

Με βάση τον πίνακα :

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ και

γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Στη θέση $\chi = -\frac{1}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, στη θέση

$\chi = 0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0) = -2$ και στη θέση $\chi = \frac{1}{2}$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

Τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο με το τοπικό

μέγιστο, αφού
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^2 - \chi - 2) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^2 = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\chi^2 + \chi - 2) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi^2 = +\infty \end{array} \right\}$$

άρα το -2 παραμένει **τοπικό** μέγιστο

Η $f''(\chi) = 2 > 0$ στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$ άρα στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και δεν έχει σημεία καμπής .

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες .

Λ ι β α δ ε ι ά

Επίσης η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες αφού :

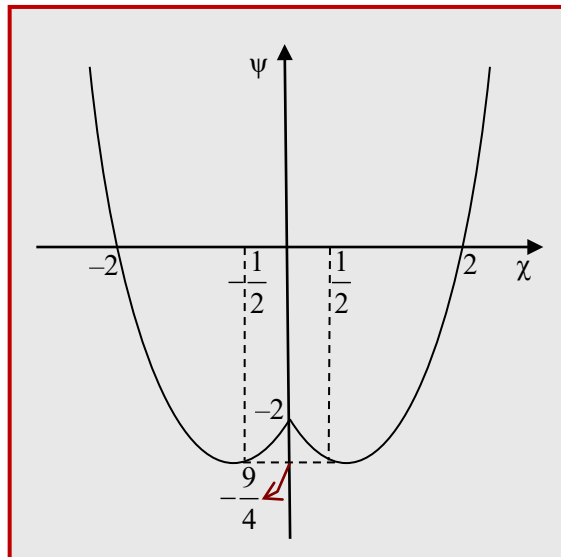
$$\left\langle \begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - \chi - 2}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} &= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + \chi - 2}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi = -\infty \end{aligned} \right\rangle$$

Η C_f τέμνει τον $\chi'\chi$ στα σημεία $(2, 0)$ και $(-2, 0)$ αφού :

$$f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - |\chi| - 2 = 0 \Leftrightarrow |\chi|^2 - |\chi| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\chi| = -1 & \text{αδύνατη} \\ |\chi| = 2 & \Leftrightarrow \chi = \pm 2 \end{cases}$$

Η C_f τέμνει τον $\psi'\psi$ στο σημείο $(0, -2)$ αφού $f(0) = -2$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορείς να σχεδιάσεις την C_f :



Δαμιανός Μωραΐτης

11.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1984 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής χ με :

$$\psi(\chi) = \chi + \frac{4}{\chi}$$

α . i) Για το Π Ο πρέπει $\chi \neq 0$, οπότε το σύνολο ορισμού της ψ είναι το

$$A = R^* = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

ii) Για το σύνολο τιμών μπορείς να εργαστείς με δυο τρόπους .

1^{ος} τρόπος : Ξεκινάς από την $\psi(\chi) = \chi + \frac{4}{\chi}$ και προσπαθείς να βρεις την

$$\text{αντίστροφη σχέση, δηλαδή η } \psi = \chi + \frac{4}{\chi} \Leftrightarrow \psi \cdot \chi = \chi^2 + 4 \Leftrightarrow \chi^2 - \psi \cdot \chi + 4 = 0$$

πρέπει να έχει λύση ως προς χ . Η $\chi^2 - \psi \cdot \chi + 4 = 0$ είναι 2^{ου} βαθμού και για να

$$\text{έχει λύση ως προς } \chi \text{ πρέπει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-\psi)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geq 0 \Leftrightarrow \psi^2 - 16 \geq 0.$$

Οι λύσεις της ανισότητας είναι τα $\psi \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ διάστημα που αποτελεί και το **Σύνολο Τιμών** .

2ος τρόπος : Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα της μονοτονίας, αφού απαντήσεις πρώτα στο **β)** ερώτημα.

$$\text{β . Για κάθε } \chi \neq 0 \text{ έχεις } \psi'(\chi) = \left(\chi + \frac{4}{\chi} \right)' = (\chi)' + \left(\frac{4}{\chi} \right)' = 1 - \frac{4}{\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\psi'(\chi) = \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2}. \text{ Οπότε } \psi'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4 \geq 0.$$

Η παράσταση $\chi^2 - 4$ έχει ρίζες ± 2 και επομένως οι μεταβολές για τη συνάρτηση ψ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

χ	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$\psi'(\chi)$	+	-	-	+	
$\psi(\chi)$					

Λιβαδειά

Η ψ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-2, 0)$, $(0, 2)$.

2^{ος} τρόπος για το σύνολο τιμών: Η ψ είναι συνεχής στο A και λόγω της μονοτονίας της, τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι:

$$\psi((-\infty, -2]) = \left(\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \psi(\chi), \psi(-2) \right] = (-\infty, -4],$$

$$\psi([-2, 0)) = \left(\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \psi(\chi), \psi(-2) \right] = (-\infty, -4]$$

$$\psi((0, 2]) = \left[\psi(2), \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \psi(\chi) \right) = [4, \infty),$$

$$\psi([2, +\infty)) = \left[\psi(2), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \psi(\chi) \right) = [4, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της ψ είναι το

$$(-\infty, -4] \cup (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \cup [4, +\infty) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty).$$

12.

ωανελλήνικες 1985 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Θεωρία (εκτός ύλης)

β. Είναι $f(\chi) = \chi^2(\chi - 3) + 4 = \chi^3 - 3\chi^2 + 4 \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = (\chi^3 - 3\chi^2 + 4)' = 3\chi^2 - 6\chi = 3\chi(\chi - 2) \text{ ρίζες } \chi_1 = 0 \text{ και } \chi_2 = 2$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμων

$-\infty$	0	2	$+\infty$	
+		-		+

και πίνακα μεταβολών:

χ	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(\chi)$	+	0	-	0	+
$f(\chi)$					

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 0$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi < 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι αρνητική όταν $0 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = 0$ και **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = 2$.

$$\text{Είναι } f'(\chi) = 3\chi^2 - 6\chi \Leftrightarrow f''(\chi) = (3\chi^2 - 6\chi)' = 6\chi - 6,$$

$$f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6\chi - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1 \text{ άρα στη θέση } \chi_3 = 1$$

η f παρουσιάζει καμπή αφού η $f''(\chi)$ αλλάζει εκεί πρόσημο.

$$\text{Είναι } f(0) = 4, f(2) = 0, f(1) = 2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$(\chi_1, f(\chi_1)), (\chi_2, f(\chi_2))$, δηλαδή τα σημεία $(0, 4)$ και $(2, 0)$ είναι

$$\lambda = \frac{0-4}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ άρα η εξίσωση της ευθείας } \psi - 4 = -2(\chi - 0) \Leftrightarrow$$

$$\psi = -2\chi + 4 \quad (1)$$

Η (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου $(\chi_3, f(\chi_3))$, δηλαδή του $(1, 2)$ αφού $2 = -2 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 2 = 2$, αληθές.

Άρα τα σημεία $(\chi_1, f(\chi_1)), (\chi_2, f(\chi_2)), (\chi_3, f(\chi_3))$ είναι συνευθειακά.

13.

Πανελλήνιες 1985 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Είναι } f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1)' = 3\chi^2 - 12\chi + 9 =$$

Λιβαδεϊά

$$3(\chi^2 - 4\chi + 3) \text{ άρα ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 3$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμων :

$-\infty$	1	3	$+\infty$
+		-	+

και πίνακα μεταβολών :

χ	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(\chi)$	+	0	-	0	+
$f(\chi)$					

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$ και $\chi = 3$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < \chi < 3$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 3)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 3$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(3, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = 1$, το $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 5$ και **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = 3$, το $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow f(3) = 1$.

$$\text{Είναι } f'(\chi) = 3\chi^2 - 12\chi + 9 \Leftrightarrow f''(\chi) = (3\chi^2 - 12\chi + 9)' = 6\chi - 12,$$

$$f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6\chi - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$$

Άρα **συνολικός** πίνακας μεταβολών για την f :

χ	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	-	+	
$f''(\chi)$	-	-	+	+	
$f(\chi)$					

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f'' :

μηδενίζεται όταν $\chi = 2$.

είναι **αρνητική** όταν $\chi < 2$, άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2, +\infty)$.

Άρα η **f** παρουσιάζει καμπή στη θέση $\chi_0 = 2$, αφού η $f''(\chi)$ εκεί αλλάζει πρόσημο.

ΘΕΜΑ 3^ο

β. Έστω η συνάρτηση **f** με $f(\chi) = \frac{3\chi}{\chi^2 + 1}$, $\chi \in \mathbb{R}$. Για το Π Ο πρέπει

$\chi^2 + 1 \neq 0$ που ισχύει, οπότε το σύνολο ορισμού της **f** είναι το $A = \mathbb{R}$.

Για το σύνολο τιμών μπορείς να εργαστείς με δυο τρόπους .

1^{ος} τρόπος : Ξεκινάς από την $f(\chi) = \frac{3\chi}{\chi^2 + 1}$ και προσπαθείς να βρεις την

αντίστροφη σχέση, δηλαδή η $\psi = \frac{3\chi}{\chi^2 + 1} \Leftrightarrow \psi \cdot \chi^2 + \psi = 3\chi \Leftrightarrow \psi \cdot \chi^2 - 3\chi + \psi = 0$

πρέπει να έχει λύση ως προς χ . Η $\psi \cdot \chi^2 - 3\chi + \psi = 0$ είναι 2^{ου} βαθμού και για

να έχει λύση ως προς χ πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-3)^2 - 4 \cdot \psi \cdot \psi \geq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \psi^2 - 9 \leq 0$.

Οι λύσεις της ανισότητας είναι τα $\psi \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, διάστημα που αποτελεί και το **Σύνολο Τιμών** .

2^{ος} τρόπος : Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα της μονοτονίας.

Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ έχεις

$$\begin{aligned} f'(\chi) &= \left(\frac{3\chi}{\chi^2 + 1} \right)' = \frac{(3\chi)'(\chi^2 + 1) - (3\chi)(\chi^2 + 1)'}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{3(\chi^2 + 1) - 2\chi \cdot 3\chi}{(\chi^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3\chi^2 + 3 - 6\chi^2}{(\chi^2 + 1)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{-3(\chi^2 - 1)}{(\chi^2 + 1)^2}, f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3(\chi^2 - 1)}{(\chi^2 + 1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

ρίζες $\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 1$

πίνακας μεταβολών για την **f** :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	+	-	
$f(\chi)$				

Αι β α δ ε ι ά

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

μηδενίζεται όταν $\chi = -1$ και $\chi = 1$

είναι **αρνητική** όταν $\chi < -1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$

είναι **θετική** όταν $-1 < \chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$

είναι **αρνητική** όταν $\chi > 1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

2^{ος} τρόπος για το σύνολο τιμών :

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και λόγω της μονοτονίας της, τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι : f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ άρα

$$f(-\infty, -1) = \left[f(-1), \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) \right) = \left[-\frac{3}{2}, 0 \right),$$

$$f \text{ γνησίως αύξουσα στο } (-1, 1) \text{ άρα } f(-1, 1) = (f(-1), f(1)) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ άρα

$$f(1, +\infty) = \left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) \right) = \left(0, \frac{3}{2} \right).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{3}{2}, 0 \right) \cup \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cup \left(0, \frac{3}{2} \right] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Θεωρία

$$\text{β.} \quad f(\chi) = 2\chi^2 + \chi + 3 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^2 + \chi + 3)' \text{ άρα } f'(\chi) = 4\chi + 1$$

επομένως $f'(0) = 1$ και φυσικά $f(0) = 3$ άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει

$$\text{εξίσωση : } \psi - f(0) = f'(0)(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi - 3 = 1 \cdot \chi \Leftrightarrow \psi = \chi + 3$$

Δαμιανός Μωραΐτης

14.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1986 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο**Α. Θεωρία.****Β.** Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική άρα αν στο χ_0 παρουσιάζει καμπή θα είναι $f''(\chi_0) = 0$.Είναι $f(\chi) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\chi^2 - 10\chi + 7$ άρα

$$f'(\chi) = \left(\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\chi^2 - 10\chi + 7 \right)' = 3\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\chi - 10$$

$$\text{άρα } f''(\chi) = \left(3\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi^2 - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\chi - 10 \right)' = 6\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi - 2\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \text{ άρα}$$

$$f''(\chi) = (6\alpha - 4)\chi - (2\alpha + 1) \text{ και επομένως } f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \text{ άρα}$$

$$(6\alpha - 4)\frac{3}{2} - (2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6 - 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 7\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow 7\alpha = 7 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1.}$$

Οπότε η f γίνεται :

$$f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{3}{2}\chi^2 - 10\chi + 7 \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - \frac{3}{2}\chi^2 - 10\chi + 7 \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \chi^2 - 3\chi^2 - 10 \text{ και έχει ρίζες } \chi_1 = -2 \text{ και } \chi_2 = 5.$$

$$\text{Επίσης είναι } f''(\chi) = 2\chi - 3 \text{ άρα } f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{3}{2}$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

χ	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	-	+	
$f''(\chi)$	-	-	+	+	
$f(\chi)$					

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f :**Λ ι β α δ ε ι ά**

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -2$ και $\chi = 5$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -2$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-2 < \chi < 5$, άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2, 5)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 5$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $(5, +\infty)$

Άρα η **f** παρουσιάζει ακρότατα :

τ. μ. στη θέση $\chi_1 = -2$ το $f(-2) = \frac{55}{3}$ και τ. ε. στη θέση $\chi_2 = 5$ το $f(5) = -\frac{233}{6}$.

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η **f''** : **μηδενίζεται** όταν $\chi = \frac{3}{2}$.

είναι **αρνητική** όταν $\chi < \frac{3}{2}$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, \frac{3}{2})$.

είναι **θετική** όταν $\chi > \frac{3}{2}$ άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(\frac{3}{2}, +\infty)$.

Άρα η **f** παρουσιάζει καμπή στη θέση $\chi_0 = \frac{3}{2}$ το $f(\frac{3}{2}) = -\frac{41}{4}$, αφού η $f'(\chi)$ εκεί αλλάζει πρόσημο.

15.

αναελλήνως 1986 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

Είναι $f(\chi) = 2\chi^3 + 3\chi^2 - 36\chi + 90 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^3 + 3\chi^2 - 36\chi + 90)' =$

$6\chi^2 + 6\chi - 36 = 6(\chi^2 + \chi - 6)$ ρίζες $\chi_1 = -3$ και $\chi_2 = 2$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
+		-		+

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

χ	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+		-	+
$f(\chi)$				

Άρα όπως φαίνεται η f' :

μηδενίζεται όταν $\chi = -3$ και $\chi = 2$

είναι **θετική** όταν $\chi < -3$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -3)$

είναι **αρνητική** όταν $-3 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-3, 2)$

είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = -3$,

$$\text{το } f(-3) = 2(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 90 \Leftrightarrow f(-3) = 171 \text{ και}$$

$$\textbf{τ. ε.} \text{ στη θέση } \chi_2 = 2, \text{ το } f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 90 \Leftrightarrow f(2) = 46.$$

Τα ακρότατα αυτά δεν είναι ολικά αφού

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = +\infty \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = -\infty.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + 7\chi - 1$, $\chi \in \Upsilon$.

$$f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + 7\chi - 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + 7\chi - 1 \right)' \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 7 \text{ επομένως } f'(1) = 3 \text{ και φυσικά } f(1) = \frac{23}{6} \text{ άρα η ζητούμενη}$$

$$\text{εφαπτομένη έχει εξίσωση : } \psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - \frac{23}{6} = 3(\chi - 1) \Leftrightarrow$$

$$\psi = 3\chi - 3 + \frac{23}{6} \Leftrightarrow \psi = 3\chi + \frac{5}{6} \text{ Η τελευταία για } \psi = 0 \text{ δίνει } 0 = 3\chi + \frac{5}{6} \Leftrightarrow$$

$$\chi = -\frac{5}{18}.$$

Το σημείο στο οποίο τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα $\chi\chi$ είναι το $\left(-\frac{5}{18}, 0\right)$.

Λι β α δ ε ι ά

16.

ωαυελλήμυες 1987 Α Δέση

ΘΕΜΑ 4^ο**A.** Θεωρία.**B.** Η f είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ επιπλέον είναι :

$$f(\chi) = \chi^4 - 14\chi^2 + 24\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^4 - 14\chi^2 + 24\chi)' = 4\chi^3 - 28\chi + 24 \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 4\chi^3 - 28\chi + 24.$$

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 4\chi^3 - 28\chi + 24 = 0 \Leftrightarrow 4\chi^3 - 4\chi - 24\chi + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\chi(\chi^2 - 1) - 24(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow 4\chi(\chi + 1)(\chi - 1) - 24(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\chi - 1)(\chi^2 + \chi - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - 1 = 0 \\ \chi^2 + \chi - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = 1 \\ \chi_2 = -3 \text{ και } \chi_3 = 2 \end{cases}.$$

Τελικά υπάρχουν για την $f'(\chi) = 0$ τρεις λύσεις, οι $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = -3$ και $\chi_3 = 2$ άρα σύμφωνα με την θεωρία στα (τρία) σημεία : $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ και $(-3, f(-3))$, η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$.

Αν το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι πάνω στον άξονα $\psi'\psi$, τότε τετμημένη του χ_Θ θα είναι ίση με 0.

Έστω ότι $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$ και $\Gamma(-3, f(-3))$.

Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$ τότε :

$$M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right) \text{ και } \overline{A\Theta} = 2 \cdot \overline{\Theta M} \quad (1).$$

$$\text{Από την (1) είναι } \chi_\Theta - \chi_A = 2(\chi_M - \chi_\Theta) \Leftrightarrow \chi_\Theta - 1 = 2\left(-\frac{1}{2} - \chi_\Theta\right) \Leftrightarrow$$

$$\chi_\Theta - 1 = -1 - 2\chi_\Theta \Leftrightarrow \boxed{\chi_\Theta = 0} \text{ Άρα το } \Theta \text{ βρίσκεται πάνω στον } \psi'\psi.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

17.

ωανελλήνικες 1987 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο**A.** Θεωρία.**B.** Η f είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ επιπλέον

$$\text{είναι : } f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + 9\chi - 12 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + 9\chi - 12)' \Leftrightarrow \\ f'(\chi) = 3\alpha\chi^2 + 2\beta\chi + 9.$$

Αν το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στην C θα πρέπει $f(2) = -10 \Leftrightarrow$

$$\alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 12 = -10 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta + 6 = -10 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4 \quad (1).$$

Αν η εφαπτομένη της C στο σημείο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον

$$\text{αριθμό } -3 \text{ τότε θα είναι : } f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3\alpha \cdot 2^2 + 2\beta \cdot 2 + 9 = -3 \Leftrightarrow$$

$$12\alpha + 4\beta = -12 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = -3 \quad (2).$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -4 \\ 3\alpha + \beta = -3 \end{cases}$ **και με αφαίρεση κατά μέλη**

έχεις $\alpha = 1$ οπότε $\beta = -6$.

18.

ωανελλήνικες 1988 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο**A.** Παλιότερα αποτελούσε μέρος της θεωρίας, σήμερα δεν αναφέρεται παρ' όλο που είναι χρήσιμος τύπος

Η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο της σταθερής συνάρτησης $f(\chi) = 1$ και της $g(\chi)$.

Αν χ_0 τυχαίο σημείο του Δ τέτοιο ώστε $g(\chi_0) \neq 0$ τότε θα είναι :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\chi_0) = \left(\frac{1}{g(\chi_0)}\right)' = \frac{(1)' \cdot g(\chi_0) - 1 \cdot (g(\chi_0))'}{[g(\chi_0)]^2} = -\frac{g'(\chi_0)}{[g(\chi_0)]^2}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

B . α. Σύμολο Ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\text{Είναι } f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right)' =$$

$$1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \text{ άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0,$$

ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = 0$,

πίνακας προσήμου :

$-\infty$	-2	0	$+\infty$
+		-	+

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$					

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $x = -2$ και $x = 0$
- ✓ είναι **θετική** όταν $x < -2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-2 < x < -1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2, -1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-1 < x < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $x_1 = -2$, το

$$f(-2) = -2 + 1 + \frac{1}{-2+1} \Leftrightarrow f(-2) = -2 \text{ και τ. ε. στη θέση } x_2 = 0, \text{ το}$$

$$f(0) = 0 + 1 + \frac{1}{0+1} \Leftrightarrow f(0) = 2.$$

Τα ακρότατα αυτά δεν είναι ολικά αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Δαμιανός Μωραΐτης

19.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1988 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^οΑ. Η f είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$, διότι

$$\begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (3\chi^2 - 5\chi + 6) = 4 = f(1) \\ \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} 2\sqrt{\chi^2 + 3} = 4 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = f(1).$$

✓ Αν $\chi < 1$ τότε

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{3\chi^2 - 5\chi + 6 - 4}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{3\chi^2 - 5\chi + 2}{\chi - 1} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{3(\chi - 1)\left(\chi - \frac{2}{3}\right)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} 3\left(\chi - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = 1. \end{aligned}$$

✓ Αν $\chi > 1$ τότε

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{\chi^2 + 3} - 4}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{\chi^2 + 3} - 2)(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\chi^2 + 3 - 4)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\chi^2 - 1)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\chi - 1)(\chi + 1)}{(\chi - 1)(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2(\chi + 1)}{(\sqrt{\chi^2 + 3} + 2)} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = 1. \end{aligned}$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 1$ και μάλιστα $f'(1) = 1$ **ΘΕΜΑ 4^ο**

Α. Θεωρία

Β. Η f ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι

$$f'(\chi) = (3\chi^3 - \alpha\chi^2 + \beta\chi - 3)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 9\chi^2 - 2\alpha\chi + \beta.$$

Λι β α δ ε ι ά

Επειδή η f έχει τοπικά ακρότατα στα $\chi = 1$ και $\chi = -\frac{5}{9}$ σύμφωνα με το

$$\text{θεώρημα του Fermat θα είναι } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(-\frac{5}{9}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 1^2 - 2\alpha \cdot 1 + \beta = 0 \\ 9\left(-\frac{5}{9}\right)^2 - 2\alpha\left(-\frac{5}{9}\right) + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 9 \\ \frac{25}{9} + \frac{10\alpha}{9} + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 9 \\ 10\alpha + 9\beta = -25 \end{cases} \cdot \text{ Άρα } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -5 \end{cases}.$$

20.

ωανελλήνικες 1989 Α Δέση

A. Θεωρία.

B. α. Για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι : $f'(\chi) = g'(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi) + c, c \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = (g(\chi) + c \cdot \chi)' \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi) + c \cdot \chi + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Αν $\chi = 0$ τότε $f(0) = g(0) + c \cdot 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$, λόγω της **iii**).

Άρα για κάθε $\chi \in \Delta$, $f(\chi) = g(\chi) + c \cdot \chi \Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) = c \cdot \chi$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

β. Λόγω του **α**) είναι $g(\chi) = f(\chi) - c \cdot \chi$.

Η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο Δ . άρα και στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq \Delta$ και

$$\checkmark \text{ Αν } \chi = \rho_1 \text{ τότε } g(\rho_1) = f(\rho_1) - c \cdot \rho_1 = -c \cdot \rho_1$$

$$\checkmark \text{ Αν } \chi = \rho_2 \text{ τότε } g(\rho_2) = f(\rho_2) - c \cdot \rho_2 = -c \cdot \rho_2$$

1^ο Αν $c = 0$ τότε $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$ οπότε οι ζητούμενες ρίζες της $g(\chi) = 0$

είναι οι ρ_1 και ρ_2

2^ο Αν $c \neq 0$ τότε $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = c^2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 < 0$ γιατί $c \neq 0$ άρα $c^2 > 0$ και

ρ_1, ρ_2 ετερόσημες, άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει μια

τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) άρα και στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Έτσι λοιπόν η $g(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για κάθε $\chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι :

$$f(\chi) = \eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \left(2\chi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sigma\upsilon\nu(-2\chi) = \sigma\upsilon\nu 2\chi$$

$$\text{και } f'(\chi) = (\sigma\upsilon\nu 2\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = -2\eta\mu 2\chi .$$

$$\text{Είναι } f(\chi_0) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2\eta\mu\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = -2\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} .$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$\psi - f\left(\frac{\pi}{8}\right) = f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\chi - \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\left(\chi - \frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\psi = -\sqrt{2}\chi + \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$$

21.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1989 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

Σύνολο Ορισμού το $\mathbb{R}^*$ Η f ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και

$$\text{είναι } f'(\chi) = \left(\chi^2 + \frac{2\alpha}{\chi} + \beta\right)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\chi - \frac{2\alpha}{\chi^2} .$$

Η f μηδενίζεται στο $\chi_1 = 1$ άρα $f(1) = 0$, έχει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 = 2$,

σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(2) = 0$ άρα είναι :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + \frac{2\alpha}{1} + \beta = 0 \\ 2^2 - \frac{2\alpha}{2^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -17 \\ \alpha = 8 \end{cases}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

και φυσικά η f γίνεται : $f(\chi) = \chi^2 + \frac{16}{\chi} - 17$ και η $f'(\chi) = 2\chi - \frac{16}{\chi^2}$.

Είναι $f'(\chi) = \frac{2\chi^3 - 16}{\chi^2} = \frac{2(\chi^3 - 8)}{\chi^2}$, $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^3 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

χ	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	$\parallel$	$-$	$+$
$f(\chi)$				

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$ και δεν ορίζεται στο 0
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο : **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = 2$, το

$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} - 17 \Leftrightarrow f(2) = -5$. Το ακρότατο αυτό δεν είναι ολικό αφού

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \left(\chi^2 + \frac{16}{\chi} - 17 \right) = 0 - \infty - 0 = -\infty$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Θεωρία

ΘΕΜΑ 4^ο

Σύνολο ορισμού το $[0, +\infty)$, όπως είναι γνωστό, η $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(\chi) = (\sqrt{\chi})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\chi} \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}^*$ άρα η

$f(\chi) = \sqrt{\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Δαμιανός Μωραΐτης

22.

ωαυελλήνικες 1990 Α Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο**A.** Θεωρία (Θ. Μ. Τ.)**B.** Η f ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.**1ος τρόπος:** Αρκεί να δείξει πως υπάρχει λύση για την $f'(x) = 0$ στο $(0, 1)$.Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο $[0, 1]$ και άρα θα υπάρχει

$$\xi \in (0, 1) \text{ έτσι ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\alpha}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right) + \gamma - \delta + \delta - \delta \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

2ος τρόπος: Είναι $f(0) = \frac{\alpha \cdot 0^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)0^2 + (\gamma - \delta)0 + \delta \Leftrightarrow f(0) = \delta$ και

$$f(1) = \frac{\alpha \cdot 1^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)1^2 + (\gamma - \delta)1 + \delta = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \delta + \gamma - \delta + \delta = 0 + \delta \Leftrightarrow f(1) = \delta$$

άρα στο διάστημα $[0, 1]$ ισχύει το θεώρημα Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$

έτσι $f'(\chi) = 0$ άρα

υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Η f έχει Σύνολο ορισμού το $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

✓ Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x + \frac{1}{2x^2}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty$ C_f έχει

κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (άξονας $y' y$)

[Η κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι τώρα εκτός ύλης].

Λι β α δ ε ι ά

$$\checkmark \quad \text{Είναι} \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{3\chi + \frac{1}{2\chi^2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{2\chi^3} \right) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 3$$

$$\text{άρα } \lambda = 3 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 3\chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[3\chi + \frac{1}{2\chi^2} - 3\chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 3\chi] = 0, \text{ άρα } \beta = 0.$$

Επομένως η ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία $\psi = 3\chi$.

$$\checkmark \quad \text{Είναι} \quad \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{3\chi + \frac{1}{2\chi^2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{2\chi^3} \right) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 3$$

$$\text{άρα } \lambda = 3 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [f(\chi) - 3\chi] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[3\chi + \frac{1}{2\chi^2} - 3\chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} [f(\chi) - 3\chi] = 0, \text{ άρα } \beta = 0.$$

Επομένως η ασύμπτωτη στο $-\infty$ είναι η ευθεία $\psi = 3\chi$.

23.

ωαυελλήμυες 1990 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Θεωρία χωρίς απόδειξη (τόρα πια)

B. Η $g(2\chi - 5)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(\chi)$ και $h(\chi) = 2\chi - 5$, επομένως η $f(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(\chi) &= [3(\chi - 2)^2]' \cdot g(2\chi - 5) + 3(\chi - 2)^2 [g(2\chi - 5)]' = \\ &= 6(\chi - 2)(\chi - 2)' g(2\chi - 5) + 3(\chi - 2)^2 g'(2\chi - 5)(2\chi - 5)' = \\ &= 6(\chi - 2) g(2\chi - 5) + 6(\chi - 2)^2 g'(2\chi - 5). \end{aligned}$$

Η $g'(2\chi - 5)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η $f'(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα γινομένων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

Δαμινός Μωραΐτης

$$\begin{aligned}
 f''(\chi) &= [6(\chi-2)g(2\chi-5)]' + [6(\chi-2)^2g'(2\chi-5)]' = \\
 &= 6g(2\chi-5) + 6(\chi-2)g'(2\chi-5)(2\chi-5)' + 12(\chi-2)g'(2\chi-5) + 6(\chi-2)^2 \cdot \\
 &\quad g''(2\chi-5)(2\chi-5)' \Leftrightarrow \\
 f''(\chi) &= 6g(2\chi-5) + 12(\chi-2)g'(2\chi-5) + 12(\chi-2)g'(2\chi-5) + 12(\chi-2)^2 \cdot \\
 &\quad g''(2\chi-5). \\
 \text{Άρα } f''(2) &= 6g(-1) + 12(2-2)g'(-1) + 12(2-2)g'(-1) + 12(2-2)^2g''(-1) = \\
 &= 6g(-1) + 0 + 0 + 0 = 42.
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(\chi) = \frac{\chi^4}{3} + \frac{2\alpha\chi^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)\chi^2 + (\alpha^3 + 7)\chi - 5\alpha^2.$$

Η f είναι πολυωνυμική και επομένως είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για να αποδείξεις ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής,

αρκεί να δείξεις ότι η $f''(\chi) \neq 0$. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(\chi) = \left[\frac{\chi^4}{3} + \frac{2\alpha\chi^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)\chi^2 + (\alpha^3 + 7)\chi - 5\alpha^2 \right]' \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \frac{4\chi^3}{3} + 2\alpha\chi^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)\chi + \alpha^3 + 7$$

$$f''(\chi) = \left[\frac{4\chi^3}{3} + 2\alpha\chi^2 + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)\chi + \alpha^3 + 7 \right]' \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi) = 4\chi^2 + 4\alpha\chi + 2\alpha^2 - 4\alpha + 5$$

Η f'' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = (4\alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2\alpha^2 - 4\alpha + 5) =$

$$16\alpha^2 - 32\alpha^2 + 64\alpha - 80 \Leftrightarrow \Delta = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5). \text{ Το } \alpha^2 - 4\alpha + 5 \text{ έχει}$$

διακρίνουσα $\Delta_1 = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$ άρα είναι $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ για κάθε

$\chi \in \mathbb{R}$ άρα $\Delta = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5) < 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα f'' δεν έχει καθόλου πραγματικές ρίζες δηλαδή η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λ ι β α δ ε ι ά

24.

ωανελλήνικες 1991 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

B. Είναι $f(\chi) = \sqrt{\chi} - \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} = \frac{2\chi - \ln \chi}{2\sqrt{\chi}} \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = \left(\frac{2\chi - \ln \chi}{2\sqrt{\chi}} \right)' = \frac{(2\chi - \ln \chi)' 2\sqrt{\chi} - (2\chi - \ln \chi)(2\sqrt{\chi})'}{(2\sqrt{\chi})^2} =$$

$$\frac{\left(2 - \frac{1}{\chi}\right) 2\sqrt{\chi} - (2\chi - \ln \chi) 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\chi}}}{4\chi} = \frac{\left(2 - \frac{1}{\chi}\right) 2\sqrt{\chi} \cdot \sqrt{\chi} - (2\chi - \ln \chi)}{4\chi} =$$

$$\frac{\left(2 - \frac{1}{\chi}\right) 2\chi - (2\chi - \ln \chi)}{4\chi\sqrt{\chi}} = \frac{4\chi - 2 - 2\chi + \ln \chi}{4\chi\sqrt{\chi}} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{2\chi - 2 + \ln \chi}{4\chi\sqrt{\chi}},$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi - 2 + \ln \chi}{8\chi\sqrt{\chi}} \geq 0.$$

Είναι $8\chi\sqrt{\chi} > 0$, όταν $\chi > 0$ άρα το πρόσημο της f εξαρτάται από την παράσταση $g(\chi) = 2\chi - 2 + \ln \chi$.

✓ Για την $g(\chi) = 2\chi - 2 + \ln \chi$ με $\chi > 0$ έχεις :

$$g(1) = 0 \text{ και } g'(\chi) = (2\chi - 2 + \ln \chi)' = 2 + \frac{1}{\chi} > 0 \text{ γιατί } \chi > 0 \text{ άρα η } g \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα και η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi = 1$.

Η g διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$. Για να βρεις το πρόσημο της g θα δώσεις δυο τιμές, μια για κάθε

διάστημα, πχ τις τιμές $\chi = \frac{1}{2}$ και $\chi = 2$ αντίστοιχα οπότε θα έχεις :

Δαμιανός Μωραΐτης

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 + \ln \frac{1}{2} = 1 - 2 + \ln 1 - \ln 2 = -1 - \ln 2 = -(1 + \ln 2) < 0.$$

Άρα $g(\chi) < 0 \Leftrightarrow f'(\chi) < 0$ στο $(0, 1)$, $g(2) = 2 \cdot 2 - 2 + \ln 2 = 2 + \ln 2 > 0$, άρα

$g(\chi) > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f :

χ	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	$\parallel$	-	+
$f(\chi)$	$\parallel$		

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$

✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

✓ είναι **θετική** $\chi > 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $\chi_1 = 1$, το $f(1) = \sqrt{1} - \frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} = 1$.

25.

ωανελλήνικες 1991 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

$$A. \text{ Είναι } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi f(\chi_0) - \chi_0 f(\chi)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi f(\chi_0) + \chi f(\chi) - \chi f(\chi) - \chi_0 f(\chi)}{\chi - \chi_0} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi f(\chi) - \chi_0 f(\chi) + \chi f(\chi_0) - \chi f(\chi)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)(\chi - \chi_0) + \chi(f(\chi_0) - f(\chi))}{\chi - \chi_0} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)(\chi - \chi_0)}{\chi - \chi_0} + \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi(f(\chi_0) - f(\chi))}{\chi - \chi_0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi f(\chi_0) - \chi_0 f(\chi)}{\chi - \chi_0} = f(\chi_0) + \chi_0 f'(\chi_0) \text{ επειδή η } f \text{ ως παραγωγίσιμη στο } \chi_0$$

θα είναι και συνεχής στο χ_0 δηλαδή $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0)$.

B. Σύνολο ορισμού είναι το $[-3, +\infty)$ και όπως είναι γνωστό από τη θεωρία

η f είναι συνεχής και δεν παραγωγίζεται στο $\chi = -3$, υπάρχει

κατακόρυφη εφαπτομένη στο $\chi = -3$ **αλλά τώρα είναι πια εκτός ύλης.**

Λι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

A . 1) Η F είναι ορισμένη και συνεχής στο $[α, β]$ αφού για κάθε $χ \in [α, β]$ είναι $g(χ) \neq 0$ και είναι πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων επίσης για όλους αυτούς τους λόγους είναι και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$.

Από γ) είναι $f(β)g(α) - f(α)g(β) = 0 \Leftrightarrow f(β)g(α) = f(α)g(β) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(β)}{g(β)} = \frac{f(α)}{g(α)} \Leftrightarrow F(β) = F(α). \quad \text{Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.}$$

2) Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $F'(χ) = \frac{f'(χ)g(χ) - f(χ)g'(χ)}{g^2(χ)}$, από

το **α)** και σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση F στο $[α, β]$

θα υπάρξει $χ_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $F'(χ_0) = 0$.

$$\text{Όμως } F'(χ) = \frac{f'(χ)g(χ) - f(χ)g'(χ)}{g^2(χ)} \quad \text{άρα } f'(χ_0)g(χ_0) - f(χ_0)g'(χ_0) = 0$$

$$f'(χ_0)g(χ_0) = f(χ_0)g'(χ_0) \Leftrightarrow \frac{f'(χ_0)}{g'(χ_0)} = \frac{f(χ_0)}{g(χ_0)}$$

B . *** Απαραίτητος μετασχηματισμός : $α^χ = e^{χ \cdot \ln α}$ δηλαδή

$$(βάση)^{(εκθέτης)} = e^{(εκθέτης) \cdot \ln(βάσης)}$$

$$\text{πράγματι } \ln α^χ = \ln e^{χ \ln α} \Leftrightarrow χ \ln α = χ \ln α \cdot \ln e = χ \ln α.$$

α. Μετά από όλα αυτά έχεις :

$$F(χ) = [f(χ)]^z \Leftrightarrow F(χ) = e^{z \cdot \ln f(χ)} \Leftrightarrow F'(χ) = \left(e^{z \cdot \ln f(χ)} \right)' = e^{z \cdot \ln f(χ)} (χ \cdot \ln f(χ))'$$

$$= [f(χ)]^z \left(χ' \cdot \ln f(χ) + χ \cdot \ln f(χ)' \right) \Leftrightarrow F(χ) = [f(χ)]^z \left(\ln f(χ) + χ \cdot \frac{f(χ)'}{f(χ)} \right).$$

Δαμινός Μωραΐτης

$$\beta. \quad g(\chi) = \alpha^{\sqrt{\chi^2+1}} \Leftrightarrow g'(\chi) = \left(\alpha^{\sqrt{\chi^2+1}} \right)' = \alpha^{\sqrt{\chi^2+1}} \cdot \ln \alpha \left(\sqrt{\chi^2+1} \right)' =$$

$$\alpha^{\sqrt{\chi^2+1}} \frac{\ln \alpha}{2\sqrt{\chi^2+1}} (\chi^2+1)' \Leftrightarrow g'(\chi) = \alpha^{\sqrt{\chi^2+1}} \frac{\chi \cdot \ln \alpha}{\sqrt{\chi^2+1}}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Για κάθε $\chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(\chi) = \sin \chi (2\eta\mu\chi - \sqrt{2})$ και επειδή είναι

«περίεργη» τριγωνομετρική συνάρτηση, θα βρεις το πρόσημο ως εξής :

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \sin \chi (2\eta\mu\chi - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \chi = 0 \\ \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ \chi = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής θα έχει σταθερό πρόσημο στα διαστήματα

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Υπολογίζεις λοιπόν τις ενδιάμεσες τιμές $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

στα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ αντίστοιχα :

Τιμές : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \left(2\eta\mu \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} < 0$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \left(2\eta\mu \frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} > 0.$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Και όπως βλέπεις : η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και γνησίως

αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ και έχει :

χ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			
	τ. μ. $2\sqrt{2}$	τ. ε. $-\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$	τ. μ.. $1 + \sqrt{2}$

- Τοπικό μέγιστο στη θέση $\chi_1 = 0$ το $f(0) = \eta\mu^2 0 - \sqrt{2}\eta\mu 0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Λ ι β α δ ε ι ά

- Ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_2 = \frac{\pi}{4}$ το

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\eta\mu \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = -\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$$

- Τοπικό μέγιστο στη θέση $\chi_3 = \frac{\pi}{2}$ το

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu^2 \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\eta\mu \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} \cdot 1 + 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Και επειδή $\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2}$ άρα στο $\chi_1 = 0$ έχει ολικό μέγιστο ενώ στη θέση $\chi_3 = \frac{\pi}{2}$ παραμένει τοπικό.

26.

ωανελλήνικες 1992 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. α. $g(\chi) = \ln f(\chi) \Leftrightarrow g'(\chi) = [\ln f(\chi)]' \Leftrightarrow g'(\chi) = \frac{f'(\chi)}{f(\chi)}$ και

$$g''(\chi) = \left[\frac{f'(\chi)}{f(\chi)} \right]' = \frac{f''(\chi)f(\chi) - f'(\chi)f'(\chi)}{[f(\chi)]^2} \Leftrightarrow g''(\chi) = \frac{f''(\chi)f(\chi) - [f'(\chi)]^2}{[f(\chi)]^2},$$

$$\text{οπότε } g''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\chi)f(\chi) - [f'(\chi)]^2}{[f(\chi)]^2} \geq 0 \Leftrightarrow f''(\chi)f(\chi) - [f'(\chi)]^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(\chi) \cdot f''(\chi) \geq [f'(\chi)]^2$$

β. Για να βρεις το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με

$g(\chi) = \ln(\chi^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω, πρέπει να βρεις το διάστημα στο

οποίο η $g''(\chi) > 0$. Αν θέσεις $f(\chi) = \chi^2 + 2$ τότε η συνάρτηση g παίρνει τη μορφή $g(\chi) = \ln f(\chi)$, οπότε σύμφωνα με το **α.** ερώτημα θα είναι :

$$(\chi^2 + 2) \cdot (\chi^2 + 2)'' \geq \left[(\chi^2 + 2)' \right]^2 \Leftrightarrow 2(\chi^2 + 2) \geq 4\chi^2 \Leftrightarrow \chi^2 \leq 2 \Leftrightarrow |\chi| \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |\chi| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \chi \leq \sqrt{2}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

B. α. Είναι $f(x) = a^x - x \Leftrightarrow f'(x) = (a^x - x)' \Leftrightarrow f'(x) = a^x \ln a - 1$ και $f''(x) = (a^x \ln a - 1)' \Leftrightarrow f''(x) = a^x (\ln a)^2$.

Επειδή $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln a < 0$ άρα $f'(x) < 0$ άρα η **f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.**

$(\ln a)^2 > 0$ άρα $f''(x) > 0$ επομένως η **f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$**

β. Είναι $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2) \Leftrightarrow$

$$a^{\lambda^2-4} - (\lambda^2 - 4) = a^{\lambda-2} - (\lambda - 2) \Leftrightarrow f(\lambda^2 - 4) = f(\lambda - 2).$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι και 1 - 1 άρα

$$f(\lambda^2 - 4) = f(\lambda - 2) \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

B. α. $f = f' \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot e^x = f'(x) \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) \cdot (e^x)' - f'(x) \cdot e^x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot (e^x)' - f'(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$$

β. Είναι $g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + g(x) \cdot \eta\mu x = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - g(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ (1) και επειδή } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ θα είναι}$$

$$\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \text{ άρα (1) } \Leftrightarrow \frac{g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - g(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}. \text{ Αν θέσεις } f(x) = \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ θα είναι } f'(x) = f(x) \text{ οπότε}$$

$$\text{σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα θα είναι } f(x) = ce^x \Leftrightarrow \frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = ce^x \Leftrightarrow$$

$$g(x) = ce^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ και επειδή ισχύει από την εκφώνηση } g(0) = 1992 \text{ άρα}$$

$$ce^0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 1992 \Leftrightarrow c \cdot 1 \cdot 1 = 1992 \text{ άρα } c = 1992 \text{ άρα } g(x) = 1992 \cdot e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Α ι β α δ ε ι ά

27.

ωανελλήνικες 1992 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Την διπλή ανισότητα $1 + \chi < e^\chi < 1 + e \cdot \chi$ θα την αποδείξεις σε δυο «δόσεις» (βήματα).

Θα δείξεις τις ανισότητες $1 + \chi < e^\chi$ και $e^\chi < 1 + e \cdot \chi$ για κάθε $\chi \in (0, 1)$.

****** Η απόδειξη των πιο πάνω ανισοτήτων προφανώς (... !!!) θα γίνει με την βοήθεια της μονοτονίας, δηλαδή με τη βοήθεια των παραγώγων.

i) $1 + \chi < e^\chi \Leftrightarrow e^\chi > 1 + \chi \Leftrightarrow e^\chi - 1 - \chi > 0$ και αν θεωρήσεις την συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi - 1 - \chi$ ορισμένη, συνεχή στο $(0, 1)$ και παραγωγίσιμη στο

$[0, 1]$ για την οποία ισχύουν: $f'(\chi) = (e^\chi - 1 - \chi)' = e^\chi - 1$,

$$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow e^\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow e^\chi > 1, \text{ όμως } \begin{cases} \chi \in (0, 1) \text{ άρα } \chi > 0 \\ e^\chi \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$e^\chi > e^0 \Leftrightarrow e^\chi > 1$ για κάθε $\chi \in (0, 1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$\chi > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > f(0) \Leftrightarrow e^\chi - 1 - \chi > 0 \Leftrightarrow e^\chi > 1 + \chi.$$

ii) $e^\chi < 1 + e \cdot \chi \Leftrightarrow e^\chi - 1 - e \cdot \chi < 0$ και αν θεωρήσεις την συνάρτηση

$f(\chi) = e^\chi - 1 - e \cdot \chi$ ορισμένη, συνεχή και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ για την

οποία ισχύουν: $f'(\chi) = (e^\chi - 1 - e \cdot \chi)' = e^\chi - e$, $f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow e^\chi - e > 0 \Leftrightarrow e^\chi > e$,

$$\text{όμως } \begin{cases} \chi \in (0, 1) \text{ άρα } \chi < 1 \\ e^\chi \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \Leftrightarrow e^\chi < e^1 \Leftrightarrow e^\chi < e \text{ άρα } f'(\chi) < 0 \text{ για κάθε}$$

$\chi \in (0, 1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

$$\text{άρα } \chi < 1 \Leftrightarrow f(\chi) < f(0) \Leftrightarrow e^\chi - 1 - e \cdot \chi < 0 \Leftrightarrow e^\chi < 1 + e \cdot \chi.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

B. i) Όταν $\chi \neq 0$ η f έχει τύπο $f(\chi) = \chi^3 \eta\mu \frac{1}{\chi}$ και είναι γινόμενο των

συναρτήσεων χ^3 , παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και της $\eta\mu \frac{1}{\chi}$ που είναι

παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και συνεπώς η

$f(\chi) = \chi^3 \eta\mu \frac{1}{\chi}$ είναι παραγωγίσιμη.

Ειδικά στο $\chi_0 = 0$ θα χρησιμοποιήσεις τον ορισμό :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^3 \eta\mu \frac{1}{\chi} - 0}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} \right).$$

Όμως $-1 \leq \eta\mu \frac{1}{\chi} \leq 1 \Leftrightarrow -\chi^2 \leq \chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} \leq \chi^2$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0} (-\chi^2) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^2 = 0$ άρα λόγω

του κριτηρίου παρεμβολής, θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} \right) = 0$ άρα $f'(0) = 0$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Όταν $\chi = 0$, όπως είδες από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(0) = 0$.

Όταν $\chi \neq 0$ είναι :

$$f(\chi) = \chi^3 \eta\mu \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\chi^3 \eta\mu \frac{1}{\chi} \right)' = (\chi^3)' \eta\mu \frac{1}{\chi} + \chi^3 \left(\eta\mu \frac{1}{\chi} \right)' =$$

$$2\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} + \chi^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\chi} \left(\frac{1}{\chi} \right)' = 2\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} + \chi^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\chi} \left(-\frac{1}{\chi^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 2\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} - \chi \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\chi} \quad \text{άρα τελικά} \quad f'(\chi) = \begin{cases} 2\chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} - \chi \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\chi} & \text{αν } \chi \neq 0 \\ 0 & \text{αν } \chi = 0 \end{cases}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Είναι $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$ άρα

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1) \right)' = \left(\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) \right)' - (2x(\ln x - 1))' =$$

$$\left(\frac{x^2}{4} \right)' (2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} ((2\ln x - 1))' - (2x)' (\ln x - 1) - 2x (\ln x - 1)' =$$

$$\frac{x}{2}(2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot 2 \frac{1}{x} - 2(\ln x - 1) - 2x \frac{1}{x} = x \ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 2\ln x + 2 - 2 =$$

$$x \ln x - 2\ln x \text{ άρα } f'(x) = (x - 2)\ln x, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)\ln x \geq 0.$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}, \text{ όταν } x > 0.$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

✓ **μηδενίζεται** όταν $x = 1$ και $x = 2$

✓ είναι **θετική** όταν $x < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < x < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$

✓ είναι **θετική** όταν $x > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

χ	0	1	2	$+\infty$	
$\chi-2$	-	-	0	+	
$\ln\chi$	-	0	+	+	
$f'(\chi)$	+	0	-	0	+
$f(\chi)$					

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $x_1 = 1$, το

$$f(1) = \frac{1^2}{4}(2\ln 1 - 1) - 2 \cdot 1(\ln 1 - 1) \Leftrightarrow f(1) = \frac{7}{4} \text{ και } \textbf{τ. ε.} \text{ στη θέση } x_2 = 2, \text{ το}$$

$$f(2) = \frac{2^2}{4}(2\ln 2 - 1) - 2 \cdot 2(\ln 2 - 1) = 2\ln 2 - 1 - 4\ln 2 + 4 \Leftrightarrow f(2) = 3 - \ln 2.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

28.

ωανελλήνικες 1993 Α Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

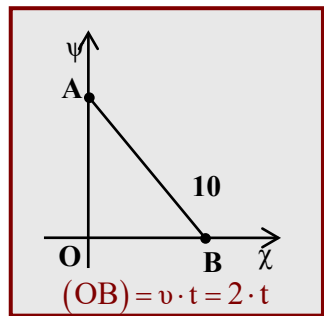
$$\begin{aligned} \text{B. } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4 \right)' = \left((1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \right)' \\ &= -\frac{1}{2} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}-1} (1+x^4)' \Leftrightarrow f'(x) = -2x^3 (1+x^4)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} x > 0 \\ 1+x^4 > 0 \end{cases} \text{ άρα } f'(x) = -2x^3 (1+x^4)^{-\frac{3}{2}} \leq 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ **ΘΕΜΑ 4^ο**Α. α) Επειδή $v = 2$ άρα τη χρονική στιγμή t θα είναι $OB = g(t) = 2t$ $AB = 10$ και αν εφαρμόσεις πυθαγόρειοθεώρημα στο τρίγωνο OAB θα έχεις :

$$(OA) = \sqrt{(AB)^2 - (OB)^2} \Leftrightarrow (OA) = \sqrt{10^2 - (2 \cdot t)^2}$$

$$\Leftrightarrow (OA) = \sqrt{100 - 4 \cdot t^2} = 2\sqrt{25 - t^2} \quad (1)$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι :

$$E(t) = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} (2 \cdot t) \cdot 2\sqrt{25 - t^2} \Leftrightarrow E(t) = 2 \cdot t \cdot \sqrt{25 - t^2}$$

β) Για να βρεις το ρυθμό μεταβολής του $E(t)$ βρίσκεις την παράγωγο

$$E'(t) = (2 \cdot t \cdot \sqrt{25 - t^2})' \Leftrightarrow E'(t) = (2 \cdot t)' \sqrt{25 - t^2} + 2 \cdot t \cdot (\sqrt{25 - t^2})' \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = 2\sqrt{25 - t^2} + 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2\sqrt{25 - t^2}} (25 - t^2)' = 2\sqrt{25 - t^2} + \frac{t}{\sqrt{25 - t^2}} (-2t) =$$

$$\frac{2(\sqrt{25 - t^2})^2}{\sqrt{25 - t^2}} - \frac{2t^2}{\sqrt{25 - t^2}} = \frac{2(25 - t^2)}{\sqrt{25 - t^2}} - \frac{2t^2}{\sqrt{25 - t^2}} \Leftrightarrow E'(t) = \frac{2(25 - 2t^2)}{\sqrt{25 - t^2}}.$$

Αι β α δ ε ι ά

Αν $OA = 6$ από τον τύπο (1) είναι

$$6 = 2\sqrt{25 - t^2} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{25 - t^2} \Leftrightarrow 25 - t^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4 \text{ άρα}$$

όταν $OA = 6$ είναι $t = 4$ και επομένως ο ρυθμός του εμβαδού είναι

$$E'(4) = \frac{2(25 - 2 \cdot 4^2)}{\sqrt{25 - 4^2}} \Leftrightarrow E'(4) = -\frac{14}{3}$$

29.

ωανελλήνικες 1993 Δ Δέσμη

A.

1^{ος} τρόπος : Έστω ότι η εξίσωση είχε δυο λύσεις στο διάστημα $(1, 2)$, τις ρ_1 και ρ_2 τότε στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (1, 2)$, η f είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και $f(\rho_1) = 0 = f(\rho_2)$, άρα για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle επομένως θα υπάρχει $\chi_0 \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, 2)$ έτσι ώστε $f'(\chi_0) = 0$.

$$\text{Όμως } f(\chi) = \frac{2}{3}\chi^3 - \frac{7}{2}\chi^2 + 3\chi + \mu \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{2}{3}\chi^3 - \frac{7}{2}\chi^2 + 3\chi + \mu\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 2\chi^2 - 7\chi + 3, f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 - 7\chi + 3 = 0, \Delta = 25 \text{ και άρα}$$

$$\chi_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{1}{2} \\ \chi_2 = 3 \end{cases}$$

Επειδή η $f'(\chi) = 0$ έχει μεν δυο ρίζες, από τις οποίες όμως καμιά δεν ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$ προφανώς η εξίσωση $f(\chi) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(1, 2)$

2^{ος} τρόπος : $f(\chi) = \frac{2}{3}\chi^3 - \frac{7}{2}\chi^2 + 3\chi + \mu \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{2}{3}\chi^3 - \frac{7}{2}\chi^2 + 3\chi + \mu\right)' \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 2\chi^2 - 7\chi + 3, f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 - 7\chi + 3 = 0, \Delta = 25 \text{ άρα}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\chi_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{1}{2} \\ \chi_2 = 3 \end{cases}.$$

Άρα πίνακας προσήμου για την f'

$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$+\infty$
+	-	-	-	+	

Από τον πιο πάνω πίνακα είναι

φανερό ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, άρα και στο

$$(\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, 2) \subseteq \left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

Η $f(\chi) = 0$ έχει, λόγω μονοτονίας, το πολύ μία ρίζα στο $(1, 2)$ και δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για κάθε $\chi > 0$ είναι $f(\chi) = \chi^2 - \frac{\alpha\chi^3}{4} = -\frac{\alpha\chi^3}{4} + \chi^2$ άρα $f(\chi)' = -\frac{3\alpha\chi^2}{4} + 2\chi$

$$\text{επομένως } f(\chi)' \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3\alpha\chi^2}{4} + 2\chi \geq 0 \Leftrightarrow -3\alpha\chi^2 + 8\chi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi(-3\alpha\chi + 8) \geq 0 \\ \chi > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3\alpha\chi + 8 \geq 0, \text{ άρα } f(\chi)' \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq \frac{8}{3\alpha} \text{ αφού } \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$$

$$\text{άρα } \alpha > 0. \text{ Επομένως } f(\chi)' < 0 \Leftrightarrow \chi > \frac{8}{3\alpha}.$$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = \frac{8}{3\alpha}$ το

$$f\left(\frac{8}{3\alpha}\right) = \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha\left(\frac{8}{3\alpha}\right)^3}{4} = \frac{64}{9\alpha^2} - \frac{\alpha \frac{512}{27\alpha^3}}{4} = \frac{64}{9\alpha^2} - \frac{128}{27\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$M(\alpha) = \frac{64}{27\alpha^2} = \frac{64}{27}\alpha^{-2}, \quad \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right].$$

β. Το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο (δηλαδή έχουμε το «μέγιστο» μέγιστο) όταν η συνάρτηση $M(\alpha)$ έχει μέγιστο.

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\text{Είναι } M(\alpha) = \frac{64}{27\alpha^2} = \frac{64}{27}\alpha^{-2} \Leftrightarrow M'(\alpha) = \left(\frac{64}{27}\alpha^{-2}\right)' = \frac{-2 \cdot 64}{27}\alpha^{-2-1} \Leftrightarrow$$

$$M'(\alpha) = \frac{-128}{27}\alpha^{-3} < 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right].$$

Άρα η $M(\alpha)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Άρα έχει σύνολο τιμών το

$$\left[\frac{64}{27}\left(\frac{9}{2}\right)^{-2}, \frac{64}{27}\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\right] = \left[\frac{64}{27}\left(\frac{2}{9}\right)^2, \frac{64}{27}\left(\frac{9}{2}\right)^2\right] = \left[\frac{64}{27} \cdot \frac{4}{81}, \frac{64}{27} \cdot \frac{81}{4}\right] = \left[\frac{256}{2187}, 48\right]$$

$$\text{Άρα μέγιστο το } M\left(\frac{2}{9}\right) = 48$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi e^{-v\chi}$ $\chi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{A.} \quad f(\chi) = \chi e^{-v\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi e^{-v\chi})' = \chi' e^{-v\chi} + \chi(e^{-v\chi})' =$$

$$e^{-v\chi} + \chi e^{-v\chi}(-v \cdot \chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = e^{-v\chi} - v \cdot \chi e^{-v\chi} = (1 - v\chi) \cdot e^{-v\chi},$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - v\chi) \cdot e^{-v\chi} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - v\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq \frac{1}{v} \text{ και}$$

$$f''(\chi) = (e^{-v\chi} - v \cdot \chi e^{-v\chi})' = -ve^{-v\chi} - (v \cdot \chi e^{-v\chi})' =$$

$$-ve^{-v\chi} - \left(\chi' v \cdot e^{-v\chi} + \chi(v \cdot e^{-v\chi})'\right) = -ve^{-v\chi} - (v \cdot e^{-v\chi} - v^2 \chi e^{-v\chi}) =$$

$$-2v \cdot e^{-v\chi} + v^2 \cdot \chi \cdot e^{-v\chi} \Leftrightarrow f''(\chi) = v(v\chi - 2)e^{-v\chi}$$

$$f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow v(v\chi - 2)e^{-v\chi} \geq 0 \Leftrightarrow v\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{2}{v}.$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f

Όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = \frac{1}{v}$

χ	$-\infty$	$\frac{1}{v}$	$\frac{2}{v}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-	-
$f''(\chi)$	-	-	0	+
$f(\chi)$				

Δαμινός Μωραΐτης

- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < \frac{1}{v}$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{v}\right)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > \frac{1}{v}$, άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{v}, +\infty\right)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο : **ολ. μ.** στη θέση

$$\chi_0 = \frac{1}{v} \text{ το } f\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} e^{-v \cdot \frac{1}{v}} = \frac{1}{v} e^{-1} = \frac{1}{ve}$$

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η **f'** :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = \frac{2}{v}$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < \frac{2}{v}$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\left(-\infty, \frac{2}{v}\right)$.
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > \frac{2}{v}$ άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $\left(\frac{2}{v}, +\infty\right)$.

Άρα η f παρουσιάζει καμπή στη θέση $\chi_0 = \frac{2}{v}$ το $f\left(\frac{2}{v}\right) = \frac{2}{v} e^{-v \cdot \frac{2}{v}} = \frac{2}{v} e^{-2} = \frac{1}{ve^2}$,
γιατί η $f'(\chi)$ στο $\frac{2}{v}$ μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο.

30.

ωανελλήμεις 1994 Α Δέση

ΘΕΜΑ 1^ο

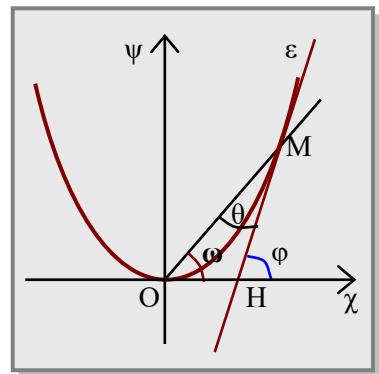
Α. $f(\chi) = 2\chi^2 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^2)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 4\chi$. Στο το τρίγωνο OHM η φ είναι εξωτερική γωνία άρα $\varphi = \omega + \theta \Leftrightarrow \theta = \varphi - \omega$ άρα $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(\varphi - \omega) \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\omega} = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_{OM}}{1 + \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OM}} \text{ όμως :}$$

$$\lambda_\varepsilon = f'(2\alpha) = 4 \cdot 2\alpha = 8\alpha \text{ και } \lambda_{OM} = \frac{8\alpha^2 - 0}{2\alpha - 0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{OM} = 4\alpha, \text{ άρα } \varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_{OM}}{1 + \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OM}} = \frac{8\alpha - 4\alpha}{1 + 8\alpha \cdot 4\alpha}$$

Λιβαδεϊά



$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}.$$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\alpha) = \frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}$, $\alpha > 0$ τότε είναι : $\varphi'(\alpha) = \left(\frac{4\alpha}{1+32\alpha^2} \right)' =$

$$\frac{(4\alpha)'(1+32\alpha^2) - (4\alpha)(1+32\alpha^2)'}{(1+32\alpha^2)^2} = \frac{4(1+32\alpha^2) - 4\alpha \cdot 64\alpha}{(1+32\alpha^2)^2} = \frac{4+128\alpha^2 - 256\alpha^2}{(1+32\alpha^2)^2}$$

$$= \frac{4-128\alpha^2}{(1+32\alpha^2)^2} \Leftrightarrow \varphi'(\alpha) = \frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2}, \Leftrightarrow \varphi'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1-32\alpha^2 \geq 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Άρα πίνακας μεταβολών της φ
Επομένως η φ παρουσιάζει

χ	0	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	+	0	-
$\varphi(\chi)$			

ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}$ το $\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, άρα η $\varepsilon\varphi\theta$ έχει μέγιστη τιμή την $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

B. Είναι $f(\chi_0) + \chi_0 \cdot \ln \chi_0 = \chi_0 \Leftrightarrow f(\chi_0) + \chi_0 \cdot \ln \chi_0 - \chi_0 = 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) + \chi \cdot \ln \chi - \chi$ με $\chi \in [1, e]$.

Αρκεί να δείξεις ότι η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1, e)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ άρα και συνεχής σε αυτό, επομένως η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Είναι ακόμη : } g(1) \cdot g(e) = (f(1) + 1 \cdot \ln 1 - 1)(f(e) + e \cdot \ln e - e) =$$

$$f(e)(f(1) - 1) < 0, \text{ αφού } 0 < f(\chi) < 1 \text{ για κάθε } \chi \in [1, e].$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$ **(1)**.

$$\text{Είναι επίσης } g'(\chi) = (f(\chi) + \chi \cdot \ln \chi - \chi)' = f'(\chi) + \chi' \cdot \ln \chi + \chi \cdot (\ln \chi)' - 1 =$$

Δαμινός Μωραΐτης

$$f'(\chi) + \ln \chi + \chi \cdot \frac{1}{\chi} - 1 \Leftrightarrow g'(\chi) = f'(\chi) + \ln \chi, \text{ για κάθε } \chi \in [1, e].$$

Είναι $f'(\chi) \geq 0$ (από την εκφώνηση) και $\chi \in (1, e) \Leftrightarrow 1 < \chi < e \Leftrightarrow$

$\ln 1 < \ln \chi < \ln e \Leftrightarrow 0 < \ln \chi < 1$ άρα $g'(\chi) \geq 0$, επομένως η g είναι γνησίως

αύξουσα στο $(1, e)$ και έτσι η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα

στο $(1, e)$ (2)

Τελικά από (1) και (2) υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε :

$$f(\chi_0) + \chi_0 \cdot \ln \chi_0 = \chi_0.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Ευθύ : Έστω ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(\chi)$, τέτοιο ώστε

$A(\chi)B(\chi) = (\chi - \rho)^2 f(\chi)$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε :

$$A'(\chi)B(\chi) + A(\chi)B'(\chi) = \left((\chi - \rho)^2\right)' f(\chi) + (\chi - \rho)^2 f'(\chi) \text{ άρα}$$

$$A'(\chi)B(\chi) + A(\chi)B'(\chi) = 2(\chi - \rho)f(\chi) + (\chi - \rho)^2 f'(\chi) \text{ οπότε για } \chi = \rho \text{ έχεις :}$$

$$A'(\rho)B(\rho) + A(\rho)B'(\rho) = 2(\rho - \rho)f(\rho) + (\rho - \rho)^2 f'(\rho) = 2 \cdot 0 \cdot f(\rho) + 0 \cdot f'(\rho)$$

$$\text{άρα } A'(\rho)B(\rho) + A(\rho)B'(\rho) = 0 \text{ (1)}$$

Αν στην $A(\chi)B(\chi) = (\chi - \rho)^2 f(\chi)$ βάλεις $\chi = \rho$ έχεις :

$$A(\rho)B(\rho) = (\rho - \rho)^2 f(\rho) \Leftrightarrow A(\rho)B(\rho) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} B(\rho) \neq 0 \\ A(\rho) = 0 \end{matrix} \text{ άρα (1) γίνεται :}$$

$$A'(\rho)B(\rho) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} B(\rho) \neq 0 \\ A'(\rho) = 0 \end{matrix} \text{ Άρα τελικά } A(\rho) = A'(\rho) = 0.$$

Αντιστροφή :

Έστω $A(\chi)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ και ότι $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

Επειδή $A(\rho) = 0$, δηλαδή ρ ρίζα του $A(\chi)$, άρα το $\chi - \rho$ παράγοντας του $A(\chi)$

δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $\pi(\chi)$ βαθμού $n - 1$ τέτοιο ώστε

$$A(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \pi(\chi). \text{ (2)}$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (2) παίρνουμε :

Λ ι β α δ ε ι ά

$$A'(\chi) = (\chi - \rho)' \cdot \pi(\chi) + (\chi - \rho)\pi'(\chi) \Leftrightarrow A'(\chi) = \pi(\chi) + (\chi - \rho)\pi'(\chi), \text{ οπότε αν}$$

βάλεις $\chi = \rho$ έχεις $A'(\rho) = \pi(\rho)$ είναι και $A'(\rho) = 0$ από την εκφώνηση άρα $\pi(\rho) = 0$, δηλαδή $\rho = \text{ρίζα του } \pi(\chi)$, άρα το $\chi - \rho$ παράγοντας του $\pi(\chi)$ δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $\pi_1(\chi)$ βαθμού $n - 2$ τέτοιο ώστε $\pi(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \pi_1(\chi)$. **(3)**

$$\text{Από τις (2), (3) έχεις } A(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \pi(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot \pi_1(\chi) \Leftrightarrow$$

$$A(\chi)B(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot \pi_1(\chi) \cdot B(\chi) \text{ άρα}$$

$$A(\chi)B(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot f(\chi), \text{ όπου } f(\chi) = \pi_1(\chi) \cdot B(\chi).$$

B. Είναι $Q(\chi) = \chi^v (v\chi^3 + \kappa\chi^2 + \lambda\chi + 8) = A(\chi) \cdot B(\chi)$, όπου

$A(\chi) = v\chi^3 + \kappa\chi^2 + \lambda\chi + 8$ και $B(\chi) = \chi^v$, το $A(\chi)$ είναι 3^{ου} βαθμού (≥ 2) και $B(2) = 2^v \neq 0$.

Οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του (α) ερωτήματος, επομένως αρκεί να

βρούμε τα κ, λ ώστε να ισχύουν: $A(2) = 0$ και $A'(2) = 0$, επίσης

$$A'(\chi) = 3v\chi^2 + 2\kappa\chi + \lambda.$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} A(2) = 0 \\ A'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8v + 4\kappa + 2\lambda + 8 = 0 \\ 12v + 4\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4v + 2 \\ \lambda = 4v - 8 \end{cases}.$$

31.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1994 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

$$\mathbf{A. \alpha.} \quad f(\chi) = \alpha\chi^2 - 2\chi \cdot \ln \chi \text{ άρα } f'(\chi) = (\alpha\chi^2 - 2\chi \cdot \ln \chi)' = 2\alpha\chi - 2\ln \chi - 2 \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 2(\alpha\chi - \ln \chi - 1) \Leftrightarrow f''(\chi) = (2\alpha\chi - 2\ln \chi - 2)' = 2\alpha - 2\frac{1}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi) = 2\frac{\alpha\chi - 1}{\chi}, \quad f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\frac{\alpha\chi - 1}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{\alpha},$$

επειδή α θετικός πραγματικός αριθμός.

Άρα πίνακας προσήμου για την f''

0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
	-	+

Δαμιανός Μωραΐτης

Επομένως η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $\chi_0 = \frac{1}{\alpha}$, το

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + 2\frac{\ln \alpha}{\alpha} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}(1 + 2\ln \alpha), \text{ και στρέφει τα}$$

κοίλα κάτω στο $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ και **κοίλα άνω** στο $\left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

β. Είναι $f(1) = \alpha \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 = \alpha$ και $f'(1) = 2(\alpha \cdot 1 - \ln 1 - 1) = 2(\alpha - 1)$, η

εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - \alpha = 2(\alpha - 1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = 2(\alpha - 1) \cdot \chi + 2 - \alpha$$

Για να διέρχεται από το $O(0, 0)$ η εφαπτομένη, πρέπει η εξίσωσή της να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες $(0, 0)$ του O .

$$\text{Είναι } 0 = 2(\alpha - 1) \cdot 0 + 2 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. α. Αφού η ευθεία $\psi = 2\chi + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 2$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 2\chi] = 5.$$

β. $\chi \rightarrow +\infty$ άρα $\chi \neq 0$, $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(\chi) + 4\chi}{\chi \cdot f(\chi) - 2\chi^2 + 3\chi} = 1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\mu \cdot f(\chi) + 4\chi}{\chi}}{\frac{\chi \cdot f(\chi) - 2\chi^2 + 3\chi}{\chi}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\mu \frac{f(\chi)}{\chi} + 4}{f(\chi) - 2\chi + 3} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\mu \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} + 4}{\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 2\chi) + 3} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\mu + 4}{5 + 3} = 1 \Leftrightarrow 2\mu + 4 = 8 \Leftrightarrow \mu = 2.$$

Λίβανος

B. α. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = e^{\chi} - \chi + 1$, τότε Η φ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι : $\varphi'(\chi) = (e^{\chi} - \chi + 1)' = e^{\chi} - 1$, $\varphi'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\chi} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow \chi \geq 0.$$

Άρα πίνακας προσήμου για την φ'

$-\infty$	0	$+\infty$
$-$	$+$	

Επομένως η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 0$ το $\varphi(0) = 2$, άρα είναι : $\varphi(\chi) \geq \varphi(0) \Leftrightarrow e^{\chi} - \chi + 1 \geq 2 > 0 \Leftrightarrow e^{\chi} - \chi + 1 > 0$.

β. Η εξίσωση $2 \cdot e^{\chi} + 2\chi = \chi^2 + 2 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{\chi} + 2\chi - \chi^2 - 2 = 0$ και επαληθεύεται για $\chi = 0$. Αρκεί να δείξεις ότι η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα.

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 2 \cdot e^{\chi} + 2\chi - \chi^2 - 2$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι :

$$f'(\chi) = (2 \cdot e^{\chi} + 2\chi - \chi^2 - 2)' = 2 \cdot e^{\chi} + 2 - 2\chi = 2(e^{\chi} - \chi + 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 2(e^{\chi} - \chi + 1), f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi} - \chi + 1 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

λόγω του **α.** για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς η $2 \cdot e^{\chi} + 2\chi = \chi^2 + 2$ έχει το πολύ μία ρίζα .

Τελικά η εξίσωση $2 \cdot e^{\chi} + 2\chi = \chi^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση , την $\chi = 0$.

32.

ωανελλήνικες 1995 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. α. Έστω οι ελλείψεις $C_1 : \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \alpha^2 \chi^2 + \beta^2 \psi^2 = 1, 0 < \alpha < \beta$.

• Αν στην $C_1 : \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 \chi^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2$ θέσεις $\psi = f_1(\chi)$

$$\text{έχεις : } \beta^2 \chi^2 + \alpha^2 [f_1(\chi)]^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow (\beta^2 \chi^2 + \alpha^2 [f_1(\chi)]^2)' = (\alpha^2 \beta^2)' \Leftrightarrow$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$2\beta^2\chi + 2\alpha^2 f_1(\chi) f_1'(\chi) = 0$ και επομένως στο σημείο $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$ θα είναι :

$$2\beta^2\chi_1 + 2\alpha^2 f_1(\chi_1) f_1'(\chi_1) = 0 \quad (1).$$

✓ Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$ είναι

$$\lambda_1 = f_1'(\chi_1) \text{ και}$$

✓ Επειδή το σημείο $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$ ανήκει στην έλλειψη C_1 , θα είναι

$$\psi_1 = f_1(\chi_1)$$

✓ Επειδή το σημείο $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$ ανήκει και στην ημιευθεία $\psi = (\epsilon\phi\theta) \cdot \chi$ θα

$$\text{είναι } \psi_1 = (\epsilon\phi\theta) \cdot \chi_1$$

Άρα από την (1) θα έχουμε $2\beta^2\chi_1 + 2\alpha^2 \cdot \psi_1 \cdot \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow$

$$2\beta^2\chi_1 + 2\alpha^2 \cdot [(\epsilon\phi\theta)\chi_1] \cdot \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2\beta^2\chi_1}{2\alpha^2 \cdot (\epsilon\phi\theta)\chi_1} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\epsilon\phi\theta}.$$

• Αν στην C_2 : $\alpha^2\chi^2 + \beta^2\psi^2 = 1$ θέσουμε $\psi = f_2(\chi)$ έχουμε :

$$\alpha^2\chi^2 + \beta^2[f_2(\chi)]^2 = 1 \Leftrightarrow (\alpha^2\chi^2 + \beta^2[f_2(\chi)]^2)' = 1' \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2\chi + 2\beta^2 f_2(\chi) f_2'(\chi) = 0 \text{ και επομένως στο σημείο } \Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$$

θα είναι : $2\alpha^2\chi_2 + 2\beta^2 f_2(\chi_2) f_2'(\chi_2) = 0 \quad (2).$

✓ Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $\Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$ είναι

$$\lambda_2 = f_2'(\chi_2) \text{ και}$$

✓ Επειδή το σημείο $\Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$ ανήκει στην έλλειψη C_2 , θα είναι

$$\psi_2 = f_2(\chi_2)$$

✓ Επειδή το σημείο $\Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$ ανήκει και στην ημιευθεία $\psi = (\epsilon\phi\theta) \cdot \chi$ θα

$$\text{είναι } \psi_2 = (\epsilon\phi\theta) \cdot \chi_2$$

Άρα από την (2) θα έχουμε $2\alpha^2\chi_2 + 2\beta^2 \cdot \psi_2 \cdot \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$2\alpha^2\chi_2 + 2\beta^2 \cdot [(\varepsilon\varphi\theta)\chi_2] \cdot \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2\alpha^2\chi_2}{2\beta^2 \cdot (\varepsilon\varphi\theta)\chi_2} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}.$$

$$\text{Επομένως } \lambda_1\lambda_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta^2} = (\varepsilon\varphi\theta)^{-2}$$

$$\beta. \quad \text{Έστω } f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(\theta) = \lambda_1\lambda_2 \Leftrightarrow f(\theta) = (\varepsilon\varphi\theta)^{-2} = \varepsilon\varphi^{-2}\theta \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \left[(\varepsilon\varphi\theta)^{-2} \right]' = -2\varepsilon\varphi\theta \cdot (\varepsilon\varphi\theta)' \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{-2\varepsilon\varphi\theta}{\sin^2\theta}.$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2\varepsilon\varphi\theta}{\sin^2\theta} \geq 0 \Leftrightarrow -2\varepsilon\varphi\theta \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta \leq 0.$$

Όμως για κάθε $\theta \in \Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varepsilon\varphi\theta > 0$ επομένως για κάθε

$\theta \in \Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\chi) < 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$A. \quad a. \quad f(\chi) = (\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3 \Leftrightarrow f'(\chi) = \left((\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3 \right)' =$$

$$5(\chi - \kappa)^4 (\chi - \lambda)^3 + 3(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^2.$$

$$\text{Άρα } \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \frac{5(\chi - \kappa)^4 (\chi - \lambda)^3 + 3(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^2}{(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3} =$$

$$\frac{5(\chi - \kappa)^4 (\chi - \lambda)^3}{(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3} + \frac{3(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^2}{(\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \frac{5}{\chi - \kappa} + \frac{3}{\chi - \lambda}, \quad \text{για κάθε } \chi \neq \kappa \text{ και } \chi \neq \lambda.$$

$$\beta. \quad \text{Έστω } \eta g(\chi) = \ln |f(\chi)|. \quad \text{Αν } \chi \in (\kappa, \lambda) \Leftrightarrow \kappa < \chi < \lambda \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi - \kappa > 0 \\ \chi - \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\chi - \kappa)^5 (\chi - \lambda)^3 < 0 \Leftrightarrow |f(\chi)| = -f(\chi) \text{ άρα } g(\chi) = \ln(-f(\chi))$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{Άρα } g'(\chi) = (\ln(-f(\chi)))' = \frac{1}{-f(\chi)}(-f'(\chi)) = \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \frac{5}{\chi - \kappa} + \frac{3}{\chi - \lambda}, \text{ επομένως}$$

θα είναι :

$$g''(\chi) = (g'(\chi))' = \left(\frac{5}{\chi - \kappa} + \frac{3}{\chi - \lambda} \right)' = -\frac{5}{(\chi - \kappa)^2} - \frac{3}{(\chi - \lambda)^2} < 0, \chi \in (\kappa, \lambda) \text{ άρα}$$

Η συνάρτηση $g(\chi) = \ln|f(\chi)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

Β. α. Θεωρία

33.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1995 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. β. i) Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^4 - 2\chi^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = (\chi^4 - 2\chi^2 + \alpha)' = 4\chi^3 - 4\chi = 4\chi(\chi^2 - 1) \Leftrightarrow f'(\chi) = 4\chi(\chi - 1)(\chi + 1) \text{ άρα}$$

ρίζες : $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 0$ και $\chi_3 = 1$ άρα για τη συνάρτηση $f(\chi)$ ισχύει :

ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\chi + 1$		-	+	+	+
χ		-	-	+	+
$\chi - 1$		-	-	-	+
$f'(\chi)$		-	+	-	+
$f(\chi)$					

Όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f'

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < -1$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, -1)$.

✓ είναι **θετική** όταν $-1 < \chi < 0$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-1, 0)$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1)$.

Λι β α δ ε ι ά

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η φ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$.

Άρα στις θέσεις $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 0$ και $\chi_3 = 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα τα :

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + \alpha \Leftrightarrow f(-1) = \alpha - 1 \text{ άρα } A(\chi_1, f(\chi_1)) = A(-1, \alpha - 1).$$

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0 + \alpha \Leftrightarrow f(0) = \alpha \text{ άρα } B(\chi_2, f(\chi_2)) = B(0, \alpha).$$

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + \alpha \Leftrightarrow f(1) = \alpha - 1 \text{ άρα } \Gamma(\chi_3, f(\chi_3)) = \Gamma(1, \alpha - 1).$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} \lambda_{AB} = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{0 - (-1)} \\ \lambda_{B\Gamma} = \frac{\psi_\Gamma - \psi_B}{\chi_\Gamma - \chi_B} = \frac{\alpha - 1 - \alpha}{1 - 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{AB} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB} = 1(-1) = -1 \text{ άρα η AB είναι κάθετη στην ευθεία B}\Gamma.$$

ii) Στο $[-1, 0]$, η f είναι συνεχής και

$$f(-1) \cdot f(0) = ((-1)^4 - 2(-1)^2 + \alpha)(0^4 - 2 \cdot 0 + \alpha) = \alpha(\alpha - 1) < 0 \text{ αφού } 0 < \alpha < 1$$

άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο :

$(-1, 0)$, στο ίδιο διάστημα η f είναι γνήσια μονότονη άρα τελικά θα έχει μια ακριβώς λύση στο $(-1, 0)$.

B. Αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\chi_0, f(\chi_0))$

τότε $f''(\chi_0) = 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο

$B(\chi_0, g(\chi_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = g'(\chi_0)$.

$$\text{Όμως } g(\chi)f'(\chi) = 2f(\chi) \Leftrightarrow (g(\chi)f'(\chi))' = (2f(\chi))' \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi)f'(\chi) + g(\chi)f''(\chi) = 2f'(\chi) \Leftrightarrow g'(\chi_0)f'(\chi_0) + g(\chi_0)f''(\chi_0) = 2f'(\chi_0)$$

$$\Leftrightarrow g'(\chi_0)f'(\chi_0) + g(\chi_0) \cdot 0 = 2f'(\chi_0) \Leftrightarrow g'(\chi_0)f'(\chi_0) = 2f'(\chi_0) \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi_0)(g'(\chi_0) - 2) = 0 \text{ και επειδή } f'(\chi_0) \neq 0 \text{ κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα : } g'(\chi_0) = 2.$$

Άρα η εφαπτομένη στο σημείο $B(\chi_0, g(\chi_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$$\psi - 2\chi + 5 = 0 \Leftrightarrow \psi = -2\chi - 5.$$

Δαμιάνός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Α . Σε κάθε χρονική στιγμή το συνολικό κέρδος $P(t) = f(t) + K(t)$ με $t \geq 0$. Επειδή ζητάει το μέγιστο κέρδος, θα βρεις τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $P(t)$, μελετώντας το πρόσημο της $P'(t)$.

Είναι : $P(t) = f(t) + K(t) \Leftrightarrow P'(t) = f'(t) + K'(t)$ και $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$ από την εκφώνηση.

$$f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow f'(t) = \left(\frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \right)' = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \left(-\frac{t+28}{14} \right)' =$$

$$-\frac{1}{14} \cdot \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{A}{4} e^{-\frac{t+28}{14}}.$$

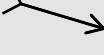
$$\text{Άρα } P'(t) = -\frac{A}{4} e^{-\frac{t+28}{14}} + \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} = \frac{A}{4} \left(-e^{-\frac{t+28}{14}} + e^{-\frac{t}{7}} \right) \text{ και επομένως } P'(t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{4} \left(-e^{-\frac{t+28}{14}} + e^{-\frac{t}{7}} \right) \geq 0 \text{ και επειδή } A \text{ θετικός άρα } -e^{-\frac{t+28}{14}} + e^{-\frac{t}{7}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{t}{7}} \geq e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7} \geq -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow \frac{t}{7} \leq \frac{t+28}{14} \Leftrightarrow 14 \frac{t}{7} \leq 14 \frac{t+28}{14} \Leftrightarrow$$

$$2t \leq t+28 \Leftrightarrow \mathbf{t \leq 28}.$$

Άρα για την $P(t)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

t	0 έτη	28 έτη	$+\infty$
$P'(t)$	+	0	-
$P(t)$			

μέγιστο το $P(28)$

Επομένως πετυχαίνει το μέγιστο κέρδος όταν πουλήσει την μηχανή μετά από 28 χρόνια

Λ ι β α δ ε ι ά

33.

ωανελλήνικες 1996 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο**A . α.** Θεωρία.

β. Η $f' = g$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ομοίως και η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ γιατί $g' = -f$ και η $-f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η f' και g' είναι συνεχείς γιατί ακριβώς είναι παραγωγίσιμες.

$$\text{Είναι } f'(\chi) = g(\chi) \Leftrightarrow f''(\chi) = g'(\chi) = -f(\chi) \Leftrightarrow f''(\chi) + f(\chi) = 0 \quad (1).$$

$$g'(\chi) = -f(\chi) \Leftrightarrow g''(\chi) = -f'(\chi) = -g(\chi) \Leftrightarrow g''(\chi) + g(\chi) = 0 \quad (2).$$

Από (1) και (2) είναι προφανές ότι : $f''(\chi) + f(\chi) = g''(\chi) + g(\chi) = 0$.

Για να δείξεις ότι η $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξεις ότι

$$h'(\chi) = 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

$$h = f^2 + g^2 \Leftrightarrow h' = (f^2 + g^2)' = 2 \cdot f \cdot f' + 2 \cdot g \cdot g' = 2(f \cdot f' + g \cdot g') = 2(f \cdot g + g \cdot (-f)) \Leftrightarrow h' = 2 \cdot 0 = 0 \text{ άρα η } h \text{ σταθερή.}$$

B . Η f είναι παραγωγίσιμη και επομένως συνεχής στο $[\chi_1, \chi_2]$, επιπλέον

δε είναι $f(\chi_1) = 0 = f(\chi_2)$ άρα θα υπάρξει, σύμφωνα με το Θ. Rolle

$\xi_1 \in (\chi_1, \chi_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow g(\xi_1) = 0$, άρα η $g(\chi) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (χ_1, χ_2) .

Έστω ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα της $g(\chi) = 0$ η $\xi_2 \in (\chi_1, \chi_2)$ τότε για την g θα ίσχυαν : η g συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (\chi_1, \chi_2)$

επιπλέον δε είναι $g(\xi_1) = 0 = g(\xi_2)$ άρα θα υπήρχε, σύμφωνα με το Θ. Rolle

$$\chi_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\chi_1, \chi_2) \text{ έτσι ώστε : } g'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow -f(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow f(\chi_0) = 0$$

πράγμα άτοπο γιατί $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in (\chi_1, \chi_2)$.

Άρα η $g(\chi) = 0$, τελικά έχει μια ακριβώς ρίζα στο (χ_1, χ_2) .

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. α. Θεώρησε τη συνάρτηση $\varphi(\chi) = \eta\mu\chi - 2\cdot\chi, \chi \geq 0$.

Είναι $\varphi'(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi - 2 < 0$, για κάθε $\chi \geq 0$ (αφού $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\chi \leq 1$), επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $\chi > 0$ είναι $\varphi(\chi) < \varphi(0)$ άρα $\eta\mu\chi - 2\chi < \eta\mu 0 - 2\cdot 0$ άρα $\eta\mu\chi < 2\cdot\chi$.

β. Η απάντηση χρειάζεται το Κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου :

Θεώρησε τη συνάρτηση : $f(\chi) = \eta\mu\chi - \chi + \frac{\chi^3}{3}$ αν $\chi > 0 \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = \left(\eta\mu\chi - \chi + \frac{\chi^3}{3} \right)' = \sigma\upsilon\nu\chi - 1 + \chi^2 \text{ άρα}$$

$$f''(\chi) = (\sigma\upsilon\nu\chi - 1 + \chi^2)' = -\eta\mu\chi + 2\chi > 0 \text{ για κάθε } \chi \geq 0, \text{ από το α. ερώτημα.}$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα $\chi > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > f(0) \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\chi - 1 + \chi^2 > \sigma\upsilon\nu 0 - 1 + 0^2 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi - 1 + \chi^2 > 0 \Leftrightarrow f'(\chi) > 0 \text{ άρα η } f$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\chi > 0$ άρα $f(\chi) > f(0) \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\chi - \chi + \frac{\chi^3}{3} > \eta\mu 0 - 0 + \frac{0^3}{3} \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \chi + \frac{\chi^3}{3} > 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi > \chi - \frac{\chi^3}{3}.$$

34.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1996 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. α. Θεωρία.

β. Έστω η συνάρτηση h με $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, με $\chi \in [0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } h'(\chi) = f'(\chi) - g'(\chi) = g'(\chi) + \eta\mu^2\chi + e^{\chi} - g'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = \eta\mu^2\chi + e^{\chi} > 0. \text{ Επομένως η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty).$$

$$\text{Άρα για κάθε } \chi > 0 \text{ είναι } h(\chi) > h(0) \Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) > f(0) - g(0) \Leftrightarrow$$

$$f(0) - g(\chi) < g(0) + f(\chi) .$$

Λ ι β α δ ε ι ά

B . α. Είναι $f(\chi) = e^{\alpha\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = (e^{\alpha\chi})' \Leftrightarrow f'(\chi) = \alpha \cdot e^{\alpha\chi},$

$$f''(\chi) = (\alpha \cdot e^{\alpha\chi})' \Leftrightarrow f''(\chi) = \alpha^2 \cdot e^{\alpha\chi}.$$

$$\text{Άρα } \alpha^2 \cdot e^{\alpha\chi} + 2 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha\chi} = 3 \cdot e^{\alpha\chi} \Leftrightarrow \alpha^2 + 2 \cdot \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

β. Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(\chi) = \lambda \cdot e^{\beta_1\chi} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi}, \text{ με } \chi \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot e^{\beta_1\chi_0} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi_0} = 0 \quad (1).$$

$$\text{Επίσης } g(\chi) = \lambda \cdot e^{\beta_1\chi} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi} \Leftrightarrow g'(\chi) = (\lambda \cdot e^{\beta_1\chi} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi})' \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi) = \lambda \cdot \beta_1 \cdot e^{\beta_1\chi} + \mu \cdot \beta_2 \cdot e^{\beta_2\chi}, \text{ επομένως}$$

$$g'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \beta_1 \cdot e^{\beta_1\chi_0} + \mu \cdot \beta_2 \cdot e^{\beta_2\chi_0} = 0 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα (ομογενές), με αγνώστους τα λ, μ , το

$$\begin{cases} \lambda \cdot e^{\beta_1\chi_0} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi_0} = 0 \\ \lambda \cdot \beta_1 \cdot e^{\beta_1\chi_0} + \mu \cdot \beta_2 \cdot e^{\beta_2\chi_0} = 0 \end{cases}. \text{ Η ορίζουσα του συστήματος είναι :}$$

$$\begin{vmatrix} e^{\beta_1\chi_0} & e^{\beta_2\chi_0} \\ \beta_1 \cdot e^{\beta_1\chi_0} & \beta_2 \cdot e^{\beta_2\chi_0} \end{vmatrix} = e^{\beta_1\chi_0} \cdot \beta_2 \cdot e^{\beta_2\chi_0} - \beta_1 \cdot e^{\beta_1\chi_0} \cdot e^{\beta_2\chi_0} =$$

$$e^{\beta_1\chi_0} \cdot e^{\beta_2\chi_0} (\beta_2 - \beta_1) \neq 0 \text{ αφού } \beta_1 \neq \beta_2 \text{ και } e^{\beta_1\chi_0} \cdot e^{\beta_2\chi_0} \neq 0 \text{ άρα το}$$

σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση δηλαδή $\lambda = \mu = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

B . Έστω η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$, αν

θέσεις $\chi = \sqrt{t}$ με $\chi \geq 0$ τότε η συνάρτηση γίνεται : $f(\chi) = 1 - 2^{-\frac{\chi}{499}}$.

Επειδή ζητάει το ρυθμό απορρόφησης θα βρεις την παράγωγο της συνάρτησης :

$$f(\chi) = 1 - 2^{-\frac{\chi}{499}} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(1 - 2^{-\frac{\chi}{499}} \right)' = -2^{-\frac{\chi}{499}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{\chi}{499} \right)' \Leftrightarrow$$

Δαμιάνός Μωραΐτης

$$f'(\chi) = \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{\chi}{499}}.$$

Η χρονική στιγμή που σου ζητά θα προκύψει ως λύση της εξίσωσης :

$$f'(t_1) = \frac{1}{16} f'(0) \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{t_1}{499}} = \frac{1}{16} \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{0}{499}} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t_1}{499}} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{t_1}{499} = -4 \Leftrightarrow t_1 = 1996.$$

35.

ωανελλήνικες 1997 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

$$A. \quad A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \quad \text{και} \quad B = \frac{f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \cdot g'(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g'(\alpha)}{(g(\alpha))^2}$$

$$\text{Αν θέσεις } h(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)} \quad \text{τότε } h'(\chi) = \left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi) \cdot g'(\chi)}{(g(\chi))^2} \quad \text{άρα}$$

$$h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = A, \quad h'(\alpha) = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g'(\alpha)}{(g(\alpha))^2} = B.$$

$$\text{Για κάθε } \chi \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \quad \frac{f(\chi)}{(\chi - \alpha)^2 g(\chi)} = \frac{A}{(\chi - \alpha)^2} + \frac{B}{\chi - \alpha} + \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(\chi - \alpha)^2} h(\chi) = \frac{h(\alpha)}{(\chi - \alpha)^2} + \frac{h'(\alpha)}{\chi - \alpha} + \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)}.$$

$$\frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} = \frac{h(\chi) - h(\alpha) - (\chi - \alpha)h'(\alpha)}{(\chi - \alpha)^2}.$$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow \alpha} h(\chi) = h(\alpha)$ γιατί η h είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έτσι

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{h(\chi) - h(\alpha) - (\chi - \alpha)h'(\alpha)}{(\chi - \alpha)^2}, \quad \text{όμως } \lim_{\chi \rightarrow \alpha} (\chi - \alpha)^2 = 0 \quad \text{και}$$

Λιβαδεϊά

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \left(h(\chi) - h(\alpha) - (\chi - \alpha)h'(\alpha) \right) = 0 \text{ άρα Hospital}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{\left(h(\chi) - h(\alpha) - (\chi - \alpha)h'(\alpha) \right)'}{\left((\chi - \alpha)^2 \right)'} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{h'(\chi) - h'(\alpha)}{2(\chi - \alpha)} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{h'(\chi) - h'(\alpha)}{(\chi - \alpha)} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} = \frac{1}{2} h''(\alpha).$$

Η h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $h(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ άρα παραγωγίσιμη ως

$$\text{πηλίκο παραγωγίσιμων, } h'(\chi) = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi) \cdot g'(\chi)}{(g(\chi))^2}, \text{ παραγωγίσιμη ως}$$

πηλίκο παραγωγίσιμων αφού οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \varphi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \left(\frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} g(\chi) \right) = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)} \lim_{\chi \rightarrow \alpha} g(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \varphi(\chi) = \frac{1}{2} h''(\alpha) g(\alpha)$$

B . Η απάντηση χρειάζεται το Κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου :

$$\text{Η ισότητα } (\chi - 2)f''(\chi) + (\alpha\eta\mu\chi - \beta\chi^2)f'(\chi) = e^{\chi-2} - 1 \text{ ισχύει για κάθε } \chi \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα και όταν } \chi = \rho, \text{ τότε } (\rho - 2)f''(\rho) + (\alpha \cdot \eta\mu\rho - \beta \cdot \rho^2)f'(\rho) = e^{\rho-2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$(\rho - 2)f''(\rho) = e^{\rho-2} - 1 \Leftrightarrow f''(\rho) = \frac{e^{\rho-2} - 1}{(\rho - 2)} \text{ αφού } f'(\rho) = 0.$$

Εξετάζεις το πρόσημο της f'' διακρίνοντας δυο περιπτώσεις :

✓ $\rho < 2$ τότε $\rho - 2 < 0$ και e^χ γνησίως αύξουσα άρα

$$e^{\rho-2} < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^{\rho-2} - 1 < 0 \text{ οπότε } \frac{e^{\rho-2} - 1}{(\rho - 2)} > 0.$$

✓ $\rho > 2$ τότε $\rho - 2 > 0$ και e^χ γνησίως αύξουσα άρα

Δαμιανός Μωραΐτης

$$e^{\rho-2} > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^{\rho-2} - 1 > 0 \text{ οπότε } \frac{e^{\rho-2} - 1}{(\rho-2)} > 0.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $f''(\chi) > 0$ άρα από το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου στη θέση $\chi = \rho$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο .

ΘΕΜΑ 3^ο

A i) Αν θέσεις $f(\chi) = \frac{g'(\chi)}{g(\chi)}$, τότε

$$f'(\chi) = \left(\frac{g'(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{g''(\chi)g(\chi) - [g'(\chi)]^2}{(g(\chi))^2} > 0 \text{ γιατί}$$

$(g(\chi))^2 > 0$ και $g''(\chi)g(\chi) - [g'(\chi)]^2 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, επομένως η $f = \frac{g'}{g}$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

ii)

✓ Αν $\chi_1 = \chi_2$ τότε $g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) = g\left(\frac{\chi_1 + \chi_1}{2}\right) = g(\chi_1)$ και

$$\sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)} = \sqrt{g(\chi_1)g(\chi_1)} = \sqrt{[g(\chi_1)]^2} = |g(\chi_1)| = g(\chi_1) \text{ γιατί } g(\chi) > 0 \text{ για}$$

κάθε $\chi \in \mathbb{R}$. Άρα $g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) = \sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)}.$

✓ Αν $\chi_1 \neq \chi_2$ έστω $\chi_1 < \chi_2$ τότε αν θέσεις $h(\chi) = \ln(g(\chi))$ θα είναι

$$h'(\chi) = [\ln(g(\chi))] = \frac{g'(\chi)}{g(\chi)} = f(\chi) \text{ άρα η } h'(\chi) = f(\chi) \text{ από το προηγούμενο}$$

ερώτημα είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ομοίως

παραγωγίσιμη και συνεχής και στα διαστήματα $\left(\chi_1, \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right), \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \chi_2\right)$

στα οποία διαστήματα, επομένως εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ. για την $h(\chi)$ δηλαδή

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\chi_1, \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)$ τέτοιο ώστε :

Λι β α δ ε ι ά

$$h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - h(\chi_1)}{\frac{\chi_1 + \chi_2}{2} - \chi_1} = \frac{h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - h(\chi_1)}{\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}}$$

- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \chi_2\right)$ τέτοιο ώστε :

$$h'(\xi_2) = \frac{h(\chi_2) - h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)}{\chi_2 - \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}} = \frac{h(\chi_2) - h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)}{\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}}$$

Επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα και $\xi_1 < \xi_2$ θα είναι $h'(\xi_1) < h'(\xi_2)$ άρα

$$\frac{h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - h(\chi_1)}{\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}} < \frac{h(\chi_2) - h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)}{\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) - h(\chi_1) < h(\chi_2) - h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) \text{ αφού } \chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \chi_2 - \chi_1 > 0, \text{ άρα}$$

$$2h\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) < h(\chi_2) + h(\chi_1) \text{ άρα } 2\ln\left(g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)\right) < \ln(g(\chi_1)) + \ln(g(\chi_2))$$

$$\text{άρα } \ln\left(g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)^2\right) < \ln(g(\chi_1) \cdot g(\chi_2)), \text{ η συνάρτηση } \ln x \text{ είναι μια γνησίως}$$

$$\text{αύξουσα συνάρτηση, επομένως } g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)^2 < g(\chi_1) \cdot g(\chi_2), \text{ άρα}$$

$$g\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right) < \sqrt{g(\chi_1) \cdot g(\chi_2)} \text{ μιας και } g(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

B

i) Αν στην ισότητα $g(\chi + \psi) = e^\psi g(\chi) + e^\chi g(\psi) + \chi\psi + \alpha$ θέσεις $\chi = \psi = 0$

έχεις : $g(0) = e^0 g(0) + e^0 g(0) + 0 \cdot 0 + \alpha$ άρα $g(0) = g(0) + g(0) + \alpha \Leftrightarrow$

$$g(0) = -\alpha.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ii) Στη σχέση $g(\chi + \psi) = e^\psi g(\chi) + e^\chi g(\psi) + \chi\psi + \alpha$ μπορείς θεωρήσεις ως μεταβλητή το ψ , οπότε το χ δεν μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το ψ , είναι σταθερό σε σχέση με το ψ .

Με αυτές τις προϋποθέσεις μπορείς να παραγωγίσεις με μεταβλητή παραγωγή το ψ , οπότε θα έχεις :

$$g(\chi + \psi) = e^\psi g(\chi) + e^\chi g(\psi) + \chi\psi + \alpha \Leftrightarrow$$

$$[g(\chi + \psi)]' = (e^\psi g(\chi) + e^\chi g(\psi) + \chi\psi + \alpha)' \text{ άρα}$$

$$g'(\chi + \psi)(\chi + \psi)' = (e^\psi g(\chi))' + (e^\chi g(\psi))' + (\chi\psi)' + (\alpha)' \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi + \psi) = e^\psi g(\chi) + e^\chi g'(\psi) + \chi \text{ και αν θέσεις } \psi = 0 \text{ έχεις}$$

$$g'(\chi + 0) = e^0 g(\chi) + e^\chi g'(0) + \chi \Leftrightarrow g'(\chi) = g(\chi) + g'(0)e^\chi + \chi, \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

36.

ωανελλήνικες 1997 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Έστω οι συναρτήσεις f, g που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις : $f''(\chi) - g''(\chi) = 4$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = g'(1)$, $f(2) = g(2)$.

$$i) \quad f''(\chi) - g''(\chi) = 4 \Leftrightarrow (f'(\chi) - g'(\chi))' = (4\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) - g'(\chi) = 4\chi + c_1$$

$$\text{άρα } f'(1) - g'(1) = 4 \cdot 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -4, \text{ επειδή } f'(1) = g'(1), \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) - g'(\chi) = 4\chi - 4 \text{ άρα } (f(\chi) - g(\chi))' = (4\chi - 4)' \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) - g(\chi) = 2\chi^2 - 4 \cdot \chi + c_2 \text{ άρα } f(2) - g(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\text{επειδή } f(2) = g(2), \text{ άρα } f(\chi) - g(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi.$$

B. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Λι β α δ ε ι α

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$.

i) Θέλεις να δείξεις $f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha)$, αρκεί να δείξεις

$$f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha) \leq 0, \text{ οπότε θεωρείς τη συνάρτηση}$$

$$g(\chi) = f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha) \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα και}$$

παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού f δυο φορές παραγωγίσιμη, και είναι :

$$g'(\chi) = [f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha)]' = f'(\chi) - f'(\beta). \quad (1)$$

Αν $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα και για $\chi \in (\alpha, \beta)$, οπότε έχουμε $\chi < \beta$ τότε

$$f'(\chi) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\chi) - f'(\beta) < 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g'(\chi) < 0. \text{ Άρα η } g \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Επομένως για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ θα ισχύει $\chi \geq \alpha \Rightarrow g(\chi) \leq g(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha) \leq f(\alpha) - f(\alpha) - f'(\beta)(\alpha - \alpha) = 0 - 0 - f'(\beta) \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha) \text{ για κάθε } \chi \in [\alpha, \beta].$$

37.

Πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. β. Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό $2 - 3i$ τότε

$$(2 - 3i)^2 + \beta(2 - 3i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow 4 - 12i - 9 + 2\beta - 3\beta i + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\beta + \gamma - 5) - 3(\beta + 4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta + \gamma - 5 = 0 \\ \beta + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 13 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

Δαμινός Μωραΐτης

Αν $\beta = -4$ και $\gamma = 13$ τότε η $f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 13$, οπότε $f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 13 = 10$

και $f'(\chi) = (\chi^2 - 4\chi + 13)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\chi - 4$ οπότε $f'(1) = -2$ άρα η

εφαπτομένη έχει εξίσωση : $\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 10 = -2(\chi - 1)$

$$\Leftrightarrow \psi = -2\chi + 12$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Β. Όταν $\chi \geq 0$ τότε $g(\chi) = M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi}) \Leftrightarrow$

$$g'(\chi) = (M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi}))' = M(1 - e^{-\mu\chi})' = -Me^{-\mu\chi}(-\mu \cdot \chi)' \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi) = \mu Me^{-\mu\chi} \quad (1). \text{ Επειδή θέλεις το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου}$$

προϊόντος ως συνάρτηση της $g(\chi)$ λύνεις την (1) ως προς $Me^{-\mu\chi}$:

$$g(\chi) = M_0 + M - Me^{-\mu\chi} \Leftrightarrow Me^{-\mu\chi} = M_0 + M - g(\chi) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχεις : $g'(\chi) = \mu Me^{-\mu\chi} = \mu [M_0 + M - g(\chi)]$.

Αν στην αρχική συνάρτηση $g(\chi) = M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi})$, αντικαταστήσεις $\chi = 0$,

που σημαίνει ότι ο γεωργός δεν χρησιμοποιεί λίπασμα τότε έχεις :

$$g(0) = M_0 + M(1 - e^{-\mu \cdot 0}) = M_0 + M(1 - 1) \Leftrightarrow g(0) = M_0, \text{ που σημαίνει ότι}$$

όταν ο γεωργός δεν χρησιμοποιεί λίπασμα τότε παράγει M_0 μονάδες.

38.

ωανελλήμνες 1998 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Όταν $t \geq 0$ τότε έχεις :

$$P(t) = E(t) - K(t) = (t-1)\varphi(t) - \varphi(t+4) = (t-1)(2t+\mu) - [2(t+4)+\mu] = 2t^2 + \mu t - 2t - \mu - 2t - 8 - \mu = 2t^2 + (\mu - 4)t - 2\mu - 8.$$

Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12

Λι β α δ ε ι ά

εκατομμύρια δραχμές θα είναι $P(1) = -12 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + (\mu - 4)1 - 2\mu - 8 = -12 \Leftrightarrow \mu = 2$. Άρα $P(t) = 2t^2 + (2 - 4)t - 2 \cdot 2 - 8 \Leftrightarrow P(t) = 2t^2 - 2t - 12, t \geq 0$.

β. Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν $P(t) > 0 \Leftrightarrow$

$$2t^2 - 2t - 12 > 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 > 0 \text{ και}$$

πίνακας προσήμου για το $2t^2 - 2t - 12$

χ	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$P(t)$		+	-	+	-

$$\text{Άρα } \begin{cases} 2t^2 - t - 12 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 3.$$

Άρα η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους.

γ. Για να βρεις το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους πρέπει να βρεις το $P'(2)$.

$$\text{Είναι } P(t) = 2t^2 - 2t - 12 \Leftrightarrow P'(t) = (2t^2 - 2t - 12)' = 4t - 2, \text{ έτσι λοιπόν :}$$

$P'(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6$ εκατομμύρια δραχμές / ανά έτος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Είναι : $h(0) = 2^{12} (e^{-4 \cdot 0} - e^{-a \cdot 0}) = 2^{12} (e^0 - e^0) = 2^{12} (1 - 1)$ άρα $h(0) = 0$.

Αν θέσεις $t_1 = -4\chi$ και $t_2 = -a\chi$, θα είναι $t_1 < 0$ και $t_2 < 0$ τότε

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{-4\chi} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} e^{t_1} = 0, \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{-a\chi} = \lim_{t_2 \rightarrow -\infty} e^{t_2} = 0 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-a\chi}) \right] \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = 2^{12} (0 - 0) = 0.$$

β. $h(\chi) = 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-a\chi})$ άρα $h'(\chi) = [2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-a\chi})]'$

$$= 2^{12} \left((e^{-4\chi})' - (e^{-a\chi})' \right) = 2^{12} (-4e^{-4\chi} + ae^{-a\chi}). \text{ Άρα } h'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow$$

Δαμινός Μωραΐτης

$$2^{12}(-4e^{-4\chi} + \alpha e^{-\alpha\chi}) \geq 0 \Leftrightarrow -4e^{-4\chi} + \alpha e^{-\alpha\chi} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha\chi} \geq 4e^{-4\chi} \quad (1) \text{ και}$$

επειδή $\alpha, 4, e^{-4\chi}, e^{-\alpha\chi} > 0$ η (1) γράφεται

$$\frac{e^{-\alpha\chi}}{e^{-4\chi}} \geq \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha\chi+4\chi} \geq \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow \ln(e^{-\alpha\chi+4\chi}) \geq \ln\left(\frac{4}{\alpha}\right) \Leftrightarrow -\alpha\chi + 4\chi \geq \ln 4 - \ln \alpha$$

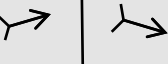
$$\Leftrightarrow \alpha\chi - 4\chi \leq \ln \alpha - \ln 4 \Leftrightarrow (\alpha - 4)\chi \leq \ln \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow \chi \leq \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}$$

Άρα για την $h(\chi)$ ισχύει ο πίνακας

μεταβολών :

Επομένως η $h(\chi)$ έχει **ολικό**

μέγιστο όταν $\chi = \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}$ το

t	0	$\ln \frac{\alpha/4}{\alpha-4}$	$+\infty$
$h'(\chi)$	+	0	-
$h(\chi)$			

ολικό μέγιστο

$$h\left(\frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}\right) = 2^{12} \left(e^{-4 \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}} - e^{-\alpha \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}} \right) = 2^{12} \left(e^{-\frac{4}{\alpha - 4} \ln \frac{\alpha}{4}} - e^{-\frac{\alpha}{\alpha - 4} \ln \frac{\alpha}{4}} \right)$$

Και επειδή ισχύει ο μετασχηματισμός : $\alpha^\chi = e^{\chi \cdot \ln \alpha}$ δηλαδή

$$(\text{βάση})^{(\text{εκθέτης})} = e^{(\text{εκθέτης}) \cdot \ln(\text{βάσης})} \text{ είναι}$$

$$h\left(\frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4}\right) = 2^{12} \left(\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{-\frac{4}{\alpha - 4}} - \left(\frac{\alpha}{4}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha - 4}} \right)$$

γ. Όταν $\chi \geq 0$ είναι $h'(\chi) = 2^{12}(-4e^{-4\chi} + \alpha e^{-\alpha\chi})$ και

$$h''(\chi) = 2^{12}(-4e^{-4\chi} + \alpha e^{-\alpha\chi})' \Leftrightarrow h''(\chi) = 2^{12}(16e^{-4\chi} - \alpha^2 e^{-\alpha\chi}) \text{ οπότε :}$$

$$h'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi_1 = \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha - 4} \text{ (από το προηγούμενο ερώτημα),}$$

$$h''(\chi) = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4\chi} - \alpha^2 e^{-\alpha\chi} = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4\chi} = \alpha^2 e^{-\alpha\chi} \Leftrightarrow \frac{e^{-4\chi}}{e^{-\alpha\chi}} = \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$e^{-4\chi+\alpha\chi} = \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)\chi} = \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow \ln e^{(\alpha-4)\chi} = \ln \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow (\alpha-4)\chi = \ln \left(\frac{\alpha}{4} \right)^2 = 2 \ln \left(\frac{\alpha}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \chi_2 = 2 \frac{\ln \left(\frac{\alpha}{4} \right)}{\alpha-4} \text{ και είναι προφανές ότι } \chi_2 = 2\chi_1$$

39.

ωανελλήνικες 1999 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο**A.** Θεωρία**B. α.** Για να αποδείξεις ότι η $g(\chi) = f(\chi)e^{-2\chi}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ πρέπει να δείξεις ότι $g''(\chi) > 0$. Πράγματι $g(\chi) = f(\chi)e^{-2\chi} \Leftrightarrow$

$$g'(\chi) = (f(\chi)e^{-2\chi})' = f'(\chi)e^{-2\chi} + f(\chi)(e^{-2\chi})' \Leftrightarrow g'(\chi) = f'(\chi)e^{-2\chi} - 2f(\chi)e^{-2\chi}$$

$$\text{και } g''(\chi) = (f'(\chi)e^{-2\chi} - 2f(\chi)e^{-2\chi})' = (f'(\chi)e^{-2\chi})' - 2(f(\chi)e^{-2\chi})' \Leftrightarrow$$

$$g''(\chi) = f''(\chi)e^{-2\chi} - 2f'(\chi)e^{-2\chi} - 2(f'(\chi)e^{-2\chi} - 2f(\chi)e^{-2\chi}) =$$

$$f''(\chi)e^{-2\chi} - 2f'(\chi)e^{-2\chi} - 2f'(\chi)e^{-2\chi} + 4f(\chi)e^{-2\chi} \Leftrightarrow$$

$$g''(\chi) = [f''(\chi) - 4(f'(\chi) - f(\chi))]e^{-2\chi} \text{ και επειδή } f''(\chi) > 4(f'(\chi) - f(\chi)) \text{ άρα}$$

$$g''(\chi) > 0 \text{ επομένως η } g(\chi) = f(\chi)e^{-2\chi} \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}$$

β. Η απάντηση χρειάζεται το Κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου :

$$f''(\chi) > 4(f'(\chi) - f(\chi)) \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}, \text{ άρα όταν } \chi = \chi_0, \text{ στη θέση του}$$

$$\text{τοπικού ακρότατου θα είναι : } f'(\chi_0) = 0, f''(\chi_0) > 4(f'(\chi_0) - f(\chi_0)) \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi_0) > 0 \text{ άρα από το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου το } f(\chi_0) = 0$$

θα είναι τοπικό ελάχιστο.

$$\text{Αυτό σημαίνει πως θα είναι } f(\chi) \geq f(\chi_0) = 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

40.

ωανελλήνικες 1999 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 1^ο**A.** Θεωρία.

$$\mathbf{B. \quad \alpha.} \quad \ln(\chi+1) > \chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln(\chi+1) + \frac{\chi^2}{2} - \chi + \frac{1}{5} > 0.$$

Θεωρείς την συνάρτηση : $g(\chi) = \ln(\chi+1) + \frac{\chi^2}{2} - \chi + \frac{1}{5}$ και θα δείξεις $g(\chi) > 0$

για κάθε $\chi \in [0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } g'(\chi) = \left(\ln(\chi+1) + \frac{\chi^2}{2} - \chi + \frac{1}{5} \right)' = \frac{1}{\chi+1} + \chi - 1 = \frac{1}{\chi+1} + \frac{\chi^2 - 1}{\chi+1} \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi) = \frac{\chi^2}{\chi+1} > 0 \text{ όταν } \chi \in (0, +\infty) \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$$(0, +\infty). \text{ Άρα } \chi \geq 0 \Leftrightarrow g(\chi) \geq g(0) = \ln(0+1) + \frac{0^2}{2} - 0 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow g(\chi) \geq \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow$$

$$g(\chi) > 0 \text{ επομένως } \ln(\chi+1) + \frac{\chi^2}{2} - \chi + \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow \ln(\chi+1) > \chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{1}{5}.$$

β. Είναι

$$\left([f(\chi)]^5 + 2[f(\chi)]^3 + 3f(\chi) \right)' = \left((\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6} + 182 \right)'$$

$$\left([f(\chi)]^5 + 2[f(\chi)]^3 + 3f(\chi) \right)' = 5[f(\chi)]^4 f'(\chi) + 6[f(\chi)]^2 f'(\chi) + 3f'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\left([f(\chi)]^5 + 2[f(\chi)]^3 + 3f(\chi) \right)' = \left(5[f(\chi)]^4 + 6[f(\chi)]^2 + 3 \right) f'(\chi).$$

$$\left((\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6} + 182 \right)' =$$

$$(\chi+1)' \ln(\chi+1) + (\chi+1)(\ln(\chi+1))' - \frac{4}{5} - \chi + \frac{\chi^2}{2} \Leftrightarrow$$

Λιβαδεϊά

$$\left((\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6} + 182 \right)' = \ln(\chi+1) + (\chi+1) \frac{1}{(\chi+1)} - \frac{4}{5} - \chi + \frac{\chi^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left((\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6} + 182 \right)' = \ln(\chi+1) - \frac{1}{5} - \chi + \frac{\chi^2}{2} > 0 \text{ λόγω}$$

του **α**. Άρα $\left(5[f(\chi)]^4 + 6[f(\chi)]^2 + 3 \right) f'(\chi) = \ln(\chi+1) - \frac{1}{5} - \chi + \frac{\chi^2}{2} > 0$ και

επειδή $5[f(\chi)]^4 + 6[f(\chi)]^2 + 3 > 0$ ως άθροισμα θετικών θα είναι :

$f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [0, +\infty)$ Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. $f(\chi) = \eta\mu^2(\alpha\chi) \Leftrightarrow f'(\chi) = (\eta\mu^2(\alpha\chi))' = 2\eta\mu(\alpha\chi)(\eta\mu(\alpha\chi))' =$

$$2\eta\mu(\alpha\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha\chi)(\alpha\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = \alpha \cdot \eta\mu(2\alpha\chi) \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi) = (\alpha \cdot \eta\mu(2\alpha\chi))' = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(2\alpha\chi) \cdot (2\alpha\chi)' \Leftrightarrow f''(\chi) = 2\alpha^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\alpha\chi).$$

Άρα $f''(\chi) + 4\alpha^2 \cdot f(\chi) = 2\alpha^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\alpha\chi) + 4\alpha^2 \cdot \eta\mu^2(\alpha\chi) =$

$$2\alpha^2 \cdot (2\sigma\upsilon\nu^2(\alpha\chi) - 1) + 4\alpha^2 \cdot \eta\mu^2(\alpha\chi) \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi) + 4\alpha^2 \cdot f(\chi) = 4\alpha^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\alpha\chi) - 2\alpha^2 + 4\alpha^2 \cdot \eta\mu^2(\alpha\chi) =$$

$$4\alpha^2 (\sigma\upsilon\nu^2(\alpha\chi) + \eta\mu^2(\alpha\chi)) - 2\alpha^2 \Leftrightarrow f''(\chi) + 4\alpha^2 \cdot f(\chi) = 2\alpha^2.$$

Άρα $f''(\chi) + 4\alpha^2 \cdot f(\chi) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$

B. **α.** Είναι $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1)' \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 3\chi^2 - 12\chi + 9 = 3(\chi^2 - 4\chi + 3) \text{ ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 3 \text{ άρα η } f' \text{ έχει}$$

πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	3	$+\infty$
+	-	+	

Δαμινός Μωραΐτης

Άρα πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$ και $\chi = 3$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 1$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 1)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < \chi < 3$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(1, 3)$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 3$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(3, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = 1$, το

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow f(1) = 5 \text{ και } \textbf{τ. ε.} \text{ στη θέση } \chi_2 = 3, \text{ το}$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow f(3) = 1.$$

Επομένως f γνησίως φθίνουσα και $1 \leq \chi \leq 3$ άρα $f(3) \leq f(\chi) \leq f(1) \Leftrightarrow$

$$1 \leq f(\chi) \leq 5 \text{ άρα } f(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi [1, 3].$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. Θεωρείς την συνάρτηση $g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi}$, η g στο διάστημα $[1, 2]$ είναι

παραγωγίσιμη και μάλιστα είναι : $g'(\chi) = \frac{\chi f'(\chi) - f(\chi)}{\chi^2}$ άρα θα είναι και

συνεχής στο $(1, 2)$, επίσης $g(1) = \frac{f(1)}{1}$ και $g(2) = \frac{f(2)}{2}$ επομένως,

σύμφωνα με την εκφώνηση, θα είναι $g(1) = g(2)$ άρα στο διάστημα $(1, 2)$ θα

ισχύει το Θ. Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει

$$g'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi_0 f'(\chi_0) - f(\chi_0)}{\chi_0^2} = 0 \text{ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον}$$

$$\chi_0 \in (1, 2) \text{ ώστε να ισχύει } \chi_0 f'(\chi_0) - f(\chi_0) = 0.$$

Λι β α δ ε ι ά

41.

ωανελλήνικες 2000 Α Δέσμη

Δευτέρα 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\chi) = 2000 + |\ln(\chi - 1)|$
 επειδή $\ln(\chi - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\chi - 1) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \chi - 1 \geq 1 \Leftrightarrow \chi \geq 2$ επομένως

$$f(\chi) = \begin{cases} 2000 - \ln(\chi - 1) & \text{αν } 1 < \chi < 2 \\ 2000 & \text{αν } \chi = 2 \\ 2000 + \ln(\chi - 1) & \text{αν } \chi > 2 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad f'(\chi) = \begin{cases} -\frac{1}{\chi - 1} & \text{αν } \chi < 2 \\ \frac{1}{\chi - 1} & \text{αν } \chi > 2 \end{cases}$$

Στο $\chi_0 = 0$ δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον και επομένως δεν εξετάζεις αν η f είναι παραγωγίσιμη.

Έστω c πραγματικός **μεγαλύτερος** του 2000 και έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B τότε θα είναι $f(\chi_1) = c = f(\chi_2)$ και

$A(\chi_1, c), B(\chi_2, c)$ και προφανώς $\chi_1 < 2 < \chi_2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης στο χ_1 είναι $f'(\chi_1) = -\frac{1}{\chi_1 - 1}$ και στο χ_2 είναι

$$f'(\chi_2) = \frac{1}{\chi_2 - 1} \quad \text{άρα} \quad f'(\chi_1) \cdot f'(\chi_2) = -\frac{1}{(\chi_1 - 1)(\chi_2 - 1)} \quad (1).$$

Είναι $f(\chi_1) = 2000 - \ln(\chi_1 - 1)$ αφού $\chi_1 < 2$ και

$$f(\chi_2) = 2000 + \ln(\chi_2 - 1) \quad \text{αφού } \chi_2 > 2 \quad \text{και επειδή } f(\chi_1) = c = f(\chi_2) \Leftrightarrow$$

$$2000 - \ln(\chi_1 - 1) = 2000 + \ln(\chi_2 - 1) \Leftrightarrow -\ln(\chi_1 - 1) = \ln(\chi_2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{1}{\chi_1 - 1} = \ln(\chi_2 - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_1 - 1} = \chi_2 - 1 \quad \text{μιας και η } \ln \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα}$$

και « $1 - 1$ » επομένως $(\chi_1 - 1)(\chi_2 - 1) = 1$ άρα από (1) $f'(\chi_1) \cdot f'(\chi_2) = -1$ και επομένως οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα A και B , είναι κάθετες.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

α. i) Είναι $f(\chi) - g(\chi) = \chi - 4 \Leftrightarrow g(\chi) = f(\chi) - \chi + 4$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi) - \chi + 4}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi} + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{4}{\chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{4}{\chi}. \text{ Είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 3 \text{ αφού η ευθεία με}$$

εξίσωση $\psi = 3\chi - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ,

$$\text{καθώς } \chi \rightarrow +\infty \text{ είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{4}{\chi} = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} = 3 - 1 + 0 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} = 2$$

ii) $\chi \rightarrow +\infty$ άρα $\chi \neq 0$, οπότε

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi) + 3\chi + \eta\mu 2\chi}{\chi \cdot f(\chi) - 3\chi^2 + 1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(\chi) + 3\chi + \eta\mu 2\chi}{\chi}}{\frac{\chi \cdot f(\chi) - 3\chi^2 + 1}{\chi}} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(\chi)}{\chi} + 3 + \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi}}{f(\chi) - 3\chi + \frac{1}{\chi}}. \text{ Όμως } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} = 2,$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 2 \frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi} = 2 \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(f(\chi) - 3\chi + \frac{1}{\chi} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 3\chi) + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = -7 + 0 = -7 =$$

αφού η ευθεία με εξίσωση $\psi = 3\chi - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής

$$\text{παράστασης της } f \text{ οπότε } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 3\chi) = -7$$

$$\text{Τελικά } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi) + 3\chi + \eta\mu 2\chi}{\chi \cdot f(\chi) - 3\chi^2 + 1} = \frac{2 + 3 + 2}{-7 + 0} = -1.$$

Λιβαδεϊά

β. Αν $\psi = \lambda\chi + \beta$ η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g ,
καθώς $\chi \rightarrow +\infty$ τότε :

$$1^{ov} \quad \lambda = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} = 2 \quad \text{άρα } \lambda = 2 \quad (\text{λόγω του προηγούμενου ερωτήματος})$$

$$2^{ov} \quad f(\chi) - g(\chi) = \chi - 4 \quad (\text{εκφώνηση}) \Leftrightarrow g(\chi) = f(\chi) - \chi + 4 \Leftrightarrow$$

$$g(\chi) - 2\chi = f(\chi) - 3\chi + 4 \Leftrightarrow \beta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (g(\chi) - 2\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 3\chi + 4) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 3\chi) + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 4 = -7 + 4 \Leftrightarrow \beta = -3$$

Άρα $\psi = 2\chi - 3$ η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , όταν $\chi \rightarrow +\infty$.

43.

ωανελλήνους 2000 Δ Δέση

Τετάρτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία.

B. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

$$2\chi f(\chi) + (\chi^2 + 1) f'(\chi) = e^\chi \quad \text{για κάθε } \chi \in \mathbb{R}, \text{ με } f(0) = 1.$$

$$\beta. \quad \text{Από το ερώτημα α. είναι : } f(\chi) = \frac{e^\chi}{\chi^2 + 1}, \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα } f'(\chi) = \left(\frac{e^\chi}{\chi^2 + 1} \right)' =$$

$$\frac{(e^\chi)'(\chi^2 + 1) - e^\chi(\chi^2 + 1)'}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{e^\chi(\chi^2 + 1) - 2\chi \cdot e^\chi}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{(\chi^2 - 2\chi + 1)e^\chi}{(\chi^2 + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{(\chi - 1)^2 e^\chi}{(\chi^2 + 1)^2} \quad \text{Είναι } f'(\chi) = \frac{(\chi - 1)^2 e^\chi}{(\chi^2 + 1)^2} > 0 \text{ με εξαίρεση μόνο το } \chi = 1$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

44.

Πανελλήνιες 2000 - Τεχνολογικής

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Παρατήρησε ότι $(8\ln(t+1) - 2t + c)' = \frac{8}{t+1} - 2 = f'(t)$, άρα

$f(t) = 8\ln(t+1) - 2t + c$ και επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ δεν υπάρχει

(ακόμη) συγκέντρωση φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς άρα θα

είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 8\ln(0+1) - 2 \cdot 0 + c = 0$ άρα $c = 0$, επομένως η f

γίνεται : $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t$.

β) Για να βρεις σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη, θα μελετήσεις την

μονοτονία της f . Είναι $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t$ άρα $f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2$ και

$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{t+1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-2t-2}{t+1} \geq 0$, άρα $\frac{-2t+6}{t+1} \geq 0$ (1) και επειδή $t \geq 0$

άρα $t+1 > 0$ οπότε από (1) $-2t+6 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 3$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

0	3	$+\infty$
+		-

και για την $f(t)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 3$.

✓ είναι θετική όταν $0 < \chi < 3$, άρα η $f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 3)$

✓ είναι αρνητική όταν $\chi > 3$, άρα η $f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3, +\infty)$

Η f παρουσιάζει Ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = 3$, το

$$f(3) = 8\ln(3+1) - 2 \cdot 3 = 16 \cdot \ln 2 - 6.$$

Λι β α δ ε ι α

γ) Όταν $t = 8$ τότε $f(8) = 8 \ln 9 - 2 \cdot 8 = 8 \cdot \ln 3^2 - 16 = 16 \cdot \ln 3 - 16 = 16(\ln 3 - 1) = 16(\ln 3 - \ln e) \geq 0$, γιατί $3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e \Leftrightarrow \ln 3 - \ln e > 0$ άρα τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό αφού $f(8) > 0$.

Όταν $t = 10$ τότε $f(10) = 8 \ln 11 - 2 \cdot 10 = 8 \cdot \ln 11 - 20 < 0$, γιατί $\ln 11 \cong 2,4$
 $\ln 11 \cong 2,4 \Leftrightarrow 8 \cdot \ln 11 \cong 8 \cdot 2,4 \cong 18,4 \Leftrightarrow 8 \cdot \ln 11 - 20 \cong 18,4 - 20 < 0$ άρα τη χρονική στιγμή $t = 10$ δεν υπάρχει επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό αφού $f(8) > 0$.

45.

Εσωτερικά 2000 - Τεχνολογικής

Παρασκευή 9 Ιουνίου

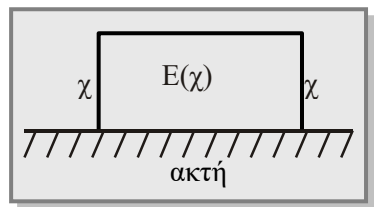
ΘΕΜΑ 3^ο

$$\beta) \text{ Είναι } f(\chi) = \frac{\chi}{\chi^2 + 1} \text{ άρα } f'(\chi) = \left(\frac{\chi}{\chi^2 + 1} \right)' = \frac{\chi'(\chi^2 + 1) - \chi(\chi^2 + 1)'}{(\chi^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{\chi^2 + 1 - \chi \cdot 2\chi}{(\chi^2 + 1)^2} \text{ άρα } f'(\chi) = \frac{-\chi^2 + 1}{(\chi^2 + 1)^2}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Είναι ψ η άλλη διάσταση τότε
 $2\chi + \psi = 600 \Leftrightarrow \psi = 600 - 2\chi$ και επομένως
 $E(\chi) = \chi \cdot \psi = \chi(600 - 2\chi) = -2\chi^2 + 600\chi$
 είναι το εμβαδόν $E(\chi)$ της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί



β) Για να βρεις την τιμή του χ έτσι ώστε το εμβαδόν $E(\chi)$ της περιοχής να γίνει μέγιστο, θα μελετήσεις την μονοτονία της $E(\chi)$.

$$\text{Είναι } E(\chi) = -2\chi^2 + 600\chi \text{ άρα } E'(\chi) = (-2\chi^2 + 600\chi)' = -4\chi + 600 \text{ και}$$

$$E'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -4\chi + 600 \geq 0 \Leftrightarrow 4\chi \leq 600 \Leftrightarrow \chi \leq 150$$

Δαμιανός Μωραΐτης

άρα η E' έχει πίνακα προσήμου :

0	150	300
+		-

και για την $E(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η E' :

χ	0	150	300
$E'(\chi)$	+	0	-
$E(\chi)$			

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 150$.
- ✓ είναι θετική όταν $0 < \chi < 150$, άρα η $E(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 150)$
- ✓ είναι αρνητική όταν $\chi > 150$, άρα η $E(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(150, 300)$

β) Το εμβαδόν γίνεται Μέγιστο στη θέση $\chi_0 = 150$, και είναι.

γ) $E(\chi) = -2 \cdot 150^2 + 600\chi = -45000 + 90000 = 45000$

46.

Εβδομαδιαία 2000 - Θετικής

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για να βρεις την τιμή του χ έτσι ώστε να έχεις τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή, θα μελετήσεις την μονοτονία

της $f(\chi) = \frac{1}{9}\chi^3 - \frac{1}{3}\chi^2 - \chi + 10$.

Είναι $f'(\chi) = \left(\frac{1}{9}\chi^3 - \frac{1}{3}\chi^2 - \chi + 10 \right)' = \frac{1}{3}\chi^2 - \frac{2}{3}\chi - 1 = \frac{1}{3}(\chi^2 - 2\chi - 3)$

$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\chi^2 - 2\chi - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi - 3 \geq 0$, ρίζες $\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 3$, από

αυτές μόνο η $\chi_2 = 3$ ανήκει στο διάστημα $(1, 5)$

άρα η f'' έχει πίνακα προσήμου :

1	3	5
-		+

Λιβάδεϊά

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	1	3	5
$f'(\chi)$	-		+
$f(\chi)$			

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 3$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < \chi < 3$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(1, 3)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $3 < \chi < 5$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(3, 5)$

Άρα έχεις την ελάχιστη κατανάλωση όταν $\chi_0 = 3$ (χιλιάδες στροφές ανά λεπτό), που είναι $f(3) = \frac{1}{9}3^3 - \frac{1}{3}3^2 - 3 + 10 = \frac{1}{9}27 - \frac{1}{3}9 - 3 + 10 = 7$ λίτρα στα 100 χιλιόμετρα.

β. Ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $\chi_1 = 2$

(2.000 στροφές ανά λεπτό) είναι $f(2)' = \frac{1}{3}(2^2 - 2 \cdot 2 - 3) = -1$ και για

$\chi_2 = 4$ (4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα), ο ρυθμός μεταβολής της

κατανάλωσης του αυτοκινήτου είναι $f(4)' = \frac{1}{3}(4^2 - 2 \cdot 4 - 3) = \frac{1}{3}5 = \frac{5}{3}$.

ωανελλήνικες 2000 - Θετικής

42.

Δευτέρα 12 Ιουνίου

A1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$A(\chi_0, \psi_0)$ αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο χ_0 είναι

$$\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0).$$

A2 Θεωρία.

B1 α. Α. γιατί $\pi\chi$ η $g(\chi) = \begin{cases} \chi^2 \eta \mu \frac{1}{\chi}, & \chi \neq 0 \\ 0, & \chi = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(\chi) = \begin{cases} 2\chi \cdot \eta \mu \frac{1}{\chi} - \sigma \nu \nu \frac{1}{\chi}, & \chi \neq 0 \\ 0, & \chi = 0 \end{cases} \quad \text{αλλά η } g' \text{ δεν είναι συνεχής στο } \chi = 0.$$

Δαμινός Μωραΐτης

β. Α. Θεωρία : Αν μια αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, (δες και Α.2. πιο πριν) οπότε αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο χ_0 δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη.

γ. Σ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο χ_0 , τότε η f' είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο χ_0 .

B2.

$$f(\chi) = 3\chi^3 \text{ άρα } f'(\chi) = 9\chi^2 \text{ άρα } f'(1) = 9$$

$$f(\chi) = \eta\mu 2\chi \text{ άρα } f'(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi \text{ άρα}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\sigma\upsilon\nu \pi = -2$$

$$f(\chi) = 3|\chi| \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 0$$

άρα δεν έχει εφαπτομένη

$$f(\chi) = \sqrt{\chi} \text{ άρα } f'(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \text{ άρα } f'(4) = \frac{1}{4}.$$

α.	3.
β.	1.
γ.	5.
δ.	2.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0, 1]$ επίσης $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0, 1)$, άρα η θ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, άρα το σύνολο τιμών της θ είναι το $[f(0), f(1)] = [2, 4]$ σύμφωνα με την εκφώνηση.

Επειδή $3 \in [2, 4]$ άρα η $\psi = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της f και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα τότε η $\psi = 3$ θα τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $\chi_0 \in (0, 1)$.

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα :

$$\frac{1}{5} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$$

$$\frac{2}{5} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$$

Αι β α δ ει ά

$$\frac{3}{5} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$$

$$\frac{4}{5} \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 < \frac{4}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε : $4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1)$

$$\Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων

τιμών υπάρχει $\chi_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε : $f(\chi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

γ. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, άρα θα ισχύει για αυτήν το Θ. Μ. Τ. επομένως θα υπάρχει $\chi_2 \in (0, 1)$, ώστε

$$f'(\chi_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 2}{1} = 2 \text{ άρα υπάρχει } \chi_2 \in (0, 1) \text{ ώστε}$$

η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_2, f(\chi_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 2\chi + 2000$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Αν μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου θα πρέπει : $f'(6) = 0$

και $f(6) = 15$. Είναι $f(t) = \frac{\alpha \cdot t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$ άρα

$$f'(t) = \frac{(\alpha \cdot t)' \left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right) - (\alpha \cdot t) \left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)'}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)^2} = \frac{\alpha \left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right) - (\alpha \cdot t) 2 \frac{t}{\beta^2}}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)^2}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{άρα } f'(t) = \frac{\alpha \left(1 - \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{t}{\beta} \right)^2 \right)^2}.$$

$$\text{Επομένως } f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha \left(1 - \left(\frac{6}{\beta} \right)^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{6}{\beta} \right)^2 \right)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{6}{\beta} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = 36 \\ \beta > 0 \end{cases} \text{ άρα } \beta = 6$$

$$\text{Τότε η } f \text{ γράφεται } f(t) = \frac{\alpha \cdot t}{1 + \left(\frac{t}{6} \right)^2} = \frac{\alpha \cdot t}{1 + \frac{t^2}{36}}, \text{ άρα}$$

$$f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{\alpha \cdot 6}{1 + \frac{6^2}{36}} = 15 \Leftrightarrow \frac{6\alpha}{2} = 15 \text{ άρα } \alpha = 5.$$

β. Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 6$ τότε η f έχει την μορφή

$$f(t) = \frac{5 \cdot t}{1 + \frac{t^2}{36}} \Leftrightarrow f(t) = \frac{180 \cdot t}{36 + t^2}, f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{180 \cdot t}{36 + t^2} \geq 12 \Leftrightarrow$$

$$180 \cdot t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0.$$

Λύσεις $t_1 = 3$ και $t_2 = 12$

άρα η f έχει πίνακα προσήμου :

0	3	12	$+\infty$
	+	-	+

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά το χρονικό διάστημα που $[3, 12]$

δηλαδή όταν $3 \leq t \leq 12$

47.

ΘΑΝΕΛΛΗΜΕΣ 2000 - Τ Ε Ε

Πέμπτη 15 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

$$\alpha) f'(x) = (x^2 - 4x + 4)' = 2x - 4 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 4$$

Λι β α δ ε ι ά

β) $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2,$

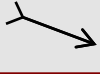
άρα η f' έχει πίνακα προσήμων :

$-\infty$	2	$+\infty$
-		+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Και όπως φαίνεται από τον

διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 2$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 2)$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(2, +\infty)$

γ) Η f παρουσιάζει ακρότατο : Ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 2$, το

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$$

48.

ωαυελλήμνες 2000 - Τ Ε Λ

Παρασκευή 23 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. α) Είναι $f(\chi) = \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{1}{\chi}\right)' \Leftrightarrow f'(\chi) = -\frac{1}{\chi^2}$ οπότε

$$f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο χ_0 είναι

$$\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0), \text{ όταν } \chi_0 = 2, \text{ είναι } f'(2) = -\frac{1}{4} \text{ και}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής}$$

$$\text{παράστασης της } f \text{ είναι : } \psi - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(\chi - 2) \Leftrightarrow \psi = -\frac{1}{4}\chi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\psi = -\frac{1}{4}\chi + 1.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

B. α) $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi - 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^3 - 3\chi - 1)' \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 3\chi^2 - 3 = 3(\chi^2 - 1).$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = -1 \text{ και } \chi_2 = 1$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -1$ και $\chi = 1$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -1$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, -1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-1 < \chi < 1$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1, 1)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει ακρότατο : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = -1$, το

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1 = 1, \text{ και τ. ε. στη θέση } \chi_2 = 1, \text{ το}$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 1 = -3$$

49.

εβδομαθητικές 2000 - Τ Ε Ε

Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 1)' \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 6\chi^2 - 6\chi - 12 = 6(\chi^2 - \chi - 2).$$

β) $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6(\chi^2 - \chi - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - \chi - 2 \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = -1 \text{ και } \chi_2 = 2$

Λ ι β α δ ε ι ά

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-1	2	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -1$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -1$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, -1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-1 < \chi < 2$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-1, 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(2, +\infty)$

γ) Η f παρουσιάζει ακρότατο : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = -1$, το

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 1 = 8, \text{ και τ. ε. στη θέση } \chi_2 = 2, \text{ το}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 = -19$$

50.

ωανελλήνικες 2000 - Εωαναληρωτικές Τεχνολογικής

Παρασκευή 15 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Αν $\alpha = 4$ τότε $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 4}$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow 4^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 4^-} \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 4} = \lim_{\chi \rightarrow 4^-} (\chi^2 - 3\chi + 2) \lim_{\chi \rightarrow 4^-} \frac{1}{\chi - 4} = 6(-\infty) \text{ άρα :}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 4^-} f(\chi) = -\infty \text{ οπότε η ευθεία } \chi = 4 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } f.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Η εφαπτομένη στο σημείο $M(1, 0)$ έχει εξίσωση

$$\psi - 0 = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = f'(1)(\chi - 1). \text{ Είναι } f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - \alpha} \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - \alpha} \right)' = \frac{(\chi^2 - 3\chi + 2)'(\chi - \alpha) - (\chi^2 - 3\chi + 2)(\chi - \alpha)'}{(\chi - \alpha)^2} =$$

$$\frac{(2\chi - 3)(\chi - \alpha) - (\chi^2 - 3\chi + 2)}{(\chi - \alpha)^2} = \frac{2\chi^2 - 2\alpha\chi - 3\chi + 3\alpha - \chi^2 + 3\chi - 2}{(\chi - \alpha)^2} \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 2\alpha\chi + 3\alpha - 2}{(\chi - \alpha)^2} \text{ οπότε } f'(1) = \frac{1^2 - 2\alpha \cdot 1 + 3\alpha - 2}{(1 - \alpha)^2} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{1}{|\alpha - 1|}$$

άρα η εφαπτομένη παίρνει τη μορφή : $\psi = \frac{1}{|\alpha - 1|}(\chi - 1)$ και θα πρέπει να

ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του M άρα

$$3 = \frac{1}{|\alpha - 1|}(-2 - 1) \Leftrightarrow |\alpha - 1| = -1 \text{ ΑΤΟΠΟ, άρα δεν υπάρχει } \alpha \text{ έτσι ώστε η}$$

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να περνάει από το $A(-2, 3)$.

γ. Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη χ_0 παράλληλη προς τον άξονα $\chi' \chi$ πρέπει η $f'(\chi_0) = 0$ να έχει λύση.

Η $f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 2\alpha\chi + 3\alpha - 2}{(\chi - \alpha)^2}$ στο διάστημα $[1, 2]$ είναι παραγωγίσιμη άρα και

συνεχής και $f'(1) = \frac{1^2 - 2\alpha \cdot 1 + 3\alpha - 2}{(1 - \alpha)^2} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2} > 0$ αφού $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 1 > 0$,

$$f'(2) = \frac{2^2 - 2\alpha \cdot 2 + 3\alpha - 2}{(1 - \alpha)^2} = \frac{-\alpha + 2}{(\alpha - 1)^2} < 0 \text{ αφού } \alpha > 2 \Leftrightarrow$$

$-\alpha + 2 < 0$ άρα $f'(1) \cdot f'(2) < 0$, άρα για την f' ισχύει το θεώρημα Bolzano

επομένως υπάρχει αριθμός $\chi_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε να είναι η $f'(\chi_0) = 0$.

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Στο διαγωνισμό συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά, επειδή όμως κάθε γραπτό διορθώνεται δύο φορές σημαίνει πως θα γίνουν 2000 διορθώσεις συνολικά και με το δεδομένο πως κάθε διόρθωση κοστίζει 200 δραχμές άρα έχεις ένα κόστος 400 χιλιάδες δραχμές μόνο για τις διορθώσεις.

Έστω ότι απασχολήθηκαν χ βαθμολογητές και με το δεδομένο πως κάθε βαθμολογητής αμείβεται με επί πλέον επίδομα 10 χιλιάδες δραχμές την ημέρα, έχεις ένα επί πλέον **κόστος $10 \cdot \chi$ χιλιάδες για επιδόματα**.

Αν απασχολήθηκαν χ βαθμολογητές και με το δεδομένο πως κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα σημαίνει πως οι χ βαθμολογητές διορθώνουν $4 \cdot 25 \cdot \chi = 100 \cdot \chi$ γραπτά την ημέρα, άρα για τις 2000 συνολικά διορθώσεις θα χρειαστούν $\frac{2000}{100 \cdot \chi} = \frac{20}{\chi}$ ημέρες, άρα επιπλέον

κόστος $\frac{20}{\chi} \cdot 8 = \frac{160}{\chi}$ χιλιάδες για τους συντονιστές (2 συντονιστές επί 4

χιλιάδες ο καθένας την ημέρα), άρα συνολικό κόστος :

$$K(\chi) = 400 + 10\chi + \frac{160}{\chi} = 10 \left(\chi + \frac{16}{\chi} + 40 \right)$$

β. Για να βρεις πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο, θα μελετήσεις την μονοτονία της συνάρτησης του κόστους.

$$K(\chi) = 10 \left(\chi + \frac{16}{\chi} + 40 \right) \text{ άρα } K'(\chi) = \left[10 \left(\chi + \frac{16}{\chi} + 40 \right) \right]' = 10 \left(1 - \frac{16}{\chi^2} \right) =$$

$$10 \frac{\chi^2 - 16}{\chi^2}. \text{ Είναι } K'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 10 \frac{\chi^2 - 16}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 16 \geq 0, \text{ ρίζες}$$

$\chi_1 = -4$ και $\chi_2 = 4$, από αυτές μόνο η $\chi_2 = 4$ ανήκει στο

διάστημα $(0, +\infty)$

άρα η K' έχει πίνακα προσήμου :

0	4	$+\infty$
-	+	

Δαμιανός Μωραΐτης

και για την $K(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η K' :

χ	0	4	$+\infty$
$K'(\chi)$	-		+
$K(\chi)$			

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 4$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 4$, άρα η $K(\chi)$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 4)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $4 < \chi < +\infty$, άρα η $K(\chi)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(4, +\infty)$

β) Οι βαθμολογητές πρέπει να είναι 4, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο.

γ. Το ελάχιστο κόστος είναι : $K(4) = 10 \left(4 + \frac{16}{4} + 40 \right) = 480$ χιλιάδες δραχμές

και οι ημέρες απασχόλησης είναι $\frac{2000 \text{ διορθώσεις}}{4 \text{ καθηγητές} \times 100 \text{ γραπτά}} = 5 \text{ ημέρες}$

51.

ωανελλήνικες 2000 - Εωαναληρωτικές Θεωκής

Σάββατο 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Θεωρία.

β. Σύμφωνα με την θεωρία (αλλά και με το προηγούμενο ερώτημα) η f θα είναι γνησίως φθίνουσα.

B.1.

α. Η συνάρτηση $f(\chi) = e^{1-\chi}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των

πραγματικών αριθμών γιατί $f'(\chi) = (e^{1-\chi})' = e^{1-\chi} (1-\chi)' = -e^{1-\chi} < 0$, άρα **Λ** είναι η απάντηση.

Λιβαδειά

β. Επειδή $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} > 0$ και $-2\eta\mu\chi > -2 \Leftrightarrow 3 - 2\eta\mu\chi > 1 > 0$ άρα

$f'(\chi) = -2\eta\mu\chi + \frac{1}{\eta\mu^2\chi} + 3 > 0$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο

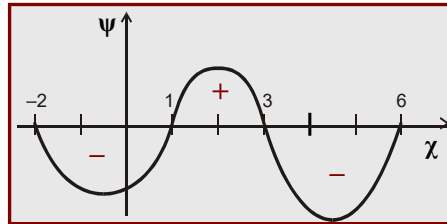
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα **Σ** είναι η απάντηση.

γ. Από $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ έχεις $h'(\chi) = f'(\chi) - g'(\chi) = 3 > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και όχι φθίνουσα, άρα **Λ** είναι η απάντηση.

B.2. Τα πρόσημα για την f' φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα άρα

η συνάρτηση f είναι :

$\begin{cases} \text{Γνησίως φθίνουσα στο } (-2, -1) \\ \text{Γνησίως αύξουσα στο } (-1, 3) \\ \text{Γνησίως φθίνουσα στο } (3, 6) \end{cases}$



ΘΕΜΑ 3^ο

α. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών

αριθμών, άρα το $f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$.

Αν θέσεις $g(\chi) = \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi}$ τότε $\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) = 5$ και

$$g(\chi) = \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi} \Leftrightarrow f(\chi) - e^{2\chi} + 1 = g(\chi) \cdot \eta\mu 2\chi \Leftrightarrow$$

$f(\chi) = g(\chi) \cdot \eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1$ και επειδή στο δεύτερο μέλος **υπάρχουν όλα τα**

επί μέρους όρια άρα $f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (g(\chi) \cdot \eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1) =$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \eta\mu 2\chi + \lim_{\chi \rightarrow 0} (e^{2\chi} - 1) = 5 \cdot 0 + (1 - 1) \text{ άρα } \boxed{f(0) = 0}$$

β. Για να δείξεις ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ αρκεί να δείξεις πως υπάρχει το :

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi}. \text{ Είναι } f(\chi) = g(\chi) \cdot \eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1 \text{ και αν } \chi \neq 0$$

$$\text{τότε : } \frac{f(\chi)}{\chi} = \frac{g(\chi) \cdot \eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1}{\chi} = g(\chi) \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi} + \frac{e^{2\chi} - 1}{\chi}.$$

$$\checkmark \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(g(\chi) \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi} \right) = \lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi} = 5 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} 2 \frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi} = 5 \cdot 2 \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2\chi}{2\chi} = 10$$

$$\checkmark \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^{2\chi} - 1}{\chi} \stackrel{0}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(e^{2\chi} - 1)'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow 0} 2e^{2\chi} = 2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) \frac{\eta\mu 2\chi}{\chi} + \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^{2\chi} - 1}{\chi} = 10 + 2 \text{ επομένως } f'(0) = 12$$

άρα η f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$.

γ. Η εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα, έχουν συντελεστές $f'(0)$ και

$h'(0)$ αντίστοιχα. Είναι $f'(0) = 12$, από το προηγούμενο ερώτημα,

$$h(\chi) = e^{-\chi} f(\chi) \text{ άρα } h'(\chi) = (e^{-\chi} f(\chi))' = (e^{-\chi})' f(\chi) + e^{-\chi} f'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = -e^{-\chi} f(\chi) + e^{-\chi} f'(\chi) \text{ άρα } h'(0) = -e^0 f(0) + e^0 f'(0) =$$

$$-1 \cdot 0 + 1 \cdot 12 \Leftrightarrow h'(0) = 12$$

Άρα οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά είναι

$$P(0) = 4 + \frac{0 - 6}{0^2 + \frac{4}{25}} = 4 - \frac{24}{25} = \frac{76}{25} \text{ και επειδή η τιμή είναι σε χιλιάδες δραχμές}$$

$$\frac{76}{25} \text{ χιλιάδες} = \frac{76000}{25} = 3040.$$

Λ ι β α δ ε ι ά

β. Για να βρεις το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται, θα μελετήσεις την μονοτονία της $P(t)$, της συνάρτησης τιμής του προϊόντος.

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} = 4 + \frac{4(t-6)}{4t^2 + 25} \text{ άρα } P'(t) = \left(4 + \frac{4(t-6)}{4t^2 + 25} \right)' = \left(\frac{4(t-6)}{4t^2 + 25} \right)' =$$

$$\frac{(4(t-6))'(4t^2 + 25) - 4(t-6)(4t^2 + 25)'}{(4t^2 + 25)^2} = \frac{4(4t^2 + 25) - 4(t-6) \cdot 8t}{(4t^2 + 25)^2} =$$

$$\frac{16t^2 + 100 - 32t^2 + 192t}{(4t^2 + 25)^2} = -\frac{16t^2 - 192t - 100}{(4t^2 + 25)^2} \text{ άρα } P'(t) = -4 \frac{4t^2 - 48t - 25}{(4t^2 + 25)^2},$$

$$P'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -4 \frac{4t^2 - 48t - 25}{(4t^2 + 25)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 48t - 25 \leq 0, \text{ ρίζες}$$

$\chi_1 = -\frac{1}{2} = -0,5$ και $\chi_2 = \frac{25}{4} = 12,5$, από αυτές μόνο η $\chi_2 = 12,5$ είναι δεκτή επειδή είναι θετική.

άρα η P' έχει πίνακα προσήμου :

0	12,5	$+\infty$
+	-	

και για την $P(t)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό

πίνακα η P' :

t	0	12,5	$+\infty$
$P'(t)$	+	-	
$P(t)$			

- ✓ μηδενίζεται όταν $t = 12,5$
- ✓ είναι **θετική** όταν $0 < t < 12,5$, άρα η $P(t)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, 12,5)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $12,5 < t < +\infty$, άρα η **$P(t)$** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(12,5, +\infty)$

Επομένως το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται είναι το **$(0, 12,5)$**

Δαμινός Μωραΐτης

- γ. Από τον παραπάνω πίνακα είναι φανερό ότι : Η χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη είναι τα 12,5 μήνες.
- δ. Από τον πιο πάνω πίνακα φαίνεται πως μετά τα 12,5 μήνες η τιμή μειώνεται διαρκώς και το όριο της $P(t)$ όταν $t \rightarrow +\infty$ είναι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{4(t-6)}{4t^2 + 25} \right) = 4 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t-16}{4t^2 + 25}$$

$$= 4 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{4t^2} = 4 + 0.$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow \infty} P(t) = 4$ χιλιάδες δραχμές, ποσόν που είναι μεγαλύτερο από τις 3040 δραχμές, που είναι η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 Α Δέσμη

52.

Δευτέρα 21 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \chi^2 \ln \chi$, $\chi > 0$.

α. Αρκεί να αποδείξεις ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο στο οποίο $f'(\chi) = 0$.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \chi^2 \ln \chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^2 \ln \chi)' = 2\chi \ln \chi + \chi^2 \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 2\chi \ln \chi + \chi = (2 \ln \chi + 1)\chi \text{ άρα } f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow (2 \ln \chi + 1)\chi = 0 \text{ και επειδή}$$

$$\chi > 0 \text{ άρα } 2 \ln \chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \chi = -\frac{1}{2} = \ln e^{-\frac{1}{2}}, \text{ η } \ln \chi \text{ είναι } 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\chi = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

μοναδική λύση.

Άρα υπάρχει ένα μόνο σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

Λ ι β α δ ε ι ά

B. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

α. $f(\chi) = 2\chi \Leftrightarrow f(\chi) - 2\chi = 0$. Θέτεις $g(\chi) = f(\chi) - 2\chi$, οπότε για την g στο (α, β) ισχύει :

1^{ov} Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών .

2^{ov} $g(\alpha) = f(\alpha) - 2\alpha = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha)$, $g(\beta) = f(\beta) - 2\beta = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$ οπότε : $g(\alpha) \cdot g(\beta) = 2(\beta - \alpha) \cdot 2(\alpha - \beta) = -4(\beta^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow$

$g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$ επειδή στην εκφώνηση δίνεται το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σαφώς εννοείται πως $\beta > \alpha$ άρα $\beta^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow -4(\beta^2 - \alpha^2) < 0$.

Επομένως η g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano άρα για την $g(\chi) = 0$ θα υπάρξει μια τουλάχιστον λύση επομένως :

Θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $g(\chi) = 0 \Leftrightarrow f(\chi) - 2\chi = 0 \Leftrightarrow f(\chi) = 2\chi$.

β. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση $f(\chi) = 2\chi$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) , έστω την χ_0 τότε είναι $\alpha < \chi_0 < \beta$ και $f(\chi_0) = 2\chi_0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha, \chi_0]$, $[\chi_0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα (α, χ_0) , (χ_0, β) , επομένως για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. και άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \chi_0)$, $\xi_2 \in (\chi_0, \beta)$

$$\text{έτσι ώστε : } \begin{cases} f'(\xi_1) = \frac{f(\chi_0) - f(\alpha)}{\chi_0 - \alpha} = \frac{2\chi_0 - 2\beta}{\chi_0 - \alpha} \\ f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\chi_0)}{\beta - \chi_0} = \frac{2\alpha - 2\chi_0}{\beta - \chi_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(\xi_1) = \frac{2(\chi_0 - \beta)}{\chi_0 - \alpha} \\ f'(\xi_2) = \frac{2(\alpha - \chi_0)}{\beta - \chi_0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{2(\chi_0 - \beta)}{\chi_0 - \alpha} \cdot \frac{2(\alpha - \chi_0)}{\beta - \chi_0} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{-2(\beta - \chi_0)}{\chi_0 - \alpha} \cdot \frac{-2(\chi_0 - \alpha)}{\beta - \chi_0} = (-2)(-2) = 4.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha$ τότε :

$$f'(\chi) = (\chi^3 - 3\chi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha)' \text{ άρα}$$

$$f(\chi)' = 3\chi^2 - 6\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha \text{ και } f''(\chi) = (3\chi^2 - 6\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha)'$$

$$\text{άρα } f''(\chi) = 6\chi - 6\sigma\upsilon\nu 2\alpha \text{ επομένως } f''(\chi) = 0 \Leftrightarrow 6\chi - 6\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \text{ τότε όμως :}$$

$$f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha) = \sigma\upsilon\nu^3 2\alpha - 3\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha) = \eta\mu^2 2\alpha.$$

Άρα για την f το μοναδικό σημείο καμπής είναι το $A(\sigma\upsilon\nu 2\alpha, \eta\mu^2 2\alpha)$ και

επειδή $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 2\alpha = -\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + 1$ άρα οι συντεταγμένες του

A ικανοποιούν την **παραβολή** : $\psi = -\chi^2 + 1$, η οποία παριστάνει την παραβολή

$\psi = -\chi^2$ με μια μετατόπιση του οριζόντιου άξονά της κατά $+1$.

53.**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 Δ Δέση****Τετάρτη 23 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

B. α. $f(\chi) = \chi^3 + 2\chi - 1 - \eta\mu 2\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^3 + 2\chi - 1 - \eta\mu 2\chi)'$ άρα

$$f'(\chi) = 3\chi^2 + 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2\chi.$$

$$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 + 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2\chi > 0 \Leftrightarrow \chi^2 + 1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\chi < \chi^2 + 1 \leq 1$$

που ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 + 2\chi - 1 - \eta\mu 2\chi$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λιβαδεϊά

β. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 - \eta\mu 2 \cdot 0 = -1$, $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 1 - \eta\mu 2 \cdot 1 = 2 - \eta\mu 2 > 0$ άρα $f(0)f(1) < 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, στο διάστημα $(0, 1)$.

Επειδή η f είναι και γνησίως αύξουσα, από το προηγούμενο ερώτημα, θα έχει μόνο μια ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. α. Αν η ευθεία $\varepsilon: \psi = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής

$$\begin{aligned} \text{παράστασης της } f \text{ στο } +\infty, \text{ τότε θα είναι } 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha x^2 + \beta x}{x-2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ και η } f \text{ γίνεται: } f(x) = \frac{2x^2 + \beta x}{x-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης πρέπει } -1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + \beta x}{x-2} - 2x \right] = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \beta x - 2x^2 + 4x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta+4)x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta+4)x}{x} \Leftrightarrow \\ \beta + 4 &= -1 \Leftrightarrow \beta = -5. \end{aligned}$$

54.

Εσωτερικά 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Για να βρεις τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' θα βρεις :

1^ο $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 3$ οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(1, 0)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

2^ο $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$ οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον ψ στο σημείο $\Gamma(0, 3)$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3)) = A(3, 0)$ έχει τύπο : $\psi - f(3) = f'(3)(\chi - 3)$.

Είναι $f(3) = 0$ και $f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 3$ άρα $f'(\chi) = (\chi^2 - 4\chi + 3)' = 2\chi - 4$

οπότε $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

Άρα $\psi - 0 = 2(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = 2\chi - 6$, η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $A(3, f(3))$.

γ) Για τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f έχουμε :

$$f'(\chi) = 2\chi - 4, \quad f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2.$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	2	$+\infty$
-		+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	-		+
$f(\chi)$			

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$

✓ είναι **αρνητική** όταν $-\infty < \chi < 2$, άρα η **$f(\chi)$** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 2)$

✓ είναι **θετική** όταν $2 < \chi < +\infty$, άρα η **$f(\chi)$** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 3^ο

Τα **α** , και **β** , έχουν ήδη απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, για λόγους συνέχειας και συνάφειας επαναλαμβάνεται η απάντησή τους.

α) Αν $2 - \chi^4 \leq f(\chi) \leq 2 + \chi^4$ τότε $2 - 0^4 \leq f(0) \leq 2 + 0^4 \Leftrightarrow 2 \leq f(0) \leq 2$

άρα $f(0) = 2$

Λ ι β α δ ε ι ά

β) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} (2 - \chi^4) = 2 = \lim_{\chi \rightarrow 0} (2 + \chi^4)$, άρα λόγω του κριτηρίου

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 2$ άρα λόγω του **α.** ερωτήματος

$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(2)$, επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$.

γ) Για να δείξεις ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$, αρκεί να δείξεις

πως υπάρχει το : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 2}{\chi}$.

Είναι $2 - \chi^4 \leq f(\chi) \leq 2 + \chi^4 \Leftrightarrow -\chi^4 \leq f(\chi) - 2 \leq \chi^4$ **(1)**

i) $\chi > 0$, **(1)** $\Leftrightarrow -\chi^3 \leq \frac{f(\chi) - 2}{\chi} \leq \chi^3$, όμως $\lim_{\chi \rightarrow 0} (-\chi^3) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^3) = 0$ άρα λόγω

του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f(\chi) - 2}{\chi} = 0$

ii) $\chi < 0$, **(1)** $\Leftrightarrow -\chi^3 \geq \frac{f(\chi) - 2}{\chi} \geq \chi^3$, όμως $\lim_{\chi \rightarrow 0} (-\chi^3) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^3) = 0$ άρα λόγω

του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f(\chi) - 2}{\chi} = 0$

άρα $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 2}{\chi} = 0$ άρα **$f'(\chi) = 0$** , επομένως η συνάρτηση f είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο **$\chi_0 = 0$** .

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Αν το τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα χ km την ώρα τότε χρειάζεται : $\frac{625}{\chi}$ ώρες, επομένως

κόστος για αμοιβή του οδηγού $\frac{625}{\chi} 2000 = \frac{1250000}{\chi}$ δραχμές.

Κόστος για τα καύσιμα $\frac{625}{\chi} \left(5,5 + \frac{\chi^2}{200} \right) \cdot 160 = \frac{625 \cdot 5,5 \cdot 160}{\chi} + \frac{625 \cdot 160 \cdot \chi^2}{200 \cdot \chi} =$

$\frac{550000}{\chi} + 500\chi$.

Δαμιανός Μωραϊτης

Άρα $K(\chi) = \frac{1250000}{\chi} + \frac{550000}{\chi} + 500\chi$ επομένως **Συνολικό Κόστος**

$K(\chi) = \frac{1800000}{\chi} + 500\chi$. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα άρα **$0 < \chi \leq 90$** .

β) Για να βρεις την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο θα μελετήσεις την μονοτονία της συνάρτησης του κόστους. $K(\chi) = \frac{1800000}{\chi} + 500\chi$

Είναι $K(\chi) = \frac{1800000}{\chi} + 500\chi$ άρα $K'(\chi) = \left(\frac{1800000}{\chi} + 500\chi \right)'$ άρα

$K'(\chi) = -\frac{1800000}{\chi^2} + 500$, $K'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1800000}{\chi^2} + 500 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{500\chi^2 - 1800000}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow 500\chi^2 - 1800000 \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 3600 \geq 0$, ρίζες

$\chi_1 = -60$ και $\chi_2 = 60$, από αυτές μόνο η $\chi_2 = 60$ ανήκει στο διάστημα $(0, 90]$

άρα η K' έχει πίνακα προσήμων :

0	60	90
-		+

και για την $K(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό

πίνακα η K' :

χ	0	60	90
$K'(\chi)$	-		+
$K(\chi)$			

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 60$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 60$, άρα η **$K(\chi)$** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 60)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $60 < \chi < 90$, άρα η **$K(\chi)$** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(60, 90)$ και

το κόστος γίνεται ελάχιστο όταν η ταχύτητα είναι 60 χιλ/ώρα

Λ ι β α δ ε ι ά

56.

ωανελλήνικες 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f , πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0 = 3$.

$$\text{Άρα πρέπει: } \lim_{\chi \rightarrow 3^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3^-} f(\chi) = f(3).$$

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 3^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3} (\alpha \chi^2) = 9 \cdot \alpha \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 3^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{1 - e^{\chi-3}}{\chi - 3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{(1 - e^{\chi-3})'}{(\chi - 3)'} = \lim_{\chi \rightarrow 3} (-e^{\chi-3}) \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 3^+} f(\chi) = -1, \text{ επομένως:}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 3^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 3^-} f(\chi) \Leftrightarrow -1 = 9 \cdot \alpha \text{ άρα } \alpha = -\frac{1}{9}.$$

β. Ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης είναι: $\psi - f(4) = f'(4)(\chi - 4)$.

Επειδή $4 > 3$ άρα για την συνάρτηση f ισχύει ο τύπος $f(\chi) = \frac{1 - e^{\chi-3}}{\chi - 3}$ και

$$\text{επομένως: } f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4 - 3} = 1 - e, \quad f(\chi) = \frac{1 - e^{\chi-3}}{\chi - 3} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{1 - e^{\chi-3}}{\chi - 3} \right)' =$$

$$\frac{(1 - e^{\chi-3})'(\chi - 3) - (1 - e^{\chi-3})(\chi - 3)'}{(\chi - 3)^2} = \frac{-e^{\chi-3}(\chi - 3) - 1 + e^{\chi-3}}{(\chi - 3)^2} =$$

$$\frac{-\chi \cdot e^{\chi-3} + 3 \cdot e^{\chi-3} - 1 + e^{\chi-3}}{(\chi - 3)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{(4 - \chi)e^{\chi-3} - 1}{(\chi - 3)^2} \text{ και επομένως}$$

$$f'(4) = \frac{(4 - 4)e^{4-3} - 1}{(4 - 3)^2} = -1.$$

Άρα $\psi - f(4) = f'(4)(\chi - 4) \Leftrightarrow \psi - (1 - e) = -1(\chi - 4) \Leftrightarrow \psi = -\chi + 5 - e$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για να δείξεις ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα αρκεί να δείξεις ότι η f' , για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ διατηρεί το πρόσημό της και δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του χ .

$$\text{Πράγματι } f^3(\chi) + \beta \cdot f^2(\chi) + \gamma \cdot f(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^3(\chi) + \beta \cdot f^2(\chi) + \gamma \cdot f(\chi))' = (\chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(\chi)f'(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi)f'(\chi) + \gamma \cdot f'(\chi) = 3\chi^2 - 4\chi + 6 \Leftrightarrow$$

$$(3f^2(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi) + \gamma)f'(\chi) = 3\chi^2 - 4\chi + 6 \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \frac{3\chi^2 - 4\chi + 6}{3f^2(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi) + \gamma}.$$

Το $3\chi^2 - 4\chi + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -56 < 0$ άρα για κάθε

$\chi \in \mathbb{R}$ είναι $3\chi^2 - 4\chi + 6 > 0$.

Το $3f^2(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi) + \gamma$ είναι της μορφής $3\omega^2 + 2\beta \cdot \omega + \gamma$ και έχει

διακρίνουσα : $\Delta = (2\beta)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ γιατί $\beta^2 < 3\gamma$,

άρα για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ είναι $3\omega^2 + 2\beta \cdot \omega + \gamma > 0$, άρα για $\omega = f(\chi)$ θα είναι

$$3f^2(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi) + \gamma > 0.$$

Άρα είναι $f'(\chi) = \frac{3\chi^2 - 4\chi + 6}{3f^2(\chi) + 2\beta \cdot f(\chi) + \gamma} > 0$ επομένως δεν μηδενίζεται άρα δεν μπορεί να έχει ακρότατα.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f'(\chi) > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η συνάρτηση είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :

$$f^3(\chi) + \beta \cdot f^2(\chi) + \gamma \cdot f(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1 \text{ άρα}$$

$$f^3(0) + \beta \cdot f^2(0) + \gamma \cdot f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 1 \text{ άρα}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$f^3(0) + \beta \cdot f^2(0) + \gamma \cdot f(0) = -1 \text{ άρα}$$

$$(f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma)f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) = \frac{-1}{f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma}.$$

$$\text{2}^{\text{ov}} \quad f^3(\chi) + \beta \cdot f^2(\chi) + \gamma \cdot f(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1 \text{ άρα}$$

$$f^3(1) + \beta \cdot f^2(1) + \gamma \cdot f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1 = 4 \text{ άρα}$$

$$f^3(1) + \beta \cdot f^2(1) + \gamma \cdot f(1) = 4 \text{ άρα } (f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma)f(1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = \frac{4}{f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma}.$$

Το $f^2(\chi) + \beta \cdot f(\chi) + \gamma$ είναι της μορφής $\omega^2 + \beta \cdot \omega + \gamma$ και έχει διακρίνουσα :

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ γιατί } \beta^2 < 3\gamma \Leftrightarrow 3\gamma > \beta^2 \geq 0 \text{ άρα } \gamma > 0 \text{ άρα } 4\gamma > 3\gamma > \beta^2 \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0, \text{ άρα για κάθε } \omega \in \mathbb{R} \text{ είναι } \omega^2 + \beta \cdot \omega + \gamma > 0, \text{ άρα και για}$$

$$\omega = f(\chi) \text{ θα είναι } f^2(\chi) + \beta \cdot f(\chi) + \gamma > 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επομένως } -1 < 0 \text{ και } f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma > 0 \text{ άρα}$$

$$f(0) = \frac{-1}{f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma} < 0. \text{ και } 4 > 0, \quad f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma > 0 \text{ άρα}$$

$$f(1) = \frac{4}{f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma} > 0.$$

Άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ και η συνάρτηση είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα από Θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

57.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 - Τ Ε Λ

ΘΕΜΑ 3^ο

Σάββατο 16 Ιουνίου

- A. Για να βρεις σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα θα μελετήσεις τη μονοτονία της συνάρτησης.

Δαμιανός Μωραΐτης

Είναι $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4 \Leftrightarrow f'(x) = \left(-\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4\right)' \Leftrightarrow$

$f'(x) = -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5}$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5} \geq 0 \Leftrightarrow -x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 20$.

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

10	20	35
+		-

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

x	10	20	35
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $x = 20$.
- ✓ είναι **θετική** όταν $10 < x < 20$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(10, 20)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $x > 20$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(20, 35)$

Η f παρουσιάζει **Ολικό μέγιστο** στη θέση $x_0 = 20$, το

$f(20) = -\frac{1}{200}20^2 + \frac{1}{5}20 + 4 = 6$

B. Είναι $D_f = D_g = \mathbb{R}$, $D_{f+g} = \mathbb{R}$, $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{1\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + x$ άρα $(f+g)'(x) = (-x^2 + x)' = -2x + 1$,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} = -x - 1$ άρα

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = (-x - 1)' = -1$.

Λιβαδεϊά

ΘΕΜΑ 4^ο

B. α. $P(t) = 10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100 \Leftrightarrow P'(t) = \left(10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100\right)' \Leftrightarrow$

$$P'(t) = 10t'e^{\frac{t}{10}} + 10t\left(e^{\frac{t}{10}}\right)' - 100\left(e^{\frac{t}{10}}\right)' = 10e^{\frac{t}{10}} + 10te^{\frac{t}{10}} \cdot \frac{1}{10} - 100e^{\frac{t}{10}} \cdot \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$P'(t) = te^{\frac{t}{10}}.$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού 10 χρόνια μετά την ένωση είναι

$$P'(10) = 10e^{\frac{10}{10}} = 10 \cdot 2,7 = 27$$

58.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 - ΑΔΩΦΟΙΤΕΙ Τ Ε Ε

Τετάρτη 20 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2} \Leftrightarrow f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2})' \Leftrightarrow$
 $f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2).$

β) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -6(x^2 + x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$, ρίζες $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$-$	$+$	$-$	

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

✓ μηδενίζεται όταν $x = -2$ και $x = 1$

✓ είναι αρνητική όταν $x < -2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -2)$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ είναι **θετική** όταν $-2 < \chi < 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-2, 1)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(1, +\infty)$

γ) Η f παρουσιάζει ακρότατο : τ. ε. στη θέση $\chi_1 = -2$ και τ. μ. στη θέση

$$\chi_2 = 1$$

δ) Η f έχει : τ. ε., το $f(-2) = -2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 12(-2) + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 20$, και

$$\text{τ. μ. το } f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 7$$

59.

ωανελλήνικες 2001 - Τ Ε Ε εσπερινά

Τετάρτη 20 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $f(\chi) = 3\chi^3 + 4\chi^2 - 5\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (3\chi^3 + 4\chi^2 - 5\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 9\chi^2 + 8\chi - 5.$

β. $f(\chi) = (\chi^2 - 1)(\chi + 1) \Leftrightarrow f'(\chi) = [(\chi^2 - 1)(\chi + 1)]' =$
 $(\chi^2 - 1)'(\chi + 1) + (\chi^2 - 1)(\chi + 1)' = 2\chi(\chi + 1) + \chi^2 - 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = 3\chi^2 + 2\chi - 1.$

γ. $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 1}{\chi - 1} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 + 1}{\chi - 1} \right)' = \frac{(\chi^2 + 1)'(\chi - 1) - (\chi^2 + 1)(\chi - 1)'}{(\chi - 1)^2} =$
 $\frac{2\chi(\chi - 1) - (\chi^2 + 1)}{(\chi - 1)^2} = \frac{2\chi^2 - 2\chi - \chi^2 - 1}{(\chi - 1)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 2\chi - 1}{(\chi - 1)^2}.$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f(\chi) = 3\chi^2 - 6\chi + 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (3\chi^2 - 6\chi + 1)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 6\chi - 6 = 6(\chi - 1)$

άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6(\chi - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1.$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	$+\infty$
-		+

Λ ι β α δ ε ι ά

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-\infty < \chi < 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 1)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει Ολικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0 = 1$, το

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2.$$

60.

εωαναληρωτικές 2001 - Τ Ε Ε ερωτηρή

Παρασκευή 22 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $f(\chi) = 2\chi^3 + 4\chi + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(2\chi^3 + 4\chi + \frac{1}{2}\right)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 6\chi^2 + 4.$

β. $f(\chi) = (2\chi - 1)(\chi^2 + 1) \Leftrightarrow f'(\chi) = \left[(2\chi - 1)(\chi^2 + 1)\right]' =$

$$(2\chi - 1)'(\chi^2 + 1) + (2\chi - 1)(\chi^2 + 1)' = 2(\chi^2 + 1) + (2\chi - 1)2\chi \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = 6\chi^2 - 2\chi + 2.$$

γ. $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 - 1}{\chi}\right)' = \frac{(\chi^2 - 1)'\chi - (\chi^2 - 1)\chi'}{\chi^2} = \frac{2\chi \cdot \chi - (\chi^2 - 1)}{\chi^2}$

$$f'(\chi) = \frac{2\chi^2 - \chi^2 + 1}{\chi^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\chi^2 + 1}{\chi^2}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f(x) = -2x^2 + x \Leftrightarrow f'(x) = (-2x^2 + x)' \Leftrightarrow f'(x) = -4x + 1$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}.$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
+		-

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

✓ μηδενίζεται όταν $x = \frac{1}{4}$.

✓ είναι θετική $x < \frac{1}{4}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

✓ είναι αρνητική όταν $x > \frac{1}{4}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

β) Η f παρουσιάζει Ολικό μέγιστο στη θέση $x_0 = \frac{1}{4}$.

γ) Η f έχει Ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = -2\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Το πείσμα και η θέληση είναι το «καύσιμο» για την κίνηση προς τα μπρος.

Τα πισωγυρίσματα «καίνε» αναποφασιστικότητα και αναβλητικότητα.

Λιβαδειά

61.

ισαυελλήνεις 2001 - Εισαυαληωτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha. \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{\chi - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(1 - e^{-\chi+1})'}{(\chi - 1)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{-e^{-\chi+1}(-\chi+1)'}{1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} e^{-\chi+1} = 1.$$

β. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f, πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0 = 1$. Άρα πρέπει: $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1)$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi + \alpha)$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \alpha + 1$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} [(1 - e^{-\chi+1}) \ln(\chi - 1)]$, όμως $\lim_{\chi \rightarrow 1} (1 - e^{-\chi+1}) = 0$ και

$\lim_{\chi \rightarrow 1} \ln(\chi - 1) = -\infty$ άρα το $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi)$ είναι της μορφής $0 \cdot (-\infty)$ άρα θα

υπολογισθεί με De L' Hopital: $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} [(1 - e^{-\chi+1}) \ln(\chi - 1)]$

$$= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\ln(\chi - 1)}{\frac{1}{1 - e^{-\chi+1}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{[\ln(\chi - 1)]'}{\left(\frac{1}{1 - e^{-\chi+1}}\right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\chi - 1}}{-\frac{(1 - e^{-\chi+1})'}{(1 - e^{-\chi+1})^2}} =$$

$$- \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\chi - 1}}{\frac{e^{-\chi+1}}{(1 - e^{-\chi+1})^2}} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(1 - e^{-\chi+1})^2}{(\chi - 1)e^{-\chi+1}} = - \lim_{\chi \rightarrow 1} \left(\frac{1 - e^{-\chi+1}}{\chi - 1} \cdot \frac{1 - e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}} \right) =$$

$$- \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{\chi - 1} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}}.$$

Το $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}} = \frac{0}{1} = 0$, και $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{\chi - 1} = 1$ από το ερώτημα α., άρα

τελικά $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = 1 \cdot 0 = 0$ οπότε

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) \Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \text{ άρα } \alpha = -1.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Αν $\alpha = -1$ τότε η f γίνεται $f(\chi) = \begin{cases} \chi - 1 & \text{αν } \chi \leq 1 \\ (1 - e^{-\chi+1}) \ln(\chi - 1) & \text{αν } \chi \in (1, 2] \end{cases}$.

Είναι $f(1) = 1 - 1 = 0$, και $f(2) = (1 - e^{-2+1}) \ln(2 - 1) = (1 - e^{-1}) \ln 1 = (1 - e^{-1}) \cdot 0$

άρα $f(2) = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και επί πλέον $f(1) = 0 = f(2)$ άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi) = 0$ άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο

$A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $\chi'\chi$.

62.

Εξωτερινά 2001 - Εωαναληρωτικές

Παρασκευή 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο

$A(1, 0)$ τότε θα είναι : $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - \kappa \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$.

β. Όταν $\kappa = 17$ τότε η συνάρτηση γίνεται : $f(\chi) = \chi^2 - 17 \cdot \chi + 1$ και η

εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$\psi - f(0) = f'(0)(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi - f(0) = f'(0) \cdot \chi$, είναι $f(0) = 0^2 - 17 \cdot 0 + 1 = 1$,

$f(\chi) = \chi^2 - 17 \cdot \chi + 1$ άρα $f'(\chi) = (\chi^2 - 17 \cdot \chi + 1)' = 2\chi - 17 \Leftrightarrow$

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 17 = -17$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : $\psi - 1 = -17\chi \Leftrightarrow \psi = -17\chi + 1$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{1 + \chi^2}$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

Λι β α δ ε ι ά

α. $f(\chi) = \frac{1}{1+\chi^2}$ άρα $f'(\chi) = \left(\frac{1}{1+\chi^2} \right)' = -\frac{(1+\chi^2)'}{(1+\chi^2)^2}$ άρα

$$f'(\chi) = -\frac{2\chi}{(1+\chi^2)^2}.$$

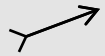
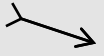
β. $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2\chi}{(1+\chi^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi \leq 0$ άρα $\chi \leq 0$, αφού $(1+\chi^2)^2 > 0$ για

κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	2	$+\infty$
+		-

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$.
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 2$, άρα η $f(\chi)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 2)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 2$, άρα η $f(\chi)$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(2, +\infty)$

Οπότε η f έχει ολικό μέγιστο στο $\chi_0 = 2$ το $f(2) = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$

γ. Θα βρεις το $\lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και αν κάποιο από αυτά τα όρια είναι μηδέν

τότε υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{1+\chi^2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\chi + \chi^3} = \lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\chi^3} = 0$ άρα

υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Δαμιανός Μωραΐτης

Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{1+\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\chi^2} = 0$ άρα η ορ. ασύμπτωτη είναι η $\psi = 0$ δηλαδή ο άξονας $\chi'\chi$.

63.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι $1 - 1$ και ισχύει από το **α.**

ερώτημα ότι η g είναι επίσης $1 - 1$.

β. Έχεις: $g(f(\chi) + \chi^3 - \chi) = g(f(\chi) + 2\chi - 1)$ επειδή η g είναι $1 - 1$ (από το

α. ερώτημα) η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με :

$$f(\chi) + \chi^3 - \chi = f(\chi) + 2\chi - 1 \Leftrightarrow \chi^3 - \chi = 2\chi - 1 \Leftrightarrow \chi^3 - 3\chi + 1 = 0$$

Αν θεωρήσεις τη συνάρτηση $h(\chi) = \chi^3 - 3\chi + 1$, $\chi \in \mathbb{R}$, τότε

$$h'(\chi) = (\chi^3 - 3\chi + 1)' = 3\chi^2 - 3 \text{ άρα } h'(\chi) = 3(\chi^2 - 1),$$

$$h'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0, \text{ ρίζες } \rho_1 = -1 \text{ και } \rho_2 = 1$$

άρα η h' έχει πίνακα προσήμων :

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
+	−	+	

και για την $h(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η h' :

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(\chi)$	+	−	+	
$h(\chi)$				

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = -1$ και $\chi = 1$

✓ είναι θετική όταν $\chi < -1$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$

✓ είναι αρνητική όταν $-1 < \chi < 1$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$

✓ είναι θετική όταν $\chi > 1$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Λι β α δ ε ι ά

Παρατήρηση ότι :

1^{ον} Όταν $\chi \in (-\infty, -1)$ τότε η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα το

πεδίο τιμών της θα είναι το διάστημα (A, B) όπου

$$\begin{cases} A = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\chi^3 - 3\chi + 1) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi^3 = -\infty \\ B = \lim_{\chi \rightarrow -1} h(\chi) = h(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3 \end{cases}, \text{ άρα}$$

$(A, B) = (-\infty, 3)$ επομένως για κάθε $\chi \in (-\infty, -1)$ η $h(\chi) \in (-\infty, 3)$, άρα

μεταξύ των τιμών της h είναι και το 0 δηλαδή υπάρχει $\chi_1 \in (-\infty, -1)$ έτσι ώστε

$h(\chi) = 0$ και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$

το χ_1 μοναδική ρίζα της $h(\chi) = 0$ στο διάστημα $(-\infty, -1)$.

2^{ον} Όταν $\chi \in (0, 1)$ τότε η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα το

πεδίο τιμών της θα είναι το διάστημα (Δ, Γ) όπου

$$\begin{cases} \Gamma = \lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) = h(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \Delta = \lim_{\chi \rightarrow 1} h(\chi) = h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 \end{cases}, \text{ άρα } (\Delta, \Gamma) = (-1, 1) \text{ επομένως για}$$

κάθε $\chi \in (0, 1)$ η $h(\chi) \in (-1, 1)$, άρα μεταξύ των τιμών της h είναι και το 0

δηλαδή υπάρχει $\chi_2 \in (0, 1)$ έτσι ώστε $h(\chi) = 0$ και επειδή η h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(0, 1)$ το χ_2 μοναδική ρίζα της $h(\chi) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

3^{ον} Όταν $\chi \in (1, +\infty)$ τότε η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα το

πεδίο τιμών της θα είναι το διάστημα (E, Z) όπου

$$\begin{cases} E = \lim_{\chi \rightarrow 1} h(\chi) = h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 \\ Z = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^3 - 3\chi + 1) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^3 = +\infty \end{cases}, \text{ άρα}$$

$(E, Z) = (-1, +\infty)$ επομένως για κάθε $\chi \in (1, +\infty)$ η $h(\chi) \in (-1, +\infty)$, άρα

Δαμιανός Μωραΐτης

μεταξύ των τιμών της h είναι και το 0 δηλαδή υπάρχει $\chi_3 \in (1, +\infty)$ έτσι ώστε

$h(\chi) = 0$ και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

το χ_3 μοναδική ρίζα της $h(\chi) = 0$ στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Συνολικά :

Η $h(\chi) = 0$ άρα και η ισοδύναμη εξίσωση $g(f(\chi) + \chi^3 - \chi) = g(f(\chi) + 2\chi - 1)$ έχουν τρεις ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$ τις χ_1, χ_2, χ_3 οι οποίες, όπως φαίνεται από τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$, $[1, +\infty)$ στα οποία ανήκουν, πρόκειται για δυο θετικές και μια αρνητική.

64.

Ερωτηρύα 2002

Τετάρτη 5 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία. B. 1. Σ , 2. Λ , 3. Λ, 4. Σ

ΘΕΜΑ 3^ο

a. Αν $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 2$ τότε

$$f'(\chi) = (\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 2)' = 3\chi^2 - 12\chi + 9 \text{ άρα } f'(\chi) = 3(\chi^2 - 4\chi + 3),$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2 - 4\chi + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi + 3 \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 3$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	3	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 1$ και $\chi = 3$

✓ είναι θετική όταν $\chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

✓ είναι αρνητική όταν $1 < \chi < 3$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 3)$

Λιβαδεϊά

✓ είναι θετική όταν $\chi > 3$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $(3, +\infty)$

Η **f** παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = 1$, το $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2$

$\Leftrightarrow f(1) = 2$ και **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = 3$, το $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = -2$.

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της **f** στο

σημείο $A(-1, f(-1))$, είναι : $\psi - f(-1) = f'(-1)(\chi + 1)$.

Είναι $f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) - 2 = -18$ και $f'(\chi) = 3(\chi^2 - 4\chi + 3)$ άρα

$f'(-1) = 3((-1)^2 - 4(-1) + 3) = 24$, οπότε $\psi + 18 = 24(\chi + 1)$ άρα $\psi = 24\chi + 6$.

γ. Είναι $f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0) - 2 = -2$ και

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 2$ άρα η **f** στο $(0, 1)$ είναι συνεχής και

$f(0) \cdot f(1) = -4 < 0$ επομένως σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει, για την

$f(\chi) = 0$ μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$ και επειδή η **f** είναι γνησίως

αύξουσα στο $(0, 1)$ άρα θα υπάρχει μοναδική λύση για την $f(\chi) = 0$, στο $(0, 1)$

ΘΕΜΑ 4^ο

Αρχικά παρατήρησε πως ο τύπος της συνάρτησης όταν $\chi < 2$ γίνεται :

$$f(\chi) = \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} = \frac{\chi(\chi^2 - 4)}{\chi - 2} = \frac{\chi(\chi + 4)(\chi^2 - 4)}{\chi - 2} = \chi(\chi + 4) \quad \text{άρα}$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \chi(\chi + 4) & \text{αν } \chi < 2 \\ -\chi^2 + 4 & \text{αν } \chi \geq 2 \end{cases}$$

γ. Επειδή $\chi_0 = 4 > 2$ άρα ο τύπος της **f** είναι $f(\chi) = -\chi^2 + 4$ άρα

$$f'(\chi) = (-\chi^2 + 4)' = -2\chi \quad \text{επομένως : } f'(4) = -2 \cdot 4 = -8.$$

δ. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης **g** έχει

$$\text{τύπο στο } -\infty \quad \psi = \lambda\chi + \beta \quad \text{όπου : } \lambda = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{g(\chi)}{\chi} \quad \text{και} \quad \beta = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [g(\chi) - \lambda\chi]$$

Δαμιανός Μωραϊτης

$$\chi \rightarrow -\infty \text{ είναι } g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi+3} = \frac{\chi(\chi+4)}{\chi+3} \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi(\chi+4)}{\chi+3} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi(\chi+4)}{\chi^2+3\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2}{\chi^2} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} [g(\chi) - 1 \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\chi(\chi+4)}{\chi+3} - \chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\chi^2+4-\chi^2-3\chi}{\chi+3} \right] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{-3\chi+4}{\chi+3} \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-3\chi}{\chi} \text{ άρα } \beta = -3.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $-\infty$ έχει τύπο $\psi = \chi - 3$

65.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha) \quad f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{2}\chi^2 + \ln 2 \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{2}\chi^2 + \ln 2 \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \chi^2 - \chi = \chi(\chi - 1).$$

$$\beta) \quad f'(0) = 0(0-1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1(1-1) = 0.$$

$$\gamma) \quad f'(0) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - \chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi(\chi - 1) \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = 0 \text{ και } \chi_2 = 1$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	0	1	$+\infty$	
+		-		+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f'' :

Λι β α δ ε ι ά

χ	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	−	+	
$f(\chi)$				

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 0$ και $\chi = 1$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi < 0$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι αρνητική όταν $0 < \chi < 1$, άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi > 1$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Η **f** παρουσιάζει ακρότατο : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = 0$ το **f**(0) = ln 2 και

τ. ε. στη θέση $\chi_2 = 1$ το **f**(1) = $\ln 2 - \frac{1}{6}$

66.

ωανελλήνικες 2002 - 7 Ε Ε εσωτερικά

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $f(\chi) = 2\chi^3 + 5 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^3 + 5)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 6\chi^2,$

$g(\chi) = \chi^2 + 1 \Leftrightarrow g'(\chi) = (\chi^2 + 1)' \Leftrightarrow g'(\chi) = 2\chi.$

β. $[f(\chi) \cdot g(\chi)]' = [(2\chi^3 + 5) \cdot (\chi^2 + 1)]' =$

$(2\chi^3 + 5)' \cdot (\chi^2 + 1) + (2\chi^3 + 5) \cdot (\chi^2 + 1)' =$

$6\chi^2(\chi^2 + 1) + (2\chi^3 + 5)2\chi = 6\chi^4 + 6\chi^2 + 4\chi^4 + 10\chi \Leftrightarrow$

$[f(\chi) \cdot g(\chi)]' = 10\chi^4 + 6\chi^2 + 10\chi.$

γ. $\left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right]' = \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{[g(\chi)]'} = \frac{(2\chi^3 + 5)' \cdot (\chi^2 + 1) - (2\chi^3 + 5) \cdot (\chi^2 + 1)'}{(\chi^2 + 1)^2}$

$= \frac{6\chi^2(\chi^2 + 1) - (2\chi^3 + 5)2\chi}{(\chi^2 + 1)^2} = \frac{6\chi^4 + 6\chi^2 - 4\chi^4 - 10\chi}{(\chi^2 + 1)^2} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right]' = \frac{2\chi^4 + 6\chi^2 - 10\chi}{(\chi^2 + 1)^2}.$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f(\chi) = -4(\chi^2 + 1) + 16\chi - 9 = -4\chi^2 - 4 + 16\chi - 9 = -4\chi^2 + 16\chi - 13$, άρα

θα είναι $f'(\chi) = (-4\chi^2 + 16\chi - 13)' \Leftrightarrow f'(\chi) = -8\chi + 16 = -8(\chi - 2)$.

$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -8(\chi - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \chi - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 2$.

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	2	$+\infty$
+		-

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$.
- ✓ είναι **θετική** όταν $-\infty < \chi < 2$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 2)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(2, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει Ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = 2$, το

$$f(2) = -4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 13 = 3.$$

67.

ωανελλήνικες 2002 - Εωαναληρωτικές

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. γ. Αν η συνάρτηση f δεν είναι **αντιστρέψιμη** στο $\mathbb{R}$ σημαίνει πως υπάρχει ένα τουλάχιστον ζευγάρι αριθμών α, β με $\alpha \neq \beta$ (έστω $\alpha < \beta$) τέτοιο ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$, γιατί αλλιώς, αν δηλαδή ισχυε $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε η f^{-1} θα ήταν συνάρτηση άρα η f θα ήταν **αντιστρέψιμη** (άτοπο). Έτσι λοιπόν όταν η f δεν είναι **αντιστρέψιμη** θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$ για τα οποία θα ισχύει :

Λιβαδερά

$f(\alpha) = f(\beta)$, και η f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Άρα η σωστή απάντηση είναι Σ

- δ. **Η σωστή απάντηση είναι Λ** διότι τοπικό ακρότατο, μεταξύ άλλων μπορεί να είναι ένα από τα $f(\alpha)$ ή $f(\beta)$ αφού $\chi_0 \in [\alpha, \beta]$ και επομένως δεν μπορείς να πεις με βεβαιότητα ότι θα είναι $f'(\alpha) = 0$ ή $f'(\beta) = 0$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1}$, με $\chi \in \mathbb{R}$.

α.

1^{ος} τρόπος : Για να δείξεις ότι η f αντιστρέφεται, αρκεί να δείξεις ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Είναι $f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1}$ άρα

$$f'(\chi) = \left(\frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1} \right)' = \frac{(e^\chi - 1)'(e^\chi + 1) - (e^\chi - 1)(e^\chi + 1)'}{(e^\chi + 1)^2} = \frac{e^\chi(e^\chi + 1) - (e^\chi - 1)e^\chi}{(e^\chi + 1)^2}$$

$$= \frac{e^\chi(e^\chi + 1 - e^\chi + 1)}{(e^\chi + 1)^2} \text{ άρα } f'(\chi) = \frac{2e^\chi}{(e^\chi + 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f γνησίως μονότονη, επομένως $1 - 1$, άρα η f αντιστρέφεται.

Στην συνέχεια, για να ολοκληρώσεις την απάντησή σου θα πρέπει να υπολογίσεις τον τύπο της $f^{-1}(\chi)$, όμως θα μπορούσες, κάλλιστα, να ακολουθήσεις τον **2^ο τρόπο**, να βρεις πρώτα τον τύπο **της αντίστροφης σχέσης, (που πάντα υπάρχει)** και από τον τύπο αυτό να φανεί ότι αυτή είναι συνάρτηση όπως ακριβώς θα συμβεί πιο κάτω με τον :

Δαμιανός Μωραΐτης

2^{ος} τρόπος : $\psi = f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1} \Leftrightarrow \psi(e^\chi + 1) = e^\chi - 1 \Leftrightarrow \psi e^\chi - e^\chi = -\psi - 1 =$

$$-(\psi + 1) \Leftrightarrow (\psi - 1)e^\chi = -(\psi + 1) \Leftrightarrow e^\chi = -\frac{\psi + 1}{\psi - 1} \Leftrightarrow \ln e^\chi = \ln \left(-\frac{\psi + 1}{\psi - 1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\chi = \ln \left(-\frac{\psi + 1}{\psi - 1} \right).$$

Είναι $\psi - 1 = 0 \Leftrightarrow \psi = 1 \Leftrightarrow \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1} = 1 \Leftrightarrow e^\chi - 1 = e^\chi + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ άτοπο άρα

$$\psi \neq 1.$$

Αν κάνεις την αλλαγή $\chi \square \psi$ τότε $\psi = f^{-1}(\chi) = \ln \left(-\frac{\chi + 1}{\chi - 1} \right)$ είναι ο τύπος της $f^{-1}(\chi)$.

Για το Πεδίο Ορισμού έχεις : $-\frac{\chi + 1}{\chi - 1} > 0 \Leftrightarrow -(\chi + 1)(\chi - 1) > 0$ ρίζες

$$\chi_1 = -1 \text{ και } \chi_2 = 1$$

Άρα η $-\frac{\chi + 1}{\chi - 1}$ έχει και πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	1	$+\infty$	
-		+		-

Επομένως $-\frac{\chi + 1}{\chi - 1} > 0 \Leftrightarrow \chi \in (-1, 1)$

Άρα υπάρχει η αντίστροφη σχέση της $f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1}$ και είναι η

$$f^{-1}(\chi) = \ln \left(-\frac{\chi + 1}{\chi - 1} \right) \text{ η οποία, όπως φαίνεται από τον τύπο της, είναι}$$

συνάρτηση με πεδίο ορισμού (που είναι πεδίο τιμών για την f) το $(-1, 1)$.

β. $f^{-1}(\chi) = \ln \left(-\frac{\chi + 1}{\chi - 1} \right)$ άρα $f^{-1}(0) = \ln \left(-\frac{0 + 1}{0 - 1} \right) = \ln(1) = 0$ άρα το 0

είναι μια ρίζα της $f^{-1}(\chi) = 0$.

Λ ι β α δ ε ι ά

Είναι $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (δες

και α. ερώτημα) άρα και f^{-1} θα είναι επίσης γνησίως αύξουσα, αντίστοιχα, στο $(-1, 1)$ διότι έστω $\psi_1 < \psi_2$ τότε θα είναι και

$f^{-1}(\psi_1) = \chi_1 < \chi_2 = f^{-1}(\psi_2)$ γιατί αν υποθέσεις ότι $\psi_1 < \psi_2 \Rightarrow \chi_1 > \chi_2$ τότε

από $\chi_1 > \chi_2$, f γνησίως αύξουσα άρα $f(\chi_1) = \psi_1 > \psi_2 = f(\chi_2)$ ΑΤΟΠΟ

επομένως f^{-1} θα είναι επίσης γνησίως αύξουσα, επομένως το 0 μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \frac{|\chi - z|^2 - |\chi + \bar{z}|^2}{\chi^2 + |z|^2}$,

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} \alpha. \quad f(x) &= \frac{|\chi - z|^2 - |\chi + \bar{z}|^2}{\chi^2 + |z|^2} = \frac{|\chi - \alpha - \beta i|^2 - |\chi + \alpha - \beta i|^2}{\chi^2 + |\alpha + \beta i|^2} = \\ &= \frac{(\chi - \alpha)^2 - \beta^2 - (\chi + \alpha)^2 - \beta^2}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{((\chi - \alpha)^2 + \beta^2) - ((\chi + \alpha)^2 + \beta^2)}{\chi^2 + |\alpha + \beta i|^2} = \\ &= \frac{(\chi - \alpha)^2 - (\chi + \alpha)^2}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{((\chi - \alpha) + (\chi + \alpha))((\chi - \alpha) - (\chi + \alpha))}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2}, \text{ άρα} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{4\alpha\chi}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2}. \text{ Άρα } \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} f(x) = -\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{4\alpha\chi}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2} \\ &= -\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{4\alpha\chi}{\chi^2} = -\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{4\alpha}{\chi} \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0 \end{aligned}$$

β. Αρχικά να πρέπει να δεις τι σημαίνει $|z + 1| > |z - 1|$.

Στους μιγαδικούς z $|z - z_1| = |z - z_2|$ εκφράζει την **μεσοκάθετη στο τμήμα**

Δαμινός Μωραΐτης

AB όπου $A(z_1)$ και $B(z_2)$. Άρα η εξίσωση $|z+1|=|z-1| \Leftrightarrow$

$|z-(-1)|=|z-1|$ εκφράζει την **μεσοκάθετη στο τμήμα AB** όπου $A(-1,0)$

και $B(1,0)$, και επειδή τα A, B βρίσκονται στον $\chi\chi$ άρα η εξίσωση

$|z+1|=|z-1|$ εκφράζει τον άξονα $\psi\psi$.

Η ανίσωση $|z+1|>|z-1| \Leftrightarrow |z-(-1)|>|z-1|$ εκφράζει τα σημεία που

βρίσκονται δεξιότερα από την **μεσοκάθετη στο τμήμα AB** όπου $A(-1,0)$ και

$B(1,0)$, δηλαδή τα σημεία που βρίσκονται δεξιότερα από τον άξονα $\psi\psi$

δηλαδή $\alpha > 0$ (δηλαδή 1° και 4° τεταρτημόριο).

Η διαφορετικά :

$$|z+1|>|z-1| \Leftrightarrow |\alpha+\beta i+1|^2 > |\alpha+\beta i-1|^2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 + \beta^2 > (\alpha-1)^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha+1 > -2\alpha+1 \Leftrightarrow 4\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$$

Από το **a**. ερώτημα είναι $f(\chi) = -\frac{4\alpha\chi}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2} = -\frac{4\alpha\chi}{\chi^2 + |z|^2}$ άρα

$$f'(\chi) = \left(-\frac{4\alpha\chi}{\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2} \right)' = -\frac{(4\alpha\chi)'(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2) - (4\alpha\chi)(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)'}{(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2} =$$

$$-\frac{4\alpha(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2) - 4\alpha\chi \cdot 2\chi}{(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2} = -\frac{4\alpha\chi^2 - 8\alpha\chi^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2} \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = 4\alpha \frac{\chi^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2}, f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \frac{\chi^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2} \geq 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} (\chi^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 > 0.$$

$\chi^2 - \alpha^2 - \beta^2 \geq 0$. Το $\chi^2 - \alpha^2 - \beta^2$ έχει ρίζες: $\chi_1 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = -|z|$ και

$$\chi_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	$- z $	$ z $	$+\infty$
+	-	+	

Λι β α δ ε ι ά

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	$- z $	$ z $	$+\infty$
$f'(\chi)$	+		-	+
$f(\chi)$				

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -|z|$ και $\chi = |z|$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -|z|$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, -|z|)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-|z| < \chi < |z|$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-|z|, |z|)$

Άρα η f έχει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = -|z|$, το

$$f(-|z|) = \frac{4\alpha|z|}{(-|z|)^2 + |z|^2} = \frac{4\alpha|z|}{2|z|^2} = \frac{2\alpha}{|z|} \quad \text{και} \quad \text{τ. ε.} \text{ στη θέση}$$

$$\chi_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|, \text{ το } f(|z|) = -\frac{4\alpha|z|}{|z|^2 + |z|^2} = -\frac{4\alpha|z|}{2|z|^2} = -\frac{2\alpha}{|z|}.$$

γ.

- ✓ Όταν $\chi \in (-\infty, -|z|]$ η f είναι **γνησίως αύξουσα** άρα σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi), f(-|z|) \right] = \left(0, \frac{2\alpha}{|z|} \right]$$

- ✓ Όταν $\chi \in (-|z|, |z|]$ η f είναι **γνησίως φθίνουσα** άρα σύνολο τιμών το

$$\left(f(|z|), f(-|z|) \right] = \left(-\frac{2\alpha}{|z|}, \frac{2\alpha}{|z|} \right]$$

- ✓ Όταν $\chi \in (|z|, +\infty)$ η f είναι **γνησίως αύξουσα** άρα σύνολο τιμών το

$$\left(f(|z|), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) \right) = \left(-\frac{2\alpha}{|z|}, 0 \right)$$

Απ' ότι φαίνεται από τα τρία κομμάτια του πεδίου τιμών μόνο στο $\left(-\frac{2\alpha}{|z|}, \frac{2\alpha}{|z|}\right]$

υπάρχει το 0, άρα η $f(\chi)=0$ έχει λύση μόνο στο διάστημα $(-|z|, |z|]$ και επειδή στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα θα έχει μια μόνο λύση.

68.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

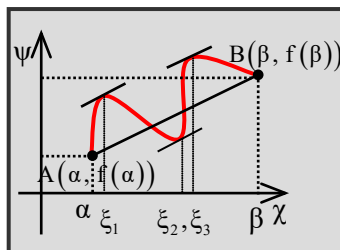
Α. Θεωρία, Β. Θεωρία .

*** Παρατήρηση :** Για να μπορέσει κάποιος να απαντήσει στο θέμα θα έπρεπε να μπορεί να διατυπώσει με **ακρίβεια το Θεώρημα.**

Η γεωμετρική ερμηνεία πάντως είναι ότι :

αν υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο η συνάρτηση f να είναι συνεχής, τότε υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι



παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ όπως στο σχήμα .

Γ. β. Σ, δ. Α, ε. Α .

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Αν $f(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi$ τότε $f'(\chi) = (\chi^5 + \chi^3 + \chi)' = 5\chi^4 + 3\chi^2 + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως είναι 1 – 1 άρα αντιστρέφεται .

$f'(\chi) = 5\chi^4 + 3\chi^2 + 1$ άρα $f''(\chi) = (5\chi^4 + 3\chi^2 + 1)' = 20\chi^3 + 6\chi = 2\chi(10\chi^2 + 3)$,

$$f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 10\chi^2+3>0 \\ \chi \geq 0 \end{matrix}$$

Αι β α δ ε ι ά

Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη) στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και η f στρέφει τα κοίλα άνω (είναι κυρτή) στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Για να αποδείξεις ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κα με το δεδομένο, από το α. ερώτημα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να αποδείξεις ότι $e^x \geq 1+x$

Θεώρησε την συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1$ είναι $g'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$,

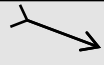
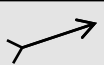
$g'(x) \geq 0$, άρα $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Επομένως η g' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	0	$+\infty$
$\square$	$-$	

και για την $g(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η g' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $x = 0$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $x < 0$, άρα η **$g(x)$** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0)$

✓ είναι **θετική** όταν $x > 0$, άρα η **$g(x)$** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, +\infty)$

Άρα η g έχει : **Ολικό ελάχιστο** στη θέση $x_0 = 0$, το $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Άρα θα είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$e^x \geq x + 1$ και επειδή f γνησίως αύξουσα άρα $f(e^x) \geq f(x+1)$

γ. Επειδή ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} είναι η ευθεία **$\psi = x$** , διχοτόμος των γωνιών του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου αρκεί να δείξεις ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι η ευθεία **$\psi = x$**

Πράγματι η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$\psi - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi - f(0) = f'(0)x.$$

Δαμινός Μωραΐτης

Είναι $f(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi$, άρα $f(0) = 0^5 + 0^3 + 0 = 0$ και $f'(\chi) = 5\chi^4 + 3\chi^2 + 1$
 άρα $f'(0) = 5 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$, επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται
 $\psi - 0 = 1 \cdot \chi \Leftrightarrow \psi = \chi$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$ που έχει συνεχή
 δεύτερη παράγωγο στο (a, β) .

Έστω ότι ισχύει $f(a) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (a, \beta)$, $\delta \in (a, \beta)$,
 έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$.

α. Έστω $\gamma \in (a, \beta)$, $\delta \in (a, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, μπορείς να υποθέσεις,
 χωρίς πρόβλημα, ότι $\gamma < \delta$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subseteq [a, \beta]$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, άρα ισχύει το
 Θ. Bolzano επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ στο
 διάστημα $(\gamma, \delta) \subseteq (a, \beta)$.

β. Θες να δείξεις ότι υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοια ώστε

$f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$, με άλλα λόγια θες να δείξεις ότι η f δεν διατηρεί

σταθερό πρόσημο, **Απαγωγή σε Άτοπο** η μέθοδος που δίνει λύση
 σε δύσκολα σημεία.

Έστω ότι η f'' έχει σταθερό πρόσημο για όλο το διάστημα (a, β) , έστω
 επίσης $\chi_0 \in (a, \beta)$ μια από τις λύσεις της **$f(\chi) = 0$** , (μια από αυτές που
 αποδείξαμε ότι υπάρχουν στο ερώτημα **α.**) είναι δηλαδή $f(\chi_0) = 0$.

Μετά από όλα αυτά :

- ✓ Η συνάρτηση f στο διάστημα $[a, \chi_0] \subseteq (a, \beta)$ είναι συνεχής και
 παραγωγίσιμη και ισχύει $f(a) = f(\chi_0) = 0$ άρα από Θ. Rolle θα υπάρχει
 $\chi_1 \in (a, \chi_0)$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_1) = 0$.
- ✓ Η συνάρτηση f στο διάστημα $[\chi_0, \beta] \subseteq (a, \beta)$ είναι συνεχής και

Λ ι β α δ ε ι ά

παραγωγίσιμη και ισχύει $f(\chi_0) = f(\beta) = 0$ άρα από Θ. Rolle θα υπάρξει

$\chi_2 \in (\chi_0, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_2) = 0$.

Άρα η f' στο διάστημα (α, β) έχει τουλάχιστον δυο λύσεις $\chi_1 \neq \chi_2$,

αφού $\begin{pmatrix} \chi_1 \in (\alpha, \chi_0) \\ \chi_2 \in (\chi_0, \beta) \end{pmatrix}$ **A ΤΟΠ Ο**, γιατί αν η f'' έχει σταθερό πρόσημο

σημαίνει πως η f' είναι γνησίως μονότονη άρα 1 – 1 επομένως δεν μπορεί

με $\chi_1 \neq \chi_2$ να ισχύει $f'(\chi_1) = f'(\chi_2)$.

Άρα το ορθό είναι πως η f'' δεν έχει σταθερό πρόσημο και άρα

υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και

$f''(\xi_2) > 0$.

γ. Η συνάρτηση f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ είναι συνεχής και

$f''(\xi_1)f''(\xi_2) < 0$. Άρα από το Θ. Bolzano θα υπάρξει τουλάχιστον ένα

$\chi_3 \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ ώστε : $f''(\chi_3) = 0$ και επειδή η f'' έχει άλλο πρόσημο

πριν το χ_3 και άλλο μετά, το $A(\chi_3, f(\chi_3))$ είναι σημείο καμπής της f .

Το ερώτημα β. και ιδιαίτερα το γ. προκάλεσαν πολλές συζητήσεις, κυρίως όσον αφορά την επιστημονική ορθότητα και ακρίβεια.

Πιστεύω πως η αφορμή βρίσκεται στην **παράλογη** δυσκολία τους και εκεί θα έπρεπε να συγκεντρωθούν τα «πυρά».

Παρ' όλα αυτά πράγματι υπήρχαν «λάθη», πχ το γεγονός ότι υπάρχουν σημεία

$\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$ και $\chi_3 \in [\xi_1, \xi_2]$ με

$f'(\xi_3) = 0$, δεν σημαίνει πως η αλλαγή του προσήμου γίνεται ακριβώς στο χ_3 ,

, με άλλα λόγια δεν αρκεί $f''(\xi_1) < 0$ αλλά χρειάζεται να ισχύει $f''(\chi) < 0$ για

κάθε $\chi \in [\xi_1, \xi_3]$, προϋπόθεση απαραίτητη για να είναι το $A(\chi_3, f(\chi_3))$

Δαμινός Μωραΐτης

σημείο καμψής για να αναφέρω το πιο χαρακτηριστικό.

Για λόγους «δικαιοσύνης» και με βάση τα 35 χρόνια εμπειρίας, να παρατηρήσω πως οι μαθητές στο σχολείο κάπως έτσι διδάσκονται τα μαθηματικά, αλλά και τα υπόλοιπα μαθήματα, επομένως δεν απείχε και πολύ από την «λογική» της «διδασκτέας ύλης», η οποία βρίσκεται σε διάσταση με τις εξετάσεις καθιστώντας τα εξωσχολικά «μαθήματα» βασικό παράγοντα των εξετάσεων.

69.

Εξωεργασία 2003**Τετάρτη 4 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$, πεδίο ορισμού της f είναι το

$$R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \text{ άρα}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (-\eta\mu x)}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \text{ άρα } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

B. 2. Σ, 3. Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

a. $x \rightarrow 0$ άρα $x \neq 2$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - 3x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{0 - 3}{0 - 2} \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2}.$$

β. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$

$$\text{έχει τύπο } \psi = \lambda x + \beta \text{ όπου : } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x].$$

Λ ι β α δ ε ι ά

Είναι $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2}$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi^2 - 2\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2}{\chi^2} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1.$$

και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 1 \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2} - \chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 3\chi - \chi^2 + 2\chi}{\chi - 2} \right] =$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\chi}{\chi - 2} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\chi}{\chi} = -1 \text{ άρα } \beta = -1.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ έχει τύπο $\psi = \chi - 1$

Ένας, άλλος τρόπος, ο οποίος όμως παραπέμπει κατ' ευθείαν στη θεωρία είναι

να δείξεις ότι το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (\lambda\chi + \beta)] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2} - (\chi - 1) \right] = 0.$

γ. Αν $\chi \in (2, +\infty)$, $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2}$ τότε είναι :

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2} \right)' = \frac{(\chi^2 - 3\chi)'(\chi - 2) - (\chi^2 - 3\chi)(\chi - 2)'}{(\chi - 2)^2} =$$

$$\frac{(2\chi - 3)(\chi - 2) - (\chi^2 - 3\chi)}{(\chi - 2)^2} = \frac{2\chi^2 - 4\chi - 3\chi + 6 - \chi^2 + 3\chi}{(\chi - 2)^2} \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 4\chi + 6}{(\chi - 2)^2}.$$

Είναι $\chi^2 - 4\chi + 6 > 0$ γιατί το $\chi^2 - 4\chi + 6$ έχει διακρίνουσα

$$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -8 < 0 \quad (\chi - 2)^2 > 0, \text{ άρα } f'(\chi) > 0$$

για κάθε $\chi \in (2, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\chi \in (2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$ και το σημείο $x_0 = 5$.

β. Είναι $f(5) = 25$

✓ $x < 5$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x + 5) = 10$$

✓ $x > 5$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10x - 25 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10x - 50}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{10(x - 5)}{x - 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} 10 = 10 \quad \text{Άρα η } f \text{ παραγωγίζεται στο } x_0 = 5 \text{ και είναι } f'(5) = 10.$$

γ. Η εφαπτομένη στο σημείο $A(5, f(5))$ έχει εξίσωση :

$\psi - f(5) = f'(5)(x - 5)$. Είναι $f(5) = 25$ και $f'(5) = 10$, επομένως η

εξίσωση γίνεται $\psi - 25 = 10(x - 5) \Leftrightarrow \psi = 10x - 25$.

δ. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$ άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 5 \\ 10, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$.

✓ Στο διάστημα $[5, +\infty)$ είναι $f'(x) = 10 > 0$.

✓ Στο διάστημα $[-\infty, 5)$ είναι $f'(x) = 2x$ και $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Τελικά η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	0	$+\infty$
$\square$	$-$	

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

Λ ι β α δ ε ι ά

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 0$.
- ✓ είναι αρνητική όταν $\chi < 0$, άρα η $f(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi > 0$, άρα η $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Άρα η f έχει : **Ολικό ελάχιστο** στη θέση $\chi_0 = 0$, το $f(0) = 0^2 = 0$.

70.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0 - 0 = 0$.

β) $f(\chi) = \ln \chi + \chi - 1 \Leftrightarrow f'(\chi) = (\ln \chi + \chi - 1)' \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{1}{\chi} + 1$,

$$f''(\chi) = \left(\frac{1}{\chi} + 1\right)' \Leftrightarrow f''(\chi) = -\frac{1}{\chi^2} .$$

γ) Επειδή $f'(\chi) = \frac{1}{\chi} + 1 > 0$, για κάθε $\chi > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα .

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος $h = f(0) = 0$.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t

δίνεται από τη συνάρτηση : $f'(t) = (-3t^2 + 30t)' = (-3t^2)' + (30t)' \Leftrightarrow$

$$f'(t) = -6t + 30 .$$

γ) Το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι θετικός αριθμός και κατεβαίνει όταν ο ρυθμός μεταβολής του ύψους είναι αρνητικός αριθμός.

Είναι $f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t + 30 > 0 \Leftrightarrow t < 5$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Άρα το αεροπλάνο ανεβαίνει το χρονικό διάστημα $[0, 5]$ και κατεβαίνει το χρονικό διάστημα $[5, 10]$.

- δ) Όπως είναι φανερό από το προηγούμενο ερώτημα το μέγιστο ύψος θα είναι τη χρονική στιγμή $t = 5$ και θα είναι $h_{\max} = -3 \cdot 5^2 + 30t \Leftrightarrow$

$$h_{\max} = 75 \text{ m}.$$

71.

ωανελλήνικες 2003 - Τ Ε Ε εσωτερικά

ΘΕΜΑ 1^ο

Τετάρτη 11 Ιουνίου

α)

$$\checkmark f_1(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 13 \Leftrightarrow f_1'(x) = (2x^3 + 5x^2 + 7x + 13)' \Leftrightarrow$$

$$f_1'(x) = 6x^2 + 10x + 7.$$

$$\checkmark f_2(x) = (x-1)(x^2-3x) \Leftrightarrow f_2'(x) = (x-1)'(x^2-3x) + (x-1)(x^2-3x)' =$$

$$x^2 - 3x + (x-1)(2x-3) = x^2 - 3x + 2x^2 - 3x - 2x + 3 \Leftrightarrow$$

$$f_2'(x) = 3x^2 - 8x + 3.$$

$$\checkmark f_3(x) = x \cdot \sin x \Leftrightarrow f_3'(x) = (x \cdot \sin x)' = x' \cdot \sin x + x(\sin x)' \Leftrightarrow$$

$$f_3'(x) = \sin x - x \cdot \eta \mu x.$$

$$\checkmark f_4(x) = 2\eta \mu x + e^x \Leftrightarrow f_4'(x) = (2\eta \mu x + e^x)' \Leftrightarrow f_4'(x) = 2\sigma \upsilon \nu x + e^x.$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x} \right)' = \frac{(x^2-1)' \cdot x - (x^2-1) \cdot x'}{x^2} =$$

$$\frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)' = \frac{(x^2+1)' \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot 2x}{x^4} =$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\frac{2\chi^3 - 2\chi^3 - 2\chi}{\chi^4} \Leftrightarrow f''(\chi) = -\frac{2}{\chi^3}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $f(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi + 1821 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^2 - 4\chi + 1821)' \Leftrightarrow$
 $f'(\chi) = 4\chi - 4 =$ άρα $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 4(\chi - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1.$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	$+\infty$
-		+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	-	0	+
$f(\chi)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $-\infty < \chi < 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 1)$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει **Ολικό ελάχιστο** στη θέση $\chi_0 = 1$.

γ) Το Ολικό ελάχιστο είναι το $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1821 = 1819$.

72.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. β. Λάθος. Γ. Ορισμός – Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3^ο

β. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $-\infty$

έχει τύπο $\psi = \lambda\chi + \beta$ όπου : $\lambda = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\beta = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [f(\chi) - \lambda\chi]$.

Είναι $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi}{\chi} =$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\chi^2 \left(1 + \frac{1}{\chi^2}\right)} - \chi}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{|\chi| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\chi^2}\right)} - \chi}{\chi}, \chi \rightarrow -\infty \text{ άρα } \chi < 0,$$

$$\text{επομένως } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-\chi \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\chi^2}\right)} - \chi}{\chi}$$

$$= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi \left(-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\chi^2}\right)} - 1 \right)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\chi^2}\right)} - 1 \right) = -2 \text{ Άρα } \lambda = -2.$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [f(\chi) - (-2) \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi + 2\chi] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} [\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi], \text{ επειδή το όριο οδηγείται σε απροσδιοριστία } +\infty - \infty,$$

πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με τη συζυγή παράσταση του $\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi$ δηλαδή

$$\text{είναι : } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi][\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi]}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + 1 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi}.$$

$$\text{Και επειδή } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \sqrt{\chi^2 + 1} - \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

$$\text{άρα είναι } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi] = 0, \text{ επομένως } \beta = 0.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$ έχει τύπο $\psi = -2\chi$

$$\gamma. \quad f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = (\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi)' = \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 + 1}} (\chi^2 + 1)' - 1 = \frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2 + 1}} - 1 = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + 1}} - 1$$

Λι β α δ ε ι ά

$$\text{Άρα } f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} + f(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + 1}} \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} - \sqrt{\chi^2 + 1} + \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi = 0.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(\chi) = -f(2 - \chi)$ και $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Η f είναι γνησίως μονότονη γιατί η f' διατηρεί το πρόσημό της.

Πράγματι αν η f' δεν διατηρούσε σε όλο το $\mathbb{R}$ το πρόσημό της, θα υπήρχαν τουλάχιστον δυο τιμές $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f'(\chi_1)$ και $f'(\chi_2)$ να είναι ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή $f'(\chi_1) \cdot f'(\chi_2) < 0$ επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα από το Θ. Bolzano για την f' στο διάστημα (χ_1, χ_2) η $f'(\chi) = 0$, θα είχε μια τουλάχιστον λύση, **ΑΤΟΠΟ** γιατί $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άρα η f' διατηρεί το πρόσημό της, άρα f γνησίως μονότονη.

β. $f(\chi) = -f(2 - \chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα και για $\chi = 2$ επομένως

$$f(2) = -f(0) \Leftrightarrow f(0)f(2) = -f^2(0) \leq 0.$$

✓ Αν $f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ τότε το $\chi_0 = 0$ είναι μια λύση της $f(\chi) = 0$, που είναι και η μοναδική λόγω της μονοτονίας της f .

✓ Αν $f^2(0) \neq 0$ τότε $f(0)f(2) = -f^2(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 2)$, από το Θ. Bolzano η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 2)$ η οποία θα είναι και η μοναδική λόγω της μονοτονίας της f .

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω ότι γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο

$$A(\chi_0, 0), \text{ τότε αρκεί να δείξεις ότι } g'(\chi_0) = 1.$$

$$\text{Είναι } g(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\chi_0)}{f'(\chi_0)} = 0 \Leftrightarrow f(\chi_0) = 0 \text{ δηλαδή, εκτός των άλλων, το } \chi_0$$

Δαμινός Μωραΐτης

είναι η μοναδική λύση της $f(\chi) = 0$ η οποία έχει προκύψει από το προηγούμενο ερώτημα.

Η παράγωγος της g στο χ_0 , αν υπάρχει, θα είναι το

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{g(\chi) - g(\chi_0)}{\chi - \chi_0} &\stackrel{g(\chi_0)=0}{=} \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{g(\chi)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\frac{f(\chi)}{f'(\chi)}}{\chi - \chi_0} = \\ \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{(\chi - \chi_0)f'(\chi)} &= \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{\chi - \chi_0} \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{f'(\chi)} \stackrel{f(\chi_0)=0}{=} \\ \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \cdot \frac{1}{f'(\chi_0)} &= f'(\chi_0) \frac{1}{f'(\chi_0)} = 1 \text{ άρα} \end{aligned}$$

Η παράγωγος της g στο χ_0 είναι $g'(\chi_0) = 1$.

73.

Πανελλήνιες 2003 - Ομογενείς

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α.

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^-} (-\chi - 3) = -\left(-\frac{4}{3}\right) - 3 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3} = f\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^+} (2\chi + 1) = 2\left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^+} f(\chi) = f\left(-\frac{4}{3}\right)$, επομένως η f συνεχής στο

$$\chi_0 = -\frac{4}{3}.$$

Λιβαδεϊά

β.

1^{ος} τρόπος.

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^-} \frac{f(\chi) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{\chi - \left(-\frac{4}{3}\right)} = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{-\chi - 3 - \left(-\frac{5}{3}\right)}{\chi + \frac{4}{3}} = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{-\chi - 3 + \frac{5}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{-\chi - \frac{4}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} = - \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{\chi + \frac{4}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} = -1.$$

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^+} \frac{f(\chi) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{\chi - \left(-\frac{4}{3}\right)} = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{2\chi + 1 - \left(-\frac{5}{3}\right)}{\chi + \frac{4}{3}} = \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{2\chi + 1 + \frac{5}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{2\chi + \frac{8}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} = 2 \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{\chi + \frac{4}{3}}{\chi + \frac{4}{3}} = 2.$$

$$\text{Άρα} \quad \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^-} \frac{f(\chi) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{\chi - \left(-\frac{4}{3}\right)} \neq \lim_{\chi \rightarrow -\frac{4}{3}^+} \frac{f(\chi) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{\chi - \left(-\frac{4}{3}\right)}$$

επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $\chi_0 = -\frac{4}{3}$.

2^{ος} τρόπος.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \begin{cases} -\chi - 3, & \chi \leq -\frac{4}{3} \\ 2\chi + 1, & \chi > -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{άρα } f'(\chi) = \begin{cases} -1, & \chi < -\frac{4}{3} \\ 2, & \chi > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Παρατήρησε ότι η f' δεν είναι συνεχής στο $\chi_0 = -\frac{4}{3}$ άρα δεν είναι
ούτε παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = -\frac{4}{3}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\gamma. \quad \text{Είναι } f(\chi) = \begin{cases} -\chi - 3, & \chi \leq -\frac{4}{3} \\ 2\chi + 1, & \chi > -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{άρα } f'(\chi) = \begin{cases} -1, & \chi < -\frac{4}{3} \\ 2, & \chi > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\checkmark \quad \chi < -\frac{4}{3} \text{ τότε } f(\chi) + f'(\chi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\chi - 3 + (-1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\chi - 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \chi = -4 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \chi = -\frac{9}{2} < -\frac{4}{3} \text{ δεκτή.}$$

$$\checkmark \quad \chi > -\frac{4}{3} \text{ τότε } f(\chi) + f'(\chi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\chi + 1 + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\chi + 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\chi = -3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \chi = -\frac{5}{4} > -\frac{4}{3} \text{ δεκτή.}$$

$$\text{Άρα η } f(\chi) + f'(\chi) = \frac{1}{2} \text{ έχει λύσεις τις } -\frac{9}{2} \text{ και } -\frac{5}{4}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Αφού η f είναι f δυο φορές παραγωγίσιμη άρα είναι και συνεχής, οπότε για κάθε $\chi > 0$ στο $(0, \chi)$ εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ., επομένως θα υπάρχει

$$\xi \in (0, \chi) \text{ τέτοιος ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\chi)}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(\chi) = \chi f'(\xi)}.$$

β. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα κλπ παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων και είναι : } h'(\chi) = \left(\frac{f(\chi)}{\chi} + e^{\chi} \right)' = \frac{f'(\chi)\chi - f(\chi)\chi'}{\chi^2} + (e^{\chi})' =$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\frac{f'(\chi)\chi - f(\chi)}{\chi} + e^\chi, \text{ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα «για κάθε } \chi > 0$$

υπάρχει $\xi \in (0, \chi)$ τέτοιος ώστε : $f(\chi) = \chi f'(\xi)$, άρα θα είναι :

$$h'(\chi) = \frac{f'(\chi)\chi - f(\chi)}{\chi} + e^\chi = \frac{f'(\chi)\chi - \chi f'(\xi)}{\chi} + e^\chi = \frac{\chi(f'(\chi) - f'(\xi))}{\chi} + e^\chi \text{ και}$$

επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα $0 < \xi < \chi \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(\chi) \Leftrightarrow$

$f'(\chi) - f'(\xi) > 0$, $e^\chi > 0$, άρα $h'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi > 0$, δηλαδή η h' είναι

γνησίως αύξουσα επομένως είναι συνάρτηση 1 – 1 στο $(0, +\infty)$.

74.

Πανελλήνιες 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία . Β. Θεωρία.

Γ. γ. Λάθος., δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Επειδή υπάρχει ο $\ln \chi$ στον τύπο της συνάρτησης, Πεδίο Ορισμού είναι το

$A = (0, +\infty)$. Είναι $f(\chi) = \chi^2 \cdot \ln \chi$ άρα

$$f'(\chi) = (\chi^2 \cdot \ln \chi)' = (\chi^2)' \cdot \ln \chi + \chi^2 (\ln \chi)' = 2\chi \cdot \ln \chi + \chi^2 \frac{1}{\chi} =$$

$$2\chi \cdot \ln \chi + \chi \text{ άρα } f'(\chi) = \chi(2\ln \chi + 1). \quad f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi(2\ln \chi + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi > 0$$

$$2\ln \chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln \chi \geq -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln e = \ln \left(e^{-\frac{1}{2}} \right) = \ln \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ άρα}$$

$$\begin{cases} \ln \chi \geq \ln \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \ln \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \text{ άρα } \chi \geq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

χ	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$2\ln\chi + 1$		-	+
$f'(\chi)$		-	+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(\chi)$		-	+
$f(\chi)$		$\searrow$	$\nearrow$

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < \frac{1}{\sqrt{e}}$, άρα η **f** **γνησίως φθίνουσα** είναι στο $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > \frac{1}{\sqrt{e}}$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

Άρα η f έχει ακρότατο : **ο. ε.** στη θέση $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, το

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

β. $f'(\chi) = \chi(2\ln\chi + 1)$ άρα

$$f''(\chi) = (2\chi\ln\chi + \chi)' = (2\chi)' \ln\chi + 2\chi(\ln\chi)' + 1 = 2\ln\chi + 2\chi \frac{1}{\chi} + 1 \text{ άρα}$$

$$f''(\chi) = 2\ln\chi + 3, \quad f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln\chi + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln\chi \geq -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\ln e =$$

$$\ln e^{-\frac{3}{2}} = \ln \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \ln \frac{1}{\sqrt{e^3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\chi \geq \ln \frac{1}{\sqrt{e^3}} \\ \ln \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \text{ άρα } f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

χ	0	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$+\infty$
$2\ln\chi + 3$		-	+
$f''(\chi)$		-	+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f'' :

χ	0	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$+\infty$
$f''(\chi)$		-	+
$f(\chi)$			

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < \frac{1}{\sqrt{e^3}}$, άρα η **f** **στρέφει τα κοίλα κάτω**

(είναι κοίλη) στο $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > \frac{1}{\sqrt{e^3}}$, άρα η **f** είναι **στρέφει τα κοίλα άνω** (είναι

κυρτή) στο $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty\right)$

Άρα η f έχει σημείο καμπής στη θέση $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{e^2}}$, το

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)^2 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e^3} \left(-\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = -\frac{3}{2e^3}.$$

γ. Η f στη θέση $\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$, το οποίο

είναι, τελικά, **Ολικό ελάχιστο**, όπως φαίνεται πιο πάνω στον πίνακα μεταβολών της f . Επομένως για κάθε $\chi > 0$ $f(\chi) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^2 \cdot \ln \chi) = +\infty \text{ άρα } \text{Σύνολο τιμών της } f \text{ το } \Delta = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right).$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για τη συνάρτηση g ισχύει :

- ✓ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (αφού f παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)
- ✓ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

$$\checkmark \quad \begin{cases} g(0) = e^0 f(0) = 1 \cdot 0 = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \text{άρα } g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

Άρα για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα θα υπάρχει

$$\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi) = 0.$$

$$\text{Είναι } g'(\chi) = (e^\chi f(\chi))' = e^\chi f(\chi) + e^\chi f'(\chi), \text{ άρα}$$

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0$$

$$\begin{matrix} e^\xi \neq 0 \\ \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi).$$

75.

Εσπερινά 2004

Παρασκευή 4 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Σ, Λ. Λ, Ε. Λ, ΣΤ. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$$A(-1, f(-1)) \text{ έχει τύπο : } \psi - f(-1) = f'(-1)(\chi + 1).$$

Λ ι β α δ ε ι ά

Όταν $\chi = -1 < 1$ η f έχει τύπο $f(\chi) = 4\chi^2 + 3$ οπότε $f(-1) = 4(-1)^2 + 3 = 7$

και $f'(\chi) = (4\chi^2 + 3)' = 8\chi$ οπότε $f'(-1) = 8(-1) = -8$.

Άρα $\psi - 7 = -8(\chi + 1) \Leftrightarrow \psi = -8\chi - 1$, η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $A(-1, f(-1))$.

γ.

✓ Όταν $\chi = -5 < 1$ η f έχει τύπο $f(\chi) = 4\chi^2 + 3$ οπότε

$$f'(\chi) = (4\chi^2 + 3)' = 8\chi \text{ άρα } f'(-5) = 8(-5) = -40.$$

✓ Όταν $\chi = 5 > 1$ η f έχει τύπο $f(\chi) = 6\chi + 1$ οπότε $f'(\chi) = (6\chi + 1)' = 6$

$$\text{άρα } f'(5) = 6.$$

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0 \Leftrightarrow \mu(-40) + 6 + 34 = 0 \Leftrightarrow -40\mu = -40 \Leftrightarrow \mu = 1$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 = -2$, θα είναι από το Θεώρημα του Fermat $f'(-2) = 0$, $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 + 6\alpha\chi + \beta$, άρα

$$f'(\chi) = (2\chi^3 - 3\chi^2 + 6\alpha\chi + \beta)' = 6\chi^2 - 6\chi + 6\alpha \Leftrightarrow f'(\chi) = 6(\chi^2 - \chi + \alpha)$$

$$\text{Επομένως } f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 6((-2)^2 - (-2) + \alpha) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6.$$

Τότε η f γίνεται $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 36\chi + \beta$ και $f(-2) = 98 \Leftrightarrow$

$$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 36(-2) + \beta = 98 \Leftrightarrow$$

$$-16 - 12 + 72 + \beta = 98 \Leftrightarrow \beta = 98 + 16 + 12 - 72 \Leftrightarrow \beta = 54 \text{ οπότε η } f \text{ γίνεται}$$

$$f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 36\chi + 54$$

β. $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 36\chi + 54$ άρα

$$f'(\chi) = (2\chi^3 - 3\chi^2 - 36\chi + 54)' = 6\chi^2 - 6\chi - 36 \Leftrightarrow f'(\chi) = 6(\chi^2 - \chi - 6)$$

Δαμινός Μωραΐτης

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6(\chi^2 - \chi - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - \chi - 6, \text{ ρίζες } \chi_1 = -2 \text{ και } \chi_2 = 3$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-2	3	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -2$ και $\chi = 3$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < -2$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, -2)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $-2 < \chi < 3$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-2, 3)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 3$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(3, +\infty)$

γ. Άρα η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = -2$, το $f(-2) = 98$

και **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = 3$, το $f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 54 =$
 $54 - 27 - 108 + 54 = -27.$

δ. $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 36\chi + 54$ άρα

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 36 \cdot (-1) + 54 = 85 \\ f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 54 = -14 \end{cases}, \text{ άρα } f(-1)f(2) < 0.$$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$ και επειδή στο ίδιο διάστημα η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση έχει $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

76.

ωανελλήνικες 2004 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^3 - 9\chi^2 + \alpha\chi + \beta)' \Leftrightarrow$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$f'(\chi) = 6\chi^2 - 18\chi + \alpha$$

β) Αν $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 12$, τότε η

$$f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi + \beta, \text{ οπότε η } f(2) = 5$$

$$2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow 16 - 36 + 24 + \beta = 5 \text{ άρα } \beta = 1.$$

γ) Όταν $\alpha = 12$ και $\beta = 1$ η $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi + 1$ άρα

$$f'(\chi) = (2\chi^3 - 9\chi^2 + 12\chi + 1)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 6\chi^2 - 18\chi + 12 = 6(\chi^2 - 3\chi + 2)$$

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6(\chi^2 - 3\chi + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 3\chi + 2 \geq 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = 1 \text{ και } \chi_2 = 2$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	1	2	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = 1$ και $\chi = 2$

✓ είναι θετική όταν $\chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

✓ είναι αρνητική όταν $1 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$

✓ είναι θετική όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει ακρότατο : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = 1$, το

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 1 = 6, \text{ και τ. ε. στη θέση } \chi_2 = 2, \text{ το}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 1 = 5$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Αν χ, ψ το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου τότε $0 < \chi, \psi < 200$

$$\text{και } \chi + \psi = 200 \Leftrightarrow \psi = 200 - \chi \text{ οπότε } E(\chi) = \chi \cdot \psi = \chi(200 - \chi) \Leftrightarrow$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$E(\chi) = -\chi^2 + 200\chi.$$

$$\beta) \quad E(\chi) = -\chi^2 + 200\chi \Leftrightarrow E'(\chi) = (-\chi^2 + 200\chi)' \Leftrightarrow E'(\chi) = -2\chi + 200$$

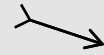
$$E'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -2\chi + 200 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 100$$

άρα η E' έχει πίνακα προσήμου :

0	100	200
	+	-

και για την $E(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η E' :

χ	0	100	200
$E'(\chi)$	+	0	-
$E(\chi)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 100$.

✓ είναι **θετική** όταν $0 < \chi < 100$, άρα η $E(\chi)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(0, 100)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 100$, άρα η $E(\chi)$ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(100, 200)$

Η f παρουσιάζει Ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = 100$ m.

γ) Το ολικό μέγιστο είναι το $E(100) = -100^2 + 200 \cdot 100 = 10.000 \text{ m}^2$.

77.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - Τ Ε Ε ΕΣΩΤΕΡΙΝΑ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) 1) Για κάθε $\chi > 0$ $f_1(\chi) = \chi \cdot \ln \chi \Leftrightarrow f_1'(\chi) = (\chi \cdot \ln \chi)' = \chi' \cdot \ln \chi + \chi \cdot (\ln \chi)'$

$$\Leftrightarrow f_1(\chi) = \ln \chi + \chi \cdot \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow f_1(\chi) = \ln \chi + 1.$$

$$2) \quad f_2(\chi) = \frac{\chi+1}{e^\chi} \Leftrightarrow f_2'(\chi) = \left(\frac{\chi+1}{e^\chi} \right)' = \frac{(\chi+1)' e^\chi - (\chi+1)(e^\chi)'}{(e^\chi)^2} =$$

Λιβαδειά

$$\frac{e^x - (\chi + 1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - \chi e^x - e^x}{(e^x)^2} \Leftrightarrow f_2(\chi)' = -\frac{\chi e^x}{(e^x)^2} = -\frac{\chi}{e^x}.$$

β) 1) $g_1(\chi) = \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$ άρα $g_1'(\chi) = (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)'$ άρα

$$g_1'(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi \text{ οπότε } g_1''(\chi) = (\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi)' \text{ άρα}$$

$$g_1''(\chi) = -\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = -g_1(\chi).$$

2) $g_2(\chi) = 5\chi^3 - 7\chi^2 + \chi + 2004$ άρα $g_2'(\chi) = (5\chi^3 - 7\chi^2 + \chi + 2004)' = 15\chi^2 - 14\chi + 1$ οπότε $g_2''(\chi) = (15\chi^2 - 14\chi + 1)' = 30\chi - 14$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α) $f(\chi) = \chi^3 - 12\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi^3 - 12\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 3\chi^2 - 12 = 3(\chi^2 - 4)$.
 $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4 \geq 0$ το $\chi^2 - 4$ έχει ρίζες $\chi_1 = -2$ και $\chi_2 = 2$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-2	2	$+\infty$
+	-	+	

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

- ✓ μηδενίζεται όταν $\chi = -2$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi < -2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$
- ✓ είναι αρνητική όταν $-2 < \chi < 2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2, 2)$
- ✓ είναι θετική όταν $\chi > 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

β) Η f παρουσιάζει ακρότατο : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = -2$, και τ. ε. στη θέση

$$\chi_2 = 2.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

γ) τ. μ. το $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$, και τ. ε. το

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16.$$

78.

Πανελλήνιες 2004 - Εξαναληπτικές

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία.

B. α. Λάθος

79.

Εξωεργασία 2004 - Εξαναληπτικές

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B.

Δ. Σ, Ε. Σ, ΣΤ. Λ.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$. (έχει απαντηθεί στο 1^ο κεφάλαιο)

ii) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$ άρα $f'(x) = (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)' =$

$$\frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} (4x^2 + 1)' + (2x)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} + 2 = \frac{8x + 4\sqrt{4x^2 + 1}}{2\sqrt{4x^2 + 1}} =$$

$$\frac{4(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{\sqrt{4x^2 + 1}} \text{ άρα}$$

$$f'(0) = \frac{2(2 \cdot 0 + \sqrt{4 \cdot 0^2 + 1})}{\sqrt{4 \cdot 0^2 + 1}} = 2 \frac{0 + \sqrt{1}}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow f'(0) = 2 \text{ και}$$

$$f(0) = \sqrt{4 \cdot 0^2 + 1} + 2 \cdot 0 = \sqrt{1} + 0 \Leftrightarrow f(0) = 1. \text{ Επομένως } f'(0) = 2f(0)$$

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Είναι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (έχει απαντηθεί στο 1^ο κεφάλαιο)

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(1, -4)$ είναι $\psi + 4 = f'(1)(\chi - 1)$.

Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ τότε η f γίνεται : $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi - 2}$, οπότε

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2 + 3}{\chi - 2} \right)' = \frac{(\chi^2 + 3)'(\chi - 2) - (\chi^2 + 3)(\chi - 2)'}{(\chi - 2)^2}$$

$$= \frac{2\chi(\chi - 2) - (\chi^2 + 3)}{(\chi - 2)^2} = \frac{2\chi^2 - 4\chi - \chi^2 - 3}{(\chi - 2)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{\chi^2 - 4\chi - 3}{(\chi - 2)^2} \text{ άρα}$$

$$f'(1) = \frac{1^2 - 4 \cdot 1 - 3}{(1 - 2)^2} = -6, \text{ τελικά εξίσωση της εφαπτομένης στο } A(1, -4) \text{ είναι}$$

$$\psi + 4 = -6(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = -6\chi + 6 - 4 \Leftrightarrow \psi = -6\chi + 2.$$

γ) Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$

έχει τύπο $\psi = \lambda\chi + \beta$ όπου : $\lambda = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\beta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \lambda\chi]$.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{\chi^2 + 3}{\chi - 2} \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\chi^2 + 3}{\chi - 2}}{\chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 + 3}{\chi^2 - 2\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2}{\chi^2} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 1 \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 + 3}{\chi - 2} - \chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 + 3 - \chi^2 + 2\chi}{\chi - 2} \right] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\chi + 3}{\chi - 2} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi}{\chi} = 2 \text{ άρα } \beta = 2$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ έχει τύπο $\psi = \chi + 2$

Δαμιανός Μωραΐτης

80.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - Ομογενείς

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^οβ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ τότε :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

i) Όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $f(x) = 1 + \ln x$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = 0.$$

ii) Όταν $x \rightarrow 1^+$ είναι $f(x) = 1 + \ln x$ και $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \ln x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

Όταν $x \rightarrow 1^-$ είναι $f(x) = x$ και $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

81.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^οΑ.2 Θεωρία. Η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικήςπαράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$ όταν : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

Λι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. $f(x) = e^{\lambda x} \Leftrightarrow f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}(\lambda x)' \Leftrightarrow f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$ γιατί $\lambda > 0$, $\lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Έστω x_0 το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

$$\text{παράστασης της } f \text{ στο } x_0 \text{ είναι } \psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$\psi - e^{\lambda x_0} = \lambda \cdot e^{\lambda x_0} (x - x_0)$ **(1)** και επειδή πρέπει να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα θα ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του $O(0, 0)$ δηλαδή

$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda e^{\lambda x_0} x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{άρα η (1) γίνεται :}$$

$$\psi - e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = \lambda e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \Leftrightarrow \psi - e^1 = \lambda e^1 \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \Leftrightarrow \psi - e = \lambda e x - e \Leftrightarrow$$

$$\psi = \lambda \cdot e \cdot x. \text{ Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής } M \text{ είναι } x_0 = \frac{1}{\lambda},$$

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e \text{ δηλαδή είναι } M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

$$\text{α. } 2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)} \right)' = \left(\frac{e^x}{2} \right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c \text{ (1), όταν } x = 0 \text{ τότε η (1) } \Rightarrow$$

$$e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{άρα } e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^x + 1}{2}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{άρα } \ln e^{f(\chi)} = \ln \left(\frac{e^\chi + 1}{2} \right) \quad \text{άρα } f(\chi) = \ln \left(\frac{1 + e^\chi}{2} \right).$$

82.

Εβδομαστιά 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. 1. Θεωρία.

Β. 5. Σ (Θ. Μ. Τ. Διαφορικού Λογισμού)

ΘΕΜΑ 3^οα. Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1, 1) άρα $f(1) = 1$

$$\text{άρα } 1^3 + \kappa \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1.$$

β. Αφού $\kappa = -1$ άρα $f(\chi) = \chi^3 - \chi^2 + 3\chi - 2$, $f'(\chi) = (\chi^3 - \chi^2 + 3\chi - 2)'$ $\Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 3\chi^2 - 2\chi + 3. \text{ Είναι } \Delta = -32 < 0, \text{ άρα για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ η } f'(\chi) \neq 0$$

επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

γ. Είναι $f(0) = -2$ και $f(1) = 1$ άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο[-2, 0] και παραγωγίσιμη στο (-2, 0) σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η $f(\chi) = 0$

θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο (-2, 0), η f είναι και μονότονη άρα η

εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, 1).**ΘΕΜΑ 4^ο**Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{(2-\alpha)\chi^2 - \kappa\chi + 2}{\chi - 3}$, Π Ο είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{3\}.$$

α. Στο σημείο αυτό πρέπει (κανονικά) να διερευνηθεί τι γίνεται με το α,

δηλαδή να εξετασθεί τι γίνεται όταν $\alpha = 2$ και να αποδειχθεί ότι τότε δενυπάρχει πλάγια ασύμπτωτη άρα είναι $\alpha \neq 2$.Πράγματι αν $\alpha = 2$ τότε η συνάρτηση γίνεται :

Λι β α δ ε ι ά

$$f(\chi) = \frac{-\kappa\chi + 2}{\chi - 3} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\kappa\chi + 2}{\chi - 3}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\kappa\chi + 2}{\chi^2 - 3\chi} =$$

$$-\kappa \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi^2} = -\kappa \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0 \text{ και επομένως δεν πρόκειται για πλάγια}$$

ασύμπτωτη και συγκεκριμένα την $\psi = \chi$, αλλά για οριζόντια άρα $\alpha \neq 2$.

Για να είναι η $\psi = \chi$ πλάγια ασύμπτωτη, επειδή η $\psi = \chi$ είναι της μορφής $\psi = \lambda\chi + \beta$ με $\lambda = 1$ και $\beta = 0$ σύμφωνα με τους τύπους θα πρέπει :

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lambda \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1,$$

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \lambda\chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \chi] = \beta = 0$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(2-\alpha)\chi^2 - \kappa\chi + 2}{\chi - 3}}{\chi} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(2-\alpha)\chi^2 - \kappa\chi + 2}{\chi^2 - 3\chi} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(2-\alpha)\chi^2}{\chi^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (2-\alpha) = 1 \text{ άρα } \alpha = 1 \text{ και } f(\chi) = \frac{\chi^2 - \kappa\chi + 2}{\chi - 3}.$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \chi] = 0 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2-\alpha)\chi^2 - \kappa\chi + 2}{\chi - 3} - \chi \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - \kappa\chi + 2 - \chi^2 + 3\chi}{\chi - 3} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\kappa\chi + 2 + 3\chi}{\chi - 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(3-\kappa)\chi}{\chi} = 0 \text{ άρα } \kappa = 3 \text{ και } f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 3}.$$

β. Η $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ άρα και συνεχής

στο ίδιο διάστημα.

Επί πλέον είναι
$$\begin{cases} f(1) = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 2}{1 - 3} = 0 \text{ και} \\ f(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 - 3} = 0 \end{cases} \quad \text{άρα από το θεώρημα Rolle θα}$$

υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο να ισχύει $f'(\xi) = 0$ άρα στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x .

γ. Είναι $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ άρα $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \right)' \Leftrightarrow$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)'(x - 3) - (x^2 - 3x + 2)(x - 3)'}{(x - 3)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x - 3) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 2}{(x - 3)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x - 3)^2}$$

Άρα $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\psi - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}(x - 1).$$

83.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Τ Ε Ε

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$ και $f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$

β) $f'(x) = x^2 - 2x$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0$ η $f'(x) = x^2 - 2x$ έχει ρίζες

$$x_1 = 0 \text{ και } x_2 = 2$$

$-\infty$	0	2	$+\infty$
+	−	+	

Λιβαδερά

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Αρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 0$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 0$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 2$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(2, +\infty)$

$$\gamma) \quad f'(\chi) = \chi^2 - 2\chi \Leftrightarrow f''(\chi) = (\chi^2 - 2\chi)' \text{ άρα } f''(\chi) = 2\chi - 2 = 2(\chi - 1)$$

δ) Η f παρουσιάζει τ. μ. στη θέση $\chi_1 = 0$, και τ. ε. στη θέση $\chi_2 = 2$.

ε) Παρατήρησε ότι $\left(\frac{\chi^3}{3} - \chi^2 + \alpha \right)' = \frac{3\chi^2}{3} - 2\chi = \chi^2 - 2\chi = f'(\chi)$, άρα μια παράγουσα της f' είναι η $f(\chi) = \frac{\chi^3}{3} - \chi^2 + \alpha$.

Αν $f(0) = 2005$ τότε $\frac{0^3}{3} - 0^2 + \alpha = 2005$ άρα **$\alpha = 2005$** .

ΘΕΜΑ 4^ο

$N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 < t < 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α) $N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000$, άρα υπάρχουν 1000 δελφίνια κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων

β) Είναι $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$ άρα $N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' \Leftrightarrow N'(t) = 6t^2 - 2t + 5$

γ) $N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 25$.

Δαμιανός Μωραΐτης

- δ) Θα υπάρχουν $N(10) = 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 = 2950$ δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη.

Τα δελφίνια, αποδεδειγμένα τώρα πια, από έρευνες πολλών χρόνων, διαθέτουν νοημοσύνη, για τους ανθρώπους δεν άκουσα να ανακοινώνεται κάτι

84.

Πανελλήνιες 2005 - Τ Ε Ε εσωτερικά

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Είναι $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$ άρα $f'(x) = (x^2 + \alpha x + 5)' \Leftrightarrow f'(x) = 2x + \alpha$.

β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο, τότε πρέπει:

από το Θεώρημα του Fermat $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 2(-1) + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

γ) Αν $\alpha = 2$, τότε η f γίνεται $f(x) = x^2 + 2x + 5$ οπότε $f'(x) = 2x + 2$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	-1	$+\infty$
-		+

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $x = -1$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $-\infty < x < -1$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, -1)$

✓ είναι **θετική** όταν $x > -1$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-1, +\infty)$

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

α) $K(5) = 4 \cdot 5^2 + 30 = 130$ χιλιάδες €.

β) $P(x) = E(x) - K(x) = (3x^2 + 20x) - (4x^2 + 30) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 20x - 30$.

γ) $P'(x) = (-x^2 + 20x - 30)'$ άρα $P'(x) = -2x + 20 = -2(x - 10)$.

δ) Για να βρεις πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος, θα μελετήσεις τη μονοτονία της συνάρτησης του κέρδους. Είναι $P(x) = -x^2 + 20x + 30$ και

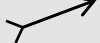
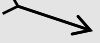
$$P'(x) = -2(x - 10), P'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2(x - 10) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

0	10	20
	+	-

και για την $f(x)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

x	0	10	20
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

✓ μηδενίζεται όταν $x = 10$.

✓ είναι θετική όταν $0 < x < 10$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 10)$

✓ είναι αρνητική όταν $10 < x < 20$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(10, 20)$

Άρα για να έχει το μέγιστο κέρδος ανα σκάφος, κατ' έτος το ναυπηγείο πρέπει να κατασκευάζει 10 σκάφη οπότε θα είναι $P(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 30$ δηλαδή $P(10) = 130$ χιλιάδες €.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - ΕΩΡΑΝΑΛΗΘΕΤΙΚΕΣ

85.

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δαμιανός Μωραΐτης

A. 1 Θεωρία.

- B. α.** Λάθος γιατί στα κρίσιμα σημεία περιλαμβάνονται και τα άκρα.
- β.** Λάθος γιατί πρέπει επί πλέον να υπάρχει και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$.

α. (Απαγωγή σε άτοπο) Έστω ότι υπάρχουν χ_1, χ_2 με $\chi_1 \neq \chi_2$ και

$$f(\chi_1) = f(\chi_2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R θα είναι και συνεχής στο R , επομένως θα είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[\chi_1, \chi_2]$ όπου ισχύει, όπως υποθέσαμε

$$f(\chi_1) = f(\chi_2).$$

Άρα από το Θ. Rolle θα υπάρχει $\chi_0 \in (\chi_1, \chi_2)$ έτσι ώστε $f'(\chi_0) = 0$ **ΑΤΟΠΟ**

άρα όταν $f(\chi_1) = f(\chi_2) \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$, επομένως η f είναι 1-1.

- β.** Είναι προφανές, από το προηγούμενο ερώτημα, ότι η f αντιστρέφεται, αφού είναι 1-1.

$$\text{Είναι } \begin{cases} f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8)) = -2 \\ f^{-1}(1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8)) = f^{-1}(1) \\ \text{η } f^{-1} \text{ είναι επίσης 1-1} \end{cases} \text{ άρα}$$

$$-2004 + f(\chi^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi^2 - 8) = 2005 \\ f(1) = 2005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi^2 - 8) = f(1) \\ f \text{ είναι 1-1} \end{cases} \text{ άρα}$$

$$\chi^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow \chi^2 = 9 \Leftrightarrow \chi = \pm 3$$

- γ.** Αρκεί να δείξεις ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο

$$\text{οποίο } f'(\chi_M) \left(-\frac{1}{668} \right) = -1 \Leftrightarrow f'(\chi_M) = 668 \Leftrightarrow f'(\chi_M) - 668 = 0.$$

Έστω η $g(\chi) = f(\chi) - 668\chi$, τότε για αυτήν ισχύουν:

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\checkmark \quad \begin{cases} g(-2) = f(-2) - 668 \cdot (-2) \\ g(1) = f(1) - 668 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(-2) = 1 + 1336 = 1337 \\ g(1) = 2005 - 668 = 1337 \end{cases} \quad \text{άρα}$$

$$g(-2) = g(1).$$

- ✓ Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-2, 1]$ ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_M \in (-2, 1)$

έτσι ώστε $g'(\chi_M) = 0$. Είναι $g'(\chi) = (f(\chi) - 668\chi)' = f'(\chi) - 668$ άρα τελικά

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_M \in (-2, 1)$ έτσι ώστε

$$f'(\chi) - 668 = 0 \Leftrightarrow f'(\chi) = 668, \text{ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο } M \text{ της}$$

C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{668}\chi + 2005$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α.

- i. Επειδή η f είναι συνεχής είναι $f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$. Είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} = 2005 \text{ οπότε αν θέσεις } g(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} \text{ θα είναι}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) = 2005 \text{ και } g(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} \Leftrightarrow f(\chi) - \chi = \chi^2 \cdot g(\chi) \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = \chi^2 \cdot g(\chi) + \chi \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^2 \cdot g(\chi) + \chi) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^2 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) + \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi = 0 \cdot 2005 + 0 \text{ άρα } \boxed{f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 0}$$

ii. Είναι $\lambda(\chi) = \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \frac{f(\chi)}{\chi}$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow 0} \lambda(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi}$.

Όμως αν θέσεις $g(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2}$ θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) = 2005$ και

Δαμιανός Μωραΐτης

$$g(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} \Leftrightarrow f(\chi) - \chi = \chi^2 \cdot g(\chi) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi} = \frac{\chi^2 \cdot g(\chi)}{\chi} + \frac{\chi}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\chi)}{\chi} = \chi \cdot g(\chi) + 1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) + \lim_{\chi \rightarrow 0} 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = 0 \cdot 2005 + 1 \quad \text{άρα} \quad f'(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1.$$

β. Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^2 + \lambda(f(\chi))^2}{2\chi^2 + (f(\chi))^2} = 3 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\frac{\chi^2 + \lambda(f(\chi))^2}{\chi^2}}{\frac{2\chi^2 + (f(\chi))^2}{\chi^2}} = 3 \Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\frac{\chi^2 + \lambda \frac{(f(\chi))^2}{\chi^2}}{\chi^2}}{\frac{2\chi^2 + \frac{(f(\chi))^2}{\chi^2}}{\chi^2}} = 3 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left(\frac{f(\chi)}{\chi} \right)^2}{2 + \left(\frac{f(\chi)}{\chi} \right)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \lambda \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{f(\chi)}{\chi} \right)^2}{2 + \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{f(\chi)}{\chi} \right)^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda \cdot 1^2}{2 + 1^2} = 3 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 9 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

86.

Εξωερινά 2005 - Εωαναληρωτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \begin{cases} -\chi^3 + 1, & \chi < 1 \\ \chi^4 - 1, & \chi \geq 1 \end{cases}$.

α. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. (είναι συνεχής, δες απαντήσεις 1^{ου} κεφαλαίου).

Λιβαδερά

β.

✓ $\chi < 1$ τότε $f(\chi) = -\chi^3 + 1$ άρα $f'(\chi) = (-\chi^3 + 1)' = -3\chi^2 < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

✓ $\chi \geq 1$ τότε $f(\chi) = \chi^4 - 1$ άρα $f'(\chi) = (\chi^4 - 1)' = 4\chi^3 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Άρα η f έχει ακρότατο : τ. ε. στη θέση $\chi_0 = 1$, το $f(1) = 1^4 - 1 = 0$

γ. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, επί πλέον είναι

✓ $\chi = -1$ τότε $f(-1) = -(-1)^3 + 1 = 2$.

✓ $\chi = 2$ τότε $f(2) = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$.

Επειδή $f(-1) \neq f(2)$ δεν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0, 0)$ είναι : $f'(0)$.

Είναι $f(\chi) = \frac{\kappa\chi - \chi^2}{4}$ άρα $f'(\chi) = \left(\frac{\kappa\chi - \chi^2}{4}\right)' = \frac{\kappa - 2\chi}{4}$ άρα

$$f'(0) = \frac{\kappa - 2 \cdot 0}{4} = \frac{\kappa}{4} \text{ οπότε } \lambda = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{4} = 1 \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

β. Αν $\kappa = 4$ τότε η συνάρτηση f γίνεται : $f(\chi) = \frac{4\chi - \chi^2}{4}$ και η

$$f'(\chi) = \frac{4 - 2\chi}{4}, \text{ άρα } f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 2\chi}{4} \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 2\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 2$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	2	$+\infty$
+		-

Δαμιανός Μωραΐτης

και για την $f(t)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον

διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-
$f(\chi)$			

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$.

✓ είναι **θετική** όταν $-\infty < \chi < 2$, άρα η **$f(\chi)$** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 2)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 2$, η **$f(\chi)$** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει Ολικό μέγιστο στη θέση $\chi_0 = 2$, το

$$f(2) = \frac{4 \cdot 2 - 2^2}{4} = \frac{8 - 4}{4} = 1.$$

$$\gamma. \quad f(\chi) = \frac{4\chi - \chi^2}{4} \quad \text{άρα} \quad f(2) = \frac{4 \cdot 2 - 2^2}{4} = 1 \quad \text{και} \quad f(4) = \frac{4 \cdot 4 - 4^2}{4} = 0,$$

επομένως είναι $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$ άρα η ευθεία AB έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } \lambda = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{0 - 1}{4 - 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{και ο συντελεστής διεύθυνσης της}$$

εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ είναι :

$$f'(\xi).$$

$$\text{Είναι } f'(\xi) = \frac{4 - 2\xi}{4} \quad \text{άρα } f'(\xi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4 - 2\xi}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - 2\xi = -2 \Leftrightarrow 2\xi = 6$$

οπότε $\xi = 3$.

Άρα στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει το μοναδικό σημείο $\xi = 3$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB, όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.

87.

ωανελλήνικες 2005 - Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Θεωρία.

γ) 3. Λ.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & x \leq 0 \\ x \cdot \ln x, & x > 0 \end{cases}$

A) Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha + e^x) = \alpha + 1$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0(-\infty)$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ, άρα Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

B) Αν $\alpha = -1$ τότε: $f(x) = \begin{cases} -1 + e^x, & x \leq 0 \\ x \cdot \ln x, & x > 0 \end{cases}$

i)

$$\checkmark \text{ Αν } x < 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 + e^x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 + e^x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1 + e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ Αν $\chi > 0$ τότε $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi \cdot \ln \chi - 0}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi \cdot \ln \chi}{\chi} =$

$\lim_{\chi \rightarrow 0} \ln \chi = -\infty$. Επειδή προφανώς $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} \neq \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0}$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$.

ii) Είναι $f(\chi) = \begin{cases} -1 + e^\chi, & \chi \leq 0 \\ \chi \cdot \ln \chi, & \chi > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f'(\chi) = \begin{cases} e^\chi, & \chi < 0 \\ \ln \chi + 1, & \chi > 0 \end{cases}$.

$e^\chi > 0$ για κάθε $\chi < 0$, $\ln \chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln \chi \geq -1 = -1 \ln e = \ln e^{-1}$, η $\ln$ είναι

γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα $\ln \chi \geq \ln e^{-1} \Leftrightarrow \chi \geq e^{-1}$.

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
+		-	+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(\chi)$	+		-	+
$f(\chi)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 0$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0)$
- ✓ **Δεν ορίζεται (η f')** όταν $\chi = 0$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < e^{-1}$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, e^{-1})$
- ✓ **μηδενίζεται** όταν e^{-1}
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > e^{-1}$, άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(e^{-1}, +\infty)$

Προαιρετικά υπολογίζεις τα ακρότατα.

Η f παρουσιάζει ακρότατα : **τ. μ.** στη θέση $\chi_1 = 0$, το $f(0) = 0$

και **τ. ε.** στη θέση $\chi_2 = e^{-1}$, το $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1}(-1 \ln e) = -e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Λι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$.

α) $f(x) = x - \ln x + e^x \Leftrightarrow f'(x) = (x - \ln x + e^x)' = 1 - \frac{1}{x} + e^x = \frac{x-1}{x} + e^x$

Αν $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + e^x > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β)

✓ Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

✓ Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \ln x + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} \right) =$

$1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$

✓ Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x + e^x) = +\infty - \infty + \infty$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ, άρα. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{x} \right) =$

$(+\infty)(1 - 0 + \infty) = (+\infty)(+\infty) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

γ) Είναι $f(x) = 2005 \Leftrightarrow x - \ln x + e^x - 2005 = 0$. Αν θεωρήσεις την

συνάρτηση g με $g(x) = x - \ln x + e^x - 2005$ μπορείς να παρατηρήσεις ότι :

Δαμιανός Μωραΐτης

$$✓ \quad g(1) = 1 - \ln 1 + e^1 - 2005 = e - 2004 < 0.$$

$$✓ \quad g(2005) = 2005 - \ln 2005 + e^{2005} - 2005 = e^{2005} - \ln 2005 > 0.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2005]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2005)$ και ισχύει $g(1) \cdot g(2005) < 0$ άρα (από το θεώρημα Bolzano) θα υπάρξει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2005) \subseteq (1, +\infty)$.

Όμως η $f(\chi) = \chi - \ln \chi + e^\chi$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και η

$g(\chi) = \chi - \ln \chi + e^\chi - 2005$ επίσης γνησίως αύξουσα, επομένως θα υπάρξει μια

ακριβώς λύση για την $g(\chi) = f(\chi) - 2005$ στο διάστημα $(1, 2005) \subseteq (1, +\infty)$

άρα μια ακριβώς λύση και για την $f(\chi) = 2005$ στο διάστημα $(1, +\infty)$.

88.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006**Σάββατο 27 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο****A.1 Θεωρία., A.2 Θεωρία.****B. δ. Λάθος.****ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 2 + (\chi - 2)^2$ με $\chi \geq 2$.

$$\alpha. \quad f(\chi) = 2 + (\chi - 2)^2 \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(2 + (\chi - 2)^2\right)' = 2(\chi - 2)(\chi - 2)' = 2(\chi - 2).$$

Άρα όταν $\chi \geq 2$ είναι και $f'(\chi) \geq 0$, $f'(\chi) = 0$ μόνο όταν $\chi = 2$, άρα στο διάστημα $[2, +\infty)$ η συνάρτηση $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1 – 1.

β. Επειδή η f είναι 1 – 1 άρα θα υπάρξει και η f^{-1} . Το πεδίο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού για την f^{-1} . Είναι $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$\text{πεδίο τιμών το } \left[f(2), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) \right). \quad f(2) = 2 + (2 - 2)^2 = 2,$$

Λι β α δ ε ι ά

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (2 + (\chi - 2)^2) = +\infty \text{ άρα Πεδίο τιμών της } f \text{ και πεδίο}$$

ορισμού της f^{-1} το $[2, +\infty)$.

$$\text{Έστω } \psi = 2 + (\chi - 2)^2 \Leftrightarrow (\chi - 2)^2 = \psi - 2 \text{ άρα } \psi \geq 2 \text{ και } (\chi - 2)^2 = \psi - 2 \Leftrightarrow$$

$$\chi - 2 = \pm \sqrt{\psi - 2}, \text{ όμως } \chi \geq 2 \text{ άρα } \chi - 2 \geq 0 \text{ επομένως } \chi - 2 = \sqrt{\psi - 2} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2 + \sqrt{\psi - 2} \text{ είναι ο τύπος της } f^{-1} \text{ δηλαδή } f^{-1}(\chi) = 2 + \sqrt{\chi - 2}$$

γ. i. Παρατήρηση : Η f και f^{-1} τέμνουν την $\psi = \chi$ στα ίδια σημεία, οπότε αρκεί να βρεις τα κοινά σημεία της f και της $\psi = \chi$ δηλαδή αρκεί να λύσεις το σύστημα

$$\begin{cases} \psi = 2 + (\chi - 2)^2 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2 + (\chi - 2)^2 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2 + \chi^2 - 4\chi + 4 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = 2, \chi_2 = 3 \\ \psi = \chi \end{cases}$$

Άρα λύσεις τα σημεία $A(2, 2)$ και $B(3, 3)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(\chi) = \frac{\chi + 1}{\chi - 1} - \ln \chi,$$

α. πρέπει $\chi \neq 1$ και $\chi > 0$ άρα πεδίο ορισμού είναι το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Για το πεδίο τιμών πρώτα θα μελετήσεις την μονοτονία της συνάρτησης.

$$\text{Είναι } f(\chi) = \frac{\chi + 1}{\chi - 1} - \ln \chi \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\chi + 1}{\chi - 1} - \ln \chi \right)' =$$

$$\frac{(\chi + 1)'(\chi - 1) - (\chi + 1)(\chi - 1)'}{(\chi - 1)^2} - \frac{1}{\chi} = \frac{\chi - 1 - \chi - 1}{(\chi - 1)^2} - \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{-2}{(\chi - 1)^2} - \frac{1}{\chi} < 0$$

για κάθε $\chi \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0, 1), (1, +\infty)$.

Επειδή λοιπόν η f στο $(0, 1)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα το

$$f(0, 1) = \left(\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) \right).$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \left(\frac{\chi+1}{\chi-1} - \ln \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{\chi+1}{\chi-1} - \lim_{\chi \rightarrow 1^-} (\ln \chi) = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \left(\frac{\chi+1}{\chi-1} - \ln \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi+1}{\chi-1} - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \ln \chi = -1 - (-\infty) = +\infty$$

Άρα $f(0, 1) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επειδή το ένα «κομμάτι» του πεδίου τιμών είναι

ολόκληρο το $\mathbb{R}$, δεν χρειάζεται κατά τη γνώμη μου να υπολογισθεί και το υπόλοιπο, μιας και λειτουργεί συμπληρωματικά. Παρ' όλα αυτά είναι :

η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ άρα το

$$f(1, +\infty) = \left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) \right).$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\chi+1}{\chi-1} - \ln \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi+1}{\chi-1} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln \chi = 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \left(\frac{\chi+1}{\chi-1} - \ln \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{\chi+1}{\chi-1} - \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln \chi) = +\infty - 0 = +\infty$$

Άρα $f(1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα Πεδίο τιμών το $f(0, 1) \cup f(1, +\infty) = \mathbb{R}$

β.

- ✓ Είναι $f(0, 1) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_1) = 0$ και επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ το $\chi_1 \in (0, 1)$ θα είναι μοναδικό.
- ✓ Είναι $f(1, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$ άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_2) = 0$ και επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ το $\chi_2 \in (1, +\infty)$ θα είναι μοναδικό.

Τελικά η f έχει δυο ακριβώς λύσεις στο $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ (πεδίο ορισμού της), την $\chi_1 \in (0, 1)$ και την $\chi_2 \in (1, +\infty)$.

Λ ι β α δ ε ι ά

γ.

✓ Είναι $g'(\chi) = (\ln \chi)' = \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow g'(a) = \frac{1}{a}$. Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(\chi) = \ln \chi$ στο σημείο $A(a, \ln a)$ με $a > 0$ είναι $\psi - \ln a = \frac{1}{a}(\chi - a) = \frac{1}{a}\chi - 1 \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{a}\chi - 1 + \ln a$.

✓ Είναι $h'(\chi) = (e^\chi)' = e^\chi \Leftrightarrow h'(\beta) = e^\beta$. Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(\chi) = e^\chi$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ είναι $\psi - e^\beta = e^\beta(\chi - \beta) = e^\beta\chi - \beta e^\beta \Leftrightarrow \psi = e^\beta\chi - \beta e^\beta + e^\beta$.

Αν οι εφαπτόμενες αυτές ταυτίζονται, τότε θα είναι $\frac{1}{a} = e^\beta \Leftrightarrow -\ln a = \beta$ (1)

και $-1 + \ln a = -\beta e^\beta + e^\beta$ (2) με αντικατάσταση από την (1) έχεις

$$-1 + \ln a = \ln a \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Leftrightarrow -a + a \ln a = \ln a + 1 \Leftrightarrow a \ln a - \ln a - (a + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1) \ln a - (a + 1) = 0 \Leftrightarrow (a + 1) - (a - 1) \ln a = 0 \Leftrightarrow \frac{a + 1}{a - 1} - \ln a = 0$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ } \text{άρα ο αριθμός } a \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης}.$$

δ. Στο ερώτημα γ. έδειξες ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi) = \ln \chi$ και $h(\chi) = e^\chi$ έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία $A(a, \ln a)$ με

$$a > 0 \text{ και } B(\beta, e^\beta) \text{ με } \beta \in \mathbb{R} \text{ εάν και μόνον εάν } \begin{cases} e^\beta = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \beta = \ln a \text{ και} \\ f(a) = 0 \end{cases}.$$

Από το ερώτημα β. είναι γνωστό ότι η $f(\chi) = 0$ έχει δυο ακριβώς λύσεις στο πεδίο ορισμού της που είναι το $A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η $f(\chi) = 0$ έχει δυο ακριβώς λύσεις θετικές, επομένως θα υπάρχουν ακριβώς δυο σημεία $A(\alpha_1, \ln \alpha_1)$, $A(\alpha_2, \ln \alpha_2)$ με $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ και ακριβώς δυο σημεία $B(\beta_1, e^{\beta_1})$ και $B(\beta_2, e^{\beta_2})$ με $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ στα οποία οι εφαπτόμενες ταυτίζονται.

89.

εβδομηνιά 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 3. Σ, 4. Λ, 5. Λ, 6. Σ

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\chi + \lambda, & \chi \leq 1 \\ \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi}, & \chi > 1 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. Αν $\lambda = 0$ τότε: $f(\chi) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\chi, & \chi \leq 1 \\ \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi}, & \chi > 1 \end{cases}$

α.

✓ Αν $\chi < 1$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{-\frac{3}{4}\chi - \left(-\frac{3}{4}\right)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{-\frac{3}{4}(\chi - 1)}{\chi - 1} = -\frac{3}{4}$$

✓ Αν $\chi > 1$ η f παραγωγίσιμη ως ρητή και

$$\text{τότε } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{\chi - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi} + \frac{3}{4}}{(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 8\chi + 4 + 3\chi}{4\chi(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 5\chi + 4}{4\chi(\chi - 1)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi - 1)(\chi - 4)}{4\chi(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi - 4}{4\chi} = -\frac{3}{4}. \text{ Επειδή προφανώς}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1}. \text{ Άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \chi_0 = 1$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λιβαδειά

β. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

έχει εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \beta$ με $\lambda = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\beta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \lambda\chi]$.

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2}{4\chi^2} = \frac{1}{4} \text{ άρα}$$

$$\lambda = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \lambda\chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi} - \frac{1}{4}\chi \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 8\chi + 4 - \chi^2}{4\chi} \right] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{-8\chi + 4}{4\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{-8\chi}{4\chi} \right] = -2 \text{ άρα } \beta = -2$$

επομένως $\psi = \frac{1}{4}\chi - 2$ η ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Για $\kappa \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^3 - \kappa\chi^2 + 10$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

I. για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$, πρέπει και αρκεί $f'(1) = 0$

$$\text{Είναι } f(\chi) = 2\chi^3 - \kappa\chi^2 + 10 \Leftrightarrow f'(\chi) = (2\chi^3 - \kappa\chi^2 + 10)' = 6\chi^2 - 2\kappa\chi$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 2\kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 2\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

II. Αν $\kappa = 3$ τότε $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 + 10$ και $f'(\chi) = 6\chi^2 - 6\chi = 6\chi(\chi - 1)$

$$\alpha. \quad f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 6\chi(\chi - 1) = 0 \text{ ρίζες } \chi_1 = 0 \text{ και } \chi_2 = 1$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	0	1	$+\infty$	
+		-		+

και για την $f(\chi)$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' :

χ	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	-	+	
$f(\chi)$				

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 0$ και $\chi = 1$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi < 0$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty, 0)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0, 1)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1, +\infty)$

Άρα Η f παρουσιάζει ακρότατα : τ. μ. στη θέση $\chi_1 = 0$ το $f(0) = 10$ και

τ. ε. στη θέση $\chi_2 = 1$ το $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 10 = 9$

β. f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ άρα $f(-\infty, 0] = \left(\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi), f(0) \right]$.

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (2\chi^3 - 3\chi^2 + 10) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (2\chi^3) = -\infty, f(0) = 10 \text{ άρα}$$

$$f(-\infty, 0] = \left(\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi), f(0) \right] = (-\infty, 10].$$

γ. Αρκεί να δείξεις ότι η $f(\chi) - \alpha + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\chi^3 - 3\chi^2 + 10 - \alpha + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\chi^3 - 3\chi^2 + 15 - \alpha = 0$ έχει ακριβώς μια λύση για κάθε $\alpha \in (14, 15)$.

Έστω η $g(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 + 15 - \alpha$, αυτή είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και επί πλέον :

$$✓ \quad g(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 15 - \alpha = 15 - \alpha, \quad g(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 15 - \alpha = 14 - \alpha.$$

Είναι $14 < \alpha < 15 \Leftrightarrow 14 - \alpha < 0$ και $15 - \alpha > 0$ άρα $g(0)g(1) < 0$, οπότε

Θ. Bolzano η $g(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$ και επειδή

$$g(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 + 15 - \alpha \Leftrightarrow g'(\chi) = (2\chi^3 - 3\chi^2 + 15 - \alpha)' = 6\chi(\chi - 1) \text{ άρα η}$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$g(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$, δεξ και πίνακα για την f προηγουμένως, άρα η $g(\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\chi^3 - 3\chi^2 + 15 - \alpha = 0$ θα έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

90.

παυελλήμνες 2006 - Εωαναληωτικές

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο**A.1 Θεωρία.****B. β. Λάθος, γ. Λάθος, δ. Σωστό.****ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1+e^\chi}{1+e^{\chi+1}}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

$$\alpha. \quad \text{Είναι } f'(\chi) = \left(\frac{1+e^\chi}{1+e^{\chi+1}} \right)' = \frac{(1+e^\chi)'(1+e^{\chi+1}) - (1+e^\chi)(1+e^{\chi+1})'}{(1+e^{\chi+1})^2} =$$

$$\frac{e^\chi(1+e^{\chi+1}) - (1+e^\chi)e^{\chi+1}}{(1+e^{\chi+1})^2} = \frac{e^\chi + e^{2\chi+1} - e^{\chi+1} - e^{2\chi+1}}{(1+e^{\chi+1})^2} = \frac{e^\chi - e^{\chi+1}}{(1+e^{\chi+1})^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \frac{e^\chi(1-e)}{(1+e^{\chi+1})^2} < 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}, \text{ γιατί } e^\chi, (1+e^{\chi+1})^2 > 0 \text{ και } 1-e < 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\gamma. \quad \text{Είναι } 5^\chi > 6^\chi. \text{ Πράγματι } 5^\chi > 6^\chi \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 5^\chi > \ln 6^\chi \\ \ln \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\chi \cdot \ln 5 > \chi \cdot \ln 6 \Leftrightarrow \chi \cdot \ln 5 - \chi \cdot \ln 6 > 0 \Leftrightarrow \chi(\ln 5 - \ln 6) > 0 \quad (1) \text{ επειδή } \chi < 0,$$

$$\text{άρα η (1) γίνεται } \ln 5 - \chi \cdot \ln 6 < 0 \Leftrightarrow \ln \frac{5}{6} < \ln 1 \Leftrightarrow \frac{5}{6} < 1 \text{ που ισχύει άρα}$$

$$5^\chi > 6^\chi.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από το α . ερώτημα επομένως :

$$f(5^x) < f(6^x).$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι : $f(7^x) < f(8^x)$ και προσθέτοντας κατά μέλη έχεις

$$\text{την } f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

β. i. Η ευθεία $\chi = 2$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(\chi) = \chi^2 + \chi + \alpha \text{ στο σημείο } A(2, f(2)), f(2) = 2^2 + 2 + \alpha = \alpha + 6, \text{ άρα}$$

τέμνει στο $A(2, \alpha + 6)$.

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο

$$A(2, \alpha + 6) \text{ είναι } \psi - f(2) = f'(2)(\chi - 2), f'(\chi) = (\chi^2 + \chi + \alpha)' = 2\chi + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(2) = 5 \text{ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης } (\varepsilon) \text{ είναι } \psi - (\alpha + 6) = 5(\chi - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) \quad \psi = 5\chi + \alpha - 4$$

Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον $\psi' \psi$ στο $\psi_0 = -3$ δηλαδή στο σημείο $B(0, -3)$

$$\text{άρα } -3 = 5 \cdot 0 + \alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha = +1, \text{ οπότε η } (\varepsilon) \quad \psi = 5\chi - 3$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi \ln(\chi + 1) - (\chi + 1) \ln \chi$ με $\chi > 0$.

$$\mathbf{a. i.} \quad \ln(\chi + 1) - \ln \chi < \frac{1}{\chi}, \quad \chi > 0 \Leftrightarrow \ln(\chi + 1) - \ln \chi - \frac{1}{\chi} < 0, \quad \chi > 0.$$

$$\text{Θεωρείς την συνάρτηση } h(\chi) = \ln(\chi + 1) - \ln \chi - \frac{1}{\chi}, \quad \chi > 0 \text{ και μελετάς την}$$

μονοτονία της.

$$\text{Είναι } h(\chi) = \ln(\chi + 1) - \ln \chi - \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow h'(\chi) = \left(\ln(\chi + 1) - \ln \chi - \frac{1}{\chi} \right)' =$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\frac{1}{\chi+1} - \frac{1}{\chi} - \left(-\frac{1}{\chi^2}\right) = \frac{1}{\chi+1} - \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} = \frac{\chi^2}{\chi^2(\chi+1)} - \frac{\chi(\chi+1)}{\chi^2(\chi+1)} + \frac{\chi+1}{\chi^2(\chi+1)} \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi^2 - \chi + \chi + 1}{\chi^2(\chi+1)} = \frac{1}{\chi^2(\chi+1)} > 0, \text{ αφού } \chi > 0 \text{ άρα } h'(\chi) > 0 \text{ για κάθε}$$

$\chi > 0$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα πεδίο τιμών το

$$A = \left(\lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) \right).$$

✓ Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \left(\ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} \right) =$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \ln(\chi+1) - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \ln\chi - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\chi} = \ln 1 - \infty - (+\infty) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi) = -\infty$$

✓ Είναι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} \right) =$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln(\chi+1) - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\chi - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = +\infty - (+\infty) - 0 = +\infty - \infty, \text{ δηλαδή}$$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ. Όμως $\ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} = \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \frac{1}{\chi}$, οπότε

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \frac{1}{\chi} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\chi} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - 0 = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right). \text{ Αν θέσουμε } u = \frac{\chi+1}{\chi} \text{ είναι}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} u = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi+1}{\chi} \stackrel{\infty}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\chi+1)'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} u = 1, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln(u) = 0.$$

Άρα πεδίο τιμών για την h το $A = \left(\lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) \right) = (-\infty, 0)$ και

Δαμιανός Μωραϊτης

επομένως $\ln(\chi) < 0 \Leftrightarrow \ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} < 0 \Leftrightarrow \ln(\chi+1) - \ln\chi < \frac{1}{\chi}$.

ii. $f(\chi) = \chi \ln(\chi+1) - (\chi+1) \ln\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = (\chi \ln(\chi+1) - (\chi+1) \ln\chi)' \Leftrightarrow$
 $f'(\chi) = \chi' \ln(\chi+1) + \chi (\ln(\chi+1))' - (\chi+1)' \ln\chi - (\chi+1) (\ln\chi)' \Leftrightarrow$
 $\ln(\chi+1) + \chi \frac{1}{(\chi+1)} (\chi+1)' - \ln\chi - (\chi+1) \frac{1}{\chi} = \ln(\chi+1) + \frac{\chi}{\chi+1} - \ln\chi - 1 - \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow$
 $f'(\chi) = \left(\ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} \right) + \frac{\chi}{\chi+1} - 1.$

Το $\ln(\chi+1) - \ln\chi - \frac{1}{\chi} < 0$ (δες προηγούμενο ερώτημα, και το $\frac{\chi}{\chi+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\chi}{\chi+1} < 1 \Leftrightarrow \chi < \chi+1 \Leftrightarrow 0 < 1$ που ισχύει, άρα $f'(\chi) < 0$ για κάθε $\chi > 0$ άρα η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β. $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \ln\left(1 + \frac{1}{\chi}\right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) = (+\infty) \cdot 0$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ γιατί $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) = 0$, δες

προηγούμενο ερώτημα.

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \ln\left(1 + \frac{1}{\chi}\right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)}{\frac{1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}$

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\chi+1} \left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)'}{-\frac{1}{\chi^2}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\chi}{\chi+1} \frac{(\chi+1)'\chi - (\chi+1)\chi'}{\chi^2}}{-\frac{1}{\chi^2}} =$

Λιβαδειά

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\chi}{\chi+1} \frac{\chi-\chi-1}{\chi^2}}{-\frac{1}{\chi^2}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\chi}{\chi+1} \left(-\frac{1}{\chi^2} \right)}{-\frac{1}{\chi^2}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi'}{(\chi+1)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) = 1.$$

γ. $\forall (\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \ln[(\alpha+1)^\alpha] = \ln[\alpha^{\alpha+1}] \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) = (\alpha+1) \ln \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha = 0$ με $\alpha \in (0, +\infty)$.

Από το ερώτημα **α. ii.** η $f(\chi) = \chi \ln(\chi+1) - (\chi+1) \ln \chi$ με $\chi > 0$ είναι

γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, επομένως θα έχει πεδίο τιμών το διάστημα :

$$\left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) \right).$$

Είναι $f(\chi) = \chi \ln(\chi+1) - (\chi+1) \ln \chi = \chi \ln(\chi+1) - \chi \ln \chi - \ln \chi =$

$$\chi(\ln(\chi+1) - \ln \chi) - \ln \chi \Leftrightarrow f(\chi) = \chi \ln \frac{\chi+1}{\chi} - \ln \chi. \text{ Άρα}$$

$$\checkmark \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\chi \ln \frac{\chi+1}{\chi} - \ln \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \cdot \ln \frac{\chi+1}{\chi} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln \chi$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = 1 - (+\infty) = -\infty$$

$$\checkmark \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi \ln(\chi+1) - (\chi+1) \ln \chi) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} [\ln(\chi+1)] - \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi+1) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \ln \chi = 0 \cdot \ln 1 - 1(-\infty)$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Άρα πεδίο τιμών το διάστημα : $(-\infty, +\infty)$ και επειδή στο διάστημα περιέχεται το 0 και η f είναι, όπως είδες, γνησίως μονότονη θα υπάρξει μοναδική τιμή $\alpha \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha \ln(\alpha + 1) = (\alpha + 1) \ln \alpha \Leftrightarrow \ln[(\alpha + 1)^\alpha] = \ln[\alpha^{\alpha+1}] \Leftrightarrow (\alpha + 1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}.$$

91.

ωανελλήνικες 2006 - Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Θεωρία

γ) 2. Λάθος

ΘΕΜΑ 3^οΈστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 5) + 2x - 12$.

α) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f θα απαιτήσεις ο $\ln(x - 5)$ να έχει νόημα, δηλαδή θα απαιτήσεις $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$, άρα Π. Ορισμού το $D_f = (5, +\infty)$

β) Για να αποδείξεις ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξεις ότι $f' > 0$ για κάθε $x \in (5, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f'(x) = (\ln(x - 5) + 2x - 12)' = \frac{1}{x - 5}(x - 5)' + 2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x - 5} + 2.$$

Εδώ μπορείς να συνεχίσεις με δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος Για κάθε $x > 5 \Leftrightarrow x - 5 > 0$ άρα $\frac{1}{x - 5} > 0$, επομένως και

$$\frac{1}{x - 5} + 2 > 0 \text{ άρα } f' > 0 \text{ για κάθε } x \in (5, +\infty) \text{ άρα η συνάρτηση } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα.

2^{ος} τρόπος $f'(x) = \frac{1}{x - 5} + 2 = \frac{1 + 2(x - 5)}{x - 5} = \frac{2x - 9}{x - 5} \Leftrightarrow$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 9}{x - 5} > 0 \Leftrightarrow (2x - 9)(x - 5) > 0, \text{ ρίζες το } x_1 = 4,5 \text{ και } x_2 = 5$$

άρα η f' έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$	4,5	5	$+\infty$
+		-	+

Λι β α δ ε ι ά

και για την f ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η

f είναι γνησίως αύξουσα το πεδίο ορισμού της

χ	5	$+\infty$
$f'(\chi)$		+
$f(\chi)$		

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα το

$$\text{Π. Τιμών της είναι το } f(A) = (A, B) = \left(\lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) \right).$$

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 5^+} (\ln(\chi - 5) + 2\chi - 12) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 5^+} (\ln(\chi - 5)) + \lim_{\chi \rightarrow 5^+} (2\chi - 12) = -\infty - 2 \text{ άρα } A = \lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi) = -\infty.$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\ln(\chi - 5) + 2\chi - 12) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\ln(\chi - 5)) + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (2\chi - 12) = +\infty + \infty \text{ άρα } B = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι : **$f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.**

δ) Έστω η εξίσωση $f(\chi) = 2006 \Leftrightarrow$ η εξίσωση $f(\chi) - 2006 = 0$.

Θεώρησε την συνάρτηση η εξίσωση $h(\chi) = f(\chi) - 2006$, οπότε η

αρχική εξίσωση παίρνει την μορφή $h(\chi) = 0$.

Αρκεί να δείξεις ότι η εξίσωση $h(\chi) = 0$

Η συνάρτηση $h(\chi)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_h = (5, +\infty)$, πεδίο τιμών το

$\mathbb{R}$, άρα **μεταξύ των τιμών της h είναι και το 0, άρα με βάση το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in D_h$ τέτοιο ώστε**

$h(\xi) = 0$ Όμως $h'(\chi) = (f(\chi) - 2006)' = f'(\chi) > 0$ άρα η h είναι γνησίως

αύξουσα στο $D_h = (5, +\infty)$ άρα είναι 1-1 άρα **θα υπάρχει μοναδικό $\xi \in$**

D_h τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$, άρα η $f(\chi) = 2006$ έχει μοναδική λύση.

Δαμιανός Μωραΐτης

92.

ωανελλήνικες 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο**A.3** Θεωρία**B.** β. Λάθος**ΘΕΜΑ 3^ο**

Η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$,

$\kappa \in \mathbb{Z}$, έχει Πεδίο Ορισμού το $A = \mathbb{R}$, είναι πολυωνυμική άρα παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α. Αφού η άσκηση «μιλάει» για ακρότατα και σημείο καμπής, θα πρέπει να μελετήσεις το πρόσημο της $f'(\chi)$ και της $f''(\chi)$.

Είναι $f'(\chi) = (\chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta)' = 3\chi^2 - 3$ γιατί το θ είναι σταθερό άρα και το $2\eta\mu^2\theta$ σταθερό.

Επίσης $f''(\chi) = (3\chi^2 - 3)' = 6\chi$

$$\bullet \quad f'(\chi) \geq 0 \Rightarrow 3\chi^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0.$$

Το $\chi^2 - 1$ έχει ρίζες $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 1$ και πίνακα προσήμου

χ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		+	-	+

$$\bullet \quad f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 6\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 0.$$

Επομένως ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών για την f

Λιβαδεϊά

χ	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(\chi)$	+	0	-	-	0	+
$f''(\chi)$	-	-	0	+	+	
$f(\chi)$						
		τ.μ. f(-1) το	σ.κ. f(0) το	τ.ε. f(1) το		

Όπως φαίνεται από τον πίνακα η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα :

i) Στο $\chi_1 = -1$ έχει τοπικό μέγιστο το

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

ii) Στο $\chi_2 = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο το

$$\text{το } f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta),$$

iii) Στο $\chi_3 = 0$ έχει σημείο καμπής. Είναι $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$

$$\text{το } -2\eta\mu^2\theta \leq 0 \text{ Άρα σ. κ. το σημείο } \Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$$

β. Το θέμα μπορεί να απαντηθεί με δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος : Με **Θ. Bolzano**.

$$\checkmark \text{ Είναι } f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta \text{ και } f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) - 2\eta\mu^2\theta =$$

$$-8 + 6 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \Rightarrow f(-2) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2\sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

$$\text{Άρα } f(-2) \cdot f(-1) = -4\sigma\upsilon\nu^2\theta. \text{ Το } -4\sigma\upsilon\nu^2\theta < 0 \text{ γιατί } \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Άρα από το **Θ. Bolzano** η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση.

Η f είναι γνησίως μονότονη, δες τον πιο πάνω πίνακα, άρα η $f(\chi) = 0$ θα

έχει **μοναδική λύση** στο διάστημα $[-2, -1]$ άρα και στο $(-\infty, -1]$.

$$\checkmark \text{ Όμοια στο διάστημα } [-1, 1] \text{ είναι } f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0 \text{ και}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0.$$

Άρα $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Άρα από το **Θ. Bolzano** η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται από τον πιο πάνω πίνακα, άρα η $f(\chi) = 0$ θα έχει **μοναδική λύση** στο διάστημα $[-1, 1]$.

✓ Όμοια στο διάστημα $[1, +\infty)$. Είναι $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2\eta\mu^2\theta = 8 - 6 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$f(2) = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0.$$

Άρα $f(1) \cdot f(2) < 0$. Άρα από το **Θ. Bolzano** η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται από τον πιο πάνω πίνακα, άρα η $f(\chi) = 0$ θα έχει **μοναδική λύση** στο διάστημα $[1, 2]$ άρα και στο $[1, +\infty)$.

Άρα η f θα έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο διάστημα $[-2, 2]$ άρα και στο $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = \mathbb{A}$.

2^{ος} τρόπος : Βρίσκεις το σύνολο τιμών της f στα διαστήματα μονοτονίας της.

i) Στο $(-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών της f θα

είναι το $A_1 = (A, B]$, όπου $A = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi)$ και $B = f(-1)$.

$$A = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta) \Rightarrow A = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi^3 = -\infty.$$

$$B = f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta \text{ άρα σύνολο τιμών το } A_1 = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta].$$

Το $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ γιατί $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ άρα το $0 \in A_1 = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$, άρα

από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια

τουλάχιστον λύση. Όμως στο διάστημα $(-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως

Λ ι β α δ ε ι ά

αύξουσα άρα η $f(\chi) = 0$ έχει **μοναδική λύση** στο $(-\infty, -1]$.

ii) Στο $[-1, 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Το σύνολο τιμών της f στο

$[-1, 1]$ θα είναι το $A_2 = [\Gamma, B]$, όπου $\Gamma = f(1)$ και $B = f(-1)$.

$\Gamma = f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$, $B = f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$. Άρα σύνολο τιμών

το $A_2 = (-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$.

Άρα το $0 \in A_2 = (-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$, άρα από το θεώρημα των

ενδιάμεσων τιμών η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση. Όμως στο

διάστημα $[-1, 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η $f(\chi) = 0$ έχει

μοναδική λύση στο $[-1, 1]$.

iii) Στο $[1, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα. Το σύνολο τιμών της f θα

είναι το $A_3 = [\Gamma, \Delta)$, όπου $\Gamma = f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και

$$\Delta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta) \Rightarrow \Delta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^3 = +\infty.$$

άρα σύνολο τιμών το $A_3 = (-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty]$.

Το $-2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ άρα το $0 \in A_3 = (-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty]$, άρα από το

θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών η $f(\chi) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον λύση.

Όμως στο διάστημα $(-\infty, -1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα η $f(\chi) = 0$

έχει **μοναδική λύση** στο $(-\infty, -1]$.

Άρα η f θα έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = A..$

γ. Από το ερώτημα β, είναι φανερό ότι :

$$A(\chi_1, f(\chi_1)) = A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta), B(\chi_2, f(\chi_2)) = B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta)).$$

$$\Gamma(\chi_3, f(\chi_3)) = \Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

- Επειδή $2\sin^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \Rightarrow 2\sin^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta)$ που ισχύει, άρα οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$ άρα το $A(-1, 2\sin^2\theta)$ ανήκει στην ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.
- Επειδή ισχύει $-2(1 + \eta\mu^2\theta) = -2 \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta$, άρα οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση της $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$ άρα το $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$ ανήκει στην ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.
- Επειδή ισχύει $-2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta$, άρα οι συντεταγμένες του Γ επαληθεύουν την εξίσωση της $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$ άρα το $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$ ανήκει στην ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.

Τελικά και τα τρία σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.

93.

Εξωεργασία 2007**Τετάρτη 30 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο****Β. ε. Λάθος.****ΘΕΜΑ 3^ο**

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{4}{\chi}$, με $\chi > 0$.

$$\alpha. f'(\chi) = \left(\frac{4}{\chi} \right)' = \frac{4' \cdot \chi - 4 \cdot \chi'}{\chi^2} \Rightarrow f'(\chi) = -\frac{4}{\chi^2} \text{ άρα}$$

$$\text{i) } \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \frac{-\frac{4}{\chi^2}}{\frac{4}{\chi}} = -\frac{4\chi}{4\chi^2} = -\frac{1}{\chi}, \text{ επειδή } \chi > 0 \text{ έχει νόημα το } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} \text{ και}$$

Λιβαδειά

είναι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0.$

ii) $\frac{\chi \cdot f(\chi)}{(\chi-2)^2} = \frac{\chi \cdot \frac{4}{\chi}}{(\chi-2)^2} = \frac{4}{(\chi-2)^2}, \chi > 0$ άρα έχει νόημα το $\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi \cdot f(\chi)}{(\chi-2)^2}.$

Θέτεις $u = \chi - 2$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow 2} u = \lim_{\chi \rightarrow 2} (\chi - 2) = 0$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi \cdot f(\chi)}{(\chi-2)^2} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{4}{(\chi-2)^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{4}{u^2} = +\infty.$$

β. Αν M ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε $M(\chi, f(\chi)) = M\left(\chi, \frac{4}{\chi}\right)$

και $MO = \sqrt{(\chi-0)^2 + \left(\frac{4}{\chi} - 0\right)^2} = \sqrt{\chi^2 + \frac{16}{\chi^2}}$ επομένως η απόσταση MO

γίνεται ελάχιστη όταν η $\sqrt{\chi^2 + \frac{16}{\chi^2}}$ γίνεται ελάχιστη ή ισοδύναμα η

$g(\chi) = \chi^2 + \frac{16}{\chi^2}$ γίνεται ελάχιστη.

Άρα θα μελετήσεις την μονοτονία της $g(\chi)$.

Είναι $g'(\chi) = \left(\chi^2 + \frac{16}{\chi^2}\right)' = 2\chi + \frac{16' \cdot \chi^2 - 16(\chi^2)'}{\chi^4} = 2\chi + \frac{-32\chi}{\chi^4}$ άρα

$$g'(\chi) = 2\chi - \frac{32}{\chi^3} = \frac{2\chi^4 - 32}{\chi^3}. \quad g'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi^4 - 32}{\chi^3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(\chi^4 - 16)}{\chi^3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(\chi^2 + 4)(\chi^2 - 4)}{\chi^3} \geq 0 \text{ και επειδή } \chi > 0 \text{ άρα } g'(\chi) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \chi^2 - 4 \geq 0$. Το $\chi^2 - 4$ έχει ρίζες $\chi_1 = -2$ και $\chi_2 = 2$ και επειδή $\chi > 0$ θα

έχει πίνακα προσήμου .

0	2	$+\infty$
-		+

Δαμιανός Μωραΐτης

και η $g(\chi)$ θα έχει
πίνακα μεταβολών

χ	0	2	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$			

Άρα η $g(\chi) = \chi^2 + \frac{16}{\chi^2}$ έχει ελάχιστη τιμή την $g(2) = 2^2 + \frac{16}{2^2} = 4 + \frac{16}{4} = 8$
άρα η μικρότερη απόσταση για την ΜΟ είναι 8 μονάδες

γ. Η εφαπτομένη σε ένα σημείο με τετμημένη χ_0 έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$f'(\chi_0) = -\frac{4}{\chi_0^2} \text{ επειδή από το α. ερώτημα είναι } f'(\chi) = -\frac{4}{\chi^2}.$$

Αν λοιπόν η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $\psi = -2\chi + 6$ θα

$$\text{πρέπει } f'(\chi_0) = -2 \Leftrightarrow -\frac{4}{\chi_0^2} = -2 \Leftrightarrow 2\chi_0^2 = 4 \Leftrightarrow \chi_0^2 = 2 \Leftrightarrow \chi_0 = \pm 2 \text{ και}$$

επειδή $\chi > 0$ άρα μένει $\chi_0 = 2$ άρα υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής
παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη
προς την ευθεία $\psi = -2\chi + 6$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει

$$\chi \cdot f(\chi) = \chi + 2\eta\mu\chi \quad (1), \text{ για κάθε } \chi \neq 0.$$

α. Επειδή η f είναι συνεχής θα είναι $f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$.

$$\text{Από την (1) για } \chi \neq 0 \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{\chi + 2\eta\mu\chi}{\chi} = 1 + 2 \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \text{ άρα}$$

$$f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 1 + 2 \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \Leftrightarrow f(0) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

β. Είναι $|\eta\mu\chi| \leq |\chi|$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και το $=$ ισχύει μόνον αν $\chi = 0$.

Αν λοιπόν είναι $\chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\chi > 0$ και $\eta\mu\chi > 0$ άρα η σχέση παίρνει

$$\text{την μορφή } \eta\mu\chi < \chi, \chi > 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\chi} < 1 \Leftrightarrow 1 + 2 \frac{\eta\mu\chi}{\chi} < 3 \text{ άρα } f(\chi) < 3$$

Λι β α δ ε ι ά

γ. $f(\chi) = 2 \Leftrightarrow f(\chi) - 2 = 0$. Θεωρείς την $g(\chi) = f(\chi) - 2$.

Για την $g(\chi)$ θα εξετάσεις αν ισχύει το Θ. Bolzano στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$$\text{Είναι } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = 1 + 2\frac{\eta\mu\chi}{\chi} - 2 = 2\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = 2\frac{1}{\frac{\pi}{2}} - 1 = 2\frac{2}{\pi} - 1 \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{\pi} > 0 \text{ και } g(\pi) = f(\pi) - 2 = 1 + 2\frac{\eta\mu\pi}{\pi} - 2 = 2\frac{0}{\pi} - 1 = -1 < 0.$$

Άρα $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0$ άρα από Θ. Bolzano η $g(\chi) = 0 \Leftrightarrow f(\chi) = 2$ θα έχει

τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

94.

ωανελλήνικες 2007 - Εωαναληωτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1, A.2 Θεωρία (δες αποδείξεις)

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}, & \chi < 0 \\ \chi^2 + \alpha\chi + \beta\sigma\upsilon\eta\chi, & \chi \geq 0 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi} = 3$, σύμφωνα με γνωστό

παράδειγμα σχολικού βιβλίου, θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = 3$.

β. Επειδή $\frac{\pi}{2} \in [0, +\infty)$ και η f στο διάστημα αυτό έχει τύπο

Δαμιανός Μωραΐτης

$$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \sin x \quad \text{άρα} \quad f'(x) = (x^2 + \alpha x + \beta \sin x)' = 2x + \alpha - \beta \cos x$$

$$\text{οπότε} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow 2 \frac{\pi}{2} + \alpha - \beta \cos \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \pi + \alpha - \beta = \pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta \quad (1).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \alpha x + \beta \sin x) = 3 \Rightarrow$$

$$0 + 0 + \beta \cdot 1 = 3 \quad \text{άρα} \quad \beta = 3 \quad (2). \text{ Από (1) και (2) συμπεραίνεις ότι } \alpha = \beta = 3.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \cdot \ln x$, $x > 0$.

α. Μελετάς το πρόσημο της f' γενικότερα, δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$,

Παρατήρηση Δεν είναι απαραίτητο να μελετήσεις το πρόσημο στο

$(0, +\infty)$, σύμφωνα με το ερώτημα αρκεί να αποδείξεις ότι $f'(x) > 0$ στο

$(1, +\infty)$, όμως συνήθως συμφέρει να φτιάχνεις πίνακα μεταβολών για την f γιατί θα σε διευκολύνει στα επόμενα ερωτήματα.

$$\text{Είναι} \quad f'(x) = (e^x - e \cdot \ln x)' \Rightarrow f'(x) = e^x - \frac{e}{x}. \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{e}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xe^x - e}{x} \geq 0, x > 0 \Leftrightarrow xe^x - e \geq 0,$$

1^{ος} τρόπος

Θεώρησε μια νέα συνάρτηση g : $g(x) = xe^x - e$, είναι $g'(x) = (xe^x - e)'$

$$\Rightarrow g'(x) = e^x + xe^x > 0 \quad \text{γιατί} \quad x > 0, e^x > 0. \quad \text{Άρα η } g \text{ είναι γνησίως}$$

$$\text{αύξουσα, επειδή} \quad g(1) = 1e^1 - e = 0 \quad \text{άρα} \quad x > 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{όταν} \quad x > 1 \quad \text{και} \quad f'(1) = 0$$

άρα για την f ισχύει ο

πίνακας μεταβολών

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Αι β α δ ε ι ά

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

2^{ος} τρόπος

Για να δείξεις ότι $f'(\chi) \geq 0$ μπορείς να θεωρήσεις την $f'(\chi)$ ως νέα συνάρτηση και να μελετήσεις την μονοτονία της, βρίσκοντας το πρόσημο

$$\text{της } f''(\chi). \text{ Είναι } f'(\chi) = e^\chi - \frac{e}{\chi} \text{ άρα } f''(\chi) = \left(e^\chi - \frac{e}{\chi} \right)' =$$

$$e^\chi - \frac{e' \cdot \chi - e \cdot \chi'}{\chi^2} \text{ άρα } f''(\chi) = e^\chi + \frac{e}{\chi^2} > 0 \text{ γιατί } e^\chi, \chi > 0.$$

Άρα η $f'(\chi)$ γνησίως αύξουσα και επομένως $\chi \geq 1 \Rightarrow f'(\chi) \geq f'(1) = e$

Άρα πίνακας προσήμου για την f ...

β. Από τον πιο πίνακα προκύπτει, επίσης ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ παρουσιάζει στη θέση $\chi_0 = 1$ ολικό ελάχιστο άρα για κάθε $\chi > 0$ θα είναι

$$f(\chi) \geq f(1) = e^1 - e \cdot \ln 1 = e \text{ άρα } f(\chi) \geq e, \text{ για κάθε } \chi > 0$$

95.

Εξωεργασία 2007 - Εωαναληρωτικές

Τετάρτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία.

B. 4. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} -\frac{1}{8}\chi^2 + \frac{1}{2}, & \chi < 2 \\ \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2(\chi - 1)}, & \chi \geq 2 \end{cases}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

α. Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{8}\chi^2 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{8}2^2 + \frac{1}{2} = 0$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2(\chi - 1)} = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2(2 - 1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi)$ επομένως η f συνεχής στο $\chi_0 = 2$.

Είναι $\lambda(\chi) = \frac{f(\chi) - f(2)}{\chi - 2} = \frac{f(\chi) - 0}{\chi - 2} = \frac{f(\chi)}{\chi - 2}$ και

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \lambda(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{-\frac{1}{8}\chi^2 + \frac{1}{2}}{\chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{-\frac{\chi^2 - 4}{8}}{\chi - 2} = -\frac{1}{8} \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi^2 - 4}{\chi - 2} = \\ &= -\frac{1}{8} \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{(\chi - 2)(\chi + 2)}{\chi - 2} = -\frac{1}{8} \lim_{\chi \rightarrow 2} (\chi + 2) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \lambda(\chi) = -\frac{1}{8}4 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow 2^+} \lambda(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2(\chi - 1)}}{\chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{(\chi - 2)(\chi - 3)}{(\chi - 2)2(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi - 3}{2(\chi - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow 2^-} \lambda(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} \lambda(\chi)$ επομένως η f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$.

β. Επειδή $0 < 2$ άρα

$$\checkmark \quad f(0) = -\frac{1}{8}0^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ άρα } M(0, f(0)) = M\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$\checkmark \quad f'(\chi) = \left(-\frac{1}{8}\chi^2 + \frac{1}{2} \right)' = -2\frac{1}{8}\chi = -\frac{1}{4}\chi \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{4}0 = 0$$

$$\text{Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } \psi - \frac{1}{2} = 0 \cdot (\chi - 0) \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}.$$

γ. Ένας τρόπος είναι να βρεις την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f στο $+\infty$ από τον τύπο $\psi = \lambda\chi + \beta$ με $\lambda = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και

$\beta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - \lambda\chi)$ και να αποδειχθεί ότι $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\beta = -2$, όμως η

Λιβαδερά

εκφώνηση σε σπρώχνει να χρησιμοποιήσεις τον ορισμό που λέει ότι η $\psi = \lambda\chi + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ αν $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (\lambda\chi + \beta)] = 0$.

Πράγματι επειδή $\chi \rightarrow +\infty$ θα είναι $\chi > 2$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[f(\chi) - \left(\frac{1}{2}\chi - 2 \right) \right] =$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2(\chi - 1)} - \frac{\chi - 4}{2} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 5\chi + 6 - (\chi - 4)(\chi - 1)}{2(\chi - 1)} \right] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 5\chi + 6 - (\chi^2 - 5\chi + 4)}{2(\chi - 1)} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 - 5\chi + 6 - \chi^2 + 5\chi - 4}{2(\chi - 1)} \right] =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi - 1} \text{ και αν θέσεις } u = \chi - 1 \text{ είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} u = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi - 1) = +\infty \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi - 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0 \text{ άρα η ευθεία } \psi = \frac{1}{2}\chi - 2 \text{ είναι ασύμπτωτη της}$$

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(\chi) + f(\chi) = 8\chi^3 - 12\chi^2 + 8\chi - 2, \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

α. Για να αποδείξεις ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$ έχεις δυο τρόπους.

1^{ος} τρόπος με τον ορισμό, που κατά κανόνα δεν βολεύει, ειδικά στις πανελλήνιες.

2^{ος} τρόπος με τη μελέτη της μονοτονίας, που κατά κανόνα χρησιμοποιείται γιατί, η μονοτονία στις πανελλήνιες χρειάζεται και σε πιο κάτω ερωτήματα.

$$\text{Είναι } (f^3(\chi) + f(\chi))' = (8\chi^3 - 12\chi^2 + 8\chi - 2)' \Rightarrow$$

$$3f^2(\chi) \cdot f'(\chi) + f'(\chi) = 24\chi^2 - 24\chi + 8 \Leftrightarrow$$

$$(3f^2(\chi)+1)f'(\chi)=8(3\chi^2-3\chi+1). \text{ Επειδή } 3f^2(\chi)\geq 0 \text{ άρα } 3f^2(\chi)+1>0$$

$$\text{για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ (Προσέξτε το } >, \text{ όχι } \geq) \text{ άρα } f'(\chi)=\frac{8(3\chi^2-3\chi+1)}{3f^2(\chi)+1}.$$

$$\text{Το } 3\chi^2-3\chi+1 \text{ έχει διακρίνουσα } \Delta=(-3)^2-4\cdot 3\cdot 1=9-12=-3<0 \text{ άρα}$$

$$\text{είναι } 8(3\chi^2-3\chi+1)>0 \text{ επομένως } f'(\chi)>0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως η f θα είναι και 1-1.

$$\beta. \text{ Είναι } f^3(0)+f(0)=8\cdot 0^3-12\cdot 0^2+8\cdot 0-2=-2 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(0)+1)f(0)=-2 \text{ και } f^2(0)+1>0 \text{ άρα } f(0)=\frac{-2}{f^2(0)+1}<0$$

$$\text{Είναι } f^3(1)+f(1)=8\cdot 1^3-12\cdot 1^2+8\cdot 1-2=2 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(1)+1)f(1)=2 \text{ και } f^2(1)+1>0 \text{ άρα } f(1)=\frac{2}{f^2(1)+1}>0.$$

Άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ επομένως από Θ. Bolzano η $f(\chi)=0$ θα έχει μια

τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη άρα η

εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.

$$\gamma. \text{ Αν για τη συνάρτηση } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι } f(g(\chi)-3\chi)=f(\chi^2+2) \text{ τότε}$$

$$[f(g(\chi)-3\chi)]'=[f(\chi^2+2)]' \Rightarrow$$

$$f'(g(\chi)-3\chi)\cdot g'(\chi)=f'(\chi^2+2)(\chi^2+2)' \Rightarrow$$

$$f'(g(\chi)-3\chi)\cdot g'(\chi)=2\chi\cdot f'(\chi^2+2) \text{ και επειδή } f'(\chi)>0 \text{ θα είναι και}$$

$$f'(g(\chi)-3\chi)>0, f'(\chi^2+2)>0 \text{ άρα } g'(\chi)=\frac{2\chi\cdot f'(\chi^2+2)}{f'(g(\chi)-3\chi)} \text{ επομένως}$$

$$\chi>0 \Leftrightarrow g'(\chi)>0 \text{ και } \chi<0 \Leftrightarrow g'(\chi)<0 \text{ είναι προφανές ότι η } g$$

παρουσιάζει ελάχιστο το $\chi_0=0$.

Λ ι β α δ ε ι ά

96.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Θεωρία.

γ) 3. Σωστό, 4. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^οΈστω η συνάρτηση $f(\chi) = \ln \chi + \frac{1}{4\chi}$, $\chi \in (0, +\infty)$.

$$\alpha. \quad f\left(\frac{1}{e^5}\right) = \ln \frac{1}{e^5} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{e^5}} = \ln e^{-5} + \frac{e^5}{4} = -5 \ln e + \frac{e^5}{4} = -5 + \frac{e^5}{4} = \frac{e^5 - 20}{4} > 0.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \ln 4^{-1} + \frac{1}{1} = -\ln 4 + 1 = 1 - \ln 4. \text{ Όμως}$$

$$\begin{cases} e < 4 \\ \ln \text{ γν. αύξουσα} \end{cases} \Leftrightarrow \ln e < \ln 4 \Leftrightarrow 1 < \ln 4 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \ln 4 < 0.$$

$$f(e^5) = \ln e^5 + \frac{1}{4e^5} = 5 \ln e + \frac{1}{4e^5} = 5 + \frac{1}{4e^5} > 0.$$

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι $\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1)$.

$$f(1) = \ln 1 + \frac{1}{4 \cdot 1} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f'(\chi) = \left(\ln \chi + \frac{1}{4\chi} \right)' = \frac{1}{\chi} - \frac{1}{4\chi^2} = \frac{4\chi - 1}{4\chi^2} \text{ άρα } f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 1}{4 \cdot 1^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Άρα } \psi - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(\chi - 1) \Leftrightarrow 4\psi - 1 = 3\chi - 3 \Leftrightarrow 3\chi - 4\psi - 2 = 0.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Είναι $f'(\chi) = \frac{4\chi-1}{4\chi^2}$, (δες πιο πάνω) άρα $f'(\chi) \geq 0 \Rightarrow \frac{4\chi-1}{4\chi^2} \geq 0, 4\chi^2 > 0$

$$\text{άρα } 4\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{4}.$$

Άρα πίνακας μεταβολών για την f

Από τον διπλανό πίνακα είναι

φανερό ότι η f παρουσιάζει είναι

χ	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(\chi)$		-	+
$f(\chi)$			

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Παρεμπιπτόντως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\chi = \frac{1}{4}$ το

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \ln 4 < 0 \quad (\text{δες και πιο πάνω προηγούμενο ερώτημα})$$

δ. Είναι $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0, f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ (δες και πιο πάνω προηγούμενο ερώτημα) άρα

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \text{επομένως από Θ. Bolzano στο } \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right) \text{ η } f(\chi) = 0 \text{ θα}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση και λόγω μονοτονίας της f στο διάστημα αυτό θα

$$\text{έχει ακριβώς μια λύση στο } \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right).$$

Είναι $f(e^5) > 0, f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ (δες και πιο πάνω προηγούμενο ερώτημα) άρα

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f(e^5) < 0 \quad \text{επομένως από Θ. Bolzano στο } \left(\frac{1}{4}, e^5\right) \text{ η } f(\chi) = 0 \text{ θα}$$

έχει μια τουλάχιστον λύση και λόγω μονοτονίας της f στο διάστημα αυτό θα

$$\text{έχει ακριβώς μια λύση στο } \left(\frac{1}{4}, e^5\right).$$

Άρα τελικά η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα

$$(0, +\infty), \text{ μια στο } \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right) \text{ και μια στο } \left(\frac{1}{4}, e^5\right).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(\chi) - f(\chi) = -4e^{-3\chi} \quad \text{και} \quad f(0) = 2.$$

α. Είναι $h'(\chi) = (e^{-\chi}f(\chi) - e^{-4\chi})' = (e^{-\chi}f(\chi))' - (e^{-4\chi})' =$

$$\left((e^{-\chi})' f(\chi) + e^{-\chi} f'(\chi) \right) - e^{-4\chi} (-4\chi)' \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = -e^{-\chi}f(\chi) + e^{-\chi}f'(\chi) + 4e^{-4\chi}.$$

$$\text{Από } f'(\chi) - f(\chi) = -4e^{-3\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = f(\chi) - 4e^{-3\chi}.$$

$$\text{Άρα } h'(\chi) = -e^{-\chi}f(\chi) + e^{-\chi}(f(\chi) - 4e^{-3\chi}) + 4e^{-4\chi} \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = -e^{-\chi}f(\chi) + e^{-\chi}f(\chi) - 4e^{-4\chi} + 4e^{-4\chi} = 0.$$

$$\text{Άρα } h(\chi) = c \text{ και } h(0) = e^0 f(0) - e^0 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 \text{ άρα } h(\chi) = 1.$$

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $h(\chi) = e^{-\chi}f(\chi) - e^{-4\chi}$ και $h(\chi) = 1$

$$\text{άρα } e^{-\chi}f(\chi) - e^{-4\chi} = 1 \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{1}{e^{-\chi}} + \frac{e^{-4\chi}}{e^{-\chi}} = e^{\chi} + e^{-4\chi+\chi} = e^{\chi} + e^{-3\chi} \Rightarrow$$

$$f(\chi) = e^{\chi} + \frac{1}{e^{3\chi}}.$$

97.**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008****Σάββατο 24 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο****A.1 Θεωρία.****B δ. Λάθος***Δαμιανός Μωραΐτης*

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

α. Αρκεί να δείξεις ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Πράγματι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ άρα το $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$ είναι της μορφής $0(-\infty)$ και

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{-\infty}{\stackrel{+\infty}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0. \text{ Άρα η } f \text{ συνεχής στο } 0.$$

β. Για $x > 0$ είναι $f(x) = x \cdot \ln x$ άρα $f'(x) = (x \cdot \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \Rightarrow$

$$f'(x) = \ln x + 1. \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 = -\ln e = \ln \frac{1}{e} \text{ και}$$

επειδή η $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα άρα $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$ επομένως για

την f ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

Παρατηρήστε ότι f έχει στο $x_0 = \frac{1}{e}$ ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

- ✓ Στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left(f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right) = \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}, f(0)\right) \Leftrightarrow f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right].$$

- ✓ Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα :

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi)\right) \Leftrightarrow f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

$$\text{Άρα Πεδίο τιμών της } f \text{ το } D_f = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

- γ. Επειδή το ερώτημα πρέπει να συνδεθεί με τα προηγούμενα θα έπρεπε κανείς να σκεφτεί να λογαριθμίσει οπότε η πλήρης απάντηση είναι :

$$\chi > 0 \text{ και η } \ln \chi \text{ είναι } 1 - 1 \text{ άρα } \chi = e^{\frac{\alpha}{\chi}} \Leftrightarrow \ln \chi = \ln e^{\frac{\alpha}{\chi}} = \frac{\alpha}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\chi \cdot \ln \chi = \alpha \text{ άρα η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την } f(\chi) = \alpha.$$

Η τελευταία φέρνει στο νου το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και έτσι για το α διακρίνεις τις εξής περιπτώσεις :

- ✓ $\alpha \notin \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ δηλαδή το α δεν ανήκει στο πεδίο τιμών άρα αποκλείεται

να υπάρχει $\chi \in D_f$ τέτοιο ώστε $f(\chi) = \alpha$, άρα καμία λύση για την

$$f(\chi) = \alpha \text{ και κατ' επέκταση για την } \chi = e^{\frac{\alpha}{\chi}}.$$

- ✓ $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε η $f(\chi) = -\frac{1}{e}$ έχει ως μοναδική λύση την $\chi = \frac{1}{e}$.

- ✓ $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ άρα Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η $f(\chi) = \alpha$ έχει μια

τουλάχιστον λύση $\chi \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, άρα $\chi > 0$ και επειδή, όπως φαίνεται από

τον πίνακα μονοτονίας η f στο διάστημα αυτό είναι γνησίως φθίνουσα άρα

η $f(\chi) = \alpha$ και κατ' επέκταση η $\chi = e^{\frac{\alpha}{\chi}}$ θα έχει μοναδική θετική λύση.

$$\checkmark \quad \alpha = 0 \text{ τότε } f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi \cdot \ln \chi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ \ln \chi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ \chi = 1 \end{cases}.$$

Η $\chi = 0$ απορρίπτεται γιατί δεν είναι θετική άρα μένει μοναδική θετική λύση η $\chi = 1$

$$\checkmark \quad \alpha \in (0, +\infty) \text{ άρα Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η } f(\chi) = \alpha \text{ έχει μια}$$

τουλάχιστον λύση $\chi \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, άρα $\chi > 0$ και επειδή, όπως φαίνεται

από τον πίνακα μονοτονίας η f στο διάστημα αυτό είναι γνησίως αύξουσα

άρα η $f(\chi) = \alpha$ και κατ' επέκταση η $\chi = e^{\frac{\alpha}{\chi}}$ θα έχει μοναδική θετική λύση.

δ. Αν στο προηγούμενο ερώτημα έπρεπε να έχεις «έμπνευση» στο ερώτημα αυτό χρειάζοσουν την επιφοίτηση του αγίου πνεύματος. Δείτε τη λύση και εξηγήστε μου και εμένα του πτωχού :

1^{ον} Ποιος από μας που διδάσκουμε κατευθύνσεις και Δέσμες παλιότερα δεν δυσκολεύτηκε και τελικά έφτασε, αν έφτασε, στη λύση ψάχνοντας και δοκιμάζοντας «κόλπα» που έρχονται από την παλιά καλή εποχή των «Δεσμών»;

2^{ον} Πού ο μαθητής διδάχτηκε να επιλύει ανισώσεις με χρήση της μονοτονία σε συνδυασμό μάλιστα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής και βάλανε τέτοιο ζήτημα; Τα ερωτήματα πρέπει να έχουν συνάφεια μεταξύ τους σύμφωνα με το γράμμα και το πνεύμα του νόμου και όχι να αποτελούν συρραφή ασκήσεων που απλώς ανήκουν στο ίδιο κεφάλαιο, πέραν τούτου δε πρέπει να είναι και στο πνεύμα της διδακτέας ύλης, όχι απλώς να χρησιμοποιούν στην απάντηση θεωρήματα από την ύλη.

Η απάντηση έχει ως εξής :

Λιβαδεία

$\chi \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \chi > 0 \Leftrightarrow \chi + 1 > \chi$, η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο διάστημα $[\chi, \chi + 1] \subseteq (0, +\infty)$, επομένως η f στο $[\chi, \chi + 1]$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. άρα θα υπάρξει $\xi \in (\chi, \chi + 1)$

$$\text{τέτοιο ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(\chi + 1) - f(\chi)}{\chi + 1 - \chi} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\chi + 1) - f(\chi) \quad (1).$$

$$f'(\chi) = \ln \chi + 1 \Rightarrow f''(\chi) = \frac{1}{\chi} > 0 \text{ για κάθε } \chi \text{ στο διάστημα } (0, +\infty).$$

Άρα η $f'(\chi) = \ln \chi + 1$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση και επομένως

$$\xi \in (\chi, \chi + 1) \Rightarrow \xi < \chi + 1 \text{ άρα } f'(\xi) < f'(\chi + 1) \quad (2)$$

Από (1) και (2) είναι $f(\chi + 1) - f(\chi) < f'(\chi + 1) \Leftrightarrow$

$$f'(\chi + 1) > f(\chi + 1) - f(\chi), \text{ για κάθε } \chi > 0.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\chi) = (10\chi^3 + 3\chi) \int_0^2 f(t) dt - 45.$$

α. Το $\int_0^2 f(t) dt = \kappa$ σταθερά άρα η $f(\chi) = (10\chi^3 + 3\chi) \int_0^2 f(t) dt - 45 \Leftrightarrow$

$$f(\chi) = \kappa \cdot (10\chi^3 + 3\chi) - 45 \Leftrightarrow \int_0^2 f(\chi) d\chi = \int_0^2 [\kappa \cdot (10\chi^3 + 3\chi) - 45] d\chi =$$

$$\left[\kappa \cdot \left(10 \frac{\chi^4}{4} + 3 \frac{\chi^2}{2} \right) - 45\chi \right]_0^2 = \kappa \cdot \left(10 \frac{2^4}{4} + 3 \frac{2^2}{2} \right) - 45 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = 46 \cdot \kappa - 45 \Leftrightarrow \kappa = 2. \text{ Άρα } f(\chi) = 20\chi^3 + 6\chi - 45$$

β. Από τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης και επειδή η g είναι δυο

$$\text{φορές παραγωγίσιμη θα είναι } g''(\chi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi + h) - g'(\chi)}{h}.$$

$$\text{Άρα αν θέσεις όπου } h \text{ το } -h \text{ θα έχεις } g''(\chi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi - h) - g'(\chi)}{-h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-g'(\chi - h) + g'(\chi)}{h} \Leftrightarrow g''(\chi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi) - g'(\chi - h)}{h}.$$

γ. ι. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} (g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)) = g(\chi) - 2g(\chi) + g(\chi) = 0$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0.$$

Άρα το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)}{h^2}$ είναι της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$ άρα

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)]'}{(h^2)'}$$

$$[g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)]' = g'(\chi + h)(\chi + h)' - 2g'(\chi) + g'(\chi - h)(\chi - h)'$$

Εδώ πρέπει να παρατηρήσεις ότι επειδή ζητάς το $\lim_{h \rightarrow 0}$ άρα η μεταβλητή και

στην διαδικασία της παραγωγίσης είναι το h και το χ είναι σταθερά, οπότε

$$(\chi + h)' = \chi' + h' = 0 + 1 = 1, (\chi - h)' = \chi' - h' = 0 - 1 = -1, (h^2)' = 2h \text{ και}$$

$g'(\chi) = 0$ επειδή το $g(\chi)$ είναι σταθερός όρος σε σχέση με το h που είναι η μεταβλητή παραγωγίσης, επειδή δεν περιέχει καθόλου h .

$$\text{Άρα τελικά } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\chi + h) - 2g(\chi) + g(\chi - h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi + h) - g'(\chi - h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi + h) - g'(\chi) + g'(\chi) - g'(\chi - h)}{h} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi + h) - g'(\chi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi) - g'(\chi - h)}{h} \right].$$

✓ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi+h) - g'(\chi)}{h} = g''(\chi)$ από τον ορισμό της παραγώγου, όπως

είδες και πιο πάνω

✓ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(\chi) - g'(\chi-h)}{h} = g''(\chi)$ από το προηγούμενο ερώτημα.

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\chi+h) - 2g(\chi) + g(\chi-h)}{h^2} = \frac{1}{2} [g''(\chi) + g''(\chi)] = g''(\chi)$$

$$\text{Οπότε από τη σχέση } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\chi+h) - 2g(\chi) + g(\chi-h)}{h^2} = f(\chi) + 45 \Leftrightarrow$$

$$g''(\chi) = f(\chi) + 45 \Leftrightarrow g''(\chi) = 20\chi^3 + 6\chi - 45 + 45 \Leftrightarrow g''(\chi) = 20\chi^3 + 6\chi.$$

$$\text{Άρα } g'(\chi) = 20 \frac{\chi^4}{4} + 6 \frac{\chi^2}{2} + c_1 = 5\chi^4 + 3\chi^2 + c_1 \text{ και επειδή } g'(0) = 1 \text{ άρα}$$

$$c_1 = 1 \text{ επομένως } g'(\chi) = 5\chi^4 + 3\chi^2 + 1 \text{ άρα } g(\chi) = 5 \frac{\chi^5}{5} + 3 \frac{\chi^3}{3} + \chi + c_2 \Leftrightarrow$$

$$g(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi + c_2 \text{ και επειδή } g(0) = 1 \text{ άρα } c_2 = 1 \text{ επομένως}$$

$$g(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi + 1.$$

ii. **1^{ος} τρόπος** (κλασικός με τον ορισμό):

$$\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1^3 \neq \chi_2^3 \text{ και } \chi_1^5 \neq \chi_2^5 \text{ άρα } \chi_1^5 + \chi_1^3 + \chi_1 + 1 \neq \chi_2^5 + \chi_2^3 + \chi_2 + 1$$

$$\Rightarrow g(\chi_1) \neq g(\chi_2) \text{ άρα η } g(\chi) \text{ 1-1}$$

2^{ος} τρόπος (με το θεώρημα): Αρκεί να δείξεις ότι η $g(\chi)$ είναι γνησίως μονότονη.

$$\text{Είναι } g'(\chi) = (\chi^5 + \chi^3 + \chi + 1)' = 5\chi^4 + 3\chi^2 + 1. \text{ Είναι } \chi^4 \geq 0, \chi^2 \geq 0 \text{ και}$$

$$1 > 0 \text{ άρα } g'(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ επομένως η } g(\chi) \text{ γνησίως αύξουσα}$$

$$\text{άρα η } g(\chi) \text{ 1-1.}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

98.

Εξωεργασία 2008

Τετάρτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο**B. 2. Λάθος, 4. Σωστό****ΘΕΜΑ 3^ο**

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$.

A. α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = (1-1) = 0$ άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής

στο σημείο $x_0 = 1$

β. Αν $x \neq 1$ θα είναι $\lambda(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ και $f(1) = 1 - 1 = 0$ άρα

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 1} \Rightarrow \lambda(x) = \frac{f(x)}{x - 1}.$$

✓ Αν $x < 1$ τότε $\lambda(x) = \frac{1-x}{x-1} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1.$

✓ Αν $x > 1$ τότε $\lambda(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \lambda(x).$$

Επομένως η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$**

B. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, 1)$ είναι $\psi - f(2) = f'(2)(x - 2).$

Είναι $f(2) = 1$, όταν $x > 1$ είναι $f'(x) = [(x-1)^2]' = 2(x-1)$ άρα

$f'(2) = 2(2-1) = 2$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\psi - 1 = 2(x - 2)$

$$\Leftrightarrow \psi = 2x - 4 + 1 \Leftrightarrow \psi = 2x - 3.$$

Αι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 2\chi + \kappa}{\chi}$, όπου κ είναι πραγματικός αριθμός.

A. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

B. Ο συντελεστής διεύθυνσης της f στο $M(1, f(1))$ είναι ο $f'(1)$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(\chi) &= \left(\frac{\chi^2 + 2\chi + \kappa}{\chi} \right)' = \frac{(\chi^2 + 2\chi + \kappa)' \chi - (\chi^2 + 2\chi + \kappa) \chi'}{\chi^2} = \\ &= \frac{(2\chi + 2)\chi - (\chi^2 + 2\chi + \kappa)1}{\chi^2} = \frac{2\chi^2 + 2\chi - \chi^2 - 2\chi - \kappa}{\chi^2} = \frac{\chi^2 - \kappa}{\chi^2} \Rightarrow \\ f'(\chi) &= 1 - \frac{\kappa}{\chi^2}. \quad \text{Άρα } f'(1) = 1 - \frac{\kappa}{1^2} = 1 - \kappa. \end{aligned}$$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

$M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$ θα πρέπει $1 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Γ. Για $\kappa = 1$ είναι $f(\chi) = \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi} = \frac{(\chi + 1)^2}{\chi}$

α. i) Αρχικά αναζητάς την κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi_0 = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{(\chi + 1)^2}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} (\chi + 1)^2 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

άρα σύμφωνα με τους ορισμούς (αν ένα από τα πλευρικά όρια είναι $\pm\infty$)

η ευθεία $\chi = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ii) Αναζητάς και πλάγιες ασύμπτωτες : $\frac{f(\chi)}{\chi} = \frac{\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi}}{\chi} = \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2},$

$$\frac{f(\chi)}{\chi} = \frac{\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi}}{\chi} = \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

✓ στο $+\infty$: $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 = 1$ άρα $\lambda = 1$

και $\beta = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - \lambda \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi} - \chi \right] =$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi^2 + 2\chi + 1 - \chi^2}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\chi + 1}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\chi}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2}{\chi} = 0$$

Άρα η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την $\Psi = \chi$.

✓ στο $-\infty$: $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} 1 = 1$ άρα $\lambda = 1$

και $\beta = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} [f(\chi) - \lambda \cdot \chi] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi} - \chi \right] =$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\chi^2 + 2\chi + 1 - \chi^2}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{2\chi + 1}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\frac{2\chi}{\chi} \right] = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{2}{\chi} = 0$$

Άρα η ευθεία $\Psi = \chi$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f και στο $-\infty$.

β. Από το Β. ερώτημα είναι $f'(\chi) = 1 - \frac{\kappa}{\chi^2}$, $\kappa = 1$ άρα $f'(\chi) = 1 - \frac{1}{\chi^2}$.

$$f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 \geq 0 \text{ η } \chi^2 - 1 = 0 \text{ έχει ρίζες}$$

$\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 1$, πίνακα προσήμου

$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
+		-		+

Άρα στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f' είναι θετική επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

99.

ωανελλήνικες 2008 - Εωαναληωτικές**Πέμπτη 3 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο****Β. Θεωρία . Γ. β. Λάθος****ΘΕΜΑ 3^ο**Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \cdot \ln x, x > 0$.

$$\alpha. \text{ Είναι } f'(x) = (x^2 - 2 \cdot \ln x)' = 2x - 2 \frac{1}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\text{άρα } f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0.$$

Η $x^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$

και πίνακα προσήμου

$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
		-	+	

Άρα με $x > 0$ έχουμε :

- ✓ στο διάστημα $(0, 1)$ η f' είναι αρνητική επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ✓ στο διάστημα $(1, +\infty)$ η f' είναι θετική επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα .

Άρα στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) \geq f(1) = 1^2 - 2 \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

β Αρχικά αναζητάς την κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 \cdot \ln x) = 0 - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -2 \cdot (-\infty) = +\infty \text{ άρα}$$

η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f στο $x_0 = 0$.Αναζητάς και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.**Δαμιανός Μωραΐτης**

$$\text{Είναι : } \frac{f(\chi)}{\chi} = \frac{\chi^2 - 2 \cdot \ln \chi}{\chi} = \chi - 2 \frac{\ln \chi}{\chi}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\chi - 2 \frac{\ln \chi}{\chi} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi - 2 \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln \chi}{\chi},$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln \chi}{\chi} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \chi)'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\chi}}{1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = +\infty - 0 = +\infty.$$

Άρα η συνάρτηση f **δεν έχει** στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη.

$$\gamma. \text{ Έστω η συνάρτηση } g(\chi) = \begin{cases} \frac{\ln \chi}{f(\chi)}, & \chi > 0 \\ \kappa, & \chi = 0 \end{cases}$$

$$i. \text{ Είναι } g(0) = \kappa \text{ και } \chi > 0 \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} g(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\ln \chi}{f(\chi)}.$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \ln \chi = -\infty \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (\chi^2 - 2 \cdot \ln \chi) = 0 - 2(-\infty) = +\infty$$

$$\text{άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} g(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\ln \chi}{f(\chi)} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \chi)'}{(f(\chi))'} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\chi}}{2\chi - 2 \frac{1}{\chi}} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\chi}}{\frac{2\chi^2 - 2}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi}{\chi(2\chi^2 - 2)} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\chi^2 - 2} \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0^+} g(\chi) = -\frac{1}{2}.$$

και για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 1$ πρέπει

$$g(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} g(\chi) \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2}.$$

Λιβαδειά

ii. Αν $\kappa = -\frac{1}{2}$, τότε η $g(\chi) = \begin{cases} \frac{\ln \chi}{f(\chi)}, & \chi > 0 \\ -\frac{1}{2}, & \chi = 0 \end{cases}$.

Στο διάστημα $[0, e]$ η συνάρτηση είναι συνεχής και $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$,

$$g(e) = \frac{\ln e}{f(e)} = \frac{1}{e^2 - 2 \cdot \ln e} = \frac{1}{e^2 - 2} > 0. \text{ Άρα για την } g \text{ ισχύουν οι}$$

προϋποθέσεις του Θ. Bolzano άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Θ
έ
μ
Π
α
τ
α
Κ
α
τ
ε
ύ
θ
υ
ν
σ
η
ς

Πανελλήνιες 1975 - 2008

Κεφάλαιο 4^ο

Ολοκλήρωμα

Εμβαδόν

Μην ξεχνάς ότι το αγκίστρι είναι καλά κρυμμένο,
μέσα σε ωραίο και ελκυστικό δόλωμα, γι αυτό
πρόσεχε πάντα αυτά που σου προσφέρονται χωρίς να
τα ζητήσεις.

Κεφάλαιο 4^ο

Ολοκλήρωμα

Συναρτήσεων

Εμβαδόν

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις

ΟΛΕ 227 – 248

Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων

ΟΛΘ 251 – 292

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλήνιων Εξετάσεων

ΟΛΑ 295 – 376

Συντομογραφίες

* * ΟΛΕ = Ολοκλήρωμα σύντομη επανάληψη.

* * ΟΛΘ = Ολοκλήρωμα εκφωνήσεις θεμάτων.

* * ΟΛΑ = Ολοκλήρωμα απαντήσεις θεμάτων.

Ειδανάληψη

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ .

Ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f , κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν η συνάρτηση f είναι *συνεχής* στο *διάστημα Δ* τότε υπάρχει *πάντα* η F παράγουσα της f .

Θεώρημα :

Αν F είναι μία αρχική συνάρτηση της f , τότε κάθε συνάρτηση G της μορφής $G(x) = F(x) + c$ είναι επίσης μια αρχική συνάρτηση της f και αντίστροφα κάθε αρχική συνάρτηση G της f θα είναι οπωσδήποτε της μορφής $G(x) = F(x) + c$.

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ .

Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων της f στο Δ και συμβολίζεται με : $\int f(x)dx = F(x) + c$ όπου F μια αρχική συνάρτηση της f και $c \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητες

Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$1. \quad \int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$2. \quad \int f''(x)dx = f'(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Συμβολισμός

$$df(x) = f'(x)dx$$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο Δ παράγουσες F, G αντίστοιχα τότε

$$3. \quad \int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx = \lambda \cdot F(x) + c, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$4. \quad \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Μέθοδοι υπολογισμού

Όταν έχεις να υπολογίσεις ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ πάντα προσπαθείς να βρεις μια παράγουσα F της f , χρησιμοποιώντας τις πάνω ιδιότητες και συμβολισμούς καθώς και τις γνώσεις σου από τις παραγώγους.

Αν F μια παράγουσα της f τότε $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + c$.

Ο πιο κάτω πίνακας συνδέει τις παραγώγους με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα και σε βοηθά να βρεις τα αντίστοιχα ολοκληρώματα

Αντίστροφη συνάρτηση	
Παράγωγος	Ολοκλήρωμα
$(c)' = 0$	$\int 0 \cdot dx = \int (c)' dx = c$
$(x)' = 1$	$\int dx = \int 1 \cdot dx = \int (x)' dx = x + c$
$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1) \cdot x^{\alpha}$	$\int x^{\alpha} dx = \int \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int (\sqrt{x})' dx = \sqrt{x} + c$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \Leftrightarrow a^x = \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)'$	$\int a^x dx = \int \left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$\int \sigma\upsilon\nu x \cdot dx = \int (\eta\mu x)' dx = \eta\mu x + c$

$(\sin \chi)' = -\eta \mu \chi$	$\int \eta \mu \chi \cdot d\chi = \int (-\sin \chi)' d\chi = -\sin \chi + c$
$(\epsilon \phi \chi)' = \frac{1}{\sin^2 \chi}$	$\int \frac{1}{\sin^2 \chi} d\chi = \int (\epsilon \phi \chi)' d\chi = \epsilon \phi \chi + c$
$(\sigma \phi \chi)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 \chi}$	$\int \frac{1}{\eta \mu^2 \chi} \cdot d\chi = \int (-\sigma \phi \chi)' d\chi = -\sigma \phi \chi + c$
$(e^\chi)' = e^\chi$	$\int e^\chi \cdot d\chi = \int (e^\chi)' d\chi = e^\chi + c$
$(\ln \chi)' = \frac{1}{\chi}$	$\int \frac{1}{\chi} \cdot d\chi = \int (\ln \chi)' d\chi = \ln \chi + c$

- ✓ Όπως και με τις παραγώγους έτσι και στα ολοκληρώματα, οι πιο πολλές περιπτώσεις δεν αφορούν απλές συναρτήσεις, όπως αυτές του πιο πάνω πίνακα, αλλά **σύνθετες** συναρτήσεις, δηλαδή έχεις να υπολογίσεις ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g'(\chi))g'(\chi)d\chi$ πχ αντί για $\int \chi^\alpha d\chi$ έχεις να υπολογίσεις το $\int [f(\chi)]^\alpha \cdot f'(\chi)d\chi$.

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείς, όπως θα δεις να επαναλαμβάνεται συχνά πιο κάτω, το «κλασικό» κόλπο, την **«αλλαγή μεταβλητής»** ή **«ολοκλήρωση με αντικατάσταση»**.

Δες ένα παράδειγμα για να καταλάβεις πως «λειτουργούν» στην πράξη :

Αν χρειάζονταν να βρεις το $\int \chi^\alpha d\chi$ τότε χρησιμοποιώντας τον **Πίνακα Ι** θα

είχες $\int \chi^\alpha d\chi = \frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, αν όμως είχες να βρεις ένα ολοκλήρωμα της μορφής :

$\int [f(\chi)]^\alpha \cdot f'(\chi)d\chi$, δηλαδή ένα όμοιο με το $\int \chi^\alpha d\chi$ ολοκλήρωμα, μόνο που

στη θέση του χ υπάρχει ολόκληρη συνάρτηση $f(\chi)$, τότε θέτεις (κάνεις

αντικατάσταση) $u = f(\chi)$ **(1)** οπότε $du = df(\chi) = f'(\chi)d\chi$ λύνεις ως προς $d\chi$

Δαμιανός Μωραΐτης

$d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ (2). Τις (1) και (2) τις αντικαθιστάς στο ολοκλήρωμα και έχεις :

$$\int [f(\chi)]^a \cdot f'(\chi) d\chi = \int u^a \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} = \frac{[f(\chi)]^{a+1}}{a+1} + c.$$

Εφαρμογή : Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα : $\int (\chi^3 - 3\chi + 5)^4 (\chi^2 - 1) d\chi$

Είναι προφανές ότι το ρόλο της $f(\chi)$ τον έχει το $\chi^3 - 3\chi + 5$ και η $f'(\chi)$ θα πρέπει να είναι το $\chi^2 - 1$, οπότε θέτεις $u = \chi^3 - 3\chi + 5$ άρα

$$du = (\chi^3 - 3\chi + 5)' d\chi = (3\chi^2 - 3) d\chi = 3(\chi^2 - 1) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{3(\chi^2 - 1)}$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int (\chi^3 - 3\chi + 5)^4 (\chi^2 - 1) d\chi = \int u^4 (\chi^2 - 1) \frac{du}{3(\chi^2 - 1)} = \int \frac{u^4 du}{3} = \frac{1}{3} \int u^4 du =$$

$$\frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + c = \frac{(\chi^3 - 3\chi + 5)^5}{15} + c.$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος με την εύρεση μιας παράγουσας της f .

- $\int 0 d\chi = c, c \in \mathbb{R}.$
- $\int d\chi = \int 1 \cdot d\chi = \chi + c, c \in \mathbb{R}.$
- $\int [f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi)] d\chi = \int [f(\chi)g(\chi)]' d\chi = f(\chi)g(\chi) + c, c \in \mathbb{R}.$
- $\int \frac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{[g(\chi)]^2} d\chi = \int \left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right]' d\chi = \frac{f(\chi)}{g(\chi)} + c, c \in \mathbb{R}.$

Ειδικά : $\int \frac{-g'(\chi)}{[g(\chi)]^2} d\chi = \int \left[\frac{1}{g(\chi)} \right]' d\chi = \frac{1}{g(\chi)} + c$

Αιτιαδεια

$$5. \quad \int \chi^\alpha d\chi = \int \left(\frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' d\chi = \frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{με } \alpha \neq -1 \text{ και } c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int [f(\chi)]^\alpha \cdot f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int [f(\chi)]^\alpha \cdot f'(\chi) d\chi = \int u^\alpha \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{[f(\chi)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{με } \alpha \neq -1 \text{ και } c \in \mathbb{R}.$$

$$6. \quad \int \frac{1}{2\sqrt{\chi}} d\chi = \int (\sqrt{\chi})' d\chi = \sqrt{\chi} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}} d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}} d\chi = \int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{u}} \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} = \sqrt{f(\chi)} + c \quad \text{με } \alpha \neq -1 \text{ και } c \in \mathbb{R}.$$

Οι παραπάνω διαδικασίες έχουν, όπως καταλαβαίνεις, περιορισμένη εφαρμογή και αφορούν **αποκλειστικά** τετραγωνικές ρίζες.

Όταν όμως μέσα στο ολοκλήρωμα έχει διαφορετικό ριζικό, θα το μετατρέψεις πρώτα σε δύναμη με τους γνωστούς μετασχηματισμούς :

$$\sqrt[\nu]{\chi^\mu} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}, \quad \frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^\mu}} = \chi^{-\frac{\mu}{\nu}}, \quad \sqrt[\nu]{f^\mu(\chi)} = f^{\frac{\mu}{\nu}}(\chi), \quad \frac{1}{\sqrt[\nu]{f^\mu(\chi)}} = f^{-\frac{\mu}{\nu}}(\chi) \quad \text{οπότε τα}$$

αντίστοιχα ολοκληρώματα αντιμετωπίζονται με την μορφή : $\int \chi^\alpha d\chi$ ή με την

μορφή : $\int [f(\chi)]^\alpha \cdot f'(\chi) d\chi$ όπως στο γενικό παράδειγμα :

$$\int \sqrt[5]{(\chi^3 + 2)^2} \cdot \chi^2 d\chi = \int (\chi^3 + 2)^{\frac{2}{5}} \cdot \chi^2 d\chi, \quad \text{θέτεις } u = (\chi^3 + 2)$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{οπότε } du = (\chi^3 + 2)' d\chi = 3\chi^2 d\chi \text{ άρα } \int u^{\frac{2}{5}} \cdot \chi^2 \frac{du}{3\chi^2} = \frac{1}{3} \int u^{\frac{2}{5}} du = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c =$$

$$\frac{1}{3} \frac{u^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{21} u^{\frac{7}{5}} + c \text{ άρα } \int \sqrt[5]{(\chi^3 + 2)^2} \cdot \chi^2 d\chi = \frac{5}{21} (\chi^3 + 2)^{\frac{7}{5}} + c.$$

Τα ολοκληρώματα $\int \frac{1}{2\sqrt{\chi}} d\chi$ και $\int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}} d\chi$ μπορείς να τα υπολογίσεις ως εφαρμογή της πιο πάνω διαδικασίας.

$$7. \int \sin \chi d\chi = \int (\eta \mu \chi)' d\chi = \eta \mu \chi + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το

$$\checkmark \int [\sin f(\chi)] \cdot f'(\chi) d\chi \text{ θέτεις } u = f(\chi) \text{ οπότε } du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow$$

$$d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \text{ άρα } \int [\sin f(\chi)] \cdot f'(\chi) d\chi = \int \sin u \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \sin u \cdot du = \eta \mu u + c = \eta \mu [f(\chi)] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\checkmark \int f(\sin \chi) \eta \mu \chi \cdot d\chi \text{ θέτεις } u = \sin \chi \text{ οπότε } du = (\sin \chi)' d\chi = -\eta \mu \chi d\chi$$

$$\Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{-\eta \mu \chi} \text{ άρα } \int f(\sin \chi) \eta \mu \chi d\chi = \int f(u) \eta \mu \chi \frac{du}{-\eta \mu \chi} =$$

$-\int f(u) du$ ολοκληρώνεις ανάλογα με τη συνάρτηση και στο τέλος αντικαθιστάς το $u = \sin \chi$.

$$8. \int \sin^2 \chi d\chi \text{ Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο του διπλάσιου τόξου για να}$$

«φύγει» το τετράγωνο, στην προκειμένη περίπτωση είναι $\sin^2 \chi = \frac{\sin 2\chi + 1}{2}$

$$\text{οπότε } \int \sin^2 \chi \cdot d\chi = \int \frac{\sin 2\chi + 1}{2} d\chi = \frac{1}{2} \int \sin 2\chi d\chi + \frac{1}{2} \int d\chi.$$

Αιτιαθεί

Για το $\frac{1}{2} \int \sin 2\chi \, d\chi$, $u = 2\chi$ οπότε $du = (2\chi)' \, d\chi = 2 \, d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{1}{2} du$ άρα

$$\frac{1}{2} \int \sin 2\chi \cdot d\chi = \frac{1}{2} \int \sin u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int \sin u \cdot du = \frac{1}{4} \eta\mu u = \frac{1}{4} \eta\mu 2\chi \text{ και}$$

$$\frac{1}{2} \int d\chi = \frac{1}{2} \chi \text{ άρα } \int \sin^2 \chi \cdot d\chi = \frac{1}{4} \eta\mu 2\chi + \frac{1}{2} \chi.$$

9. $\int \eta\mu \chi \cdot d\chi = \int (-\sin \chi)' \, d\chi = -\sin \chi + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int [\eta\mu f(\chi)] \cdot f'(\chi) \, d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) \, d\chi \Leftrightarrow$

$$d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \text{ άρα } \int [\eta\mu f(\chi)] \cdot f'(\chi) \, d\chi = \int \eta\mu u \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \eta\mu u \cdot du = -\sin u + c = -\sin[f(\chi)] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

✓ $\int f(\eta\mu \chi) \sin \chi \cdot d\chi$ θέτεις $u = \eta\mu \chi$ οπότε $du = (\eta\mu \chi)' \, d\chi = \sin \chi \, d\chi \Leftrightarrow$

$$d\chi = \frac{du}{\sin \chi} \text{ άρα } \int f(\eta\mu \chi) \sin \chi \, d\chi = \int f(u) \sin \chi \frac{du}{\sin \chi} =$$

$\int f(u) \, du$ ολοκληρώνεις ανάλογα με τη συνάρτηση και στο τέλος αντικαθιστάς το $u = \eta\mu \chi$.

10. $\int \eta\mu^2 \chi \, d\chi$ Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο του διπλάσιου τόξου για να

«φύγει» το τετράγωνο, στην προκείμενη περίπτωση είναι $\eta\mu^2 \chi = \frac{1 - \sin 2\chi}{2}$

οπότε $\int \eta\mu^2 \chi \cdot d\chi = \int \frac{1 - \sin 2\chi}{2} \, d\chi = \frac{1}{2} \int d\chi - \frac{1}{2} \int \sin 2\chi \cdot d\chi$. Είναι $\frac{1}{2} \int d\chi = \frac{1}{2} \chi$

και $\frac{1}{2} \int \sin 2\chi \cdot d\chi = \frac{1}{4} \eta\mu 2\chi$ (δες περίπτωση 6) άρα $\int \eta\mu^2 \chi \cdot d\chi = \frac{1}{2} \chi - \frac{1}{4} \eta\mu 2\chi.$

$$11. \int \frac{1}{\sin^2 \chi} d\chi = \int (\epsilon\phi\chi)' d\chi = \epsilon\phi\chi + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{1}{\sin^2 f(\chi)} f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int \frac{1}{\sin^2 f(\chi)} f'(\chi) d\chi = \int \frac{1}{\sin^2 u} f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \epsilon\phi u + c = \epsilon\phi[f(\chi)] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$12. \int \frac{1}{\eta\mu^2 \chi} d\chi = \int (-\sigma\phi\chi)' d\chi = -\sigma\phi\chi + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{1}{\eta\mu^2 f(\chi)} f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int \frac{1}{\eta\mu^2 f(\chi)} f'(\chi) d\chi = \int \frac{1}{\eta\mu^2 u} f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \frac{1}{\eta\mu^2 u} du = -\sigma\phi u + c = -\sigma\phi[f(\chi)] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$13. \int \epsilon\phi\chi d\chi = \int \frac{\eta\mu\chi}{\sin\chi} d\chi = -\int \frac{-\eta\mu\chi}{\sin\chi} d\chi = -\int \frac{(\sin\chi)'}{\sin\chi} d\chi = -\ln|\sin\chi| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \epsilon\phi f(\chi) f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int \epsilon\phi f(\chi) f'(\chi) d\chi = \int \epsilon\phi u f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \epsilon\phi u \cdot du = \dots = -\ln|\sin u| + c = -\ln|\sin f(\chi)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$14. \int \sigma\phi\chi d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} d\chi = \int \frac{(\eta\mu\chi)'}{\eta\mu\chi} d\chi = \ln|\eta\mu\chi| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Γενίκευση Για να βρεις το $\int [\sigma\phi f(\chi)] f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)} \quad \text{άρα} \quad \int [\sigma\phi f(\chi)] f'(\chi) d\chi = \int [\sigma\phi u] \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$$

$$\int \sigma\phi u \cdot du = \dots = \ln|\eta\mu u| + c = \ln|\eta\mu f(\chi)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$15. \int \eta\mu[f(\chi)] \sigma\upsilon\nu[g(\chi)] d\chi. \quad \text{Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο}$$

τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)}{2} \quad \text{και διασπάζ το ολοκλήρωμα}$$

$$\int \eta\mu[f(\chi)] \sigma\upsilon\nu[g(\chi)] d\chi = \int \frac{\eta\mu[f(\chi) + g(\chi)] + \eta\mu[f(\chi) - g(\chi)]}{2} d\chi =$$

$$\frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi) + g(\chi)] d\chi + \frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi) - g(\chi)] d\chi = \dots$$

$$16. \int \eta\mu[f(\chi)] \eta\mu[g(\chi)] d\chi. \quad \text{Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο}$$

τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{2} \quad \text{και διασπάζ το ολοκλήρωμα}$$

$$\int \eta\mu[f(\chi)] \eta\mu[g(\chi)] d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu[f(\chi) - g(\chi)] - \sigma\upsilon\nu[f(\chi) + g(\chi)]}{2} d\chi =$$

$$\frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu[f(\chi) - g(\chi)] d\chi - \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu[f(\chi) + g(\chi)] d\chi = \dots$$

$$17. \int \sigma\upsilon\nu[f(\chi)] \sigma\upsilon\nu[g(\chi)] d\chi. \quad \text{Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο}$$

τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{2} \quad \text{και διασπάζ το ολοκλήρωμα}$$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\int \eta\mu[f(\chi)]\eta\mu[g(\chi)]d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu[f(\chi)+g(\chi)]+\sigma\upsilon\nu[f(\chi)-g(\chi)]}{2}d\chi =$$

$$\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu[f(\chi)+g(\chi)]d\chi + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu[f(\chi)-g(\chi)]d\chi = \dots$$

18. $\int \alpha^x d\chi = \int \left(\frac{\alpha^x}{\ln \alpha} \right)' d\chi = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int \alpha^{f(\chi)} f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int \alpha^{f(\chi)} f'(\chi) d\chi = \int \alpha^u f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int \alpha^u du = \frac{\alpha^u}{\ln \alpha} = \frac{\alpha^{f(\chi)}}{\ln \alpha}.$

19. $\int e^x \cdot d\chi = \int (e^x)' d\chi = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int e^{f(\chi)} [f(\chi)]' d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int e^{f(\chi)} [f(\chi)]' d\chi = \int e^u [f(\chi)]' \frac{du}{f'(\chi)} = \int e^u du = e^u + c = e^{f(\chi)} + c.$

20. $\int \frac{1}{\chi} d\chi = \int (\ln|\chi|)' d\chi = \ln|\chi| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi = \int \frac{1}{u} f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|f(\chi)| + c.$

Αιβαδειά

21. $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\mu]{\chi^\mu}} d\chi$, $c \in \mathbb{R}$. Αρχικά γράφεις το $\sqrt[\mu]{\chi^\mu} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$ οπότε το $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\mu]{\chi^\mu}} \cdot d\chi$

γίνεται $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\mu]{\chi^\mu}} \cdot d\chi = \int P(\chi) \chi^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot d\chi$ και στη συνέχεια εφαρμόζεις την επιμεριστική ιδιότητα κάνοντας πράξεις, τέλος διασπάζ το ολοκλήρωμα.

$$\int \frac{(\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi - 2)}{\sqrt[3]{\chi^4}} d\chi = \int (\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi - 2) \chi^{\frac{4}{3}} d\chi =$$

$$\int \left(\chi^{\frac{16}{3}} - 2\chi^{\frac{13}{3}} + 5\chi^{\frac{7}{3}} - 2\chi^{\frac{4}{3}} \right) d\chi = \dots$$

22. $\int \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} d\chi$. Ότι ακολουθεί αφορά περιπτώσεις που δεν έχουν

προαναφερθεί σε προηγούμενη διαδικασία και το $Q(\chi)$

παραγοντοποιείται και γράφεται $Q(\chi) = (\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2) \cdots (\chi - \chi_v)$

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μικρότερου βαθμού από το $Q(\chi)$, βρίσκεις τους αριθμούς : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ μέσα από την ισότητα :

$$\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \dots + \frac{\alpha_v}{\chi - \chi_v}, \text{ οπότε :}$$

$$\int \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} d\chi = \int \left(\frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \dots + \frac{\alpha_v}{\chi - \chi_v} \right) d\chi = \dots$$

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μεγαλύτερου βαθμού από το $Q(\chi)$ τότε πρώτα εκτελείς τη διαίρεση $P(\chi):Q(\chi)$ και βρίσκεις τα $\pi(\chi)$ και $v(\chi)$ οπότε θα είναι

$$P(\chi) = Q(\chi)\pi(\chi) + v(\chi) \Leftrightarrow \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \pi(\chi) + \frac{v(\chi)}{Q(\chi)} \text{ άρα}$$

$$\int \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} d\chi = \int \left(\pi(\chi) + \frac{v(\chi)}{Q(\chi)} \right) d\chi = \int \pi(\chi) d\chi + \int \frac{v(\chi)}{Q(\chi)} d\chi, \text{ το } \int \pi(\chi) d\chi$$

Δαμιανός Μωραΐτης

υπολογίζεται με κάποιον από τους προηγούμενους τρόπους και το

$\int \frac{v(\chi)}{Q(\chi)} d\chi$ υπολογίζεται με τον **προηγούμενο** τρόπο, δηλαδή βρίσκεις

τους αριθμούς : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ μέσα από την ισότητα :

$$\frac{v(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \dots + \frac{\alpha_v}{\chi - \chi_v}, \text{ οπότε :}$$

$$\int \frac{v(\chi)}{Q(\chi)} d\chi = \int \left(\frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \dots + \frac{\alpha_v}{\chi - \chi_v} \right) d\chi = \dots$$

Παράδειγμα : Να βρείτε το $\int \frac{3\chi - 13}{\chi^2 - 4\chi + 3} d\chi$.

$$\text{Είναι } \chi^2 - 4\chi + 3 = (\chi - 1)(\chi - 3) \text{ άρα } \frac{3\chi - 13}{\chi^2 - 4\chi + 3} = \frac{3\chi - 13}{(\chi - 1)(\chi - 3)}$$

βρίσκεις τους αριθμούς : α_1, α_2 από την ισότητα

$$\frac{3\chi - 13}{(\chi - 1)(\chi - 3)} = \frac{\alpha_1}{\chi - 1} + \frac{\alpha_2}{\chi - 3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\chi - 13}{(\chi - 1)(\chi - 3)} = \frac{\alpha_1 \cdot \chi - 3\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \chi - \alpha_2}{(\chi - 1)(\chi - 3)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\chi - 3\alpha_1 - \alpha_2}{(\chi - 1)(\chi - 3)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_1 + 13 = 3 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 = -10 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 + 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases} \cdot \text{Άρα } \int \frac{3\chi - 13}{\chi^2 - 4\chi + 3} d\chi = \int \left(\frac{5}{\chi - 1} - \frac{2}{\chi - 3} \right) d\chi =$$

$$\int \frac{5}{\chi - 1} d\chi - \int \frac{2}{\chi - 3} d\chi = 5 \int \frac{1}{\chi - 1} d\chi - 2 \int \frac{1}{\chi - 3} d\chi = 5 \ln|\chi - 1| - 2 \ln|\chi - 3|.$$

23. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **την ίδια δύναμη** $e^{k\chi}$, $k > 0$, τότε ένας εύκολος και άμεσος μετασχηματισμός είναι να θέσεις $u = e^{k\chi}$

Παράδειγμα : Να βρείτε το $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$.

Θέτεις $u = e^x \Leftrightarrow du = (e^x)' dx = e^x dx \Leftrightarrow du = u dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u}$ άρα

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u - 1} \frac{du}{u} = \int \frac{u + 1}{(u - 1)u} du, \text{ βρίσκεις τους αριθμούς : } \alpha_1, \alpha_2$$

από την ισότητα

$$\frac{u + 1}{(u - 1)u} = \frac{\alpha_1}{u - 1} + \frac{\alpha_2}{u} = \frac{\alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot u - \alpha_2}{(u - 1)u} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot u - \alpha_2}{(u - 1)u} \text{ άρα}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \text{ επομένως}$$

$$\int \frac{u + 1}{(u - 1)u} du = \int \frac{2}{u - 1} du - \int \frac{1}{u} du = 2 \ln |u - 1| - \ln |u| + c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = 2 \ln |e^x - 1| - \ln |e^x| + c = 2 \ln |e^x - 1| - \ln e^x + c = 2 \ln |e^x - 1| - x + c$$

24. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **διαφορετικές δυνάμεις του e πχ $e^x, e^{2x}, e^{3x}, \dots$** , τότε ένας εύκολος και άμεσος μετασχηματισμός είναι να θέσεις **$u = e^x$**

οπότε $u = e^x \Leftrightarrow du = (e^x)' dx = e^x dx \Leftrightarrow du = u dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{u}$ και επί

πλέον **$e^{2x} = u^2, e^{3x} = u^3, \dots$** κατά τα άλλα λειτουργείς όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

25. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **ταντόχρονα ημχ και συνχ** ακολουθείς μια από τις επόμενες διαδικασίες :

α. Αντικαθιστάς το **συνχ** με **$-\text{συνχ}$** , και αν μετά από αυτό η παράσταση γίνει αντίθετη από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα τότε ο μετασχηματισμός είναι : **$u = \eta\mu\chi$** .

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Αντικαθιστάς το $\eta\mu\chi$ με $-\eta\mu\chi$, και αν μετά από αυτό η παράσταση γίνει αντίθετη από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = \sigma\upsilon\nu\chi$.

γ. Αντικαθιστάς το $\eta\mu\chi$ με $-\eta\mu\chi$ και το $\sigma\upsilon\nu\chi$ με $-\sigma\upsilon\nu\chi$, και αν μετά από αυτό η παράσταση που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα δεν αλλάξει τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = \epsilon\varphi\chi$.

δ. Αν τελικά η περίπτωση δεν εμπίπτει σε καμιά από τις προηγούμενες τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = \epsilon\varphi\frac{\chi}{2}$.

26. $\int [f(\chi)]^{\kappa} [g(\chi)]^{\lambda} d\chi$: Εξετάζεις τα κ και λ και αν

✓ $|\kappa| > |\lambda|$ τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = f(\chi)$.

✓ $|\kappa| < |\lambda|$ τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = g(\chi)$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν έχεις ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f(\chi)g'(\chi)d\chi$, όπου f, g , είναι

παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους, τότε μπορείς να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα με βάση την ισότητα :

$$\int f(\chi)g'(\chi)d\chi = f(\chi)g(\chi) - \int f'(\chi)g(\chi)d\chi,$$

όπως στις περιπτώσεις που ακολουθούν

Παρατήρηση Η μέθοδος εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα στο 2^ο μέλος είναι πιο «εύκολο» από αυτό του 1^{ου} μέλους

27. $\int e^{\chi} \cdot f(\chi) d\chi$: Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int e^{\chi} \cdot f(\chi) d\chi = \int (e^{\chi})' \cdot f(\chi) d\chi = e^{\chi} \cdot f(\chi) - \int e^{\chi} [f(\chi)]' \cdot d\chi.$$

Αιτιολογία

28. $\int \eta\mu\chi \cdot f(\chi) d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int \eta\mu\chi \cdot f(\chi) d\chi = \int (-\sigma\upsilon\nu\chi)' \cdot f(\chi) d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + \int \sigma\upsilon\nu\chi \cdot [f(\chi)]' d\chi.$$

29. $\int \sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) d\chi$. Εφαρμόζεις κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int \sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) d\chi = \int (\eta\mu\chi)' \cdot f(\chi) d\chi = \eta\mu\chi \cdot f(\chi) + \int \eta\mu\chi \cdot [f(\chi)]' d\chi.$$

Παρατήρηση Στο 2^ο μέλος υπάρχει $[f(\chi)]'$, αυτό σημαίνει ότι αν το $f(\chi)$ είναι πολυώνυμο τότε ο βαθμός του αυτόματα γίνεται κατά 1 μικρότερος.

Πολλές φορές έχοντας να υπολογίσεις ένα ολοκλήρωμα $I = \int f(\chi) d\chi$ εφαρμόζοντας την κατά παράγοντες ολοκλήρωση καταλήγεις σε ισότητα της μορφής $I = \int f(\chi) d\chi = \dots = \alpha \cdot I + \int g(\chi) d\chi$ όπου $\alpha \neq 1$, τότε αντιμετωπίζεις την τελευταία ισότητα ως **εξίσωση του I** οπότε

$$I = \alpha \cdot I + \int g(\chi) d\chi \Leftrightarrow (1 - \alpha)I = \int g(\chi) d\chi \Leftrightarrow I = \frac{1}{1 - \alpha} \int g(\chi) d\chi.$$

Αυτό συμβαίνει κυρίως όταν μέσα στο ολοκλήρωμα **συνυπάρχουν**, δυο από τα $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$, e^χ . Στην περίπτωση που στο ολοκλήρωμα συνυπάρχει το e^χ , με το $\eta\mu\chi$ ή με το $\sigma\upsilon\nu\chi$ τότε να προτιμάς να γράφεις το e^χ ως $(e^\chi)'$ όπως στις περιπτώσεις :

30. $\int e^\chi \eta\mu\chi d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\begin{aligned} \int e^\chi \eta\mu\chi d\chi &= \int (e^\chi)' \eta\mu\chi d\chi = e^\chi \eta\mu\chi - \int e^\chi (\eta\mu\chi)' d\chi = \\ e^\chi \eta\mu\chi - \int e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi d\chi &= e^\chi \eta\mu\chi - \int (e^\chi)' \sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \end{aligned}$$

$$e^x \eta \mu \chi - \left(e^x \sigma \upsilon \nu \chi - \int e^x (\sigma \upsilon \nu \chi)' d\chi \right) = e^x \eta \mu \chi - \left(e^x \sigma \upsilon \nu \chi - \int e^x (-\eta \mu \chi) d\chi \right)$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \eta \mu \chi d\chi = e^x \eta \mu \chi - \left(e^x \sigma \upsilon \nu \chi + \int e^x \eta \mu \chi d\chi \right) \Leftrightarrow$$

$$2 \int e^x \eta \mu \chi d\chi = e^x \eta \mu \chi - e^x \sigma \upsilon \nu \chi \Leftrightarrow \int e^x \eta \mu \chi d\chi = \frac{e^x \eta \mu \chi - e^x \sigma \upsilon \nu \chi}{2} + c$$

31. $\int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi = \int (e^x)' \sigma \upsilon \nu \chi d\chi = e^x \sigma \upsilon \nu \chi - \int e^x (\sigma \upsilon \nu \chi)' d\chi =$$

$$e^x \sigma \upsilon \nu \chi + \int e^x \eta \mu \chi d\chi = e^x \sigma \upsilon \nu \chi + \int (e^x)' \eta \mu \chi d\chi =$$

$$e^x \sigma \upsilon \nu \chi + e^x \eta \mu \chi - \int e^x (\eta \mu \chi)' d\chi \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi = e^x \sigma \upsilon \nu \chi + e^x \eta \mu \chi - \int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi \Leftrightarrow$$

$$2 \int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi = e^x \sigma \upsilon \nu \chi + e^x \eta \mu \chi \Leftrightarrow \int e^x \sigma \upsilon \nu \chi d\chi = \frac{e^x \eta \mu \chi + e^x \sigma \upsilon \nu \chi}{2} + c.$$

32. $\int f(\chi) \cdot \ln[g(\chi)] d\chi$. Βρίσκεις μια παράγουσα F της f και έχεις

$$\int f(\chi) \cdot \ln g(\chi) d\chi = \int F'(\chi) \cdot \ln[g(\chi)] d\chi =$$

$$F(\chi) \cdot \ln g(\chi) - \int F(\chi) [\ln g(\chi)]' d\chi = F(\chi) \cdot \ln g(\chi) - \int \frac{F(\chi) g'(\chi)}{g(\chi)} d\chi = \dots$$

33. $\int f(\chi) d\chi$. Απλά γράφεις $\int f(\chi) d\chi = \int 1 \cdot f(\chi) d\chi = \int (\chi)' \cdot f(\chi) d\chi \Leftrightarrow$

$$\int f(\chi) d\chi = \chi \cdot f(\chi) - \int \chi [f(\chi)]' d\chi = \dots$$

Κλασικό παράδειγμα Να βρείτε το $\int \ln \chi d\chi$.

$$\int \ln \chi d\chi = \int 1 \cdot \ln \chi d\chi = \int (\chi)' \ln \chi d\chi = \chi \cdot \ln \chi - \int \chi (\ln \chi)' d\chi = \chi \cdot \ln \chi - \int \chi \frac{1}{\chi} d\chi \Leftrightarrow$$

$$\chi \cdot \ln \chi - \int 1 \cdot d\chi \Leftrightarrow \int \ln \chi d\chi = \chi \cdot \ln \chi - \chi + c, c \in \mathbb{R}.$$

Αιτιολογία

Τι κάνεις όταν ζητάει να βρεις την συνάρτηση f .

Αρχικά πρέπει να ξέρεις ότι :

Κάθε εξίσωση της μορφής $f'(\chi) + \alpha(\chi)f(\chi) = \beta(\chi)$, όπου $f(\chi)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και $\alpha(\chi)$, $\beta(\chi)$ συναρτήσεις του χ λέγεται :

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.

Για να λύσεις την εξίσωσης αυτή κάνεις τα εξής :

- ✓ Φέρνεις την εξίσωση στη μορφή : $f'(\chi) + \alpha(\chi)f(\chi) = \beta(\chi)$.
- ✓ Βρίσκεις μια παράγουσα $A(\chi)$ της συνάρτησης $\alpha(\chi)$, $\left[A'(\chi) = \alpha(\chi) \right]$.
- ✓ Πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{A(\chi)}$ και έχεις :

$$f'(\chi) + \alpha(\chi)f(\chi) = \beta(\chi) \Leftrightarrow e^{A(\chi)}f'(\chi) + e^{A(\chi)}\alpha(\chi)f(\chi) = e^{A(\chi)}\beta(\chi) .$$

Αντικαθιστάς το $\alpha(\chi)$ με $A'(\chi)$, οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$e^{A(\chi)}f'(\chi) + e^{A(\chi)}A'(\chi)f(\chi) = e^{A(\chi)}\beta(\chi) \Leftrightarrow$$

$$e^{A(\chi)}f'(\chi) + \left(e^{A(\chi)} \right)' f(\chi) = e^{A(\chi)}\beta(\chi) \Leftrightarrow \left(e^{A(\chi)} \cdot f(\chi) \right)' = e^{A(\chi)}\beta(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\int \left(e^{A(\chi)} \cdot f(\chi) \right)' d\chi = \int e^{A(\chi)}\beta(\chi) d\chi \text{ και αν υποθεθεί πως το}$$

$$\int e^{A(\chi)}\beta(\chi) d\chi = B(\chi) \text{ τότε } e^{A(\chi)} \cdot f(\chi) = B(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{B(\chi)}{e^{A(\chi)}} + c .$$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός.

Έστω μια συνεχής στο $[a, b]$ συνάρτηση f .

Αν θεωρήσεις τα σημεία $a = \chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n = b$, τότε έχεις χωρίσει το

$[a, b]$ σε n τμήματα με μήκος (το καθένα) $\Delta\chi = \frac{b-a}{n}$.

Κάθε τμήμα έχει την μορφή $[\chi_k, \chi_{k+1}]$ και θεωρήσεις ένα τυχαίο αριθμό

$\xi_k \in [\chi_k, \chi_{k+1}]$, σε κάθε ένα από αυτά τότε μπορείς να σχηματίσεις το

άθροισμα : $S_n = f(\xi_1)\Delta\chi + f(\xi_2)\Delta\chi + \dots + f(\xi_n)\Delta\chi =$

$$(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n))\Delta\chi \Leftrightarrow S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta\chi.$$

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta\chi \right)$ υπάρχει, είναι πραγματικός

αριθμός και **δεν εξαρτάται** από την επιλογή του $\xi_k \in [\chi_k, \chi_{k+1}]$.

Το όριο αυτό ονομάζεται **ολοκλήρωμα της f από το a ως το b** και

συμβολίζεται με $\int_a^b f(\chi) d\chi$, δηλαδή είναι $\int_a^b f(\chi) d\chi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta\chi \right)$.

Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος.

Αν για την **συνεχή** συνάρτηση f ισχύει $f(\chi) \geq 0$

για κάθε $\chi \in [a, b]$ τότε το $\int_a^b f(\chi) d\chi$ εκφράζει το

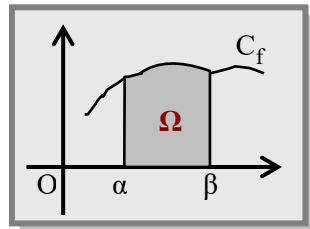
εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f ,

τον άξονα $\chi' \chi$ και τις ευθείες $\chi = a$ και $\chi = b$.

Στο σύμβολο $\int_a^b f(\chi) d\chi$, τα a και b καλούνται **άκρα ή όρια της**

ολοκλήρωσης, το χ που εμφανίζεται στο $d\chi$ ονομάζεται μεταβλητή

Αιτιαδαιά



ολοκλήρωσης και **δεν επηρεάζει** καθόλου το τελικό αποτέλεσμα το οποίο εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση **f** και από τα άκρα **a** και **b** και είναι αριθμός, επομένως μπορείς να αλλάξεις χωρίς πρόβλημα τη μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα ανάλογα με το πώς βολεύει δηλαδή

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Ιδιότητες.

i. **Ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι ολοκληρώσιμη μια συνάρτηση **f** σε ένα διάστημα $[a, b]$ είναι να είναι συνεχής στο $[a, b]$.

ii. Όταν χρησιμοποιείς το σύμβολο $\int_a^b f(x) dx$ εννοείται ότι $a < b$.

iii. Αν $a = b$ τότε $\int_a^a f(x) dx = 0$.

iv. Αν $a > b$ τότε $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

v. Αν **f** συνεχής συνάρτηση και ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$ τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

vi. Αν **f** και **g** είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε :

α. $\int_a^b \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$ και

β. $\int_a^b \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

v. Αν **f** συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και $a, b, \gamma \in \Delta$ τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^b f(x) dx.$$

Προσοχή το Δ είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

$$\text{Η συνάρτηση } F(\chi) = \int_a^\chi f(t) dt \geq 0.$$

Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $a \in \Delta$ τότε αποδεικνύεται το Θεώρημα :

Η συνάρτηση $F(\chi) = \int_a^\chi f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή

$$F'(\chi) = \left(\int_a^\chi f(t) dt \right)' = f(\chi).$$

Παρατηρήσεις.

i. Το $\int_a^\beta f(\chi) d\chi$ είναι **αριθμός** ενώ το $\int_a^\chi f(t) dt$ είναι **συνάρτηση**.

ii. Το $\int_a^\chi f(t) dt$ είναι **συνάρτηση με μεταβλητή το χ** , ενώ το t που εμφανίζεται στο **dt είναι και λέγεται μεταβλητή ολοκλήρωσης** με αποτέλεσμα κάθε άλλο γράμμα που εμφανίζεται **μέσα** στο ολοκλήρωμα θεωρείται (και λειτουργεί) ως σταθερά, Πχ αν έχεις :

$$F(\chi) = \int_a^\chi \kappa \cdot f(\lambda \cdot t) dt \text{ τότε τα } \kappa \text{ και } \lambda \text{ είναι σταθερές και το } \chi \text{ επίσης είναι}$$

σταθερό όσον εκτός από άκρο υπάρχει και μέσα στο σύμβολο $\int_a^\chi$

$$\text{πχ } F(\chi) = \int_a^\chi \chi \cdot f(t) dt, \text{ το } \chi \text{ θεωρείται σταθερό και επομένως}$$

$$F(\chi) = \int_a^\chi \chi \cdot f(t) dt = \chi \cdot \int_a^\chi f(t) dt$$

iii. Στο $\int_a^\beta f(\chi) d\chi$ θεωρείται ότι $a \leq \chi \leq \beta$ ενώ στο σύμβολο $\int_a^\chi f(t) dt$ θα

πρέπει να κάνεις υποθέσεις αν $\chi > a$ τότε $a \leq t \leq \chi$ ενώ αν $\chi < a$ τότε $\chi \leq t \leq a$

και προφανώς αν $\chi = a$ τότε $\int_a^\chi f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0$.

Θεμελιώδες Θεώρημα

Ολοκληρωτικού Λογισμού (ΘΘΟΛ)

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ και F είναι μια

παράγουσα της f τότε $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Παρατηρήσεις.

i. Για να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ μπορείς να εφαρμόσεις όλες τις τεχνικές που έμαθες για το αόριστο ολοκλήρωμα ή να υπολογίσεις πρώτα μια παράγουσα F της f υπολογίζοντας το $\int f(x) dx$ και να εφαρμόσεις το **Θ. Θ. Ο. Λ.** .

ii. Το θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει και όταν $a > b$.

iii. Αν έχεις να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα **σύνθετης συνάρτησης** px

$I = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ τότε, όπως και στο αόριστο ολοκλήρωμα θα κάνεις αλλαγή μεταβλητής, με την, επί πλέον, **υποχρέωση** να βρίσκεις τα **νέα άκρα**

(όρια) **ολοκλήρωσης** δηλαδή έστω το $I = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$, θέτεις

$u = g(x)$ οπότε $du = g'(x) dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$ και $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(b)$ οπότε

$I = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)g'(x) \frac{du}{g'(x)} \Leftrightarrow I = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$ και αν F είναι

μια παράγουσα της f τότε :

$$I = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du = [F(u)]_{u_1}^{u_2} = F(u_2) - F(u_1).$$

iv. Αν $f(x) = g(x)$ τότε $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ $\int_0^1 2x dx = \int_0^1 (x^2)' dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$,

$\int_0^1 4x^3 dx = \int_0^1 (x^4)' dx = [x^4]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1$, προφανώς όμως $2x \neq 4x^3$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Ολοκληρωτικού Παζιμαού (Θ.Μ.Τ.Ο.Λ.)

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$ τότε υπάρχει **τουλάχιστον ένα**

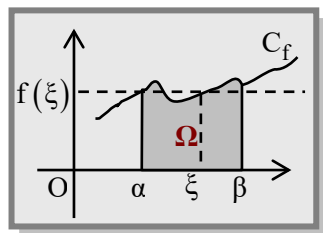
$$\xi \in [a, b] \text{ τέτοιο ώστε : } \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Γεωμετρική ερμηνεία.

Αν για την **συνεχή** συνάρτηση f ισχύει $f(x) \geq 0$

για κάθε $x \in [a, b]$ τότε το $\int_a^b f(x) dx$ εκφράζει το

εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$.



Το Θ.Μ.Τ.Ο.Λ. «λέει» ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [a, b]$ έτσι ώστε το

ορθογώνιο με διαστάσεις $f(\xi)$, $b-a$, να έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω

δηλαδή είναι $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

Το ύψος $f(\xi)$ του ορθογωνίου **ονομάζεται μέση τιμή της f στο $[a, b]$**

συμβολίζεται με $\overline{f}$ και δίνεται από τον τύπο

$$f(\xi) = \overline{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}.$$

Εκφωμήσεις

1.

πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi + 1 + \frac{1}{\chi + 1}$.

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Έχει απαντηθεί.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f τον άξονα $O\chi$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = 2$, $\chi = 5$.

2.

πανελλήνιες 1988 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με : $f(\chi) = \begin{cases} 3\chi^2 - 5\chi + 6 & \chi \leq 1 \\ 2\sqrt{\chi^2 + 3} & \chi > 1 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 = 1$.

Έχει απαντηθεί, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 1$ και μάλιστα $f'(1) = 1$.

B. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^5 \frac{\chi^3 - 5\chi^2 + 1}{\chi} d\chi$

3.

πανελλήνιες 1989 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο $\chi_0 = \frac{\pi}{8}$. Η εξίσωση είναι $\psi = -\sqrt{2}\chi + \frac{\sqrt{2}(\pi + 4)}{8}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

- β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαιτομένη, τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy .

4.

πανελλήνιες 1989 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Να αποδειχθεί ότι :

- α. Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει αποδειχθεί.

- β. για $\kappa \geq 1$: $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa}$.

5.

πανελλήνιες 1990 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$

- Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x = 1$ και $x = a$ με $a > 1$.
- Γ. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το a τείνει στο άπειρο

6.

πανελλήνιες 1990 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

- Α. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Λ ι β α δ ε ι ά

- B.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(\chi) = \chi^2 e^\chi$ του άξονα $\chi' \chi$ και των ευθειών με εξισώσεις $\chi = 1$ και $\chi = 3$.

πανελλήνιες 1991 Α Δέσμη

7.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\varphi^v} \chi d\chi$, $v \in \mathbb{N}^*$ τότε

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$ ισχύει $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$.

β. Να υπολογίσετε το I_5 .

B. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \sqrt{\chi} - \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}}$, $\chi > 0$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Από το αντίστοιχο θέμα που αφορά τις παραγώγους είναι :

Πίνακας μεταβολών για την f :

Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η f' :

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$

✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

✓ είναι **θετική** $\chi > 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο : τοπικό **ελάχιστο** στη θέση $\chi_1 = 1$,

το $f(1) = \sqrt{1} - \frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} = 1$.

- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $O\chi$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = 1$ και $\chi = 4$.

Δαμιανός Μωραΐτης

8.

πανελλήνιες 1991 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής (έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο) και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.

9.

πανελλήνιες 1992 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq f(x)$.

Β. α. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = c \cdot e^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

β. Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x) \cdot \sin x + g(x) \cdot \eta\mu x = g(x) \cdot \sin x$ και $g(0) = 1992$.

Μια πολύ σπουδαία και χρήσιμη ιδιότητα : $f = f' \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x$.

Λιβαδερά

10.

πανελλήνιες 1992 Δ Δέση**ΘΕΜΑ 3^ο**

B. α. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $E(t) = \int_1^t (\chi - 2) \cdot \ln \chi \cdot d\chi$ για κάθε $t > 1$.

β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να βρεθεί πολωνυμική συνάρτηση f με $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi + \gamma$, $\chi \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

i) Η συνάρτηση f είναι περιττή

ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\chi_0 = 1$

iii) $\int_0^2 f(\chi) d\chi = 2$

B. Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, \pi]$ και $g(\pi) = e^{-\pi}$.

Αν $\int_0^\pi (g(\chi) + g'(\chi)) \cdot e^\chi \cdot d\chi = 2$ να βρεθεί το $g(0)$.

11.

πανελλήνιες 1993 Α Δέση**ΘΕΜΑ 3^ο**

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε :

α. Υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(\chi) d\chi \leq M(\beta - \alpha)$.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(\chi) d\chi = f(\xi)(\beta - \alpha)$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^4}} + 4$ με $\chi > 0$.

α. Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f .

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \int_{\chi}^{\chi+1} f(t) dt$ (Απάντηση : 4)

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\chi} e^{-t} f(t) dt = e^{-\chi} - e^{-\alpha} - e^{-\chi} \cdot f(\chi), \quad \chi \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}$$

12.

πανελλήνιες 1993 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

B. Αν η συνάρτηση $g(\chi)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και

ικανοποιεί την σχέση $\int_0^1 \chi g'(\chi) d\chi = 1993 - \int_0^1 g(\chi) d\chi$ να βρείτε το $g(1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi e^{-v\chi}$ $\chi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$

A. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f , να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμψής της Από το κεφάλαιο 2 είναι γνωστά τα εξής

πίνακας μεταβολών για την f :

Όπως φαίνεται και από τον

πίνακα η f' :

✓ μηδενίζεται όταν $\chi = \frac{1}{v}$

χ	$-\infty$	$\frac{1}{v}$	$\frac{2}{v}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	-	-
$f''(\chi)$	-	-	0	+
$f(\chi)$				

Λιβαδεϊά

✓ είναι **θετική** όταν $\chi < \frac{1}{v}$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{v}\right)$

✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > \frac{1}{v}$, άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\left(\frac{1}{v}, +\infty\right)$$

B. Να αποδείξετε ότι $2 \leq e^2 v^2 \cdot \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \chi e^{-v\chi} \leq e$.

13.

πανελλήνιες 1994 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την ευθεία ε και τον άξονα $\psi'\psi$.

14.

πανελλήνιες 1994 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο P η οποία έχει συνεχή f'' στο P , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

Αν ισχύει $\int_0^2 [\chi \cdot f''(\chi) + 3 \cdot f'(\chi)] d\chi = -\frac{8}{3}$ να υπολογίσετε το $f(2)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

15.

πανελλήνιες 1995 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο****Β.**

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[α, β]$ ισχύει :

Αν $f'(χ) > 0$ για κάθε $χ \in (α, β)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, β]$.

β. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(χ) > 0$ για κάθε $χ \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(χ) = \int_{\alpha}^{\beta} f(χ - t) dt$, $χ \in \mathbb{R}$ με α, β

πραγματικούς αριθμούς είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $χ_0 \in \mathbb{R}$

με $F'(χ_0) = 0$ τότε $F(χ) = 0$ για κάθε $χ \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ και

τη συνάρτηση $g(χ) = 2 + \frac{1}{χ} \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt$, $χ \in (0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $χ_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(χ_0, g(χ_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $χ'χ$.

β. $g(χ_0) = 2 + f(χ_0)$

Λ ι β α δ ε ι ά

B. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη

παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και

$$1 + \int_0^x f''(t) \sin t dt = \sin^2 x + \int_0^x f'(t) \eta \mu t dt.$$

16.

πανελλήνιες 1995 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Αν $G(x) = \int_1^x f(t) dt$ όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ και $x > 0$, $t > 0$ να βρείτε :

α. Την $G''(1)$

β. Το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}.$

17.

πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει ότι :

$$f(x) + f(a+b-x) = c \text{ για κάθε } x \in [a, b] \text{ όπου } c \text{ σταθερός}$$

πραγματικός αριθμός.

Να αποδείξετε ότι : $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)].$

Δαμιανός Μωραΐτης

18.**πανελλήνιες 1996 Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 3^ο**

A. α. Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(\chi) = \int_0^\chi (\chi - t)g(t)dt$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi) = \sqrt{\chi}$ και $f(\chi) = 2\chi - 1$ και την ευθεία $\chi = 0$.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{1 + \chi^2} + \lambda\chi$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1$

Έχει απαντηθεί στο 1^ο κεφάλαιο και είναι : $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int_0^1 \frac{\chi}{f^2(\chi)} d\chi$.

19.**πανελλήνιες 1997 Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 3^ο**

A. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

ικανοποιούν τις σχέσεις : $f''(\chi) - g''(\chi) = 4$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ και

$f'(1) = g'(1)$, $f(2) = g(2)$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Λιβαδειά

- ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

B. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$.

Να αποδειχθεί ότι :

i) $f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$

ii) $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi) d\chi \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha).$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\chi) \geq 2$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 1 - \int_0^{\chi^2 - 5\chi} f(t) dt.$

A. Να αποδείξετε ότι $g(-3) \cdot g(0) < 0$.

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

20.

πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

ισχύουν $f(\chi) > 0$, $f'(\chi) + 2\chi f(\chi) = 0$, $\chi > 0$ και η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

- α. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f .
- β. Να δείξετε ότι $\frac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi) < \int_1^\chi \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{\chi-1}{2}$.
- γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi) = \int_1^\chi \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) f(t) dt$.
- δ. Να αποδείξετε ότι $2e \int_1^\chi e^{-t^2} dt < 1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα ($\chi > 1$).

21.

πανελλήνιες 1998 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σ' ένα διάστημα Δ , τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(\chi) = F(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$ και μόνο αυτές.
- Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές από τον τύπο: $E(t) = (t-1)\varphi(t)$ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη.

Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές σύμφωνα με τον τύπο $K(t) = \varphi(t+4)$, $t \geq 0$.

- α. Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$ για $t \geq 0$ όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές. Είναι $P(t) = 2t^2 - 2t - 12$, $t \geq 0$.

Λιβαδειά

δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος : $I = \frac{111}{2} \cdot \int_0^6 P(t) dt$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $h(\chi) = 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-a\chi})$, $\chi \geq 0$ όπου a πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $M = \frac{334}{75} \cdot \int_0^{\ln 2} h(\chi) d\chi$ όταν $a = 8$.

22.

πανελλήνιες 1999 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$.

α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$.

β. Έστω η συνάρτηση $g(\chi) = \int_1^4 f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} dt$.

i) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{\chi^2}} \leq e^{\frac{t}{\chi^2}} \leq e^{\frac{4}{\chi^2}}$ για κάθε $t \in [1, 4]$ και $\chi > 0$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} g(\chi)$.

B. Έστω $h : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη

$$\text{σχέση : } h(\chi) = 1999(\chi - 1) + \int_1^\chi \frac{h(t)}{t} dt \text{ για κάθε } \chi \geq 1.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $h(\chi) = 1999\chi \ln \chi$, $\chi \geq 1$

β. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Δαμινός Μωραΐτης

23.

πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1$.

α. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι : **$f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [1, 3]$.**

Έχει απαντηθεί στο κεφάλαιο 2.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα χ' και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = 3$.

24.

πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $I(\chi) = \int_0^1 \left[(f(t))^2 - 2\chi t^2 f(t) + \chi^2 t^4 \right] dt$,

$\chi \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο :

$$\chi_0 = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

25.

πανελλήνιες 2000 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι : $\int_0^3 f(2\chi + 1) d\chi = \frac{1}{2} \int_1^7 f(\chi) d\chi$.

Λ ι β α δ ε ι ά

β. Έστω ότι : $4 \int_0^3 f(2\chi+1) d\chi = \int_1^7 f(\chi) d\chi + 2004$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 334$.

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα :

$$\int_0^{\chi} (1+t^2) f(t) dt = \chi^2 + \int_0^1 6\chi(t^2+t) dt, \quad \chi \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = \frac{2\chi+5}{\chi^2+1}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 3$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f(\chi) + f(\psi) = 0$ με $\chi, \psi \in \mathbb{R}$, παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $\chi'\chi$.

26.

πανελλήνιες 2001 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \chi^2 \ln \chi$, $\chi > 0$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $\chi'\chi$ και την ευθεία $\chi = \chi_0$, όπου χ_0 είναι η θέση του τοπικού ακρότατου της f .

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να

$$\text{ισχύει : } \int_0^{\chi} f(t) dt \geq \chi e^{-\chi} \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

27.**πανελλήνιες 2001 Δ Δέση****ΘΕΜΑ 3^ο**

A. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την

$$\text{ισότητα : } \int_{\alpha}^{\beta} f'(\chi) e^{f(\chi)} d\chi = 0 \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha < \beta.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(\alpha) = f(\beta)$

β. Η εξίσωση $f'(\chi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

B. Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = 2\chi + \frac{4}{\chi}$, $\chi > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $\chi\chi$ και τις ευθείες :

$$\chi = \lambda, \chi = \lambda + 1, \text{ όπου } \lambda > 0, \text{ είναι : } E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right).$$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση : $g(\chi) = \int_0^\chi \chi \sin t dt$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι : $g''(\chi) = 2\sin\chi - \chi\cos\chi$, $\chi \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

πανελλήνιες με το νέο σύστημα

28.

πανελλήνιες 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο :
$$f(\chi) = \begin{cases} \alpha\chi^2 & \text{αν } \chi \leq 3 \\ \frac{1 - e^{\chi-3}}{\chi-3} & \text{αν } \chi > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$. Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(\chi))$. Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα χ' και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = 2$.

Μονάδες 9

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(\chi) \neq 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

ii) $f(\chi) = 1 - 2\chi^2 \int_0^1 t f^2(\chi t) dt$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο : $g(\chi) = \frac{1}{f(\chi)} - \chi^2$,
για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(\chi) = -2\chi f^2(\chi)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(\chi) = \frac{1}{1+\chi^2}$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi f(\chi) \ln 2\chi)$.

Μονάδες 7

29.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής :

$G(\chi) = F(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή : $G(\chi) = F(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6,5

A. 2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Λ ι β α δ ε ι ά

α. $\int_a^b \lambda f(\chi) d\chi = \dots \dots \dots$

β. $\int_a^b (f(\chi) + g(\chi)) d\chi = \dots \dots \dots$

γ. $\int_a^b [\lambda \cdot f(\chi) + \mu \cdot g(\chi)] d\chi = \dots \dots \dots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$

Μονάδες 6

- B. 1.** Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(\chi) = 6\chi + 4$, $\chi \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

- B. 2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 (e^x + x) dx$.

Μονάδες 2

β. $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$.

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi) d\chi$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \int_1^{\chi} \frac{t \cdot f(t)}{t^2} dt, \quad \chi > 0.$$

- α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Δαμινός Μωραΐτης

- β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(\chi) = \frac{1 + \ln \chi}{\chi}$, $\chi > 0$.
- Μονάδες 7
- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Μονάδες 6
- δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- Μονάδες 4
- ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα χ' και τις ευθείες $\chi = 1$, $\chi = e$.
- Μονάδες 5

30.

πανελλήνιες 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να δείξετε ότι: $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$
- B.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε :
- $$\int f(\chi) d\chi = \chi f(\chi) - \int \chi f'(\chi) d\chi$$
- Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 4^ο

- α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[a, \beta]$.
- Να αποδείξετε ότι αν $h(\chi) > g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [a, \beta]$, τότε και
- $$\int_a^\beta h(\chi) d\chi > \int_a^\beta g(\chi) d\chi.$$
- Μονάδες 2

Λ ι β α δ ε ι ά

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(\chi) - e^{-f(\chi)} = \chi - 1 \quad \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

Μονάδες 5

ii) Να δείξετε ότι $\frac{\chi}{2} < f(\chi) < \chi \cdot f'(\chi)$ για κάθε $\chi > 0$.

Μονάδες 12

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $\chi = 0$, $\chi = 1$ και τον άξονα $\chi'\chi$, να δείξετε ότι : $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$.

Μονάδες 6

31.

πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi) d\chi \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{e^{\chi} - 1}{e^{\chi} + 1}$, με $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} \quad \text{Έχει απαντηθεί και είναι} \quad \psi = f^{-1}(\chi) = \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right)$$

Μονάδες 10

Δαμινός Μωραΐτης

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $f^{-1}(\chi) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

$$f^{-1}(\chi) = \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \text{ άρα } f^{-1}(0) = \ln\left(-\frac{0+1}{0-1}\right) = \ln(1) = 0.$$

Μονάδες 5

γ. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(\chi) d\chi$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f''(\chi) \cdot f(\chi) + \left(f'(\chi)\right)^2 = f(\chi) \cdot f'(\chi) \quad \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 2 \cdot f'(0) = 1, \quad \chi \in \mathbb{R}.$$

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το

$$\text{διάστημα } [0,1], \text{ να δείξετε ότι η εξίσωση : } 2\chi - \int_0^\chi \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1 \text{ έχει μία}$$

μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

Μονάδες 13

32.

πανελλήνιες 2002 – Ομογενείς

Τρίτη 17 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi + 4 + \frac{1}{2\chi + 4}$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα χ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

Μονάδες 9

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$f(1) = 0 \text{ και } \chi f'(\chi) - 2f(\chi) = \chi \text{ για κάθε } \chi \in (0, +\infty).$$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $h(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

- β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\int_1^{\chi} f(t) dt}{(\ln \chi)^2}$.

Μονάδες 10

33.**πανελλήνιες 2003****Πέμπτη 29 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει :

$$\int f'(\chi) d\chi = f(\chi) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **Έχει αποδειχθεί.**

Μονάδες 6

Δαμιανός Μωραΐτης

- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των χ και την ευθεία με εξίσωση $\chi = 3$.
Μονάδες 8

34. πανελλήνιες 2003 – Επαναληπτικές

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι :
- α. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής : $G(\chi) = F(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- β. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή :
 $G(\chi) = F(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- Μονάδες 10
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει :

$$\int f(\chi) \cdot g'(\chi) d\chi = f(\chi) \cdot g(\chi) - \int f'(\chi) \cdot g(\chi) d\chi.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi$.

- γ. Να αποδείξετε ότι $f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} + f(\chi) = 0$ **Έχει αποδειχθεί.**

Μονάδες 6

- δ. Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1}} d\chi = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Μονάδες 8

Λιβαδερά

35. πανελλήνιες 2003 – Ομογενείς

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, \chi)$ τέτοιος ώστε :

$$f(\chi) = \chi f'(\xi). \quad \text{Έχει απαντηθεί.}$$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi} + e^\chi$, $\chi > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο $(0, +\infty)$. Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 10

γ. Αν $h(\chi) = e^\chi + \chi^5 + \chi$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_1^{e-1} f(\chi+1) d\chi.$$

Μονάδες 9

36. πανελλήνιες 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(t) \cdot dt = G(\beta) - G(a)$

Δαμιανός Μωραΐτης

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi) = e^{\chi} f(\chi)$ όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

Έχει απαντηθεί στο 2^ο Κεφάλαιο.

Μονάδες 8

β. Αν $f(\chi) = 2\chi^2 - 3\chi$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(\chi) d\chi$,

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$.

Αν για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$g(\chi) = \int_1^{\chi^3} \left| z |f(t)| dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (\chi - 1) \geq 0 \quad \text{με } z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

Λ ι β α δ ε ι ά

- δ. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 0$.

Μονάδες 6

37. πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = 2^\chi + m^\chi - 4^\chi - 5^\chi$,

όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

- α. Να βρείτε τον m ώστε $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

- β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $\chi' \chi$ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$f(\chi) = \frac{\chi^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi f(2\chi t) dt.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

- β. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = e^\chi - (\chi + 1)$.

Μονάδες 7

- γ. Να αποδείξετε ότι η $f(\chi)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

- δ. Να βρείτε τα $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi)$.

Μονάδες 6

Δαμιανός Μωραΐτης

38.

πανελλήνιες 2004 – Ομογενείς

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής : $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή :

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΣΤ** και **Ζ** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα και ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**) αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int \eta \mu \chi d\chi = \sigma \nu \eta \chi + c$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$

για την οποία ισχύει : $f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) dt$, $x \in \Delta$.

α. Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

Μονάδες 6

Λ ι β α δ ε ι ά

39.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα

σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

- α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 3

- β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $\psi = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

$\psi = \lambda \cdot e \cdot x$ η εξίσωση της εφαπτομένης και $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ το σημείο επαφής..

Μονάδες 7

- γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $\psi' \psi$, είναι : $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

- δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$.

Μονάδες 7

Δαμινός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(\chi) = e^{\chi - f(\chi)} \quad \text{για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α. Να δειχθεί ότι : $f(\chi) = \ln\left(\frac{1+e^\chi}{2}\right).$

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\int_0^\chi f(\chi - t) dt}{\eta\mu\chi}.$

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις : $h(\chi) = \int_{-\chi}^\chi t^{2005} \cdot f(t) dt$ και $g(\chi) = \frac{\chi^{2007}}{2007}.$

Δείξτε ότι $h(\chi) = g(\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-\chi}^\chi t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1).$

Μονάδες 6

40.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι :

i. $f(0) = 0.$

Μονάδες 4

ii. $f'(0) = 1.$

Μονάδες 4

Λ ι β α δ ε ι ά

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^2 + \lambda(f(\chi))^2}{2\chi^2 + (f(\chi))^2} = 3.$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(\chi) > f(\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i. $\chi \cdot f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(\chi) d\chi < f(1)$

Μονάδες 4

41.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - ΟΜΑΔΕΥΕΙΣ

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

4. Ισχύει $\int e^x dx = e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} a + e^x, & \chi \leq 0 \\ \chi \cdot \ln \chi, & \chi > 0 \end{cases}$

Β) Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $a = -1$:

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $\chi' \chi$ και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = e$.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$.

δ) Έστω $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2\ln 2$.

Μονάδες 7

42.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ε. Ισχύει η σχέση $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. Έχει αποδειχθεί.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. Έχει αποδειχθεί και είναι $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $\psi = x$.

Έχουν βρεθεί και είναι τα σημεία $A(2, 2)$ και $B(3, 3)$

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

Λ ι β α δ ε ι ά

43.

παανελλήνιες 2006 - Εσπερινές**Τετάρτη 5 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο****A.2** Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.**ε.** Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μίαπαράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^οΔίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.**β.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^οΈστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + a$, $a \in \mathbb{R}$.**α.** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

Μονάδες 7

Έχει απαντηθεί, δες την απάντηση στο κεφάλαιο περί μιγαδικών.**β.** Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x = 2$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi$ στο $\psi_0 = -3$, τότε :**Δαμιανός Μωραΐτης**

- i. να βρείτε το a και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

Έχει απαντηθεί, δες την απάντηση στο κεφάλαιο περί παραγώγων .

- ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της εφαπτομένης (ε), του άξονα $\chi'\chi$ και της ευθείας $\chi = \frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

44.

ωανελλήνικες 2006 - Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

4. $\int \sin \chi d\chi = \eta \mu \chi + c$

Μονάδες 2

5. Αν για μία συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(\chi) \geq 0$

για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi) d\chi \geq 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει :

$$f(\chi) = 3 + 2 \int_0^{\chi} f(t) dt, \chi \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(\chi) = \frac{f(\chi)}{e^{2\chi}}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

Λ ι β α δ ε ι ά

β) Να αποδειχθεί ότι $f(\chi) = 3e^{2\chi}$.

Μονάδες 5

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $\chi' \chi$ και τις ευθείες $\chi = 0, \chi = \lambda$ με $\lambda > 0$.

Μονάδες 10

δ) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$,

Μονάδες 5

45.

ωανελλήνικες 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και για κάθε $\chi \in [a, b]$

ισχύει $f(\chi) \geq 0$ τότε $\int_a^b f(\chi) d\chi > 0$.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα

σημείο του Δ , τότε $\left(\int_a^{g(\chi)} f(t) dt \right)' = f(g(\chi)) \cdot g'(\chi)$, με την προϋπόθεση

ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με

$$\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- α.** Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

- β.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

- γ.** Αν χ_1, χ_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και χ_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$,

$$B(\chi_2, f(\chi_2)) \text{ και } \Gamma(\chi_3, f(\chi_3)) \text{ βρίσκονται στην ευθεία } \psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta.$$

Μονάδες 3

Τα ερωτήματα **α.**, **β.**, **γ.**, αφορούν το προηγούμενο κεφάλαιο περί παραγώγων και έχουν απαντηθεί εκεί. Για την απάντηση θα χρειαστούν κάποια από τα συμπεράσματα των **α.**, **β.**, **γ.**, μπορείς να τα χρησιμοποιήσεις χωρίς απόδειξη.

- δ.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [0, 1]$.

$$F(\chi) = \int_0^\chi f(t)g(t)dt, \quad \chi \in [0, 1]$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις :

$$G(\chi) = \int_0^\chi g(t)dt, \quad \chi \in [0, 1]$$

Λ ι β α δ ε ι ά

α. Ναδειχθεί ότι $F(\chi) > 0$ για κάθε χ στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(\chi) \cdot G(\chi) > F(\chi)$ για κάθε χ στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(\chi)}{G(\chi)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε χ στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:
$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^\chi f(t)g(t)dt \right) \cdot \left(\int_0^{\chi^2} \eta \mu^2 dt \right)}{\left(\int_0^\chi g(t)dt \right) \cdot \chi^5}$$

Μονάδες 7

46.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, τότε :

$$\int_a^b f(\chi)g'(\chi)d\chi = \int_a^b f(\chi)d\chi \cdot \int_a^b g(\chi)d\chi$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}, & \chi < 0 \\ \chi^2 + \alpha\chi + \beta \sigma\upsilon\nu\chi, & \chi \geq 0 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = 3$.

Μονάδες 8

Δαμινός Μωραΐτης

- β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

Τα ερωτήματα **α.**, **β.** αφορούν το προηγούμενο κεφάλαιο περί παραγώγων και έχουν απαντηθεί εκεί. Για την απάντηση θα χρειαστούν κάποια από τα συμπεράσματα των **α.**, **β.** μπορείς να τα χρησιμοποιήσεις χωρίς απόδειξη.

- γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(\chi) d\chi$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi - e \cdot \ln \chi$, $\chi > 0$.

- α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

- β. Να αποδειχθεί ότι $f(\chi) \geq e$ για κάθε $\chi > 0$

Μονάδες 7

Τα ερωτήματα **α.**, **β.** αφορούν το προηγούμενο κεφάλαιο περί παραγώγων και έχουν απαντηθεί εκεί. Για την απάντηση θα χρειαστούν κάποια από τα συμπεράσματα των **α.**, **β.** μπορείς να τα χρησιμοποιήσεις χωρίς απόδειξη.

- γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt = \int_{\chi^2+3}^{\chi^2+2} f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

47.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

5. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει:

$$\int f'(\chi) d\chi = -f(\chi) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(\chi) - f(\chi) = -4e^{-3\chi} \quad \text{και} \quad f(0) = 2.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(\chi) = e^{-\chi}f(\chi) - e^{-4\chi}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = e^{\chi} + \frac{1}{e^{3\chi}}$.

Μονάδες 6

Τα ερωτήματα α., β. αφορούν το προηγούμενο κεφάλαιο περί παραγώγων και έχουν απαντηθεί εκεί. Για την απάντηση θα χρειαστούν κάποια από τα συμπεράσματα των α., β. μπορείς να τα χρησιμοποιήσεις χωρίς απόδειξη.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(\chi) = \int_0^{\chi} f(t) dt$

Μονάδες 9

δ. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{I(\chi)}{\chi^2}$.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

48.

Πανελλήνιες 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45 .$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

Μονάδες 8

49.

Πανελλήνιες 2008 - Επαναληρωτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta) .$$

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των

Λ ι β α δ ε ι ά

χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t \cdot f(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty)$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 e^{t-1} [f(t) + F(t)] dt = F(1)$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

γ. Αν $h(1) = 2$

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t) dt < 2 \cdot \int_0^2 t \cdot f(t) dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t) dt = \frac{1}{2} F(1)$

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

Αυταπήδεις

1.

πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. ii. Επειδή για κάθε $\chi \in [2, 5]$ είναι $\chi + 1 > 0$ και $\frac{1}{\chi+1} > 0$, άρα $f(\chi) > 0$,

ως άθροισμα θετικών αριθμών, επίσης η f είναι συνεχής στο $[2, 5]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_2^5 f(\chi) d\chi = \int_2^5 \left(\chi + 1 + \frac{1}{\chi+1} \right) d\chi = \left[\frac{\chi^2}{2} + \chi + \ln(\chi+1) \right]_2^5 = \frac{27}{2} + \ln 2 \text{ τ. μ.}$$

2.

πανελλήνιες 1988 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. Η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^3 - 5\chi^2 + 1}{\chi}$ είναι συνεχής στο $[2, 5]$ οπότε είναι :

$$\int_2^5 f(\chi) d\chi = \int_2^5 \left(\frac{\chi^3 - 5\chi^2 + 1}{\chi} \right) d\chi = \int_2^5 \left(\chi^2 - 5\chi + \frac{1}{\chi} \right) d\chi = \left[\frac{\chi^3}{3} - 5\frac{\chi^2}{2} + \ln \chi \right]_2^5 =$$

$$\int_2^5 f(\chi) d\chi = -\frac{27}{2} + \ln \frac{5}{2}.$$

3.

πανελλήνιες 1989 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

β. Από το **α.** ερώτημα είναι η παράγωγος $f'(\chi) = -2\eta\mu 2\chi$ και η εξίσωση της

εφαπτομένης $\psi = -\sqrt{2}\chi + \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}$

Έστω A, B, Γ, Δ τα σημεία τομής της C_f και της εφαπτομένης, αντίστοιχα με τους θετικούς ημιάξονες $O\chi, O\psi$. θα είναι :

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), B(0,1), \Gamma\left(\frac{\pi+4}{8}, 0\right) \text{ και } \Delta\left(0, \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}\right).$$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

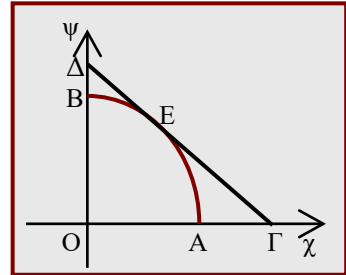
Είναι $f'(\chi) = -2\eta\mu 2\chi \Leftrightarrow f''(\chi) = (-2\eta\mu 2\chi)' \Leftrightarrow f''(\chi) = -4\sigma\upsilon\nu\chi < 0$ για κάθε

$\chi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο

διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, άρα η εφαπτομένη βρίσκεται

ολόκληρη πάνω από την C_f , με εξαίρεση μόνο

το σημείο επαφής που βρίσκεται πάνω στην C_f .



Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ το ζητούμενο εμβαδό E , είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου $ΟΓΔ$ μείον το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την

C_f και τον θετικό ημιάξονα $O\psi$: $\chi = 0$ και την ευθεία $\chi = \frac{\pi}{4}$. οπότε

$$E = \frac{1}{2}(ΟΓ)(ΟΔ) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu(2\chi) d\chi = \frac{1}{2} \frac{\pi+4}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8} - \left[\frac{1}{2} \eta\mu 2\chi \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$E = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)^2}{128} - \frac{1}{2} \quad \tau. \mu..$$

4.

πανελλήνιες 1989 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Πεδίο ορισμού της f το $A = [0, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο A .

Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ είναι $f(\chi) = \sqrt{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{\chi}} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

β. Αν $\kappa \geq 1$, για κάθε $\chi \in [\kappa, \kappa+1]$ είναι $\kappa \leq \chi \Leftrightarrow \sqrt{\kappa} \leq \sqrt{\chi} \Leftrightarrow \sqrt{\chi} - \sqrt{\kappa} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} (\sqrt{\chi} - \sqrt{\kappa}) d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\chi} d\chi \geq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\kappa} d\chi = \sqrt{\kappa} \int_{\kappa}^{\kappa+1} 1 \cdot d\chi = \sqrt{\kappa} [\chi]_{\kappa}^{\kappa+1}$$

$$= \sqrt{\kappa} [\kappa+1 - \kappa] \Leftrightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\chi} d\chi \geq \sqrt{\kappa} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\chi} d\chi}$$

Λιβαδειά

Για κάθε $\chi \in [\kappa - 1, \kappa]$ είναι $\chi \leq \kappa \Leftrightarrow \sqrt{\chi} \leq \sqrt{\kappa} \Leftrightarrow \sqrt{\chi} - \sqrt{\kappa} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\kappa-1}^{\kappa} (\sqrt{\chi} - \sqrt{\kappa}) d\chi \leq 0 \Leftrightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\chi} d\chi \leq \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\kappa} d\chi = \sqrt{\kappa} \int_{\kappa-1}^{\kappa} 1 \cdot d\chi = \sqrt{\kappa} [\chi]_{\kappa-1}^{\kappa}$$

$$= \sqrt{\kappa} [\kappa - \kappa + 1] \Leftrightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\chi} d\chi \leq \sqrt{\kappa}$$

5.

πανελλήνιες 1990 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = 3\chi + \frac{1}{2\chi^2}$

Β. Οι συναρτήσεις $f(\chi) = 3\chi + \frac{1}{2\chi^2}$ και $g(\chi) = 3\chi$ είναι συνεχείς στο $[1, \alpha]$

και $f(\chi) - g(\chi) = 3\chi + \frac{1}{2\chi^2} - 3\chi \Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) = \frac{1}{2\chi^2} > 0$, για κάθε $\chi \in [1, \alpha]$

άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι : $E(\alpha) = \int_1^{\alpha} [f(\chi) - g(\chi)] d\chi = \int_1^{\alpha} \frac{1}{2\chi^2} d\chi$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\chi} \right]_1^{\alpha} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha} - 1 \right] \Leftrightarrow E(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \text{ τ. μ. .}$$

Γ. Είναι $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - 1}{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha} \right) = \frac{1}{2} + 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \frac{1}{2}$$

6.

πανελλήνιες 1990 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Θεωρία .

Β. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων .

Δαμιανός Μωραΐτης

Επίσης είναι $f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [1, 3]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$\begin{aligned} E &= \int_1^3 f(\chi) d\chi = \int_1^3 \chi^2 e^\chi d\chi = \int_1^3 \chi^2 (e^\chi)' d\chi = [\chi^2 e^\chi]_1^3 - \int_1^3 (\chi^2)' e^\chi d\chi = \\ &= [\chi^2 e^\chi]_1^3 - 2 \int_1^3 \chi (e^\chi)' d\chi \Leftrightarrow [\chi^2 e^\chi]_1^3 - 2 \left([\chi e^\chi]_1^3 - \int_1^3 e^\chi d\chi \right) = \\ &= [\chi^2 e^\chi]_1^3 - 2[\chi e^\chi]_1^3 + 2[e^\chi]_1^3 = \dots \text{ άρα } E = 5e^3 - e \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

7.

πανελλήνιες 1991 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α.

$$\begin{aligned} \alpha. \quad I_v &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v \chi d\chi \Leftrightarrow I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} \chi \cdot \varepsilon \varphi^2 \chi d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} \chi \left(\frac{1}{\sin v^2 \chi} - 1 \right) d\chi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} \chi \frac{1}{\sin v^2 \chi} d\chi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} \chi d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v-2} \chi (\varepsilon \varphi \chi)' d\chi - I_{v-2} = \\ &= \frac{1}{v-1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (v-1) \varepsilon \varphi^{v-2} \chi (\varepsilon \varphi \chi)' d\chi - I_{v-2} = \frac{1}{v-1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon \varphi^{v-1} \chi)' d\chi - I_{v-2} = \\ &= \frac{1}{v-1} \left[\varepsilon \varphi^{v-1} \chi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{v-2} = \frac{\varepsilon \varphi^{v-1} \frac{\pi}{4} - \varepsilon \varphi^{v-1} 0}{v-1} - I_{v-2} = \frac{1^{v-1} - 0}{v-1} - I_{v-2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$$

$$\beta. \quad \text{Είναι } I_5 = \frac{1}{5-1} - I_{5-2} = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3-1} - I_{3-2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + I_1.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi \chi d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu \chi}{\sigma \nu \chi} d\chi = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma \nu \chi)'}{\sigma \nu \chi} d\chi = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln(\sigma \nu \chi))' d\chi = \\ &= - [\ln(\sigma \nu \chi)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dots = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{Άρα } I_5 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Β. α. Δες αντίστοιχο θέμα στις παραγώγους :

Πίνακας μεταβολών για την f :

χ	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		-	+
$f(\chi)$			

Όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f' : **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$

είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ είναι όταν **θετική** $\chi > 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο : **τοπικό ελάχιστο** στη θέση $\chi_1 = 1$,

$$\text{το } f(1) = \sqrt{1} - \frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} = 1.$$

β.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 4]$, οπότε για κάθε $\chi \in [1, 4]$

$$\text{ισχύει : } f(\chi) \geq f(1) \Leftrightarrow f(\chi) \geq \sqrt{1} - \frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} \Leftrightarrow f(\chi) \geq 1, \text{ άρα } f(\chi) > 0.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγεις αν παρατηρήσεις πως το $f(1) = 1$ είναι ολικό ελάχιστο.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E = \int_1^4 f(\chi) d\chi = \int_1^4 \left(\sqrt{\chi} - \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} \right) d\chi = \int_1^4 \sqrt{\chi} d\chi - \int_1^4 \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} d\chi =$$

$$\left[\frac{\chi^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} d\chi = \frac{2}{3} \left[\chi^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} d\chi.$$

$$\text{Είναι } \frac{2}{3} \left[\chi^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{\chi^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} [8 - 1] = \frac{14}{3} \text{ και}$$

για το $\int_1^4 \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} d\chi$ ακολουθείς την διαδικασία : «αλλαγή μεταβλητής» :

Θέτεις $u = \sqrt{\chi} \Leftrightarrow u^2 = \chi \Leftrightarrow 2u du = d\chi$, για $\chi = 1$ είναι $u = 1$ και για $\chi = 4$ έχεις $u = 2$. Έτσι λοιπόν :

$$\int_1^4 \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}} d\chi = \int_1^2 \frac{\ln u^2}{2u} 2u du = \int_1^2 2 \ln u du = 2 \int_1^2 (u)' \ln u du =$$

$$2 \left([u \ln u]_1^2 - \int_1^2 u \frac{1}{u} du \right) = 2 \left(2 \ln 2 - \int_1^2 1 du \right) = 2 (2 \ln 2 - [u]_1^2) =$$

$$2(2 \ln 2 - 1) = 4 \ln 2 - 2.$$

$$\text{Άρα } E = \int_1^4 f(\chi) d\chi = \frac{14}{3} - (4 \ln 2 - 2) = \frac{14}{3} + 2 - 4 \ln 2 \Leftrightarrow E = \frac{20}{3} - 4 \ln 2 \text{ τ. μ.}$$

8.

πανελλήνιες 1991 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για να βρεις το ζητούμενο εμβαδό πρέπει να ξέρεις το πρόσημο της f .

Επειδή η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι

$e^x - e^1 \Leftrightarrow e^x - e^1 < 0$ δηλ. $f(x) < 0$ στο $[0, 1)$ και για κάθε $x \in [1, e]$ είναι

$f(x) = \frac{\ln x}{x} \geq 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E = \int_0^1 (-f(x)) dx + \int_1^e f(x) dx = -\int_0^1 (e^x - e) dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$\int_0^1 (e - e^x) dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = [x \cdot e - e^x]_0^1 + \int_1^e \ln x (\ln x)' dx =$$

$$\left[e - e - (0 \cdot e - e^0) \right] + \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow E = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

9.

πανελλήνιες 1992 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Α. Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, για κάθε x ισχύει $f(x) > 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι : $E = \int_{-1}^1 f(x) dx =$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+4)e^{-x} dx &= \int_{-1}^1 (x+4)(-e^{-x})' dx = \left[(x+4)(-e^{-x}) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-e^{-x}) dx = \\ &= \left[(1+4)(-e^{-1}) - (-1+4)(-e^{-(-1)}) \right] - \int_{-1}^1 (e^{-x})' dx = -5\frac{1}{e} + 3e - \left[e^{-x} \right]_{-1}^1 = \\ &= -\frac{5}{e} + 3e - (e^{-1} - e^1) = -\frac{6}{e} + 4e \Leftrightarrow E = \frac{2(2e^2 - 3)}{e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

10.

πανελλήνιες 1992 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

Β. α. Είναι : $E(t) = \int_1^t (x-2) \cdot \ln x \cdot dx = \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right)' \cdot \ln x \cdot dx =$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot \ln x \right]_1^t - \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot (\ln x)' \cdot dx =$$

$$\left[\left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \left(\frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) \cdot \ln 1 \right] - \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$\left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \int_1^t \left(\frac{x}{2} - 2 \right) dx = \left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \left[\frac{x^2}{4} - 2x \right]_1^t$$

$$\left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \left[\left(\frac{t^2}{4} - 2t \right) - \left(\frac{1}{4} - 2 \right) \right] = \left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \left[\frac{t^2}{4} - 2t + \frac{7}{4} \right] \Leftrightarrow$$

$$E(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t \right) \cdot \ln t - \frac{t^2}{4} + 2t - \frac{7}{4} \text{ τ. μ. } .$$

β. Για κάθε $t > 1$ είναι : $E(t) = \int_1^t (\chi - 2) \cdot \ln \chi \cdot d\chi \Leftrightarrow$

$$E'(t) = \left(\int_1^t (\chi - 2) \cdot \ln \chi \cdot d\chi \right)' = (t - 2) \cdot \ln t . \quad \text{Επομένως :}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t-2) \ln t}{t \cdot \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t-2)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{t} \right) = 1 - 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t} = 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Αφού η f είναι περιττή, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ θα είναι :

$$f(-\chi) = -f(\chi) \Leftrightarrow \alpha(-\chi)^3 + \beta(-\chi) + \gamma = -(\alpha\chi^3 + \beta\chi + \gamma) \Leftrightarrow$$

$$-\alpha\chi^3 - \beta\chi + \gamma = -\alpha\chi^3 - \beta\chi - \gamma \Leftrightarrow 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \text{ άρα } f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi .$$

Η f ως πολωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επειδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $\chi_0 = 1$, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(1) = 0$

$$\text{Όμως } f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = 3\alpha\chi^2 + \beta, \text{ άρα } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha \cdot 1^2 + \beta = 0$$

$$\beta = -3\alpha \text{ άρα } f(\chi) = \alpha\chi^3 - 3\alpha\chi .$$

$$\text{Είναι : } \int_0^2 f(\chi) d\chi = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 (\alpha\chi^3 - 3\alpha\chi) d\chi = 2 \Leftrightarrow \left[\alpha \frac{\chi^4}{4} - 3\alpha \frac{\chi^2}{2} \right]_0^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha - 6\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ άρα } \beta = -3\alpha = -3 \cdot (-1) = 3 \text{ άρα } f(\chi) = -\chi^3 + 3\chi .$$

κάνοντας **επαλήθευση** (βρίσκοντας δηλ το πρόσημο της f) διαπιστώνεις ότι στο $\chi_0 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο άρα τελικώς η άρα $f(\chi) = -\chi^3 + 3\chi .$

Β. Είναι : $\int_0^\pi (g(\chi) + g'(\chi)) \cdot e^\chi \cdot d\chi = \int_0^\pi (g(\chi) \cdot e^\chi + g'(\chi) \cdot e^\chi) \cdot d\chi =$

$$\int_0^\pi \left(g(\chi) \cdot (e^\chi)' + g'(\chi) \cdot e^\chi \right) \cdot d\chi = \int_0^\pi (g(\chi) \cdot e^\chi)' \cdot d\chi = [g(\chi) \cdot e^\chi]_0^\pi =$$

$$g(\pi) \cdot e^\pi - g(0) \cdot e^0 = e^\pi \cdot e^\pi - g(0) = 1 - g(0).$$

$$\text{Άρα } \int_0^\pi (g(\chi) + g'(\chi)) \cdot e^\chi \cdot d\chi = 2 \Leftrightarrow 1 - g(0) = 2 \Leftrightarrow g(0) = -1$$

11.

πανελλήνιες 1993 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. α. Θεωρία.

β. Θεωρία.

Β. β. Για κάθε $t \in [\chi, \chi+1]$ με $\chi > 0$ έχεις: $0 < t^4 < 1 + t^4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{t^4} < \sqrt{1+t^4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} < \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2} \text{ άρα } 0 + 4 < \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} + 4 < \frac{1}{t^2} + 4 \Leftrightarrow 4 < f(t) < \frac{1}{t^2} + 4.$$

$$\checkmark \quad 4 < f(t) \Leftrightarrow f(t) - 4 > 0 \text{ άρα } \int_\chi^{\chi+1} (f(t) - 4) dt > 0 \Leftrightarrow \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt - \int_\chi^{\chi+1} 4 dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt - 4[t]_\chi^{\chi+1} > 0 \Leftrightarrow \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt - 4[\chi+1-\chi] > 0 \Leftrightarrow \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt > 4 \quad (1).$$

$$\checkmark \quad f(t) < \frac{1}{t^2} + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + 4 - f(t) > 0 \text{ άρα } \int_\chi^{\chi+1} \left(\frac{1}{t^2} + 4 - f(t) \right) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_\chi^{\chi+1} \left(\frac{1}{t^2} + 4 \right) dt - \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{t} + 4t \right]_\chi^{\chi+1} - \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[-\frac{1}{\chi+1} + 4(\chi+1) + \frac{1}{\chi} - 4\chi \right] - \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\chi} + 4 - \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_\chi^{\chi+1} f(t) dt < -\frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\chi} + 4 \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει $4 < \int_{\chi}^{\chi+1} f(t) dt < -\frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\chi} + 4$.

Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} 4 = 4$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\chi+1} + \frac{1}{\chi} + 4 \right) =$

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\chi+1} \right) + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\chi} \right) + \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 4 = -0 + 0 + 4 = 4$ άρα με βάση το κριτήριο

παρεμβολής θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \int_{\chi}^{\chi+1} f(t) dt = 4$.

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Η ισότητα που σου δίνει γράφεται: $\int_a^{\chi} e^{-t} f(t) dt = e^{-\chi} \left(1 - \frac{e^{-a}}{e^{-\chi}} - f(\chi) \right) =$

$$\frac{1 - e^{\chi} e^{-a} - f(\chi)}{e^{\chi}} \Leftrightarrow e^{\chi} \int_a^{\chi} e^{-t} f(t) dt = 1 - e^{\chi-a} - f(\chi) \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = 1 - e^{\chi-a} - e^{\chi} \int_a^{\chi} e^{-t} f(t) dt \quad (1).$$

Η συνάρτηση $e^{\chi} \int_a^{\chi} e^{-t} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως λόγω της (1), η $f(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Αν παραγωγίσεις την ισότητα που σου δίνει ως προς χ έχεις:

$$\left(\int_a^{\chi} e^{-t} f(t) dt \right)' = (e^{-\chi} - e^{-a} - e^{-\chi} \cdot f(\chi))' \Leftrightarrow$$

$$e^{-\chi} f(\chi) = (e^{-\chi})' - (e^{-a})' - (e^{-\chi} \cdot f(\chi))'$$

$$\Leftrightarrow e^{-\chi} f(\chi) = -e^{-\chi} + e^{-\chi} f(\chi) - e^{-\chi} \cdot f'(\chi) \Leftrightarrow e^{-\chi} \cdot f'(\chi) = -e^{-\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = -1,$$

αφού $e^{-\chi} \neq 0$, άρα $f(\chi) = -\chi + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ (2).

Όμως από την (1) για $\chi = a$ έχεις: $f(a) = 1 - e^{a-a} - e^a \int_a^a e^{-t} f(t) dt = 1 - 1 - e^a \cdot 0$

$$\Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ και από την (2) για } \chi = a \text{ έχεις: } f(a) = -a + \kappa \Leftrightarrow -a + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = a.$$

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(\chi) = -\chi + a$ $\chi \in \mathbb{R}$.

12.

πανελλήνιες 1993 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο****B.** Η ισότητα που σου δίνει γράφεται :

$$\int_0^1 \chi g'(\chi) d\chi = 1993 - \int_0^1 g(\chi) d\chi \Leftrightarrow \int_0^1 \chi g'(\chi) d\chi + \int_0^1 g(\chi) d\chi = 1993 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (\chi g'(\chi) + g(\chi)) d\chi = 1993 \Leftrightarrow \int_0^1 (\chi g'(\chi) + \chi' g(\chi)) d\chi = 1993$$

$$\int_0^1 (\chi g(\chi))' d\chi = 1993 \Leftrightarrow [\chi g(\chi)]_0^1 = 1993 \Leftrightarrow 1 \cdot g(1) - 0 \cdot g(0) = 1993 \Leftrightarrow g(1) = 1993.$$

ΘΕΜΑ 4^ο**B.** Από το **A.** ερώτημα είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\frac{1}{v}, +\infty\right) \text{ άρα και στο } \left[\frac{1}{v}, \frac{2}{v}\right], \text{ άρα για κάθε } \chi \in \left[\frac{1}{v}, \frac{2}{v}\right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{v} \leq \chi \leq \frac{2}{v} \quad \begin{matrix} f \text{ γνησίως} \\ \Leftrightarrow \\ \text{φθίνουσα} \end{matrix} \quad f\left(\frac{1}{v}\right) \geq f(\chi) \geq f\left(\frac{2}{v}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{v} e^{-v\frac{1}{v}} \geq f(\chi) \geq \frac{2}{v} e^{-v\frac{2}{v}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ve} \geq f(\chi) \geq \frac{2}{ve^2}.$$

$$\checkmark \quad \text{Είναι } \frac{1}{ve} \geq f(\chi) \Leftrightarrow \frac{1}{ve} - f(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \left(\frac{1}{ve} - f(\chi)\right) d\chi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{1}{ve} d\chi - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ve} [\chi]_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ve} \left(\frac{2}{v} - \frac{1}{v}\right) \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v^2 e} \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi$$

$$\checkmark \quad \text{Είναι } f(\chi) \geq \frac{2}{ve^2} \Leftrightarrow f(\chi) - \frac{2}{ve^2} \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \left(f(\chi) - \frac{2}{ve^2}\right) d\chi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{2}{ve^2} d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq \frac{2}{ve^2} \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} 1 d\chi \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq \frac{2}{ve^2} \left[\chi \right]_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq \frac{2}{ve^2} \left(\frac{2}{v} - \frac{1}{v} \right) \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \geq \frac{2}{v^2 e^2}$$

$$\text{Άρα } \frac{2}{v^2 e^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \leq \frac{1}{v^2 e} \Leftrightarrow v^2 e^2 \frac{2}{v^2 e^2} \leq v^2 e^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \leq v^2 e^2 \frac{1}{v^2 e} \Leftrightarrow$$

$$2 \leq v^2 e^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(\chi) d\chi \leq e.$$

13.

πανελλήνιες 1994 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(\chi) = 4\chi$, άρα $f'(2\alpha) = 8\alpha$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C στο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$ είναι :

$$\psi - f(2\alpha) = f'(2\alpha)(\chi - 2\alpha) \quad \psi - 8\alpha^2 = 8\alpha(\chi - 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \psi = 8\alpha\chi - 8\alpha^2$$

Επειδή η $f''(\chi) = 4 > 0$, η f στρέφει τα κοίλα άνω και η εφαπτομένη είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

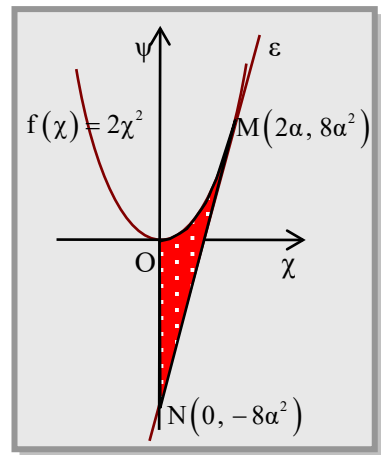
Η εφαπτομένη ε τέμνει τον ψ' στο $N(0, -8\alpha^2)$

επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος.

Επίσης αν συμβολίσεις με $g(\chi) = \psi = 8\alpha\chi - 8\alpha^2$ θα είναι :

$$f(\chi) - g(\chi) = 2\chi^2 - (8\alpha\chi - 8\alpha^2) = 2\chi^2 - 8\alpha\chi + 8\alpha^2 = 2(\chi^2 - 4\alpha\chi + 4\alpha^2)$$

$$\Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) = 2(\chi - 2\alpha)^2 \geq 0, \text{ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :}$$



$$E = \int_0^{2\alpha} (f(\chi) - g(\chi)) d\chi = \int_0^{2\alpha} 2(\chi - 2\alpha)^2 d\chi = \frac{2}{3} \left[(\chi - 2\alpha)^3 \right]_0^{2\alpha} =$$

$$\frac{2}{3} \left[(2\alpha - 2\alpha)^3 - (0 - 2\alpha)^3 \right] = \frac{2}{3} (0 + 8\alpha^3) \Leftrightarrow E = \frac{16\alpha^3}{3} \text{ τ. μ.}$$

14.

πανελλήνιες 1994 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 1^ο**

Β. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 = 2$ και είναι

παραγωγίσιμη στο R θα είναι $f'(2) = 0$.

Επίσης αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ θα είναι $f(0) = 1$, άρα

$$\int_0^2 [\chi \cdot f''(\chi) + 3 \cdot f'(\chi)] d\chi = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 \chi \cdot f''(\chi) d\chi + 3 \int_0^2 f'(\chi) d\chi = -\frac{8}{3} \quad (1).$$

$$\checkmark \quad \int_0^2 \chi \cdot f''(\chi) d\chi = \left[\chi \cdot f'(\chi) \right]_0^2 - \int_0^2 \chi' \cdot f'(\chi) d\chi =$$

$$\left(2 \cdot f'(2) - 0 \cdot f'(0) \right) - \left[f(\chi) \right]_0^2 \stackrel{f'(2)=0}{=} -f(2) + f(0) \quad (2).$$

$$\checkmark \quad 3 \int_0^2 f'(\chi) d\chi = 3 \left[f(\chi) \right]_0^2 = 3f(2) - 3f(0) \quad (3).$$

Η (1) αν αντικαταστήσεις τις (2) και (3) γίνεται :

$$\int_0^2 \chi \cdot f''(\chi) d\chi + 3 \int_0^2 f'(\chi) d\chi = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + 3f(2) - 3f(0) = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$2f(2) - 2f(0) = -\frac{8}{3} \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} 2f(2) - 2 = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow 2f(2) = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow f(2) = -\frac{1}{3}$$

15.

πανελλήνιες 1995 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

Β. α. Θεωρία.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- β. Αν θέσεις $\chi - t = u \Leftrightarrow t = \chi - u \Leftrightarrow dt = -du$ (επειδή η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι η t , άρα το χ θεωρείται σταθερά και επομένως $d\chi = 0$).

Αν $t = \alpha$ τότε $u_1 = \chi - \alpha$ ενώ αν $t = \beta$ τότε $u_2 = \chi - \beta$.

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } F(\chi) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi - t) dt = \int_{\chi-\alpha}^{\chi-\beta} -f(u) du = \int_{\chi-\alpha}^0 -f(u) du + \int_0^{\chi-\beta} -f(u) du = \\ &= -\int_0^{\chi-\alpha} -f(u) du + \int_0^{\chi-\beta} -f(u) du \Leftrightarrow F(\chi) = \int_0^{\chi-\alpha} f(u) du - \int_0^{\chi-\beta} f(u) du \quad (1). \end{aligned}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως και η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και είναι

$$F'(\chi) = \left(\int_0^{\chi-\alpha} f(u) du \right)' - \left(\int_0^{\chi-\beta} f(u) du \right)' =$$

$$f(\chi - \alpha) \cdot (\chi - \alpha)' - f(\chi - \beta) \cdot (\chi - \beta)' \Leftrightarrow F'(\chi) = f(\chi - \alpha) - f(\chi - \beta).$$

Αν λοιπόν υπάρχει $\chi_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $F'(\chi_0) = 0$ τότε

$$0 = f(\chi_0 - \alpha) - f(\chi_0 - \beta) \Leftrightarrow f(\chi_0 - \alpha) = f(\chi_0 - \beta) \text{ επειδή η } f \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $f'(\chi) > 0$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άρα ως γνησίως μονότονη,

$$\text{θα είναι } 1 - 1 \text{ άρα } f(\chi_0 - \alpha) = f(\chi_0 - \beta) \Leftrightarrow \chi_0 - \alpha = \chi_0 - \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

$$\text{Η (1) γίνεται } F(\chi) = \int_0^{\chi-\alpha} f(u) du - \int_0^{\chi-\alpha} f(u) du \Leftrightarrow F(\chi) = 0, \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

- Α. α. Οι συναρτήσεις $2, \frac{1}{\chi}, \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$

$$\text{άρα και η συνάρτηση } g(\chi) = 2 + \frac{1}{\chi} \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt \text{ είναι παραγωγίσιμη άρα και}$$

συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Είναι $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 2 + \frac{1}{\alpha} \cdot 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 2$ γιατί $\int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 0$ από

τη θεωρία, $g(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 2 + \frac{1}{\beta} \cdot 0 \Leftrightarrow g(\beta) = 2$, γιατί

$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ από την εκφώνηση. Επειδή η g είναι συνεχής στο

$[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $g(\alpha) = g(\beta)$, άρα σύμφωνα

με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$g'(\chi_0) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_g

στο σημείο $(\chi_0, g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

β. Είναι $g(\chi) = 2 + \frac{1}{\chi} \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt \Leftrightarrow g'(\chi) = \left(2 + \frac{1}{\chi} \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt \right)' =$

$$0 + \left(\frac{1}{\chi} \right)' \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt + \frac{1}{\chi} \left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt \right)' \Leftrightarrow g'(\chi) = -\frac{1}{\chi^2} \cdot \int_{\alpha}^{\chi} f(t) dt + \frac{1}{\chi} f(\chi).$$

✓ Από $g(\chi_0) = 2 + \frac{1}{\chi_0} \cdot \int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_0} \cdot \int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt = g(\chi_0) - 2 \Leftrightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt = \chi_0 \cdot g(\chi_0) - 2\chi_0 \quad (1)$$

✓ Από το $g'(\chi_0) = 0$, του προηγούμενου ερωτήματος, έχεις :

$$0 = -\frac{1}{\chi_0^2} \cdot \int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt + \frac{1}{\chi_0} f(\chi_0) \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_0^2} \cdot \int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt = \frac{1}{\chi_0} f(\chi_0) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\chi_0} f(t) dt = \chi_0 \cdot f(\chi_0) \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχεις $\chi_0 \cdot f(\chi_0) = \chi_0 \cdot g(\chi_0) - 2\chi_0$ και επειδή

$\chi_0 \in (\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$ άρα $\chi_0 \neq 0$, θα είναι :

$$\chi_0 \cdot f(\chi_0) = \chi_0 \cdot g(\chi_0) - 2\chi_0 \Leftrightarrow f(\chi_0) = g(\chi_0) - 2 \Leftrightarrow g(\chi_0) = f(\chi_0) + 2$$

Β. Αν παραγωγίσεις την ισότητα με τα ολοκληρώματα θα έχεις :

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

$$\left(1 + \int_0^x f''(t) \sin t dt\right)' = \left(\sin^2 x + \int_0^x f'(t) \eta \mu t dt\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) \sin x = (\sin^2 x)' + f'(x) \eta \mu x \Leftrightarrow f''(x) \sin x - f'(x) \eta \mu x = (\sin^2 x)'$$

$$\Leftrightarrow f''(x) \sin x + f'(x)(\sin x)' = (\sin^2 x)' \Leftrightarrow (f'(x) \sin x)' = (\sin^2 x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \sin x = \sin^2 x + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$f'(0) = 1 \text{ άρα } f'(0) \sin 0 = \sin^2 0 + c \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = 1 + c \text{ άρα } c = 0 \text{ επομένως}$$

$$f'(x) \sin x = \sin^2 x \text{ και επειδή } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα } f'(x) = \sin x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta \mu x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. f(0) = 1995 \text{ άρα } f(0) = \eta \mu 0 + c_1 \Leftrightarrow 1995 = 0 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 = 1995. \text{ Άρα για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } f(x) = \eta \mu x + 1995.$$

16.

πανελλήνιες 1995 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

α. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, και ισχύει :

$$f'(t) = \left(\int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du \right)' = \frac{e^{3t}}{\sqrt{3t}} (3t)' = \frac{3e^{3t} \sqrt{3t}}{3t} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{e^{3t} \sqrt{3t}}{t} \quad t > 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η G θα είναι παραγωγίσιμη με $G'(x) = f(x)$, άρα

$$\text{και } G''(x) = f'(x) = \frac{e^{3x} \sqrt{3x}}{x}, \text{ επομένως } G''(1) = f'(1) = \frac{e^3 \sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow$$

$$G''(1) = e^3 \sqrt{3}$$

$$\beta. \text{ Είναι : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{e^{3x} \sqrt{3x}}{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{3x} \sqrt{3} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$$

Λιβαδειά

$$= \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{e^{3\chi} \sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{Hospital}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{(e^{3\chi} \sqrt{3} - \sqrt{3})'}{(\sqrt{\chi+1} - 1)'} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{e^{3\chi} \sqrt{3} (3\chi)'}{\frac{1}{2\sqrt{\chi+1}} (\chi+1)'} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3} \cdot e^{3\chi}}{\frac{1}{2\sqrt{\chi+1}}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (3\sqrt{3} \cdot e^{3\chi} \cdot 2\sqrt{\chi+1}) = 6\sqrt{3} \cdot e^0 \cdot \sqrt{0+1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\chi} \cdot G''(\chi) - \sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1} - 1} = 6\sqrt{3}.$$

17.

πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

Α. Το $\int_0^1 e^{1-\chi} f(\chi) d\chi$, όπως και κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ένας

σταθερός πραγματικός αριθμός, έστω κ , επομένως η αρχική σχέση γίνεται :

$$\int_0^1 e^{1-\chi} f(\chi) d\chi = f(\chi) + e^\chi \Leftrightarrow \kappa = f(\chi) + e^\chi \Leftrightarrow f(\chi) = -e^\chi + \kappa, \chi \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η}$$

αρχική σχέση, με αντικατάσταση διαμορφώνεται ως εξής :

$$\int_0^1 e^{1-\chi} f(\chi) d\chi = f(\chi) + e^\chi \Leftrightarrow \int_0^1 e^{1-\chi} (-e^\chi + \kappa) d\chi = -e^\chi + \kappa + e^\chi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (-e + \kappa \cdot e^{1-\chi}) d\chi = \kappa \Leftrightarrow \int_0^1 (-e) d\chi + \int_0^1 \kappa \cdot (e^{1-\chi}) d\chi = \kappa \Leftrightarrow$$

$$-e \int_0^1 1 d\chi - \kappa \cdot \int_0^1 e^{1-\chi} (1-\chi)' d\chi = \kappa \Leftrightarrow -e[\chi]_0^1 - \kappa \cdot [e^{1-\chi}]_0^1 = \kappa \Leftrightarrow$$

$$-e(1-0) - \kappa \cdot (e^0 - e^{1-0}) = \kappa \Leftrightarrow -e - \kappa + \kappa \cdot e = \kappa \Leftrightarrow (e-2)\kappa = e$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \frac{e}{e-2}, \text{ άρα τελικά είναι } f(\chi) = -e^\chi + \kappa \Leftrightarrow f(\chi) = -e^\chi + \frac{e}{e-2}.$$

$$\mathbf{B.} \quad f(\chi) + f(\alpha + \beta - \chi) = c \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\chi) d\chi + \int_\alpha^\beta f(\alpha + \beta - \chi) d\chi = \int_\alpha^\beta c d\chi \quad (1).$$

✓ Αν στο $\int_a^\beta f(\alpha + \beta - \chi) d\chi$ θέσεις $t = \alpha + \beta - \chi$ οπότε $\begin{cases} \chi = \alpha + \beta - t \\ d\chi = -dt \end{cases}$ και αν

$\chi = \alpha$ τότε $t_1 = \beta$ και $\chi = \beta$ τότε $t_2 = \alpha$ άρα $\int_a^\beta f(\alpha + \beta - \chi) d\chi = \int_\beta^\alpha f(t)(-dt) =$

$$-\int_\beta^\alpha f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(t) dt \Leftrightarrow \int_a^\beta f(\alpha + \beta - \chi) d\chi = \int_a^\beta f(\chi) d\chi \quad (2).$$

$$✓ \quad \int_a^\beta c d\chi = c \int_a^\beta 1 d\chi = c[\chi]_a^\beta \Leftrightarrow \int_a^\beta c d\chi = c(\beta - \alpha) \quad (3).$$

$$\text{Από την (1)} \Leftrightarrow \int_a^\beta f(\chi) d\chi + \int_a^\beta f(\chi) d\chi = c(\beta - \alpha) \Leftrightarrow \int_a^\beta f(\chi) d\chi = \frac{c(\beta - \alpha)}{2} \quad (4).$$

✓ Αν στην $f(\chi) + f(\alpha + \beta - \chi) = c$ αντικαταστήσεις $\chi = \alpha$, θα έχεις :

$$f(\alpha) + f(\alpha + \beta - \alpha) = c \Leftrightarrow c = f(\alpha) + f(\beta) \quad \text{οπότε η (4) γίνεται :}$$

$$\int_a^\beta f(\chi) d\chi = \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)).$$

✓ Αν στην $f(\chi) + f(\alpha + \beta - \chi) = c$ αντικαταστήσεις $\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$, θα έχεις :

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f\left(\alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = c \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = c \Leftrightarrow$$

$$c = 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad \text{οπότε η (4) γίνεται} \quad \int_a^\beta f(\chi) d\chi = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

18.

πανελλήνιες 1996 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. α. Είναι: $f(\chi) = \int_0^\chi (\chi - t)g(t) dt = \int_0^\chi \chi \cdot g(t) dt - \int_0^\chi t \cdot g(t) dt \Leftrightarrow$

$$f(\chi) = \chi \cdot \int_0^\chi g(t) dt - \int_0^\chi t \cdot g(t) dt.$$

Οι συναρτήσεις χ , $g(t)$ και $t \cdot g(t)$ είναι συνεχείς στο R , άρα η f είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } R \text{ με } f'(\chi) = \left(\chi \cdot \int_0^\chi g(t) dt \right)' - \left(\int_0^\chi t \cdot g(t) dt \right)' =$$

$$\chi' \cdot \int_0^\chi g(t) dt + \chi \cdot \left(\int_0^\chi g(t) dt \right)' - \chi \cdot g(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi) = \int_0^\chi g(t) dt + \chi \cdot g(\chi) - \chi \cdot g(\chi)$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi) = \int_0^\chi g(t) dt. \text{ Επειδή το δεύτερο μέρος είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση,}$$

$$\left(\int_0^\chi g(t) dt \right)' = g(\chi), \text{ άρα η } f \text{ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο } R \text{ με}$$

$$f''(\chi) = \left(f'(\chi) \right)' = \left(\int_0^\chi g(t) dt \right)' \Leftrightarrow f''(\chi) = g(\chi).$$

Επειδή $f''(\chi) = g(\chi)$, άρα το που στρέφει τα κοίλα η f εξαρτάται από το πρόσημο της g .

Επειδή $g(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$ και επειδή η g είναι συνεχής στο R , άρα η g θα έχει σταθερό πρόσημο, σε ολόκληρο το R , δηλαδή $g(\chi) > 0$ ή $g(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Πράγματι αν υπήρχαν $\alpha, \beta \in R$ έτσι ώστε $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$ τότε από το θεώρημα

Bolzano θα υπήρχε $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $g(\chi_0) = 0$ ΑΤΟΠΟ γιατί $g(\chi) \neq 0$ για

κάθε $\chi \in R$, επομένως η g διατηρεί το πρόσημό της στο R και επομένως :

$$\begin{cases} f''(\chi) = g(\chi) > 0 & \text{άρα η } f \text{ στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε } \chi \in R \\ f''(\chi) = g(\chi) < 0 & \text{άρα η } f \text{ στρέφει τα κοίλα κάτω για κάθε } \chi \in R \end{cases}.$$

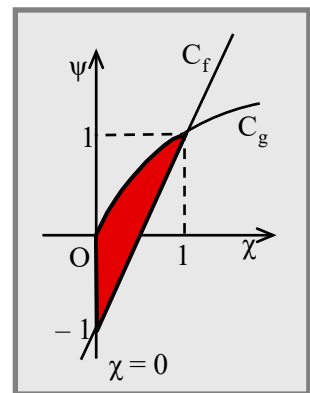
β. Πρέπει $\chi \geq 0$. Έστω $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) \Leftrightarrow$

$$h(\chi) = 2\chi - \sqrt{\chi} - 1, \text{ αν θέσεις } \sqrt{\chi} = u \text{ θα έχεις}$$

$$h(u) = 2u^2 - u - 1, \text{ ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης}$$

$$\text{Είναι } u = 1 \text{ και } u = -\frac{1}{2} \text{ άρα}$$

$$h(u) = 2\left(u + \frac{1}{2}\right)(u - 1) = (2u + 1)(u - 1), \text{ άρα}$$



$$h(\chi) = (2\sqrt{\chi} + 1)(\sqrt{\chi} - 1) \text{ μοναδική ρίζα } \chi = 1 \text{ άρα}$$

το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χρωματισμένου τμήματος και επειδή για κάθε $\chi \in [0, 1]$ είναι $h(\chi) \leq 0$ άρα

$$E = -\int_0^1 h(\chi) d\chi = -\int_0^1 (2\chi - \sqrt{\chi} - 1) d\chi = -\int_0^1 \left(2\chi - \chi^{\frac{1}{2}} - 1 \right) d\chi =$$

$$-\left[\chi^2 - \frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} - \chi \right]_0^1 = \left(\left(1^2 - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - 1 \right) - \left(0^2 - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} - 0 \right) \right) \Leftrightarrow E = \frac{2}{3} \text{ τ. μ.}$$

Β. β. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{1 + \chi^2} + \lambda\chi$, και αφού από το **α.** ερώτημα

$$\text{είναι } \lambda = 0 \text{ άρα } f(\chi) = \sqrt{1 + \chi^2}.$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^1 \frac{\chi}{f^2(\chi)} d\chi = \int_0^1 \frac{\chi}{\left(\sqrt{1 + \chi^2} \right)^2} d\chi = \int_0^1 \frac{\chi}{1 + \chi^2} d\chi = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2\chi}{1 + \chi^2} d\chi =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 + \chi^2)'}{1 + \chi^2} d\chi \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \left[\ln(1 + \chi^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} [\ln(1 + 1) - \ln(1 + 0)] =$$

$$\frac{1}{2} [\ln 2 - \ln 1] \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

19.

πανελλήνιες 1997 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

Α.

ι) Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f''(\chi) - g''(\chi) = 4 \Leftrightarrow (f'(\chi) - g'(\chi))' = (4\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) - g'(\chi) = 4\chi + \kappa_1, \kappa_1 \in \mathbb{R}.$$

Αν στην τελευταία ισότητα βάλεις $\chi = 1$, επειδή $f'(1) = g'(1)$ θα έχεις

$$f'(1) - g'(1) = 4 \cdot 1 + \kappa_1 \Leftrightarrow \kappa_1 = -4.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(\chi) - g'(\chi) = 4\chi - 4 &\Leftrightarrow (f(\chi) - g(\chi))' = (2\chi^2 - 4\chi)' \\ \Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi + \kappa_2 \quad \kappa_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αν στην τελευταία ισότητα βάλεις $\chi = 2$, επειδή $f(2) = g(2)$ θα έχεις

$$f(2) - g(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + \kappa_2 \Leftrightarrow \kappa_2 = 0.$$

$$\text{Άρα για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(\chi) - g(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi \Leftrightarrow t(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi.$$

ii) Στην αρχή θα λύσεις την εξίσωση :

$$f(\chi) = g(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) - g(\chi) = 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 - 4\chi = 0, \text{ ρίζες } \chi_1 = 0, \chi_2 = 2$$

και επί πλέον στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2] = [0, 2]$ η $f(\chi) - g(\chi) = t(\chi) = 2\chi^2 - 4\chi \leq 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$\begin{aligned} E &= - \int_0^2 (f(\chi) - g(\chi)) d\chi = - \int_0^2 t(\chi) d\chi = - \int_0^2 (2\chi^2 - 4\chi) d\chi = - \left[\frac{2}{3} \chi^3 - \frac{4}{2} \chi^2 \right]_0^2 = \\ &= - \left[\left(\frac{2}{3} 2^3 - 2 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{2}{3} 0^3 - 2 \cdot 0^2 \right) \right] \Leftrightarrow E = \frac{8}{3} \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

B. i) Θέλεις να δείξεις:

$$f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha) \Leftrightarrow f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha) \leq 0, \text{ οπότε θεωρείς τη}$$

συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) - f(\alpha) - f'(\beta)(\chi - \alpha)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη άρα

και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(\chi) = f'(\chi) - f'(\beta).$$

Επειδή από την εκφώνηση είναι $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως

αύξουσα, άρα για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$ έχεις $\chi < \beta$ άρα $f'(\chi) < f'(\beta)$ άρα

$$f'(\chi) - f'(\beta) < 0 \text{ επομένως } g'(\chi) = f'(\chi) - f'(\beta) < 0.$$

Η g είναι και συνεχής στο $[α, β]$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[α, β]$,

επομένως για κάθε $χ \in [α, β]$ έχεις $χ \geq α$ άρα

$$g(χ) \leq g(α) \Leftrightarrow f(χ) - f(α) - f'(β)(χ - α) \leq f(α) - f(α) - f'(β)(α - α) \text{ άρα}$$

$$f(χ) - f(α) - f'(β)(χ - α) \leq 0 \Leftrightarrow f(χ) - f(α) \leq f'(β)(χ - α).$$

ii) Από το i) έχεις :

$$f(χ) - f(α) - f'(β)(χ - α) \leq 0 \Leftrightarrow f'(β)(χ - α) - f(χ) + f(α) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f'(β)(χ - α) - f(χ) + f(α)) dχ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(β)(χ - α) dχ - \int_{\alpha}^{\beta} f(χ) dχ + \int_{\alpha}^{\beta} f(α) dχ \geq 0 \text{ άρα}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(χ) dχ \leq f'(β) \int_{\alpha}^{\beta} (χ - α) dχ + f(α)(β - α) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(χ) dχ \leq f'(β) \left[\frac{(χ - α)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} + f(α)(β - α) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(χ) dχ \leq f'(β) \left[\frac{(β - α)^2}{2} - \frac{(α - α)^2}{2} \right] + f(α)(β - α) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(χ) dχ \leq f'(β) \frac{(β - α)^2}{2} + f(α)(β - α).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Είναι $g(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 - \int_0^{0^2 - 5 \cdot 0} f(t) dt \Leftrightarrow g(0) = 1 > 0$ (1).

Είναι $g(-3) = (-3)^2 - 5(-3) + 1 - \int_0^{(-3)^2 - 5(-3)} f(t) dt = g(-3) = 25 - \int_0^{24} f(t) dt$ (2).

Όμως για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $f(t) \geq 2 \Leftrightarrow f(t) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^{24} (f(t) - 2) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{24} f(t) dt - \int_0^{24} 2 dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{24} f(t) dt \geq 2[t]_0^{24} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{24} f(t) dt \geq 2 \cdot 24 \Leftrightarrow \int_0^{24} f(t) dt \geq 48 > 25 \Leftrightarrow 25 - \int_0^{24} f(t) dt < 0 \quad (3).$$

Από (1), (2) και (3) έχεις $g(-3) \cdot g(0) < 0$.

B. Η g είναι συνεχής στο $[-3, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(-3) \cdot g(0) < 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, 0)$.

$$\text{Ακόμη η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } g'(\chi) = 2\chi - 5 - f(\chi^2 - 5\chi) \cdot (\chi^2 - 5\chi)' = 2\chi - 5 - f(\chi^2 - 5\chi) \cdot (2\chi - 5) \Leftrightarrow g'(\chi) = (1 - f(\chi^2 - 5\chi))(2\chi - 5).$$

Για κάθε $\chi \in (-3, 0)$ είναι $2\chi - 5 < 0$ και $f(\chi^2 - 5\chi) \geq 2 > 1 \Leftrightarrow 1 - f(\chi^2 - 5\chi) < 0$ άρα $g'(\chi) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-3, 0)$ και συνεπώς η εξίσωση $g(\chi) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-3, 0)$.

Τελικά λοιπόν η εξίσωση $g(\chi) = 0$, έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

20.

πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για κάθε $\chi > 0$ είναι $f'(\chi) + 2\chi f(\chi) = 0 \Leftrightarrow f'(\chi) = -2\chi f(\chi)$.

Η συνάρτηση -2χ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και η $f(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0, +\infty)$, συνεπώς η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Ακόμη για κάθε } \chi > 0 \text{ είναι } f'(\chi) + 2\chi f(\chi) = 0 &\Leftrightarrow e^{\chi^2} f'(\chi) + e^{\chi^2} 2\chi f(\chi) = e^{\chi^2} \cdot 0 \\ \Leftrightarrow e^{\chi^2} f'(\chi) + e^{\chi^2} (\chi^2)' f(\chi) = 0 &\Leftrightarrow (e^{\chi^2} f(\chi))' = 0 \Leftrightarrow e^{\chi^2} f(\chi) = c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ θα είναι

$$f(1)=1 \Leftrightarrow e^{1^2} f(1)=e \Leftrightarrow c=e.$$

Άρα για κάθε $\chi > 0$ είναι $e^{\chi^2} f(\chi)=e \Leftrightarrow f(\chi)=e^{1-\chi^2}$.

β. Έστω $g(t)=\frac{f(t)}{2t^2}$, $t > 0$, είναι $g(1)=\frac{f(1)}{2 \cdot 1^2} \Leftrightarrow g(1)=\frac{1}{2}$, αφού $f(1)=1$.

$$\text{Είναι } g'(t)=\left(\frac{f(t)}{2t^2}\right)'=\frac{f'(t)2t^2-f(t)(2t^2)'}{(2t^2)^2}=\frac{-2 \cdot t \cdot f(t) \cdot 2t^2-f(t)4t}{4t^4}=$$

$$-f(t)\frac{t^2+1}{t^3} \Leftrightarrow g'(t)=-e^{1-t^2}\frac{t^2+1}{t^3}<0, \text{ για κάθε } t>0.$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα για κάθε $t \in [1, \chi]$ έχεις :

$$1 \leq t \leq \chi \Leftrightarrow g(1) \geq g(t) \geq g(\chi) \text{ άρα } g(1)-g(t) \geq 0 \text{ και } g(t)-g(\chi) \geq 0.$$

Επίσης αν $1 < t < \chi$ θα είναι $g(1) > g(t) > g(\chi)$ άρα $g(1)-g(t) > 0$ και

$g(t)-g(\chi) > 0$ άρα οι $g(1)-g(t)$, $g(t)-g(\chi)$ δεν είναι παντού μηδέν, είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[1, \chi]$ θα έχεις :

$$\begin{aligned} 1^{\text{ov}} \quad \int_1^\chi (g(1)-g(t))dt &> 0 \Leftrightarrow \int_1^\chi g(1)dt > \int_1^\chi g(t)dt \Leftrightarrow \int_1^\chi \frac{1}{2}dt > \int_1^\chi \frac{f(t)}{2t^2}dt \Leftrightarrow \\ &\int_1^\chi \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{\chi-1}{2} \quad (1) \text{ και} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{\text{ov}} \quad \int_1^\chi (g(t)-g(\chi))dt &> 0 \Leftrightarrow \int_1^\chi g(t)dt > \int_1^\chi g(\chi)dt \Leftrightarrow \\ \int_1^\chi \frac{f(t)}{2t^2}dt &> g(\chi) \int_1^\chi 1 \cdot dt. \end{aligned}$$

Διευκρίνιση : Όταν σε ένα ολοκλήρωμα, όπως πιο πάνω, η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t (υπάρχει dt) τότε ότι δεν είναι συνάρτηση του t θεωρείται και λειτουργεί ως σταθερά, όπως εδώ το $g(\chi)$.

$$\text{Άρα } \int_1^{\chi} \frac{f(t)}{2t^2} dt > g(\chi) \int_1^{\chi} 1 \cdot dt \Leftrightarrow \int_1^{\chi} \frac{f(t)}{2t^2} dt > \frac{f(\chi)}{2\chi^2} (\chi-1) \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) προκύπτει } \frac{f(\chi)}{2\chi^2} (\chi-1) < \int_1^{\chi} \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{\chi-1}{2}.$$

γ. Για κάθε $\chi > 1$ έχεις :

$$F(\chi) = \int_1^{\chi} \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) f(t) dt = \int_1^{\chi} \left(f(t) + \frac{1}{2t^2} f(t)\right) dt = \int_1^{\chi} \left(e^{1-t^2} + \frac{1}{2t^2} e^{1-t^2}\right) dt.$$

$$\checkmark \quad \left(\frac{e^{1-t^2}}{2t}\right)' = \frac{(e^{1-t^2})' 2t - e^{1-t^2} (2t)'}{(2t)^2} = \frac{e^{1-t^2} (1-t^2)' 2t - e^{1-t^2} \cdot 2}{4t^2} =$$

$$\frac{-e^{1-t^2} \cdot 2t \cdot 2t - e^{1-t^2} \cdot 2}{4t^2} = -\frac{e^{1-t^2} \cdot 4t^2}{4t^2} - \frac{e^{1-t^2} \cdot 2}{4t^2} \Leftrightarrow \left(\frac{e^{1-t^2}}{2t}\right)' = -\left(e^{1-t^2} + \frac{e^{1-t^2}}{2t^2}\right).$$

$$\text{Άρα } F(\chi) = \int_1^{\chi} \left(e^{1-t^2} + \frac{1}{2t^2} e^{1-t^2}\right) dt = -\int_1^{\chi} \left(\frac{e^{1-t^2}}{2t}\right)' dt = -\left[\frac{e^{1-t^2}}{2t}\right]_1^{\chi} =$$

$$-\left(\frac{e^{1-\chi^2}}{2\chi} - \frac{e^{1-1^2}}{2 \cdot 1}\right) \Leftrightarrow F(\chi) = -\left(\frac{e^{1-\chi^2}}{2\chi} - \frac{1}{2}\right).$$

$$\delta. \quad \text{Η σχέση } 2e \int_1^{\chi} e^{-t^2} dt < 1 \Leftrightarrow 2 \int_1^{\chi} e \cdot e^{-t^2} dt < 1 \Leftrightarrow 2 \int_1^{\chi} e^{1-t^2} dt < 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{\chi} f(t) dt < \frac{1}{2} \quad (3).$$

$$\text{Είναι } e^{1-\chi^2} > 0 \Leftrightarrow e^{1-\chi^2} - 1 > -1 \Leftrightarrow f(\chi) - f(1) > -1 \Leftrightarrow [f(t)]_1^{\chi} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{\chi} f'(t) dt > -1, \text{ επίσης είναι } f(t) = e^{1-t^2} \Leftrightarrow f'(t) = (e^{1-t^2})' = -2te^{1-t^2} = -2t \cdot f(t),$$

$$\text{άρα } \int_1^{\chi} f'(t) dt > -1 \Leftrightarrow \int_1^{\chi} -2t \cdot f(t) dt > -1 \Leftrightarrow \int_1^{\chi} t \cdot f(t) dt < \frac{1}{2} \quad (4).$$

$$\text{Επειδή } f(t) > 0 \text{ άρα για κάθε } t > 1 \text{ θα είναι και } t \cdot f(t) > f(t) \Leftrightarrow t \cdot f(t) - f(t) > 0.$$

Επειδή $t \cdot f(t) - f(t)$ είναι συνεχής $[1, \chi]$, ($\chi > 1$), δεν είναι παντού μηδέν στο $[1, \chi]$ και για κάθε $t \in [1, \chi]$ είναι $t \cdot f(t) - f(t) \geq 0$, θα ισχύει :

$$\int_1^\chi (t \cdot f(t) - f(t)) dt > 0 \text{ άρα } \int_1^\chi t \cdot f(t) dt > \int_1^\chi f(t) dt \quad (5).$$

Από τις (4) και (5) έχεις $\int_1^\chi f(t) dt < \frac{1}{2}$, δηλαδή την (3) που είναι ισοδύναμη με το ζητούμενο.

21.**πανελλήνιες 1998 Δ Δέσμη****ΘΕΜΑ 1^ο****Α. Θεωρία.****ΘΕΜΑ 2^ο**

$$\delta. \quad I = \frac{111}{2} \cdot \int_0^6 P(t) dt = \frac{111}{2} \cdot \int_0^6 (2t^2 - 2t - 12) dt = \frac{111}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} t^3 - t^2 - 12t \right]_0^6 =$$

$$\frac{111}{2} \left(\frac{2}{3} 6^3 - 6^2 - 12 \cdot 6 \right) \Leftrightarrow I = \frac{111}{2} (144 - 36 - 72) = \frac{111}{2} 36 = 1998.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $h(\chi) = 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-8\chi})$, $\chi \geq 0$ όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

δ. Όταν $\alpha = 8$ η h γίνεται : $h(\chi) = 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-8\chi})$, $\chi \geq 0$.

$$\text{Επομένως : } M = \frac{334}{75} \cdot \int_0^{\ln 2} h(\chi) d\chi = \frac{334}{75} \cdot \int_0^{\ln 2} 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-8\chi}) d\chi =$$

$$\frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \int_0^{\ln 2} (e^{-4\chi} - e^{-8\chi}) d\chi = \frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^{-4\chi}}{-4} - \frac{e^{-8\chi}}{-8} \right)' d\chi =$$

$$\frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \int_0^{\ln 2} \left(-\frac{e^{-4\chi}}{4} + \frac{e^{-8\chi}}{8} \right) d\chi = \frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \left[-\frac{e^{-4\chi}}{4} + \frac{e^{-8\chi}}{8} \right]_0^{\ln 2} =$$

$$\frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \left[\left(-\frac{e^{-4 \cdot \ln 2}}{4} + \frac{e^{-8 \cdot \ln 2}}{8} \right) - \left(-\frac{e^0}{4} + \frac{e^0}{8} \right) \right] \quad (1).$$

Υπενθύμιση :

$$a^\beta = e^{\beta \cdot \ln a} \Leftrightarrow \ln(a^\beta) = \ln(e^{\beta \cdot \ln a}) \Leftrightarrow \beta \cdot \ln a = \beta \cdot \ln a \cdot \ln e \Leftrightarrow \beta \cdot \ln a = \beta \cdot \ln a$$

Οπότε $e^{-4 \cdot \ln 2} = 2^{-4}$ και $e^{-8 \cdot \ln 2} = 2^{-8}$ και επομένως η (1) γίνεται :

$$\frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \left[\left(-\frac{2^{-4}}{4} + \frac{2^{-8}}{8} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \right] = \frac{334}{75} \cdot 2^{12} \cdot \left[\left(-2^{-6} + 2^{-11} \right) + \frac{1}{8} \right] =$$

$$\frac{334}{75} (-2^{-6} \cdot 2^{12} + 2^{-11} \cdot 2^{12} + 2^{12} 2^{-3}) = \frac{334}{75} (-2^6 + 2 + 2^9) =$$

$$\frac{334}{75} (-64 + 2 + 512) = \frac{334}{75} 450 \quad \text{άρα} \quad M = \frac{334}{75} \cdot \int_0^{\ln 2} h(\chi) d\chi = 2004.$$

22.

πανελλήνιες 1999 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$.

α. Η $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ είναι συνεχής στο $[1, 4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα

$$I = \int_1^4 f(t) dt = \int_1^4 \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_1^4 \frac{2t+4-1}{t+2} dt = \int_1^4 \frac{2(t+2)-1}{t+2} dt =$$

$$\int_1^4 \left(2 - \frac{1}{t+2} \right) dt = [2t - \ln(t+2)]_1^4 = (8 - \ln 6) - (2 - \ln 3) =$$

$$6 - (\ln 6 - \ln 3) = 6 - \ln \frac{6}{3} \Leftrightarrow I = \int_1^4 f(t) dt = 6 - \ln 2.$$

β. i) Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $\chi > 0$ έχεις $1 \leq t \leq 4$ άρα $\frac{1}{\chi^2} \leq \frac{t}{\chi^2} \leq \frac{4}{\chi^2}$ άρα

$$e^{\frac{1}{\chi^2}} \leq e^{\frac{t}{\chi^2}} \leq e^{\frac{4}{\chi^2}}.$$

Δαμιανός Μωραϊτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $\chi > 0$ έχεις $f(t) = \frac{2t+3}{t+2} > 0$, $\frac{\chi+2}{\chi+1} > 0$, οπότε

από την σχέση : $e^{\frac{1}{\chi^2}} \leq e^{\frac{t}{\chi^2}} \leq e^{\frac{4}{\chi^2}}$ με πολλαπλασιασμό παίρνεις :

$$f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} \leq f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} \leq f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} \quad \text{άρα}$$

$$\checkmark \quad f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} \leq f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} \Leftrightarrow f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} - f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} \geq 0 \quad \text{άρα}$$

$$\int_1^4 \left(f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} - f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} \right) dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^4 f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} dt - \int_1^4 f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} dt \geq 0 \quad \text{άρα} \quad g(\chi) \geq \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} \int_1^4 f(t) dt \quad \text{άρα}$$

$$g(\chi) \geq \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} (6 - \ln 2) \quad (1), \text{ λόγω του προηγούμενου ερωτήματος.}$$

$$\checkmark \quad f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} \leq f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} \Leftrightarrow f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} - f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} \geq 0 \quad \text{άρα}$$

$$\int_1^4 \left(f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} - f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} \right) dt \geq 0 \quad \text{άρα}$$

$$\int_1^4 f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} dt - \int_1^4 f(t) \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{t}{\chi^2}} dt \leq 0 \quad \text{άρα} \quad g(\chi) \leq \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} \int_1^4 f(t) dt \quad \text{άρα}$$

$$g(\chi) \leq \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} (6 - \ln 2) \quad (2), \text{ λόγω του προηγούμενου ερωτήματος.}$$

Από τις (1) και (2) έχεις $\frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} (6 - \ln 2) \leq g(\chi) \leq \frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} (6 - \ln 2).$

$$\text{Είναι : } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{1}{\chi^2}} (6 - \ln 2) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi+2}{\chi+1} \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\chi^2}} \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (6 - \ln 2) =$$

$$1 \cdot e^0 (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2, \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\chi+2}{\chi+1} e^{\frac{4}{\chi^2}} (6 - \ln 2) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi+2}{\chi+1} \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{\frac{4}{\chi^2}} \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (6 - \ln 2) =$$

$1 \cdot e^0 (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} g(\chi) = 6 - \ln 2.$$

Β. α. Για κάθε $\chi \geq 1$ η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων : } 1999(\chi-1) \text{ και } \int_1^\chi \frac{h(t)}{t} dt.$$

$$\text{Είναι } h'(\chi) = (1999(\chi-1))' + \left(\int_1^\chi \frac{h(t)}{t} dt \right)' \Leftrightarrow h'(\chi) = 1999 + \frac{h(\chi)}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) - \frac{h(\chi)}{\chi} = 1999 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi} h'(\chi) - \frac{1}{\chi} \frac{h(\chi)}{\chi} = \frac{1999}{\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{\chi} h'(\chi) - \frac{1}{\chi^2} h(\chi) = \frac{1999}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\chi} h'(\chi) - \left(\frac{1}{\chi} \right)' h(\chi) = \frac{1999}{\chi} \Leftrightarrow \left(\frac{h(\chi)}{\chi} \right)' = \frac{1999}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\int \left(\frac{h(\chi)}{\chi} \right)' d\chi = \int \frac{1999}{\chi} d\chi \Leftrightarrow \frac{h(\chi)}{\chi} = 1999 \int \frac{1}{\chi} d\chi \Leftrightarrow \frac{h(\chi)}{\chi} = 1999 \cdot \ln \chi + c, c \in \mathbb{R}$$

Από την αρχική σχέση $h(\chi) = 1999(\chi-1) + \int_1^\chi \frac{h(t)}{t} dt$ για $\chi = 1$ έχουμε :

$$h(1) = 1999(1-1) + \int_1^1 \frac{h(t)}{t} dt = 0 + 0 = 0 \text{ και } \frac{h(1)}{1} = 1999 \cdot \ln 1 + c \Leftrightarrow c + 0 = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{άρα } c = 0, \text{ οπότε } \frac{h(\chi)}{\chi} = 1999 \cdot \ln \chi \Leftrightarrow h(\chi) = 1999 \cdot \chi \cdot \ln \chi, \chi \geq 1.$$

β. Για κάθε $\chi \geq 1$ είναι $h(\chi) = 1999 \cdot \chi \cdot \ln \chi \Leftrightarrow h'(\chi) = (1999 \cdot \chi \cdot \ln \chi)' =$

$$(1999 \cdot \chi)' \ln \chi + 1999 \cdot \chi (\ln \chi)' = 1999 \cdot \ln \chi + 1999 \cdot \chi \frac{1}{\chi} \text{ άρα}$$

$$h'(\chi) = 1999(\ln \chi + 1) > 0, \text{ αφού για } \chi \geq 1 \text{ είναι } \ln \chi \geq 0.$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

23.

πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Β. β. Για κάθε $\chi \in [1, 3]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και ισχύει $f(\chi) > 0$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι :

$$E = \int_1^3 f(\chi) d\chi = \int_1^3 (\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1) d\chi = \left[\frac{\chi^4}{4} - 2\chi^3 + \frac{9\chi^2}{2} + \chi \right]_1^3 =$$

$$\left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - 2 \cdot 1^3 + \frac{9 \cdot 1^2}{2} + 1 \right) = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} + 3 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{9}{2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$E = 6 \text{ τ. μ. .}$$

24.

πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι $I(\chi) = \int_0^1 (f(t))^2 dt - 2\chi \int_0^1 t^2 f(t) dt + \chi^2 \int_0^1 t^4 dt$ και

$$I(\chi)' = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt \right)' - \left(2\chi \int_0^1 t^2 f(t) dt \right)' + \left(\chi^2 \int_0^1 t^4 dt \right)'.$$

✓ $\left(\int_0^1 (f(t))^2 dt \right)' = 0$, ως παράγωγος σταθερής συνάρτησης, όπως είναι το

ορισμένο ολοκλήρωμα.

$$\checkmark \quad \left(2\chi \int_0^1 t^2 f(t) dt \right)' = 2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + 2\chi \left(\int_0^1 t^2 f(t) dt \right)' = 2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + 0 =$$

$$2 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

$$\checkmark \quad \left(\chi^2 \int_0^1 t^4 dt \right)' = (\chi^2)' \int_0^1 t^4 dt + \chi^2 \left(\int_0^1 t^4 dt \right)' = 2\chi \int_0^1 t^4 dt + \chi^2 \cdot 0 = 2\chi \int_0^1 t^4 dt =$$

$$2\chi \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\chi}{5}.$$

$$\text{Άρα } I(\chi)' = 0 - 2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + \frac{2}{5} \chi \Leftrightarrow I(\chi)' = -2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + \frac{2}{5} \chi.$$

$$\text{Είναι } I(\chi)' \geq 0 \Leftrightarrow -2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + \frac{2}{5} \chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt \text{ και}$$

$$I(\chi)' \leq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt$$

$$\text{Άρα η συνάρτηση } I \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο } \chi_0 = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

25.

πανελλήνιες 2000 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

Α. α. Για να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(2\chi+1) d\chi$ θα θέσεις $2\chi+1 = u$.

οπότε $\chi = \frac{1}{2}(u-1)$ άρα $d\chi = \frac{1}{2} du$. Όταν $\chi = 0$ τότε $u_1 = 1$ ενώ όταν $\chi = 3$ είναι

$$u_2 = 7.$$

Έτσι έχεις $\int_0^3 f(2\chi+1) d\chi = \int_1^7 f(u) \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^7 f(u) du$ και επειδή ισχύει για κάθε

$u \in \mathbb{R}$, άρα μπορείς στη θέση του u να βάλεις το γράμμα χ επομένως

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

$$\int_0^3 f(2\chi+1)d\chi = \frac{1}{2} \int_1^7 f(\chi)d\chi.$$

β. Η ισότητα που σου δίνει, αν χρησιμοποιήσεις το **α.** ερώτημα γράφεται :

$$4 \int_0^3 f(2\chi+1)d\chi = \int_1^7 f(\chi)d\chi + 2004 \Leftrightarrow 4 \frac{1}{2} \int_1^7 f(\chi)d\chi = \int_1^7 f(\chi)d\chi + 2004$$

$$2 \int_1^7 f(\chi)d\chi - \int_1^7 f(\chi)d\chi = 2004 \Leftrightarrow \int_1^7 f(\chi)d\chi = 2004.$$

$$\text{Έστω τη συνάρτηση } g(\chi) = \int_1^\chi f(u)du - 334\chi \quad \chi \in [1, 7].$$

Η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $[1, 7]$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(\chi) = f(\chi) - 334$.

$$\checkmark \quad \text{Επίσης } g(1) = \int_1^1 f(u)du - 334 \cdot 1 \Leftrightarrow g(1) = -334 \text{ και}$$

$$\checkmark \quad g(7) = \int_1^7 f(u)du - 334 \cdot 7 = 2004 - 2338 \Leftrightarrow g(7) = -334.$$

Άρα $g(1) = g(7)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (1, 7) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 334 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 334.$$

$$\mathbf{B. \alpha.} \text{ Η ισότητα που σου δίνει γράφεται } \int_0^\chi (1+t^2)f(t)dt = \chi^2 + \int_0^1 6\chi(t^2+t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\chi (1+t^2)f(t)dt = \chi^2 + \chi \int_0^1 (6t^2 + 6t)dt \Leftrightarrow \int_0^\chi (1+t^2)f(t)dt = \chi^2 + \chi [2t^3 + 3t^2]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\chi (1+t^2)f(t)dt = \chi^2 + \chi(5-0) \Leftrightarrow \int_0^\chi (1+t^2)f(t)dt = \chi^2 + 5\chi, \quad \chi \in \mathbb{R}$$

Αν παραγωγίσεις τα δύο μέλη θα έχεις την ισότητα $(1+\chi^2)f(\chi) = 2\chi + 5 \Leftrightarrow$

$$f(\chi) = \frac{2\chi+5}{1+\chi^2}.$$

β. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι $f'(\chi) = \left(\frac{2\chi+5}{1+\chi^2} \right)' = \frac{(2\chi+5)'(1+\chi^2) - (2\chi+5)(1+\chi^2)'}{(1+\chi^2)^2}$

$$= \frac{2(1+\chi^2) - (2\chi+5)2\chi}{(1+\chi^2)^2} = \frac{2\chi^2 + 2 - 4\chi^2 - 10\chi}{(1+\chi^2)^2} \Leftrightarrow f'(\chi) = \frac{-2\chi^2 - 10\chi + 2}{(1+\chi^2)^2}, \text{ άρα}$$

$f'(0) = 2$ και $f(0) = 5$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0, f(0))$ είναι :

$$\psi - f(0) = f'(0)(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi = 2\chi + 5.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. α. Η εξίσωση $f(\chi) + f(\psi) = 0$ γράφεται :

$$(\chi^2 - 4\chi + 3) + (\psi^2 - 4\psi + 3) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi + 3 + \psi^2 - 4\psi + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 4\psi + 6 = 0$, είναι της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A = -4$,

$B = -4$, $\Gamma = 6$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16 + 16 - 24 = 8 > 0$ άρα παριστάνει κύκλο με

κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(2, 2)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}.$

β. $f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi + 3 = 0$, ρίζες $\chi_1 = 1$ και $\chi_2 = 3$, $\alpha = 1 > 0$ άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και $f(\chi) \leq 0$ για κάθε $\chi \in [1, 3]$ το ζητούμενο

εμβαδό είναι : $E = -\int_1^3 f(\chi) d\chi = -\int_1^3 (\chi^2 - 4\chi + 3) d\chi = -\left[\frac{\chi^3}{3} - 4\frac{\chi^2}{2} + 3\chi \right]_1^3 =$

$$-\left[\left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \right) \right] \Leftrightarrow E = -\left[(9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{4}{3} \text{ τ. μ. .}$$

26.

πανελλήνιες 2001 Α Δέση

Δευτέρα 21 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^οΑ. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

$$\beta. \quad f(x) = x^2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x = (2 \ln x + 1)x \quad \text{άρα} \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2 \ln x + 1)x \geq 0 \quad \text{και επειδή}$$

$$x > 0 \quad \text{άρα} \quad 2 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln e = \ln e^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{η} \quad \ln x \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

$$\text{άρα} \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}.$$

Η f λοιπόν παρουσιάζει στη θέση $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ τοπικό ελάχιστο.

$$\text{Είναι : } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, 1 \right]$ και για κάθε $x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, 1 \right]$ είναι $x^2 \ln x \leq 0$, άρα

$$\text{το ζητούμενο εμβαδό είναι} \quad E = -\int_{x_0}^1 f(x) dx = -\int_{x_0}^1 x^2 \ln x dx = -\int_{x_0}^1 \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx$$

$$= -\left(\left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx \right) = -\left(\left(\frac{1^3}{3} \ln 1 \right) - \left(\frac{x_0^3}{3} \ln x_0 \right) \right) + \int_{x_0}^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= -\left(0 - \frac{x_0^3}{3} \ln x_0 \right) + \frac{1}{3} \int_{x_0}^1 x^2 dx = \frac{x_0^3 \ln x_0}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x_0}^1 = \frac{x_0^3 \ln x_0}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{x_0^3}{3} \right)$$

$$= \frac{x_0^3 \ln x_0}{3} + \frac{1}{9} - \frac{x_0^3}{9} = \frac{x_0^3 \ln e^{-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{1}{9} - \frac{x_0^3}{9} = -\frac{1}{2} \frac{x_0^3 \ln e}{3} + \frac{1}{9} - \frac{x_0^3}{9} = -\frac{x_0^3}{6} + \frac{1}{9} - \frac{x_0^3}{9} \Leftrightarrow$$

$$E = -\frac{5x_0^3}{18} + \frac{1}{9} = -\frac{5\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^3}{18} + \frac{1}{9} \Leftrightarrow E = -\frac{5e^{-\frac{3}{2}}}{6} + \frac{1}{9} \quad \text{τ. μ.}$$

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)dt - xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση ότι : Η σχέση που σου δίνει γράφεται

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x} \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt - xe^{-x} \geq 0 \quad \text{και} \quad g(0) = \int_0^0 f(t)dt - 0 \cdot e^{-0} = 0 \quad \text{άρα}$$

$g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα το $g(0)$ ολικό ελάχιστο της g .

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $g'(0) = 0$. (1)

$$g'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt - xe^{-x} \right)' = f(x) - (x)'e^{-x} - x(e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = f(x) - e^{-x} + xe^{-x}. \text{ άρα } g'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) - e^{-0} + 0 \cdot e^{-0} \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$$A(0, f(0)) \text{ είναι : } \psi - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi - 1 = 1 \cdot x \Leftrightarrow \psi = x + 1.$$

27.

πανελλήνιες 2001 Δ Δέσμη

Τετάρτη 23 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. α. Είναι :

$$\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (e^{f(x)})'dx = 0 \Leftrightarrow [e^{f(x)}]_a^b = 0 \Leftrightarrow e^{f(b)} - e^{f(a)} = 0 \Leftrightarrow e^{f(b)} = e^{f(a)}$$

και επειδή η $e^{f(x)}$ είναι 1-1 άρα $f(a) = f(b)$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) = f(b)$,

άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία

τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, b) .

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = 2\chi + \frac{4}{\chi}$, $\chi > 0$.

α. Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \lambda+1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $\chi \in [\lambda, \lambda+1]$ είναι $f(\chi) > 0$.

$$\text{Άρα } E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} f(\chi) d\chi = \int_{\lambda}^{\lambda+1} \left(2\chi + \frac{4}{\chi} \right) d\chi = \left[\chi^2 + 4 \ln \chi \right]_{\lambda}^{\lambda+1} =$$

$$(\lambda+1)^2 + 4 \ln(\lambda+1) - \lambda^2 - 4 \ln \lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 4 \ln(\lambda+1) - \lambda^2 - 4 \ln \lambda =$$

$$2\lambda + 1 + 4 \ln \frac{\lambda+1}{\lambda} \Leftrightarrow E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right).$$

β. Για κάθε $\lambda > 0$ έχεις

$$E'(\lambda) = \left[2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right]' = 2 + 4 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right]' = 2 + 4 \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)' =$$

$$2 + 4 \frac{\lambda}{\lambda+1} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) = 2 - 4 \frac{\lambda}{(\lambda+1)\lambda^2} = 2 - 4 \frac{1}{(\lambda+1)\lambda} = \frac{2(\lambda+1)\lambda - 4}{(\lambda+1)\lambda} \Leftrightarrow$$

$$E'(\lambda) = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda - 4}{(\lambda+1)\lambda}. \quad E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda^2 + 2\lambda - 4}{(\lambda+1)\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \text{ ρίζες } \lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = -2, \text{ η } \lambda_2 = -2$$

απορρίπτεται γιατί $\lambda > 0$. Επίσης είναι $E'(\lambda) > 0$ άρα $\lambda^2 + \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$

και $E'(\lambda) < 0$ άρα $\lambda < 1$. Άρα η συνάρτηση του εμβαδού $E(\lambda)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $E(1)$ στη θέση $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Έστω η συνάρτηση : $g(\chi) = \int_0^{\chi} \chi \sin t dt$, $\chi \in \mathbb{R}$.

$$\text{α. } g'(\chi) = \left(\int_0^{\chi} \chi \sin t dt \right)' = \left(\chi \int_0^{\chi} \sin t dt \right)' = (\chi)' \int_0^{\chi} \sin t dt + \chi \left(\int_0^{\chi} \sin t dt \right)' \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi) = \int_0^{\chi} \sin t \, dt + \chi \sin \chi.$$

$$\text{Άρα } g''(\chi) = \left(\int_0^{\chi} \sin t \, dt + \chi \sin \chi \right)' = \left(\int_0^{\chi} \sin t \, dt \right)' + (\chi \sin \chi)' =$$

$$\sin \chi + (\chi)' \sin \chi + \chi (\sin \chi)' = \sin \chi + \sin \chi - \chi \eta \mu \chi \Leftrightarrow g''(\chi) = 2 \sin \chi - \chi \eta \mu \chi.$$

$$\beta. \quad g(\chi) = \chi \int_0^{\chi} \sin t \, dt \quad \text{άρα} \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} [\eta \mu t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left(\eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad g'(\chi) = \int_0^{\chi} \sin t \, dt + \chi \sin \chi \Leftrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$[\eta \mu t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \left(\eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu 0 \right) \Leftrightarrow g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad \text{Η εξίσωση της εφαπτομένης της}$$

$$\text{γραφικής παράστασης της } f \text{ στο σημείο } A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι :}$$

$$\psi - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\chi - \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \psi - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \left(\chi - \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \psi = \chi.$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΜΕ ΤΟ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

28.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

γ. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και έχει τύπο $f(\chi) = \alpha \chi^2$ άρα το ζητούμενο

$$\text{εμβαδό είναι : } E = \int_1^2 |f(\chi)| \, d\chi = \int_1^2 |\alpha \chi^2| \, d\chi = \int_1^2 |\alpha| \chi^2 \, d\chi = \left[|\alpha| \frac{\chi^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$|\alpha| \frac{2^3}{3} - |\alpha| \frac{1^3}{3} \Leftrightarrow E = \frac{8|\alpha|}{3} - \frac{|\alpha|}{3} = \frac{7|\alpha|}{3} \text{ τ. μ. .}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ έχεις :

$$f(\chi) = 1 - 2\chi^2 \int_0^1 t \cdot f^2(\chi t) dt = 1 - 2 \int_0^1 \chi^2 \cdot t \cdot f^2(\chi t) dt = 1 - 2 \int_0^1 (\chi t) \cdot f^2(\chi t) \chi dt.$$

Αν θέσεις $u = \chi t$ τότε $du = d(\chi t) = \chi \cdot dt$, και όταν $t = 0$ είναι $u_1 = 0$ και αν $t = 1$,

$$u_2 = \chi, \text{ οπότε : } f(\chi) = 1 - 2 \int_0^1 (\chi t) \cdot f^2(\chi t) \chi dt = 1 - 2 \int_0^\chi u \cdot f^2(u) du \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = 1 - 2 \int_0^\chi u \cdot f^2(u) du, \chi \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f \text{ παραγωγίσιμη με}$$

$$f'(\chi) = \left(1 - 2 \int_0^\chi u \cdot f^2(u) du \right)' \Leftrightarrow f'(\chi) = -2\chi f^2(\chi).$$

β. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι : $g'(\chi) = \left(\frac{1}{f(\chi)} - \chi^2 \right)' = \left(\frac{1}{f(\chi)} \right)' - 2\chi \Leftrightarrow$

$$g'(\chi) = \frac{f'(\chi)}{f^2(\chi)} - 2\chi. \quad \text{Άρα με βάση το ερώτημα α. είναι :}$$

$$g'(\chi) = \frac{2\chi f^2(\chi)}{f^2(\chi)} - 2\chi \Leftrightarrow g'(\chi) = 0 \text{ άρα η συνάρτηση } g \text{ είναι σταθερή.}$$

γ. Έστω $g(\chi) = c$, όπου c σταθερά. Τότε $\frac{1}{f(\chi)} - \chi^2 = c, \chi \in \mathbb{R}$ (1).

Από την $f(\chi) = 1 - 2 \int_0^\chi u \cdot f^2(u) dt$ για $\chi = 0$ είναι $f(0) = 1 - 2 \int_0^0 u \cdot f^2(u) dt \Leftrightarrow$

$f(0) = 1$, οπότε η (1) γίνεται: $\frac{1}{f(0)} - 0^2 = c$, άρα $c = 1$ άρα

$$\frac{1}{f(\chi)} - \chi^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(\chi)} = 1 + \chi^2 \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{1}{1 + \chi^2}.$$

γ. $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi f(\chi) \eta \mu 2\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\chi \frac{1}{1 + \chi^2} \eta \mu 2\chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\chi \cdot \eta \mu 2\chi}{1 + \chi^2} \right).$

$$\left| \frac{\chi \cdot \eta \mu 2\chi}{1 + \chi^2} \right| = \left| \frac{\chi}{1 + \chi^2} \right| \cdot |\eta \mu 2\chi| \leq \left| \frac{\chi}{1 + \chi^2} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\chi \cdot \eta \mu 2\chi}{1 + \chi^2} \right| \leq \left| \frac{\chi}{1 + \chi^2} \right| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\chi}{1 + \chi^2} \leq \frac{\chi \cdot \eta \mu 2\chi}{1 + \chi^2} \leq \frac{\chi}{1 + \chi^2}.$$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{1 + \chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0$ και

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\chi}{1 + \chi^2} \right) = -\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi^2} = -\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi f(\chi) \eta \mu 2\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\chi \cdot \eta \mu 2\chi}{1 + \chi^2} \right) = 0$$

29.

πανελλήνιες 2001 – Επαναληπτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Θεωρία.

A. 2. α. $\int_a^b \lambda f(\chi) d\chi = \lambda \int_a^b f(\chi) d\chi.$

β. $\int_a^b (f(\chi) + g(\chi)) d\chi = \int_a^b f(\chi) d\chi + \int_a^b g(\chi) d\chi.$

γ. $\int_a^b [\lambda \cdot f(\chi) + \mu \cdot g(\chi)] d\chi = \lambda \int_a^b f(\chi) d\chi + \mu \int_a^b g(\chi) d\chi.$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

B. 1. Είναι $f''(\chi) = 6\chi + 4 \Leftrightarrow \int f''(\chi) d\chi = \int (6\chi + 4) d\chi + c_1 \Leftrightarrow$

$$f'(\chi) = 3\chi^2 + 4\chi + c_1 \text{ και επειδή η γραφική της παράσταση στο σημείο της}$$

$$A(0, 3) \text{ έχει κλίση } 2, \text{ θα είναι } f'(0) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2, \text{ άρα η}$$

$$f'(\chi) = 3\chi^2 + 4\chi + 2, \text{ οπότε : } \int f'(\chi) d\chi = \int (3\chi^2 + 4\chi + 2) d\chi + c_2 \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = \chi^3 + 2\chi^2 + 2\chi + c_2.$$

Επειδή το σημείο $A(0, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα είναι

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c_2 = 3 \Leftrightarrow c_2 = 3, \text{ άρα η } f(\chi) = \chi^3 + 2\chi^2 + 2\chi + 3$$

B. 2.

α.
$$\int_0^1 (e^x + x) dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e^1 + \frac{1^2}{2} \right) - \left(e^0 + \frac{0^2}{2} \right) = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}.$$

β.
$$\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 3x^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 3x^{\frac{3}{2}} dx = \left[3 \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_0^1 = \left[\frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 =$$

$$\left(\frac{6}{5} 1^{\frac{5}{2}} \right) - \left(\frac{6}{5} 0^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{6}{5}$$

γ.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi) d\chi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\chi d\chi + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu\chi d\chi = 2[-\sigma\upsilon\nu\chi]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[\eta\mu\chi]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$2 \left[\left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \right) - (-\sigma\upsilon\nu 0) \right] + 3 \left[\left(\eta\mu \frac{\pi}{2} \right) - (\eta\mu 0) \right] = 2 + 3 = 5.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \int_1^{\chi} \frac{t \cdot f(t)}{\chi^2} dt, \quad \chi > 0.$$

Λιβαδειά

α. Αφού f συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και οι $t \cdot f(t)$, $\frac{t \cdot f(t)}{\chi^2}$ συνεχείς, και

επομένως η $\int_1^x \frac{t \cdot f(t)}{\chi^2} dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \int_1^x \frac{t \cdot f(t)}{\chi^2} dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β. Είναι :

$$f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \int_1^x \frac{t \cdot f(t)}{\chi^2} dt \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} \int_1^x t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \chi^2 f(\chi) = \chi + \int_1^x t \cdot f(t) dt .$$

Με παραγωγή και στα δυο μέλη έχεις $(\chi^2 f(\chi))' = \left(\chi + \int_1^x t \cdot f(t) dt \right)' \Leftrightarrow$

$$2\chi f(\chi) + \chi^2 f'(\chi) = 1 + \chi f(\chi) \Leftrightarrow \chi f(\chi) + \chi^2 f'(\chi) = 1 \Leftrightarrow \chi (f(\chi) + \chi f'(\chi)) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\chi)' f(\chi) + \chi f'(\chi) = \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow (\chi f(\chi))' = (\ln \chi)' \Leftrightarrow \chi f(\chi) = \ln \chi + c .$$

Αν στην σχέση $f(\chi) = \frac{1}{\chi} + \int_1^x \frac{t \cdot f(t)}{\chi^2} dt$ βάλεις $\chi = 1$ έχεις $f(1) = \frac{1}{1} + \int_1^1 \frac{t \cdot f(t)}{1^2} dt$

$$\Leftrightarrow f(1) = 1 + 0 = 1$$

Άρα η $\chi f(\chi) = \ln \chi + c$ γίνεται : $1f(1) = \ln 1 + c$ άρα $c = 1$ και επομένως

$$\chi f(\chi) = \ln \chi + 1 \text{ άρα } \text{ο τύπος της } f \text{ είναι } f(\chi) = \frac{\ln \chi + 1}{\chi} \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} .$$

γ. Είναι :

$$f(\chi) = \frac{\ln \chi + 1}{\chi} \Leftrightarrow f'(\chi) = \left(\frac{\ln \chi + 1}{\chi} \right)' = \frac{(\ln \chi + 1)' \chi - (\ln \chi + 1) \chi'}{\chi^2} = \frac{\frac{1}{\chi} \chi - \ln \chi - 1}{\chi^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = -\frac{\ln \chi}{\chi^2} . \quad \text{Οπότε για κάθε } \chi > 0 \text{ είναι } f'(\chi) \geq 0 \quad -\ln \chi \geq 0 \Leftrightarrow \ln \chi \leq 0 \Leftrightarrow$$

$0 \leq \chi \leq 1$ και $f'(\chi) < 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ άρα στη θέση $\chi = 1$ η f παρουσιάζει **ολικό**

μέγιστο το $f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} \Leftrightarrow f(1) = 1$.

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\ln \chi + 1}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\chi} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (\ln \chi + 1) = (+\infty)(-\infty) \Leftrightarrow$$

$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = -\infty$ άρα f γνησίως αύξουσα και $\chi \in (0, 1]$ τότε Πεδίο τιμών

το $\left(\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi), f(1) \right] = (-\infty, 1]$, αφού $f(1) = 1$, μέγιστο.

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln \chi + 1}{\chi} \stackrel{\infty}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \chi + 1)'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\chi}}{1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = 0.$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα και $\chi \in [1, +\infty)$ τότε Πεδίο τιμών το

$$\left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi), f(1) \right] = (0, 1].$$

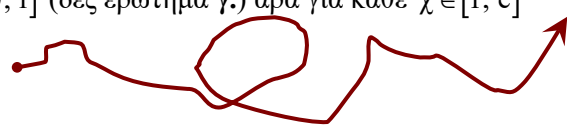
Επομένως Πεδίο τιμών είναι το $(-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$.

δ.

$\checkmark$ Από το γ. ερώτημα είναι : $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = -\infty$ άρα η ευθεία $\chi = 0$ (ο ψ') είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\checkmark$ Από το γ. ερώτημα είναι : $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = 0$ άρα η ευθεία $\psi = 0$ (ο χ') είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

Και επειδή όταν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη δεν υπάρχει πλάγια άρα αυτές είναι όλες οι ασύμπτωτες.

ε. Όταν $\chi \in [1, e]$ τότε $f(\chi) \in (0, 1]$ (δες ερώτημα γ.) άρα για κάθε $\chi \in [1, e]$ είναι $f(\chi) > 0$. Δες συνέχεια 

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } E &= \int_1^e f(\chi) d\chi = \int_1^e \frac{\ln \chi + 1}{\chi} d\chi = \int_1^e \frac{\ln \chi}{\chi} d\chi + \int_1^e 1 d\chi = \\ &= \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi + \int_1^e 1 d\chi. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad I = \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi = \ln \chi \cdot \ln \chi - \int_1^e \ln \chi (\ln \chi)' d\chi = \ln^2 \chi - I \Leftrightarrow 2I = \ln^2 \chi \Leftrightarrow$$

$$I = \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi = \frac{\ln^2 \chi}{2} \Leftrightarrow \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi = \left[\frac{\ln^2 \chi}{2} \right]_1^e =$$

$$\frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} - 0 \Leftrightarrow \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \quad \int_1^e 1 d\chi = [\chi]_1^e = e - 1 \quad \text{άρα } E = \int_1^e (\ln \chi)' \ln \chi d\chi + \int_1^e 1 d\chi = \frac{1}{2} + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$E = e - \frac{1}{2}$$

30.

πανελλήνιες 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

$$\text{B.2. δ. Σωστό, γιατί } \int f(\chi) d\chi = \int 1 \cdot f(\chi) d\chi = \int \chi' f(\chi) d\chi = \chi f(\chi) - \int \chi f'(\chi) d\chi.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, με $h(\chi) > g(\chi)$, αν θεωρήσεις την $\varphi(\chi) = h(\chi) - g(\chi)$ τότε φ συνεχής ως διαφορά συνεχών και $\varphi(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$, άρα για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ θα είναι :

$$\int_a^\beta \varphi(\chi) d\chi > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta (h(\chi) - g(\chi)) d\chi > 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta h(\chi) d\chi - \int_a^\beta g(\chi) d\chi > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^\beta h(\chi) d\chi > \int_a^\beta g(\chi) d\chi \text{ για κάθε } \chi \in [\alpha, \beta].$$

β. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(\chi) - e^{-f(\chi)} = \chi - 1 \quad \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 \quad \text{τότε :}$$

$$\textbf{i)} \quad f(\chi) - e^{-f(\chi)} = \chi - 1 \Leftrightarrow \left(f(\chi) - e^{-f(\chi)} \right)' = (\chi - 1)' = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) - e^{-f(\chi)} (-f(\chi))' = 1 \Leftrightarrow f'(\chi) + e^{-f(\chi)} f'(\chi) = 1 \Leftrightarrow f'(\chi) (e^{-f(\chi)} + 1) = 1 \text{ και}$$

επειδή για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-f(\chi)} + 1 \neq 0$ άρα $f'(\chi) = \frac{1}{e^{-f(\chi)} + 1}$.

ii) Έστω ότι η σχέση $\frac{\chi}{2} < f(\chi) < \chi \cdot f'(\chi)$, ισχύει για κάθε $\chi > 0$, επειδή

$$f(0) = 0 \text{ ισοδύναμα θα ισχύει : } \frac{\chi}{2} < f(\chi) - f(0) < \chi \cdot f'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} < f'(\chi) \quad (2). \text{ Αρκεί λοιπόν να αποδείξεις την (2).}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \chi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \chi)$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με το Θ. Μ. Τ. θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \chi)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \frac{f(\chi)}{\chi}.$$

$$\text{Όμως } f'(\chi) = \frac{1}{e^{-f(\chi)} + 1} \Leftrightarrow f''(\chi) = \left(\frac{1}{e^{-f(\chi)} + 1} \right)' = - \frac{(e^{-f(\chi)} + 1)'}{(e^{-f(\chi)} + 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f''(\chi) = \frac{e^{-f(\chi)} \cdot f'(\chi)}{(e^{-f(\chi)} + 1)^2}, \text{ άρα } f''(\chi) > 0, \text{ αφού } f'(\chi) = \frac{1}{e^{-f(\chi)} + 1} > 0.$$

$f''(\chi) > 0$ άρα η f' γνησίως αύξουσα άρα $0 < \xi < \chi \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi) < f'(\chi)$.

Όμως $f'(0) = \frac{1}{e^{-f(0)} + 1} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$ και $f'(\xi) = \frac{f(\chi)}{\chi}$, έτσι από την

$f'(0) < f'(\xi) < f'(\chi)$ προκύπτει η $\frac{1}{2} < \frac{f(\chi)}{\chi} < f'(\chi) \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} < f(\chi) < \chi \cdot f'(\chi)$.

iii) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και για κάθε

$\chi \in [0, 1]$ είναι: $\chi \geq 0$ και $\frac{\chi}{2} < f(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) > \frac{\chi}{2} \geq 0$ άρα $f(\chi) > 0$.

Επομένως $E = \int_0^1 f(\chi) d\chi$.

Σύμφωνα με το ερώτημα α. (και την θεωρία) είναι $h(\chi) > g(\chi) \Leftrightarrow$

$\int_a^\beta h(\chi) d\chi > \int_a^\beta g(\chi) d\chi$, άρα θα ισχύει και $h(\chi) \geq g(\chi) \Leftrightarrow$

$\int_a^\beta h(\chi) d\chi \geq \int_a^\beta g(\chi) d\chi$ για κάθε $\chi \in [a, \beta]$, με το $=$ να μην ισχύει παντού στο

$[a, \beta]$, η απόδειξη είναι όμοια, οπότε $\frac{\chi}{2} \leq f(\chi) \leq \chi \cdot f'(\chi)$, για κάθε $\chi \in [0, 1]$

με το $=$ να ισχύει μόνο για $\chi = 0$, άρα $\int_0^1 \frac{\chi}{2} d\chi \leq \int_0^1 f(\chi) d\chi \leq \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi$ (1).

$$\checkmark \quad \int_0^1 \frac{\chi}{2} d\chi = \left[\frac{\chi^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } \int_0^1 \frac{\chi}{2} d\chi \leq \int_0^1 f(\chi) d\chi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq E.$$

$$\checkmark \quad \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi = [\chi f(\chi)]_0^1 - \int_0^1 \chi' f(\chi) d\chi = 1f(1) - 0f(0) - \int_0^1 f(\chi) d\chi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi = f(1) - E. \text{ Άρα η } \int_0^1 f(\chi) d\chi \leq \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi \text{ είναι ισοδύναμη}$$

$$\text{με την } E \leq f(1) - E \Leftrightarrow 2E \leq f(1) \Leftrightarrow E \leq \frac{1}{2} f(1)$$

$$\text{Τελικά } \int_0^1 \frac{\chi}{2} d\chi \leq \int_0^1 f(\chi) d\chi \leq \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq E \leq \frac{1}{2} f(1).$$

31. πανελλήνιες 2002 – Επαναληπτικές
Δευτέρα 8 Ιουλίου
ΘΕΜΑ 1^ο
B. α. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{e^\chi + 1}$, με $\chi \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(\chi) = \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right)$.

$$\begin{aligned} \gamma. \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(\chi) d\chi &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) d\chi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\chi)' \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) d\chi = \\ & \left[\chi \cdot \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \chi \left(\ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \right)' d\chi \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \left(\ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \right)' = \frac{1}{-\frac{\chi+1}{\chi-1}} \left(-\frac{\chi+1}{\chi-1} \right)' = \frac{\chi-1}{\chi+1} \cdot \frac{(\chi+1)'(\chi-1) - (\chi+1)(\chi-1)'}{(\chi-1)^2} =$$

$$\frac{1}{\chi+1} \cdot \frac{\chi-1-\chi-1}{\chi-1} = \frac{1}{\chi+1} \cdot \frac{-2}{\chi-1} \Leftrightarrow \left(\ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \right)' = \frac{-2}{\chi^2-1}.$$

$$\text{Άρα } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(\chi) d\chi = \left[\chi \cdot \ln\left(-\frac{\chi+1}{\chi-1}\right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2\chi}{\chi^2-1} d\chi =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(-\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(-\frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}-1}\right) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\chi^2-1)'}{\chi^2-1} d\chi =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(-\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}\right) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\ln(\chi^2-1))' d\chi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln 3 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1}{3} - \left[\ln(\chi^2 - 1) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln 3 + \frac{1}{2} \cdot (\ln 1 - \ln 3) + \left[\ln(\chi^2 - 1) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 3 + \left(\ln \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right) - \ln \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right) \right) \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(\chi) d\chi = 0 + 0 = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f''(\chi) \cdot f(\chi) + \left(f'(\chi) \right)^2 = f(\chi) \cdot f'(\chi) \quad \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 2 \cdot f'(0) = 1, \quad \chi \in \mathbb{R}.$$

α. Από $f''(\chi) \cdot f(\chi) + \left(f'(\chi) \right)^2 = f(\chi) \cdot f'(\chi) \Leftrightarrow$

$$f''(\chi) \cdot f(\chi) + f'(\chi) f'(\chi) = f(\chi) \cdot f'(\chi) \Leftrightarrow \left(f(\chi) f'(\chi) \right)' = f(\chi) \cdot f'(\chi) \Leftrightarrow$$

$$\int \left(f(\chi) f'(\chi) \right)' d\chi = \int f(\chi) \cdot f'(\chi) d\chi = \frac{1}{2} \int 2f(\chi) \cdot f'(\chi) d\chi = \frac{1}{2} \int \left(f^2(\chi) \right)' d\chi$$

$$\Leftrightarrow f(\chi) f'(\chi) = \frac{1}{2} f^2(\chi) + c_1, \text{ όταν } \chi = 0 \text{ γίνεται :}$$

$$f(0) f'(0) = \frac{1}{2} f^2(0) + c_1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 1^2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

$$\text{Άρα } f(\chi) f'(\chi) = \frac{1}{2} f^2(\chi) \Leftrightarrow 2f(\chi) f'(\chi) - f^2(\chi) = 0 \Leftrightarrow \left(2 \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} - 1 \right) f^2(\chi) = 0 \text{ άρα}$$

1^ο $f^2(\chi) = 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άτοπο γιατί $f(0) = 1 \neq 0$ ή

2^ο $2 \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = 1$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα $2 \int \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi = \int 1 d\chi \Leftrightarrow 2 \ln |f(\chi)| = \chi + c_2,$

$$\text{όταν } \chi = 0 \text{ γίνεται } 2 \ln |f(0)| = 0 + c_2 \Leftrightarrow 2 \ln |1| = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0 \text{ άρα}$$

$$2 \ln |f(\chi)| = \chi \Leftrightarrow \ln |f(\chi)| = \frac{\chi}{2} \Leftrightarrow |f(\chi)| = e^{\frac{\chi}{2}} \text{ επομένως :}$$

$$\begin{cases} f(\chi) = -e^{\frac{\chi}{2}} \\ \text{ή} \\ f(\chi) = e^{\frac{\chi}{2}} \end{cases}, \text{ το } f(\chi) = -e^{\frac{\chi}{2}} \text{ είναι ΑΤΟΠΟ γιατί θα έπρεπε } f(0) = -e^{\frac{0}{2}} = -1,$$

ενώ είναι $f(0) = 1$, τελικά είναι $f(\chi) = e^{\frac{\chi}{2}}$.

β. Έστω η συνάρτηση $F(\chi) = 2\chi - \int_0^\chi \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt$, επειδή η f και g είναι

συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ άρα η F θα είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$

Αρχικά να παρατηρήσεις πως : $F(0) = 2 \cdot 0 - \int_0^0 \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 0 - 0 = 0$, άρα

υπάρχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[0, 1]$, θα δείξεις στη συνέχεια πως αυτή είναι και η μοναδική λύση στο διάστημα αυτό.

Έστω ότι υπάρχει μια ακόμη λύση $\rho \neq 0$ που ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$, τότε θα είναι $F(\rho) = 0 = F(0)$ και επειδή η F είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0, 1]$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, στο διάστημα

$[0, \rho] \subseteq [0, 1]$, άρα θα υπάρχει $\chi_0 \in (0, \rho) \subseteq [0, 1]$ έτσι ώστε $F'(\chi_0) = 0$.

$$\text{Όμως } F'(\chi) = \left(2\chi - \int_0^\chi \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt \right)' \Leftrightarrow F'(\chi) = 2 - \frac{g(\chi)}{1+f^2(\chi)}, \text{ άρα}$$

$$F'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{g(\chi_0)}{1+f^2(\chi_0)} = 0 \Leftrightarrow$$

$g(\chi_0) = 2 + 2f^2(\chi_0) \geq 2$, ΑΤΟΠΟ γιατί από την εκφώνηση η g έχει πεδίο τιμών το διάστημα $[0, 1]$.

Άρα η εξίσωση : $2\chi - \int_0^\chi \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

32.

πανελλήνιες 2002 – Ομογενείς

ΘΕΜΑ 3^ο

Τρίτη 17 Σεπτεμβρίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x+4}$.

γ Για κάθε $x > 0$ είναι και $f(x) > 0$ άρα το εμβαδόν που σου ζητάει είναι :

$$E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(2x + 4 + \frac{1}{2x+4} \right) dx = \int_0^1 (2x+4) dx + \int_0^1 \frac{1}{2x+4} dx =$$

$$\left[x^2 + 4x \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+4)'}{2x+4} dx \Leftrightarrow E = (1^2 + 4 \cdot 1) - (0^2 + 4 \cdot 0) + \frac{1}{2} [\ln |2x+4|]_0^1 =$$

$$5 + \frac{1}{2} [(\ln |2 \cdot 0 + 4|) - (\ln |2 \cdot 1 + 4|)] = 5 + \frac{1}{2} [\ln 6 - \ln 4] \Leftrightarrow$$

$$E = 5 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{4} = 5 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow E = 5 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = 5 + \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) \text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2f(x) = x$ (1) για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

$$\alpha. \quad h(x) = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow h'(x) = \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \frac{f'(x)x^2 - f(x)(x^2)'}{x^4} = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{(f'(x)x - 2f(x))x}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} h'(x) = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} > 0.$$

Η συνάρτηση : $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Είναι $h'(\chi) = \frac{1}{\chi^2} = \chi^{-2} \Leftrightarrow \int h'(\chi) d\chi = \int \chi^{-2} d\chi + c \Leftrightarrow$

$$h(\chi) = \frac{\chi^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{\chi} + c.$$

Άρα $h(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi^2} \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi^2} = -\frac{1}{\chi} + c \Leftrightarrow f(\chi) = -\chi + c\chi^2$, επειδή $f(1) = 0$ άρα

$$-1 + c \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(\chi) = \chi^2 - \chi.$$

γ. Επειδή το $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\int_1^\chi f(t) dt}{(\ln \chi)^2}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, άρα θα εφαρμόσεις

L' Hopital, οπότε $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\int_1^\chi f(t) dt}{(\ln \chi)^2} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\left(\int_1^\chi f(t) dt\right)'}{\left((\ln \chi)^2\right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi)}{2 \ln \chi (\ln \chi)'} =$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi)}{2 \frac{1}{\chi} \ln \chi} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi f(\chi)}{2 \ln \chi} \text{ και επειδή το } \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi f(\chi)}{2 \ln \chi} \text{ είναι της μορφής } \frac{0}{0}, \text{ άρα θα}$$

εφαρμόσεις και πάλι L' Hopital, οπότε $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\int_1^\chi f(t) dt}{(\ln \chi)^2} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi f(\chi)}{2 \ln \chi} =$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi f(\chi))'}{\left(2 \ln \chi\right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi' f(\chi) + \chi f'(\chi)}{2 \frac{1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{f(\chi) + \chi(\chi^2 - \chi)'}{2 \frac{1}{\chi}} =$$

$$= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi f(\chi) + \chi^2(2\chi - 1)}{2} = \frac{1f(1) + 1^2(2 \cdot 1 - 1)}{2} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\int_1^\chi f(t) dt}{(\ln \chi)^2} = \frac{1}{2}.$$

33.

πανελλήνιες 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. γ. Σωστό

ΘΕΜΑ 3^ο

δ. Από το α. ερώτημα έχει εξασφαλιστεί η ύπαρξη της f^{-1} , το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή το :

$\left(\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f^{-1} θα είναι μονότονη και μάλιστα έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f δηλαδή η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = \chi$.

Επειδή $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ άρα θα είναι αι $f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα η $f^{-1}(t) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Μετά από όλα αυτά, το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^3 |f^{-1}(t)| dt$.

Αν θέσεις $t = f(\chi)$, θα είναι $dt = f'(\chi) d\chi$ και για $t = 0$ θα έχεις

$$0 = f(\chi) \Leftrightarrow \chi^5 + \chi^3 + \chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 0, \text{ ενώ για } t = 3 \text{ θα έχεις}$$

$$3 = f(\chi) \Leftrightarrow \chi^5 + \chi^3 + \chi = 3 \Leftrightarrow \chi = 1.$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^3 |f^{-1}(t)| dt \Leftrightarrow E = \int_0^1 |f^{-1}(f(\chi))| f'(\chi) d\chi = \int_0^1 |\chi| f'(\chi) d\chi \text{ και επειδή}$$

τα άκρα ολοκλήρωσης είναι το 0 και το 1, άρα $\chi \in [0, 1]$ άρα $\chi > 0 \Leftrightarrow |\chi| = \chi$,

$$\text{άρα είναι } E = \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi = \int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi = [\chi f(\chi)]_0^1 - \int_0^1 \chi' f(\chi) d\chi =$$

$$(1f(1)) - (0f(0)) - \int_0^3 f(\chi) d\chi = 3 - 0 - \int_0^3 (\chi^5 + \chi^3 + \chi) d\chi = 3 - \left[\frac{\chi^6}{6} + \frac{\chi^4}{4} + \frac{\chi^2}{2} \right]_0^1$$

Δαμιανός Μωραϊτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$3 - \left[\frac{\chi^6}{6} + \frac{\chi^4}{4} + \frac{\chi^2}{2} \right]_0^1 = 3 - \left[\left(\frac{1^6}{6} + \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^6}{6} + \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} \right) \right] = 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{36 - 2 - 3 - 6}{12} \Leftrightarrow E = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

34.

πανελλήνιες 2003 – Επαναληπτικές

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

Β. δ. Σωστό

ΘΕΜΑ 3^οδ. $f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} + f(\chi) = 0 \Leftrightarrow f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} = -f(\chi)$, και επειδή $f(\chi) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2 + 1} = \chi \Leftrightarrow \chi^2 + 1 = \chi^2 \Leftrightarrow 1 = 0$ **ΑΤΟΠΟ** άρα $f(\chi) \neq 0$ και από την $f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} = -f(\chi) \neq 0$ συμπεραίνει πώς και $f'(\chi) \neq 0$,άρα $f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 + 1} = -f(\chi) \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2 + 1} = -\frac{f(\chi)}{f'(\chi)} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1}} = -\frac{f'(\chi)}{f(\chi)}$ επομένως

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1}} d\chi = \int_0^1 -\frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi = -\left[\ln |f(\chi)| \right]_0^1 = -\left[\ln \left| \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi \right| \right]_0^1 =$$

$$-\ln \left| \sqrt{1^2 + 1} - 1 \right| + \ln \left| \sqrt{0^2 + 1} - 0 \right| = -\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln 1 \text{ γιατί } \sqrt{2} - 1 > 0 \text{ και } 1 > 0.$$

$$\text{Άρα } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1}} d\chi = -\ln(\sqrt{2} - 1) + \ln 1 = \ln \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1}} d\chi = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

35.

πανελλήνιες 2003 – Ομογενείς

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 4^ο

γ. Αν θέσεις $u = \chi + 1$, τότε $du = d\chi$ και για $\chi = 1$ είναι $u_1 = 1 + 1 = 2$ και

για $\chi = e - 1$ είναι $u_2 = e - 1 + 1 = e$, οπότε $I = \int_1^{e-1} f(\chi + 1) d\chi = \int_2^e f(u) du =$

$$\int_2^e (e^u + u^5 + u) du = \left[e^u + \frac{u^6}{6} + \frac{u^2}{2} \right]_2^e = \left(e^e + \frac{e^6}{6} + \frac{e^2}{2} \right) - \left(e^2 + \frac{2^6}{6} + \frac{2^2}{2} \right)$$

$$= \frac{6e^e + e^6 + 3e^2 - 6e^2 - 64 - 12}{6} \Leftrightarrow I = \frac{6e^e + e^6 - 3e^2 - 76}{6}.$$

36.

πανελλήνιες 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

β. Αν $f(\chi) = 2\chi^2 - 3\chi$ τότε $g(\chi) = e^\chi f(\chi) = e^\chi (2\chi^2 - 3\chi)$, άρα

$$I(\alpha) = \int_\alpha^0 e^\chi (2\chi^2 - 3\chi) d\chi = \int_\alpha^0 (e^\chi)' (2\chi^2 - 3\chi) d\chi =$$

$$\left[e^\chi (2\chi^2 - 3\chi) \right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^\chi (2\chi^2 - 3\chi)' d\chi$$

$$\checkmark \quad \left[e^\chi (2\chi^2 - 3\chi) \right]_\alpha^0 = e^0 (2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0) - e^\alpha (2\alpha^2 - 3\alpha) = -2\alpha^2 e^\alpha + 3\alpha e^\alpha$$

$$\checkmark \quad \int_\alpha^0 e^\chi (2\chi^2 - 3\chi)' d\chi = \int_\alpha^0 e^\chi (4\chi - 3) d\chi = \left[e^\chi (4\chi - 3) \right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^\chi (4\chi - 3)' d\chi$$

$$= e^0 (4 \cdot 0 - 3) - e^\alpha (4\alpha - 3) - \int_\alpha^0 4e^\chi d\chi = -3 - 4\alpha e^\alpha + 3e^\alpha - 4 \left[e^\chi \right]_\alpha^0$$

$$= -3 - 4\alpha e^\alpha + 3e^\alpha - 4e^0 + 4e^\alpha = -4\alpha e^\alpha + 7e^\alpha - 7.$$

$$\text{Άρα } I = (-2\alpha^2 e^\alpha + 3\alpha e^\alpha) - (-4\alpha e^\alpha + 7e^\alpha - 7) = -2\alpha^2 e^\alpha + 3\alpha e^\alpha + 4\alpha e^\alpha - 7e^\alpha + 7 \Leftrightarrow$$

$$I(\alpha) = e^\alpha (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7.$$

Δαμιανός Μωραϊτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Είναι $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7] \Leftrightarrow$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)] + 7, \text{ επειδή το } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)]$$

είναι της μορφής $0(-\infty)$ άρα :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)] &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} = \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)'}{(e^{-\alpha})'} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{(-4\alpha + 7)'}{(-e^{-\alpha})'} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} = 0, \end{aligned}$$

γιατί $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{-\alpha} = +\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha}(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)] + 7 = 0 + 7 = 7.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Τα $|z|$, $\left|z + \frac{1}{z}\right|$ είναι αριθμοί, οι $f(\chi)$ και $\chi - 1$ είναι συνεχείς άρα $g(\chi)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g'(\chi) &= \left(\int_1^{\chi^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (\chi - 1) \right)' = \left(\int_1^{\chi^3} |z| f(t) dt \right)' - \left(3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (\chi - 1) \right)' = \\ |z| f(\chi^3) (\chi^3)' - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| &\Leftrightarrow g'(\chi) = 3\chi^2 |z| f(\chi^3) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|. \end{aligned}$$

β. Από την εκφώνηση είναι $g(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άρα το 0 είναι

$$\text{ελάχιστο για την } g \text{ και } g(1) = \int_1^{1^3} |z| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (1 - 1) = 0 - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| 0 = 0,$$

επομένως η g παρουσιάζει ελάχιστο όταν $\chi = 1$ άρα στη θέση $\chi = 1$ η παράγωγος

$$\text{θα μηδενίζεται (Fermat), δηλαδή : } g'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 |z| f(1^3) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$3|z| - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 0, \text{ αφού } f(1) = 1 \text{ άρα } |z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

$$\begin{aligned}
\gamma. \quad & \text{Από τη σχέση } \left| z + \frac{1}{z} \right| = |z| \Leftrightarrow \left| \frac{z^2 + 1}{z} \right| = |z| \Leftrightarrow \frac{|z^2 + 1|}{|z|} = |z| \Leftrightarrow \\
& |z^2 + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow |(\chi + \psi i)^2 + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow |\chi^2 - \psi^2 + 2\chi\psi i + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow \\
& |(\chi^2 - \psi^2 + 1) + 2\chi\psi i| = |z|^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\chi^2 - \psi^2 + 1)^2 + (2\chi\psi)^2} = |z|^2 \Leftrightarrow \\
& (\chi^2 - \psi^2 + 1)^2 + (2\chi\psi)^2 = (\chi^2 + \psi^2)^2 \Leftrightarrow \\
& (\chi^2 - \psi^2)^2 + 2(\chi^2 - \psi^2) + 1 + 4\chi^2\psi^2 = \chi^4 + 2\chi^2\psi^2 + \psi^4 \\
& \Leftrightarrow \chi^4 - 2\chi^2\psi^2 + \psi^4 + 2(\chi^2 - \psi^2) + 1 + 4\chi^2\psi^2 = \chi^4 + 2\chi^2\psi^2 + \psi^4 \\
& \Leftrightarrow 2(\chi^2 - \psi^2) = -1 \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

δ. Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 0$.

Αρκεί να δείξεις ότι $f(2)f(3) < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$ και επειδή $\alpha > 0$, αρκεί να δείξεις ότι $\beta < 0$ διότι τότε εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την f στο $[2, 3]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$.

Είναι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} < 0$ και $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$, άρα

$$\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) < 0 \stackrel{\alpha > \beta}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow$$

$\beta < -\alpha$, δηλαδή ο β είναι μικρότερος του αρνητικού $-\alpha$ άρα είναι αρνητικός ($\beta < 0$) άρα $f(2)f(3) < 0$, άρα

37. πανελλήνιες 2004 – Επαναληπτικές

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = 2^\chi + m^\chi - 4^\chi - 5^\chi$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Έστω ότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\chi) \geq 0$, είναι $f(0) = 2^0 + m^0 - 4^0 - 5^0 \Leftrightarrow$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ῖ τ η ς

$f(0) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, άρα $f(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow f(\chi) \geq f(0)$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, άρα το

$f(0)$ είναι ελάχιστο για την f , επομένως θα είναι $f'(0) = 0$.

$$f(\chi) = 2^\chi + m^\chi - 4^\chi - 5^\chi \Leftrightarrow f'(\chi) = 2^\chi \ln 2 + m^\chi \ln m - 4^\chi \ln 4 - 5^\chi \ln 5 \Leftrightarrow$$

$$2^0 \ln 2 + m^0 \ln m - 4^0 \ln 4 - 5^0 \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + \ln m - \ln 4 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 + \ln m - 2\ln 2 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln m - \ln 2 - \ln 5 = 0 \Leftrightarrow \ln m - (\ln 2 + \ln 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln m = \ln 10 \Leftrightarrow m = 10$$

β. Αν $m = 10$ τότε θα είναι $f(\chi) = 2^\chi + 10^\chi - 4^\chi - 5^\chi \geq 0$ άρα

$$E = \int_0^1 f(\chi) d\chi = \int_0^1 (2^\chi + 10^\chi - 4^\chi - 5^\chi) d\chi = \int_0^1 2^\chi d\chi + \int_0^1 10^\chi d\chi - \int_0^1 4^\chi d\chi - \int_0^1 5^\chi d\chi,$$

$$\text{είναι } (2^\chi)' = 2^\chi \ln 2 \Leftrightarrow 2^\chi = \frac{(2^\chi)'}{\ln 2} \text{ κλπ, άρα}$$

$$E = \left[\frac{2^\chi}{\ln 2} \right]_0^1 + \left[\frac{10^\chi}{\ln 10} \right]_0^1 - \left[\frac{4^\chi}{\ln 4} \right]_0^1 - \left[\frac{5^\chi}{\ln 5} \right]_0^1 =$$

$$\left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right) + \left(\frac{10}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10} \right) - \left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} \right) - \left(\frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \right) =$$

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{\ln 4} - \frac{4}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{9}{\ln 10} - \frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{\ln 5} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{9}{\ln 10} - \frac{1}{2\ln 2} - \frac{4}{\ln 5} \text{ τ. μ..}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$f(\chi) = \frac{\chi^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi f(2\chi t) dt.$$

α.

✓ Η $\frac{\chi^2}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

✓ Έστω $g(\chi) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi f(2\chi t) dt$, αν θέσεις $u = 2\chi t$ τότε $du = 2\chi dt$ και για

$$t = 0 \text{ έχεις } u_1 = 2 \cdot \chi \cdot 0 = 0, \text{ για } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_2 = 2 \cdot \chi \cdot \frac{1}{2} = \chi.$$

Άρα η $g(\chi) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi f(2\chi t) dt \Leftrightarrow g(\chi) = \int_0^{\chi} f(u) du$ η οποία είναι παραγωγίσιμη $[0, +\infty)$, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

$$\beta. \quad f(\chi) = \frac{\chi^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi f(2\chi t) dt \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{\chi^2}{2} + \int_0^{\chi} f(u) du \quad (1)$$

$$f'(\chi) = \left(\frac{\chi^2}{2} \right)' + \left(\int_0^{\chi} f(u) du \right)' \Leftrightarrow f'(\chi) = \chi + f(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi) - f(\chi) = \chi \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\chi} f'(\chi) - e^{\chi} f(\chi)}{e^{\chi}} = \chi \Leftrightarrow \frac{e^{\chi} f'(\chi) - e^{\chi} f(\chi)}{(e^{\chi})^2} = \frac{\chi}{e^{\chi}} \Leftrightarrow \left(\frac{f(\chi)}{e^{\chi}} \right)' = \frac{\chi}{e^{\chi}} \Leftrightarrow$$

$$\int \left(\frac{f(\chi)}{e^{\chi}} \right)' d\chi = \int \frac{\chi}{e^{\chi}} d\chi \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} = \int \chi e^{-\chi} d\chi + c. \quad \text{Όμως}$$

$$\int \chi e^{-\chi} d\chi = -\int \chi (e^{-\chi})' d\chi = -\chi e^{-\chi} + \int (\chi)' e^{-\chi} d\chi = -\chi e^{-\chi} + \int e^{-\chi} d\chi = -\chi e^{-\chi} - e^{-\chi}$$

$$\text{Άρα } \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} = \int \chi e^{-\chi} d\chi + c \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} = -\chi e^{-\chi} - e^{-\chi} + c \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} = -(\chi + 1)e^{-\chi} + c \quad (2).$$

$$\text{Από την (1) για } \chi = 0 \text{ έχεις } f(0) = \frac{0^2}{2} + \int_0^0 f(u) du = 0 + 0 = 0 \text{ επομένως η (2)}$$

$$\text{γίνεται: } \frac{f(0)}{e^0} = -(0+1)e^0 + c \Leftrightarrow c = 1. \text{ άρα}$$

$$\frac{f(\chi)}{e^{\chi}} = -(\chi + 1)e^{-\chi} + 1 \Leftrightarrow f(\chi) = -(\chi + 1)e^{-\chi} e^{\chi} + e^{\chi} \Leftrightarrow f(\chi) = e^{\chi} - (\chi + 1)$$

γ. Είναι $f(0) = e^0 - (0 + 1) \Leftrightarrow f(0) = 1 - 1 = 0$, άρα το 0 είναι μια ρίζα της

$$f(\chi) = 0.$$

Επίσης $f'(\chi) = (e^\chi - (\chi+1))' = e^\chi - 1$ και επειδή η $g(\chi) = e^\chi$ είναι γνησίως

αύξουσα, $\chi > 0 \Leftrightarrow e^\chi > e^0 = 1$, άρα $f'(\chi) = e^\chi - 1 > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα

άρα το $\chi = 0$ μοναδική ρίζα της $f(\chi) = 0$.

δ.

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (e^\chi - (\chi+1)) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^\chi \left(1 - \frac{\chi+1}{e^\chi}\right), \text{ είναι}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi+1}{e^\chi} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\chi+1)'}{(e^\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\chi} = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^\chi \left(1 - \frac{\chi+1}{e^\chi}\right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^\chi \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\chi+1}{e^\chi}\right) \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = (+\infty)(1-0) = +\infty.$$

$$\checkmark \quad \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (e^\chi - (\chi+1)) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} e^\chi - \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\chi+1) = 0 - (-\infty) \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = +\infty.$$

38.

πανελλήνιες 2004 – Ομογενείς

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία.

Ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha. \quad f(1) = 1^2 - 1 + \frac{1}{1+1} \int_1^1 f(t) dt = 1 - 1 + \frac{1}{2} 0 \Leftrightarrow f(1) = 0.$$

$$\beta. \quad f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) dt \Leftrightarrow (x+1)f(x) = (x^2-1)(x+1) + \int_1^x f(t) dt,$$

επειδή η f συνεχής, το $\int_1^x f(t) dt$ θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση άρα η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Είναι : } ((x+1)f(x))' = [(x^2-1)(x+1)]' + \left(\int_1^x f(t) dt \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) + (x+1)f'(x) = 2x(x+1) + x^2 - 1 + f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) + (x-1)(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = 3x - 1.$$

$$\gamma. \quad f'(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow \int f'(x) dx = \int (3x - 1) dx + c \Leftrightarrow f(x) = 3\frac{x^2}{2} - x + c.$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 3\frac{1^2}{2} - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2} \text{ άρα } f(x) = \frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2}$$

$$\delta. \quad \text{Το } 3x^2 - 2x - 1 \text{ έχει διακρίνουσα } \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3(-1) = 4 + 12 = 16 \text{ άρα}$$

$$\text{ρίζες } x_1 = -\frac{1}{3} \text{ και } x_2 = 1$$

επομένως ισχύει ο πίνακας προσήμου :

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
+	-	+	

Άρα στο διάστημα $[2, 4]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και επί πλέον είναι θετική σ' ολόκληρο το διάστημα, άρα αν Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$ θα είναι :

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \left(\frac{3x^2 - 2x - 1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 (3x^2 - 2x - 1) dx = \frac{1}{2} [x^3 - x^2 - x]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} [(4^3 - 4^2 - 4) - (2^3 - 2^2 - 2)] = \frac{1}{2} [44 - 2] \Leftrightarrow E(\Omega) = 21 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

39.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

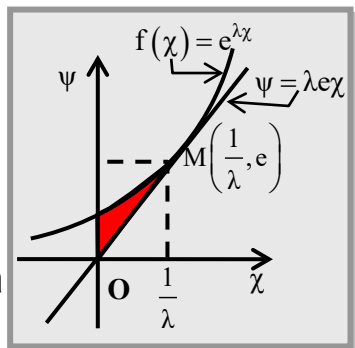
ΘΕΜΑ 1^ο

B. ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^οΔίνεται η συνάρτηση f με τύπο ψ , $\lambda > 0$.

γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι

$$f'(\chi) = \lambda \cdot e^{\lambda \chi} > 0 \text{ η παράγωγος, } \psi = \lambda \cdot e \cdot \chi \text{ η}$$

εξίσωση της εφαπτομένης και $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ τοσημείο επαφής. Είναι $f''(\chi) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \chi} > 0$ άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη, όπως

φαίνεται και στο σχήμα το οποίο δεν είναι απαραίτητο να το φτιάξεις.

Το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικήςπαράστασης C_f της f , της εφαπτομένης της στο σημείο $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ και του άξονα ψ , είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.Έστω $g(\chi) = \lambda \cdot e \cdot \chi$ θεωρήσε την $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) = e^{\lambda \chi} - \lambda e \chi$ αυτή είναισυνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών και επειδή η f είναι πάνω από την g θα είναι :

$$h(\chi) \geq 0 \text{ άρα } |h(\chi)| = h(\chi). \text{ Επομένως } E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} h(\chi) d\chi = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda \chi} - \lambda e \chi) d\chi$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda \chi} d\chi - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e \chi d\chi = \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda \chi}]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{2} \lambda e [\chi^2]_0^{\frac{1}{\lambda}} =$$

$$\frac{e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} - e^0}{\lambda} - \frac{1}{2} \lambda e \left(\frac{1}{\lambda^2} - 0^2 \right) = \frac{e-1}{\lambda} - \frac{1e}{2\lambda} \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

$$\delta. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{4 + 2\eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e-2}{\frac{4}{\lambda} + 2\frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}}$$

Λιβαδειά

$$= \frac{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e-2)}{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{4}{\lambda} + 2 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} = \frac{e-2}{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{4}{\lambda} + 2 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty.$$

γιατί $\lambda > 0$ και $4 + \eta\mu\lambda > 0$ οπότε $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{4}{\lambda} + 2 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} \rightarrow 0^+.$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha. \quad 2f'(\chi) = e^{\chi-f(\chi)} \Leftrightarrow 2f'(\chi) = e^{\chi} \cdot e^{-f(\chi)} \Leftrightarrow 2f'(\chi) = \frac{e^{\chi}}{e^{f(\chi)}} \Leftrightarrow e^{f(\chi)} f'(\chi) = \frac{e^{\chi}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(\chi)} \right)' = \frac{e^{\chi}}{2} \Leftrightarrow \left(e^{f(\chi)} \right)' = \left(\frac{e^{\chi}}{2} \right)' \Leftrightarrow e^{f(\chi)} = \frac{e^{\chi}}{2} + c \quad (1).$$

$$\text{Οπότε για } \chi = 0 \text{ η (1) γίνεται : } e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow e^0 = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται : } e^{f(\chi)} = \frac{e^{\chi}}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\chi) = \ln \left(\frac{1 + e^{\chi}}{2} \right)$$

β. Από την εκφώνηση, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, επομένως είναι και συνεχής. Για την απλοποίηση του ολοκληρώματος θα θέτεις $u = \chi - t$ οπότε

$$du = d(\chi - t)' = -dt,$$

- $t = 0$ άρα $u = \chi$
- $t = \chi$ άρα $u = 0$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\chi} f(\chi - t) dt}{\eta\mu\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\int_{\chi}^0 f(u) du}{\eta\mu\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\chi} f(u) du}{\eta\mu\chi}.$$

$$\text{Αν θέσεις } F(\chi) = \int_0^{\chi} f(u) du \Leftrightarrow F'(\chi) = \left(\int_0^{\chi} f(u) du \right)' \Leftrightarrow F'(\chi) = f(\chi) \text{ δηλαδή η } F$$

είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, άρα $\lim_{\chi \rightarrow 0} F(\chi) = F(0) = \int_0^0 f(u) du = 0$, άρα

$$\text{το } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\chi} f(u) du}{\eta\mu\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{F(\chi)}{\eta\mu\chi} = \frac{0}{0}, \text{ επομένως θα εφαρμοσθεί ο L' Hospital:}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\chi} f(u) du}{\eta \mu \chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{F(\chi)}{\eta \mu \chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{F'(\chi)}{(\eta \mu \chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\sigma \upsilon \nu \chi} = \frac{f(0)}{\sigma \upsilon \nu 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

γ. Είναι $h(\chi) = \int_{-\chi}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt = \int_{-\chi}^{\alpha} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_{\alpha}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt =$
 $-\int_{\alpha}^{-\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_{\alpha}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt$ άρα $h'(\chi) = -\left(\int_{\alpha}^{-\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt\right)' + \left(\int_{\alpha}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt\right)'$
 $\Leftrightarrow h'(\chi) = \left(-\int_{\alpha}^{-\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_{\alpha}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt\right)' = -(-\chi)^{2005} \cdot f(-\chi)(-\chi)' + \chi^{2005} \cdot f(\chi)$
 $\Leftrightarrow$
 $h'(\chi) = \chi^{2005} (f(\chi) - f(-\chi)) = \chi^{2005} \left(\ln\left(\frac{1+e^{\chi}}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+e^{-\chi}}{2}\right) \right) = \chi^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{\chi}}{1+e^{-\chi}}\right) =$

$$\chi^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{\chi}}{1+\frac{1}{e^{\chi}}}\right) = \chi^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{\chi}}{\frac{1+e^{\chi}}{e^{\chi}}}\right) = \chi^{2005} \ln\left(\frac{e^{\chi}(1+e^{\chi})}{1+e^{\chi}}\right) = \chi^{2005} \ln e^{\chi} = \chi^{2005} \chi \Leftrightarrow$$

$$h'(\chi) = \chi^{2006}, \quad g(\chi) = \frac{\chi^{2007}}{2007} \Leftrightarrow g'(\chi) = \left(\frac{\chi^{2007}}{2007}\right)' \Leftrightarrow g'(\chi) = \chi^{2006}$$

Άρα $h'(\chi) = g'(\chi) \Leftrightarrow h(\chi) = g(\chi) + c.$

Όμως για $\chi = 0$ είναι $h(0) = \int_0^0 t^{2005} \cdot f(t) dt = 0$ και $g(0) = \frac{0^{2007}}{2007} = 0$

Άρα $h(0) = g(0) + c \Leftrightarrow c = 0$ επομένως $h(\chi) = g(\chi)$

δ. Έστω η εξίσωση $\int_{-\chi}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}.$

Παρατήρησε πως $\int_{-\chi}^{\chi} t^{2005} \cdot f(t) dt = h(\chi)$ και $h(\chi) = g(\chi) = \frac{\chi^{2007}}{2007}$ άρα η εξίσωση

γίνεται $\frac{\chi^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{\chi^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} = 0$ και αν θέσεις $\varphi(\chi) = \frac{\chi^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008},$

τότε αρκεί να δείξεις, με Θ. Bolzano, πως η $\varphi(\chi) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$ και στη συνέχεια να δείξεις πως η $\varphi(\chi)$ είναι μονότονη άρα ...

✓ Πράγματι $\varphi(0) = \frac{0^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} = -\frac{1}{2008} < 0$ και

$$\varphi(1) = \frac{1^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2007 \cdot 2008} > 0.$$

Άρα θεώρημα Bolzano έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$.

$$\varphi(\chi) = \frac{\chi^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = \left(\frac{\chi^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} \right)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = \chi^{2006} > 0 \text{ για κάθε}$$

$\chi \in (0, 1)$. Άρα η $\varphi(\chi) = 0$ και επομένως και η ισοδύναμή της :

$$\int_{-\chi}^{\chi} t^{2005} f(t) dt = \frac{1}{2008} \text{ έχει μία ακριβώς λύση στο } (0, 1).$$

40.

πανελλήνιες 2005 – Επαναληπτικές

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4^ο

γ. Έστω επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(\chi) > f(\chi)$ για

κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, τότε :

i. $f'(\chi) > f(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi) - f(\chi) > 0 \Leftrightarrow e^{\chi} f'(\chi) - e^{\chi} f(\chi) > 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{\chi} f'(\chi) - e^{\chi} f(\chi)}{e^{2\chi}} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(\chi)}{e^{\chi}} \right)' > 0 \text{ αυτό σημαίνει πως η συνάρτηση}$$

$$g(\chi) = \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα :}$$

✓ $\chi > 0 \Leftrightarrow g(\chi) > g(0) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} > \frac{f(0)}{e^0} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^{\chi}} > 0 \Leftrightarrow f(\chi) > 0 \Leftrightarrow$

$$\chi f(\chi) > 0.$$

$$\checkmark \quad \chi < 0 \Leftrightarrow g(\chi) < g(0) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^\chi} < \frac{f(0)}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{e^\chi} < 0 \Leftrightarrow f(\chi) < 0 \Leftrightarrow \chi f(\chi) > 0.$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση είναι $\chi \cdot f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{ii.} \quad f'(\chi) > f(\chi) &\Leftrightarrow f'(\chi) - f(\chi) > 0 \text{ άρα } \int_0^1 (f'(\chi) - f(\chi)) d\chi > 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f'(\chi) d\chi - \int_0^1 f(\chi) d\chi > 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 f(\chi) d\chi < [f(\chi)]_0^1 = f(1) - f(0) \Leftrightarrow \\ \int_0^1 f(\chi) d\chi < f(1) &\text{ αφού } f(0) = 0. \end{aligned}$$

41.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 4. Λ.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{B)} \quad \text{Αν } \alpha = -1 \text{ τότε: } f(\chi) = \begin{cases} -1 + e^\chi, & \chi \leq 0 \\ \chi \cdot \ln \chi, & \chi > 0 \end{cases}$$

iii) Επειδή $e > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < 1$, άρα η f είναι θετική στο διάστημα $[1, e]$ επομένως αν

Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα

$$\chi' \chi \text{ και τις ευθείες } \chi = 1 \text{ και } \chi = e, \text{ θα είναι } E(\Omega) = \int_1^e f(\chi) d\chi =$$

$$\int_1^e \chi \cdot \ln \chi d\chi = \int_1^e \left(\frac{\chi^2}{2} \right)' \cdot \ln \chi d\chi = \left[\frac{\chi^2}{2} \ln \chi \right]_1^e - \int_1^e \frac{\chi^2}{2} (\ln \chi)' d\chi =$$

$$\left[\frac{\chi^2}{2} \ln \chi \right]_1^e - \int_1^e \frac{\chi^2}{2} \frac{1}{\chi} d\chi = \left[\frac{\chi^2}{2} \ln \chi \right]_1^e - \int_1^e \frac{\chi}{2} d\chi = \left[\frac{\chi^2}{2} \ln \chi \right]_1^e - \left[\frac{\chi^2}{4} \right]_1^e =$$

$$\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1^2}{4} \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{e^2 + 1}{4} \text{ τ. μ..}$$

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi - \ln \chi + e^\chi$, $\chi \in (1, +\infty)$.

δ) Έστω $\Pi = \int_2^e f(\chi) d\chi + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(\chi) d\chi$.

Αν θέσεις $\psi = f^{-1}(\chi) \Leftrightarrow \chi = f(\psi)$ τότε $d\chi = f'(\psi) d\psi$ και $f^{-1}(\chi) = \psi$, επίσης

✓ $\begin{cases} \chi = f(\psi) \\ \chi = f(2) \end{cases} \Leftrightarrow f(2) = f(\psi) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι } 1-1 \text{ άρα } \psi = 2,$

✓ $\begin{cases} \chi = f(\psi) \\ \chi = f(e) \end{cases} \Leftrightarrow f(e) = f(\psi) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι } 1-1 \text{ άρα } \psi = e.$

άρα το $\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(\chi) d\chi = \int_2^e \psi f'(\psi) d\psi$ και επειδή μπορείς να αλλάξεις

μεταβλητή $\int_2^e \psi f'(\psi) d\psi = \int_2^e \chi f'(\chi) d\chi = [\chi f(\chi)]_2^e - \int_2^e (\chi)' f(\chi) d\chi =$

$[\chi f(\chi)]_2^e - \int_2^e f(\chi) d\chi$, άρα η παράσταση Π γίνεται :

$$\Pi = \int_2^e f(\chi) d\chi + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(\chi) d\chi = \int_2^e f(\chi) d\chi + [\chi f(\chi)]_2^e - \int_2^e f(\chi) d\chi = [\chi f(\chi)]_2^e$$

Επομένως

$$\Pi - 2 \ln 2 = [\chi f(\chi)]_2^e - 2 \ln 2 = e(e - \ln e - e^e) - 2(2 - \ln 2 - e^2) - 2 \ln 2 =$$

$$e^2 - e - e^{e+1} - 4 + 2 \ln 2 + 2e^2 - 2 \ln 2 \text{ άρα } \Pi - 2 \ln 2 = 3e^2 - e - 4 - e^{e+1}.$$

42.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 2 + (\chi - 2)^2$ με $\chi \geq 2$.

γ. ii. Παρατήρηση : Οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι

Δαμιανός Μωραΐτης

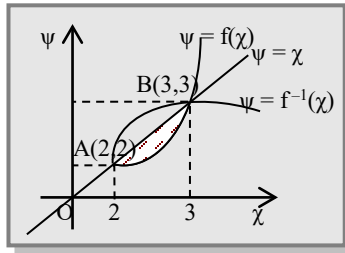
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = \chi$ και την τέμνουν στα σημεία $A(2, 2)$ και

$B(3, 3)$ (προηγούμενο ερώτημα),

δηλαδή το γράφημα είναι περίπου έτσι :

Επομένως για να υπολογίσεις το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων



f και f^{-1} , αρκεί να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παρατάσεις της f και της $\psi = \chi$ (γραμμοσκιασμένο τμήμα) και να το διπλασιάσεις.

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παρατάσεις της f και της $\psi = \chi$ (γραμμοσκιασμένο τμήμα) μπορείς να το υπολογίσεις με δυο τρόπους.

1^{ος} τρόπος : Είναι $g(\chi) = \psi - f(\chi) = \chi - 2 - (\chi - 2)^2 = \chi - 2 - \chi^2 + 4\chi - 4$ άρα

$\psi - f(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$. Επειδή το $\psi - f(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$ έχει ρίζες

$\chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$ και πίνακα προσήμου

$-\infty$	2	3	$+\infty$
	-	+	-

Άρα στο διάστημα $[2, 3]$ που σε

ενδιαφέρει για το εμβαδόν η $\psi - f(\chi)$ είναι θετική άρα : $E_1 = \int_2^3 (\psi - f(\chi)) d\chi =$

$$\int_2^3 (-\chi^2 + 5\chi - 6) d\chi = \left[-\frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} - 6\chi \right]_2^3 =$$

$$-\frac{3^3}{3} + 5\frac{3^2}{2} - 6 \cdot 3 - \left(-\frac{2^3}{3} + 5\frac{2^2}{2} - 6 \cdot 2 \right) = -9 + \frac{45}{2} - 18 + \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{1}{6} \text{ άρα}$$

$E_1 = \frac{1}{6}$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παρατάσεις της f και της $\psi = \chi$ (γραμμοσκιασμένο τμήμα).

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = 2 \cdot E_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ τ. μ.

2^{ος} τρόπος : Είναι $g(\chi) = \psi - f(\chi) = \chi - 2 - (\chi - 2)^2 = \chi - 2 - \chi^2 + 4\chi - 4$ άρα

$\psi - f(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$. Επειδή το $\psi - f(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$ έχει ρίζες

$\chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$ και πίνακα προσήμου

$-\infty$	2	3	$+\infty$
	-	+	-

Άρα στο διάστημα $[2, 3]$ που σε

ενδιαφέρει για το εμβαδόν η $\psi = \chi$ είναι πάνω από την $f(\chi)$ και επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τις ευθείες $\psi = \chi$, $\chi = 2$, $\chi = 3$, $\chi' \chi$ αφαιρέσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον $\chi' \chi$ και τις $\chi = 2$, $\chi = 3$.

$$\text{Είναι } E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{2+3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2},$$

$$E_2 = \int_2^3 f(\chi) d\chi = \int_2^3 (2 + (\chi - 2)^2) d\chi = \int_2^3 (\chi^2 - 4\chi + 6) d\chi = \left[\frac{\chi^3}{3} - 4\frac{\chi^2}{2} + 6\chi \right]_2^3$$

$$\frac{3^3}{3} - 4\frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 - \left(\frac{2^3}{3} - 4\frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right) = 9 - 18 + 18 - \frac{8}{3} + 8 - 12 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Άρα } E_3 = E_{\text{τραπεζίου}} - E_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{15-14}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E = 2 \cdot E_3 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

43.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2 Θεωρία.

B. ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

β. Είναι $\int \frac{1}{f(\chi)} d\chi = \int \frac{1}{\frac{1+e^\chi}{1+e^{\chi+1}}} d\chi = \int \frac{1+e^{\chi+1}}{1+e^\chi} d\chi = \int \frac{1+e \cdot e^\chi}{1+e^\chi} d\chi.$

Αν θέσεις $u = e^\chi \Leftrightarrow du = (e^\chi)' d\chi = e^\chi d\chi = u \cdot d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$, οπότε το

ολοκλήρωμα γίνεται: $\int \frac{1}{f(\chi)} d\chi = \int \frac{1+e \cdot e^\chi}{1+e^\chi} d\chi = \int \frac{1+e \cdot u}{1+u} \frac{du}{u} = \int \frac{1+e \cdot u}{u(1+u)} du.$

Δαμιανός Μωραΐτης

Βρίσκεις τους αριθμούς : α_1, α_2 από την ισότητα

$$\frac{1+e \cdot u}{u(1+u)} = \frac{\alpha_1}{u} + \frac{\alpha_2}{1+u} = \frac{\alpha_1 + \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot u}{u(1+u)} = \frac{\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot u}{u(1+u)} \quad \text{άρα}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = e - 1 \end{cases} \quad \text{επομένως}$$

$$\int \frac{1+e \cdot u}{u(1+u)} du = \int \frac{1}{u} du + (e-1) \int \frac{1}{u+1} du = \ln|u| + (e-1) \ln|u+1| + c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}} dx = \ln|e^x| + (e-1) \ln|e^x+1| + c = \ln e^x + (e-1) \ln(e^x+1) + c =$$

$$\int \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}} dx = x + (e-1) \ln(e^x+1)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

β. ii. Όταν $a = 1$ τότε η $f(x) = x^2 + x + 1$

και το σημείο $A(2, a+6) = A(2, 7)$.

Η $x^2 + x + 1$ έχει άξονα συμμετρίας τον

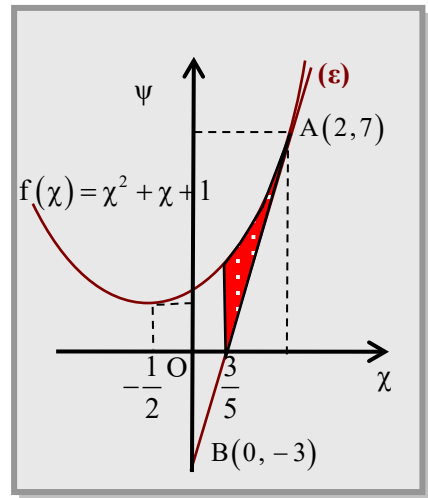
$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2} \quad \text{άρα } \psi = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4},$$

η εφαπτομένη (ε) $\psi = 5x - 3$ τέμνει τον

x στο σημείο $x = \frac{3}{5}$. Είναι $f'(x) = 2x + 1$ άρα $f''(x) = 2 > 0$ άρα C_f είναι

πάνω από την εφαπτομένη, όπως φαίνεται και στο σχήμα το οποίο δεν είναι απαραίτητο να το φτιάξεις. Επομένως το ζητούμενο χωρίο είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος, δηλαδή το χωρίο που περιέχεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις της f και της (ε) . Έστω $g(x) = 5x - 3$ η εφαπτομένη, θεώρησε την $h(x) = (x^2 + x + 1) - (5x - 3) = x^2 - 4x + 4$, αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών και επειδή η f είναι πάνω από την g θα είναι :

$h(x) \geq 0$ άρα $|h(x)| = h(x)$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι



$$E(\Omega) = \int_{\frac{3}{5}}^2 (\chi - 2)^2 d\chi = \left[\frac{(\chi - 2)^3}{3} \right]_{\frac{3}{5}}^2 = \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{\left(\frac{3}{5} - 2\right)^3}{3} = 0 - \frac{\left(-\frac{7}{5}\right)^3}{3} =$$

$$-\frac{\frac{343}{125}}{3} \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{343}{375}.$$

44.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 4. Σωστό, 5. Σωστό.

ΘΕΜΑ 4^οΈστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει :

$$f(\chi) = 3 + 2 \int_0^\chi f(t) dt, \chi \in \mathbb{R}.$$

α) Για να αποδείξεις ότι η συνάρτηση $\Phi(\chi) = \frac{f(\chi)}{e^{2\chi}}$ είναι σταθερήαρκεί να δείξεις ότι $\Phi'(\chi) = 0$.

$$\text{Είναι } \Phi'(\chi) = \left(\frac{f(\chi)}{e^{2\chi}} \right)' = \frac{f'(\chi)e^{2\chi} - f(\chi)(e^{2\chi})'}{(e^{2\chi})^2}.$$

$$f'(\chi) = \left(3 + 2 \int_0^\chi f(t) dt \right)' = 2 \left(\int_0^\chi f(t) dt \right)' \text{ άρα } f'(\chi) = 2f(\chi), \text{ αφού η}$$

συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$, (Παρ'όλο που δεν το λέει αμέσως πλην σαφώς φαίνεται).

$$\text{Επίσης } (e^{2\chi})' = e^{2\chi} (2\chi)' = 2e^{2\chi} \text{ άρα } \Phi'(\chi) = \frac{2f(\chi)e^{2\chi} - f(\chi)2e^{2\chi}}{(e^{2\chi})^2} = 0$$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα η $\Phi(\chi) = \frac{f(\chi)}{e^{2\chi}}$ είναι σταθερή άρα

$$\Phi(\chi) = \frac{f(\chi)}{e^{2\chi}} = c \Leftrightarrow f(\chi) = c \cdot e^{2\chi} \quad (1) \quad \text{και με βάση την εκφώνηση}$$

$$f(\chi) = 3 + 2 \int_0^\chi f(t) dt, \chi \in \mathbb{R} \quad \text{άρα } f(0) = 3 + 2 \int_0^0 f(t) dt \Leftrightarrow f(0) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$$

Από την (1) θα είναι $f(0) = c \cdot e^{2 \cdot 0} = 3 \cdot 1 = 3$ άρα $c = 3$ και $f(\chi) = 3 \cdot e^{2\chi}$.

γ) Αρχικά πρέπει να αναφέρεις ότι η συνάρτηση $f(\chi) = 3 \cdot e^{2\chi}$ είναι συνεχής και $f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Άρα όταν $\lambda > 0$ είναι :

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda f(\chi) d\chi = \int_0^\lambda 3 \cdot e^{2\chi} d\chi = 3 \int_0^\lambda e^{2\chi} d\chi = \frac{3}{2} \int_0^\lambda e^{2\chi} (2\chi)' d\chi \quad \text{άρα}$$

$$E(\lambda) = \frac{3}{2} [e^{2\chi}]_0^\lambda = \frac{3}{2} (e^{2\lambda} - e^0) \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{3}{2} (e^{2\lambda} - 1)$$

δ) Είναι $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{2}(e^{2\lambda} - 1)}{\lambda} = \frac{3}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{e^{2\lambda} - 1}{\lambda}$, είναι

$$\checkmark \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (e^{2\lambda} - 1) = e^0 - 1 = 0$$

$$\checkmark \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda = 0$$

Άρα το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$ είναι ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ της μορφής $\frac{0}{0}$.

$$\text{Είναι } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(E(\lambda))'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{3}{2}(e^{2\lambda} - 1)\right)'}{1} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2}(e^{2\lambda})'\right) = \frac{3}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (2e^{2\lambda})$$

$$\text{Άρα } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(E(\lambda))'}{(\lambda)'} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 3 \quad \text{επομένως} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{(E(\lambda))'}{(\lambda)'} = 3.$$

45.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Λάθος, δ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

δ. Για να υπολογίσεις το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$ θα

θεωρήσεις την συνάρτηση $h(\chi) = f(\chi) - (-2\chi - 2\eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow$

$$h(\chi) = (\chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta) - (-2\chi - 2\eta\mu^2\theta) = \chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta + 2\chi + 2\eta\mu^2\theta \Rightarrow$$

$$h(\chi) = \chi^3 - \chi.$$

Επειδή τα A, B, Γ ανήκουν στην ευθεία, άρα η C_f και η ευθεία τέμνονται στα σημεία αυτά, τα οποία έχουν τετμημένες $\chi_1 = -1$, $\chi_2 = 0$, $\chi_3 = 1$ αντίστοιχα.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_{-1}^1 |h(\chi)| d\chi = \int_{-1}^1 |\chi^3 - \chi| d\chi \Leftrightarrow$

$$E = \int_{-1}^0 |\chi^3 - \chi| d\chi + \int_0^1 |\chi^3 - \chi| d\chi.$$

Η $h(\chi) = \chi^3 - \chi = \chi(\chi^2 - 1)$ έχει πίνακα προσήμου

χ	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
χ	—	—	+	+	
$\chi^2 - 1$	+	—	—	+	
$h(\chi)$	—	+	—	+	

Άρα στο διάστημα $[-1, 1]$ η $h(\chi)$ είναι θετική στο $[-1, 0]$ και αρνητική στο $[0, 1]$. Επομένως θα είναι $E = \int_{-1}^0 (\chi^3 - \chi) d\chi - \int_0^1 (\chi^3 - \chi) d\chi.$

$$\text{Μια παράγουσα της } h(\chi) \text{ είναι η } H(\chi) = \int (\chi^3 - \chi) d\chi = \frac{\chi^4}{4} - \frac{\chi^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα θα είναι } E &= \left[\frac{\chi^4}{4} - \frac{\chi^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{\chi^4}{4} - \frac{\chi^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) - \left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) \right] = \\ &= 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 0 \right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \text{ τετ. μονάδες.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα $t > 0 \Rightarrow f(t) > f(0) > 0 \Rightarrow$

$f(t) > 0$, είναι και $g(t) > 0$ άρα $f(t) \cdot g(t) > 0$ άρα και $\int_0^\chi f(t)g(t)dt$ άρα

$F(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0, 1]$.

**** Ένας άλλος τρόπος είναι :**

$$F(\chi) = \int_0^\chi f(t)g(t)dt \Rightarrow F'(\chi) = \left(\int_0^\chi f(t)g(t)dt \right)' = f(\chi)g(\chi). \text{ Η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα άρα $\chi > 0 \Rightarrow f(\chi) > f(0) > 0$, είναι και $g(t) > 0$ άρα

$f(\chi)g(\chi) > 0$, άρα $F'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0, 1]$. Άρα η F γνησίως

αύξουσα στο $(0, 1]$ άρα $\chi > 0 \Rightarrow F(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0, 1]$.

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $\chi \geq t \Rightarrow f(\chi) \geq f(t)$, είναι και $g(t) > 0$

$$\Leftrightarrow f(\chi) \cdot g(t) \geq f(t) \cdot g(t) \text{ άρα } \int_0^\chi f(\chi)g(t)dt > \int_0^\chi f(t)g(t)dt \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) \int_0^\chi g(t)dt > \int_0^\chi f(t)g(t)dt \Rightarrow f(\chi) \cdot G(\chi) > F(\chi) \text{ για κάθε } \chi \in (0, 1].$$

***** Ένας κατά την γνώμη μου πιο απλός και κυρίως σίγουρος τρόπος, είναι :**

$$\text{Θες να δείξεις } f(\chi) \cdot G(\chi) > F(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) \cdot G(\chi) - F(\chi) > 0.$$

Θέσε $h(\chi) = f(\chi) \cdot G(\chi) - F(\chi)$, οπότε αρκεί να δείξεις ότι $h(\chi) > 0$ για κάθε

$\chi \in (0, 1]$.

Αυτό σε σπρώχνει κυριολεκτικά σε μελέτη της μονοτονίας της h .

$$\text{Είναι } h'(\chi) = (f(\chi) \cdot G(\chi) - F(\chi))' = f'(\chi) \cdot G(\chi) + f(\chi) \cdot G'(\chi) - F'(\chi) =$$

$$f'(\chi) \cdot G(\chi) + f(\chi) \cdot g(\chi) - f(\chi) \cdot g(\chi) \Leftrightarrow h'(\chi) = f'(\chi) \cdot G(\chi), \text{ επειδή } f$$

γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ άρα $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [0, 1]$, είναι $g(\chi) > 0$

για κάθε $\chi \in [0, 1]$ άρα και $G(\chi) = \int_0^\chi g(t) dt > 0$.

Επομένως και $h'(\chi) = f'(\chi) \cdot G(\chi) > 0$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$

$$\text{άρα } \chi \in (0, 1] \Leftrightarrow \begin{cases} \chi > 0 \\ h \text{ γν. αύξουσα} \end{cases} \Rightarrow h(\chi) > h(0) = f(0) \cdot G(0) - F(0) \Rightarrow$$

$$h(\chi) > f(0) \cdot 0 - 0 = 0 \text{ άρα } f(\chi) \cdot G(\chi) - F(\chi) > 0 \Rightarrow f(\chi) \cdot G(\chi) > F(\chi).$$

$$\gamma. \text{ Έστω η συνάρτηση } h(\chi) = \frac{F(\chi)}{G(\chi)}, \chi \in (0, 1]. \text{ Είναι } (h(\chi))' = \left(\frac{F(\chi)}{G(\chi)} \right)' \Rightarrow$$

$$h'(\chi) = \frac{F'(\chi)G(\chi) - F(\chi)G'(\chi)}{G^2(\chi)} = \frac{f(\chi)g(\chi)G(\chi) - F(\chi)g(\chi)}{G^2(\chi)} \Rightarrow$$

$$h'(\chi) = \frac{g(\chi)(f(\chi)G(\chi) - F(\chi))}{G^2(\chi)} > 0 \text{ για κάθε } \chi \in (0, 1] \text{ (λόγω του } \beta.).$$

Άρα η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$, οπότε $\chi \leq 1 \Leftrightarrow h(\chi) \leq h(1) \Leftrightarrow$

$$\frac{F(\chi)}{G(\chi)} \leq \frac{F(1)}{G(1)} \text{ για κάθε } \chi \in (0, 1].$$

$$\delta. \text{ Είναι } \frac{\left(\int_0^\chi f(t)g(t)dt \right) \cdot \left(\int_0^{\chi^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^\chi g(t)dt \right) \cdot \chi^5} = \frac{\int_0^\chi f(t)g(t)dt}{\int_0^\chi g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{\chi^2} \eta \mu t^2 dt}{\chi^5} =$$

$$\frac{F(\chi)}{G(\chi)} \cdot \frac{\int_0^{\chi^2} \eta \mu t^2 dt}{\chi^5} \cdot \text{Όμως } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\chi^2} \eta \mu t^2 dt}{\chi^5} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{\chi^2} \eta \mu t^2 dt \right)'}{(\chi^5)'} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\left(\eta \mu (\chi^2)^2 \right) (\chi^2)'}{5\chi^4} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu \chi^4 (2\chi)'}{5\chi^4} = \frac{2}{5} \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu \chi^4}{\chi^4} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \chi = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

46.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. β. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$ τότε $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\eta \mu 3\chi}{\chi}, & \chi < 0 \\ \chi^2 + 3\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi, & \chi \geq 0 \end{cases}$ και επειδή 0, π ανήκουν

στο διάστημα $[0, +\infty)$ άρα $\int_0^\pi f(\chi) d\chi = \int_0^\pi (\chi^2 + 3\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi) d\chi =$

$$\int_0^\pi (\chi^2 + 3\chi) d\chi + 3 \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \left[\frac{\chi^3}{3} + 3 \frac{\chi^2}{2} \right]_0^\pi + 3 \int_0^\pi (\eta \mu \chi)' d\chi =$$

$$\left[\frac{\pi^3}{3} + 3 \frac{\pi^2}{2} - \frac{0^3}{3} + 3 \frac{0^2}{2} \right] + 3 [\eta \mu \chi]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} + 3 \frac{\pi^2}{2} + 3(\eta \mu \pi - \eta \mu 0) \Rightarrow$$

$$\int_0^\pi f(\chi) d\chi = \frac{\pi^3}{3} + 3 \frac{\pi^2}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

γ. Έστω η εξίσωση $\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt = \int_{\chi^2+3}^{\chi^2+2} f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt$ (1)

Οι αρχικές συναρτήσεις $\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt$ και $\int_{\chi^2+3}^{\chi^2+2} f(t) dt$ είναι καλώς

ορισμένες γιατί η $f(\chi)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\chi^2 + 1 > 0$,

$\chi^2 + 2 > 0$, $\chi^2 + 3 > 0$ άρα όλα τα άκρα ολοκλήρωσης ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως πολυωνυμικές.

Αρχικά, σε όλες αυτές της περιπτώσεις μπορείς εύκολα να βρεις μια λύση δοκιμάζοντας για $\chi = 0$, $\chi = 1$ κλπ. Πράγματι για $\chi = 1$ έχεις

$$\int_2^3 f(t) dt = \int_4^3 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt \text{ που ισχύει άρα μια λύση είναι το } \chi = 1.$$

Για να δείξεις ότι είναι μοναδική θα χρειαστείς την μονοτονία.

$$\text{Η (1) γίνεται } \int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt - \int_{\chi^2+3}^{\chi^2+2} f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt + \int_{\chi^2+2}^{\chi^2+3} f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_{\chi^2+1}^{\chi^2+3} f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt = 0.$$

$$\text{Θέτεις } g(\chi) = \int_{\chi^2+1}^{\chi^2+3} f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt \text{ και θα μελετήσεις την μονοτονία της}$$

$$g(\chi).$$

$$\text{Είναι } g'(\chi) = \left(\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+3} f(t) dt - \int_2^4 f(t) dt \right)' = \left(\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+3} f(t) dt \right)' =$$

$$\left(\int_{\chi^2+1}^2 f(t) dt + \int_2^{\chi^2+3} f(t) dt \right)' = \left(\int_2^{\chi^2+3} f(t) dt - \int_2^{\chi^2+1} f(t) dt \right)' =$$

$$\left(\int_2^{\chi^2+3} f(t) dt \right)' - \left(\int_2^{\chi^2+1} f(t) dt \right)' = f(\chi^2+3) \cdot [\chi^2+3]' - f(\chi^2+1) \cdot [\chi^2+1]'$$

$$= 2\chi \cdot f(\chi^2+3) - 2\chi \cdot f(\chi^2+1) \Rightarrow g(\chi) = 2\chi \cdot [f(\chi^2+3) - f(\chi^2+1)].$$

Είναι $\chi > 0$ και $\chi^2 + 3 > \chi^2 + 1$ και ταυτόχρονα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(\chi^2+3) > f(\chi^2+1) \Leftrightarrow f(\chi^2+3) - f(\chi^2+1) > 0 \text{ άρα } g(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi >$$

0 άρα $g(\chi)$ γνησίως αύξουσα, επομένως η $g(\chi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{\chi^2+1}^{\chi^2+2} f(t) dt = \int_{\chi^2+3}^{\chi^2+2} f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο}$$

διάστημα $(0, +\infty)$.

47.

ισανελλήνικες 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 5. Λάθος.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\gamma. I(\chi) = \int_0^\chi f(t) dt = \int_0^\chi \left(e^t + \frac{1}{e^{3t}} \right) dt = \int_0^\chi e^t dt + \int_0^\chi \frac{1}{e^{3t}} dt = \int_0^\chi e^t dt + \int_0^\chi e^{-3t} dt.$$

$$\int_0^\chi e^t dt = \left[e^t \right]_0^\chi = e^\chi - e^0 = e^\chi - 1.$$

Για το $\int_0^\chi e^{-3t} dt$ θέτεις $u = -3t$ οπότε $du = -3dt \Leftrightarrow dt = -\frac{du}{3}$. Άρα

$$\int_0^\chi e^{-3t} dt = \int_0^\chi e^u \left(-\frac{du}{3} \right) = -\frac{1}{3} \int_0^\chi e^u du = -\frac{1}{3} \left[e^u \right]_0^\chi = -\frac{1}{3} (e^{-3\chi} - e^0) \Rightarrow$$

$$\int_0^\chi e^{-3t} dt = -\frac{1}{3} e^{-3\chi} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } I(\chi) = e^\chi - 1 - \frac{1}{3} e^{-3\chi} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow I(\chi) = e^\chi - \frac{1}{3} e^{-3\chi} - \frac{2}{3}.$$

$$\delta. \text{ Είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{I(\chi)}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi - \frac{1}{3} e^{-3\chi} - \frac{2}{3}}{\chi^2} \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(e^\chi - \frac{1}{3} e^{-3\chi} - \frac{2}{3} \right) = +\infty - 0 - \frac{2}{3} = +\infty, \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^2 = +\infty \text{ άρα θα}$$

εφαρμόσεις De L' Hospital και θα είναι :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{I(\chi)}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^\chi - \frac{1}{3}e^{-3\chi} - \frac{2}{3} \right)'}{(\chi^2)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi - \frac{1}{3}(-3)e^{-3\chi}}{2\chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi + e^{-3\chi}}{2\chi} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(e^\chi + e^{-3\chi})'}{(2\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi - 3e^{-3\chi}}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{I(\chi)}{\chi^2} = +\infty.$$

48.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ 4^οΈστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\chi) = (10\chi^3 + 3\chi) \int_0^2 f(t) dt - 45.$$

α. Το $\int_0^2 f(t) dt = \kappa$ σταθερά άρα η $f(\chi) = (10\chi^3 + 3\chi) \int_0^2 f(t) dt - 45 \Leftrightarrow$

$$f(\chi) = \kappa \cdot (10\chi^3 + 3\chi) - 45 \Leftrightarrow \int_0^2 f(\chi) d\chi = \int_0^2 [\kappa \cdot (10\chi^3 + 3\chi) - 45] d\chi =$$

$$\left[\kappa \cdot \left(10 \frac{\chi^4}{4} + 3 \frac{\chi^2}{2} \right) - 45\chi \right]_0^2 = \kappa \cdot \left(10 \frac{2^4}{4} + 3 \frac{2^2}{2} \right) - 45 \cdot 2 \Leftrightarrow \kappa = 46 \cdot \kappa - 90$$

$$\Leftrightarrow \kappa = 2. \quad \text{Άρα } f(\chi) = 20\chi^3 + 6\chi - 45$$

49.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008 - ΕΩΡΕΑΛΗΘΕΙΕΣ

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Α. Θεωρία .

Γ. γ. Σωστό.

ΘΕΜΑ 4^οΈστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \geq 0$ και οι συναρτήσεις:

$$F(\chi) = \int_0^\chi f(t) dt, \quad \chi \in [0, +\infty)$$

$$h(\chi) = \frac{F(\chi)}{\int_0^\chi t \cdot f(t) dt}, \quad \chi \in (0, +\infty)$$

α. Παρατήρηση : $F'(\chi) = \left(\int_0^\chi f(t) dt \right)' = f(\chi)$ οπότε

$$\int_0^1 e^{t-1} [f(t) + F(t)] dt = \int_0^1 e^{t-1} [F'(t) + F(t)] dt =$$

$$\int_0^1 \left[e^{t-1} \cdot F'(t) + e^{t-1} \cdot F(t) \right] dt = \int_0^1 \left[e^{t-1} \cdot F'(t) + (e^{t-1})' (t-1)' \cdot F(t) \right] dt =$$

$$\int_0^1 \left[e^{t-1} \cdot F(t) \right]' dt = \left[e^{t-1} \cdot F(t) \right]_0^1 = e^{1-1} \cdot F(1) - e^{0-1} \cdot F(0) = F(1) - e^{-1} \cdot F(0)$$

$$\text{όμως } F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0 \text{ άρα } \int_0^1 e^{t-1} [f(t) + F(t)] dt = F(1) - e^{-1} \cdot 0 = F(1)$$

$$\beta. \text{ Είναι } h'(\chi) = \left(\frac{F(\chi)}{\int_0^\chi t \cdot f(t) dt} \right)' = \frac{F'(\chi) \int_0^\chi t \cdot f(t) dt - F(\chi) \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)'}{\left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2} =$$

$$\frac{f(\chi) \int_0^\chi t \cdot f(t) dt - F(\chi) \cdot \chi \cdot f(\chi)}{\left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2} = \frac{f(\chi) \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) \right)}{\left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2}.$$

Είναι από την υπόθεση $f(\chi) > 0$, $\left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2 > 0$ ως τετράγωνο.

Για να βρεις το πρόσημο της $\int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi)$ θα θεωρήσεις την

συνάρτηση $g(\chi) = \int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi)$ και θα μελετήσεις την μονοτονία της προκειμένου να βρεις το πρόσημό της .

$$g'(\chi) = \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) \right)' = \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)' - (\chi \cdot F(\chi))' =$$

$$\chi \cdot f(\chi) - (\chi' \cdot F(\chi) + \chi \cdot F'(\chi)) = \chi \cdot f(\chi) - F(\chi) - \chi \cdot f(\chi) \Rightarrow g'(\chi) = -F(\chi) ,$$

όμως $F(\chi) > 0$ γιατί $f(\chi) > 0$ και $\chi > 0$ οπότε από γνωστό θεώρημα των

ολοκληρωμάτων θα είναι και $F(\chi) = \int_0^\chi f(t) dt > 0$, άρα $g'(\chi) < 0$ στο

$[0, +\infty)$ άρα η $g(\chi)$ γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ άρα $\chi > 0 \Rightarrow$

$$g(\chi) < g(0) \Rightarrow \int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) < \int_0^0 t \cdot f(t) dt - 0 \cdot F(0) \Rightarrow$$

$$\int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) < 0 - 0 = 0 \Rightarrow g(\chi) < 0 \text{ άρα τελικά :}$$

$$f(\chi) > 0, \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2 > 0, \int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) = g(\chi) < 0 \text{ επομένως}$$

$$h'(\chi) = \frac{f(\chi) \left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt - \chi \cdot F(\chi) \right)}{\left(\int_0^\chi t \cdot f(t) dt \right)^2} < 0 \text{ άρα η } h(\chi) \text{ γνησίως φθίνουσα}$$

στο $(0, +\infty)$

γ. i. Έστω $h(1) = 2$, επειδή $2 < 1$ και η $h(\chi)$ γνησίως φθίνουσα

$$\text{στο } (0, +\infty) \text{ άρα } h(2) < h(1) \Rightarrow \frac{F(2)}{\int_0^2 t \cdot f(t) dt} < 2 \Rightarrow F(2) < 2 \cdot \int_0^2 t \cdot f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt < 2 \cdot \int_0^2 t \cdot f(t) dt$$

$$\text{ii. } \int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 (t)' F(t) dt = [t \cdot F(t)]_0^1 - \int_0^1 t \cdot F'(t) dt =$$

$$[1 \cdot F(1) - 0 \cdot F(0)] - \int_0^1 t \cdot f(t) dt \Rightarrow \int_0^1 F(t) dt = F(1) - \int_0^1 t \cdot f(t) dt \quad (1).$$

$$\text{Από } h(1) = 2 \Rightarrow \frac{F(1)}{\int_0^1 t \cdot f(t) dt} = 2 \Rightarrow F(1) = 2 \cdot \int_0^1 t \cdot f(t) dt \Rightarrow$$

$$\int_0^1 t \cdot f(t) dt = \frac{F(1)}{2} \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε } \int_0^1 F(t) dt = F(1) - \frac{F(1)}{2} = \frac{F(1)}{2}.$$

Αρχές Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων



Δαμανός Μωραΐτης

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας



Δαμανός Μωραΐτης

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Τάξης 102



Δαμανός Μυρτίτης
Назматис

Μαθηματικά
Θετικής
και Τεχνολογικής
Παράγωγου
Τόμος 2ος



Δαμανός Μωραϊτός
Hadjipapadakis

Τα Θέμα

εως συνάρτησεις
 στη στατιστική
 και εως υδανόμησης



Δαμανός Μωραΐτης

Μαθηματικός