

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

1^{ος} Τόμος

Μαθητικοί
ευναρτήσεις
παράγωγας
ολοκλήρωμα

Ενβάδων

Περιέχει μαθήματα
εισαγωγής και
διαγωνίσματα σε
κάθε κεφάλαιο



Περιέχει τα θέματα για
κάθε κεφάλαιο
ξεχωριστά, αυξανόμενα
με αναλυτικό και
υποδειγματικό
τρόπο

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Αφιερωμένο στον Κώστα, τον Πάνο, τον Γιάννη, την Μαρία, την Αγγελική, τη Λίλα τον . . . και την . . . , σε όλα τέλος πάντων τα χιλιάδες επώνυμα «παιδιά μου», που για μένα, υπήρξαν πηγή έμπνευσης και πηγή ζωής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στο συνάδελφο (κατά πολύ νεότερο) Γιάννη Βελαώρα γιατί είχε την υπομονή να διαβάσει με προσοχή και επιμονή τα γραφόμενα και να κάνει, όχι μόνο , τις απαραίτητες διορθώσεις αλλά και εύστοχες παρατηρήσεις.

Θερμές ευχαριστίες στον αείμνηστο δάσκαλό μου τον Άλκη Λεβέτα γιατί του οφείλω πολλά και κυρίως την αγάπη στο διάβασμα.

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα
Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 1^{ος}

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:

Δαμιανός Μωραΐτης

© copyright για την παρούσα έκδοση:

Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

ISBN SET: 9786188485778

ISBN 1^{ου} τόμου: 9786188485785

Πρόλογος

Στο βιβλίο, που είναι το πρώτο μιας πλήρους σειράς για το Λύκειο, παρουσιάζεται για **πρώτη φορά, μια μοναδική στην κυριολεξία συλλογή** που περιέχει:

Όλα τα θέματα των Μαθηματικών από το 1975 έως σήμερα

Σε αυτή τη **μοναδική και πρωτοεμφανιζόμενη** συλλογή, περιλαμβάνονται **ΟΛΑ** τα θέματα Μαθηματικών που δόθηκαν σε **ΟΛΕΣ** τις Πανελλήνιες εξετάσεις της Γ' Λυκείου από το 1975 έως σήμερα.

Συγκεκριμένα, περιλαμβάνονται τα θέματα από τις Πανελλήνιες:

- Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , ΤΕΛ, Ενιαίο Λύκειο, κλπ.)
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Ημερησίων Λυκείων (Γενικό , Ενιαίο, κλπ.)
- Εξετάσεις των Εσπερινών Λυκείων
- Επαναληπτικές Εξετάσεις Εσπερινών Λυκείων
- Εξετάσεις των Ομογενών

Τα θέματα είναι λυμένα με **αναλυτικό και κυρίως με υποδειγματικό τρόπο.**

Τα θέματα είναι οργανωμένα **ξεχωριστά για κάθε κεφάλαιο :**

1. Μιγαδικοί, 2. Όριο – Συνέχεια, 3. Παράγωγοι, 4. Ολοκληρώματα

Με τη συλλογή αυτή:

- **Οι μαθητές**
 - 1^{ον}** Αποκοτούν την **πιο πλούσια συλλογή** από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά, για να μπορέσουν εύκολα **να κατανοήσουν και να μάθουν** την αντίστοιχη ύλη.
 - 2^{ον}** Ξεπερνούν σε μεγάλο βαθμό το άγχος και την αγωνία τους για τα «άγνωστα και δύσκολα» σύμφωνα με τις «φήμες» θέματα γιατί διαπιστώνουν πως είναι εύκολο να λύσουν και οι ίδιοι «ένα τέτοιο θέμα».
- **Οι καθηγητές** έχουν μια πλούσια συλλογή από τα ΠΛΕΟΝ ΕΓΚΥΡΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ, για να τα χρησιμοποιήσουν την ώρα που τα χρειάζονται . . . **όταν διδάσκουν το αντίστοιχο κεφάλαιο.**

Δηλαδή το βιβλίο αυτό αποτελεί τη **«Βίβλο»** των Πανελληνίων Εξετάσεων.

Φεβρουάριος 2022

Περιεχόμενα

Το Βιβλίο είναι οργανωμένο σε 4 κεφάλαια

- 1. Μιγαδικοί.**
- 2. Συναρτήσεις, Όριο – Συνέχεια Συναρτήσεων.**
- 3. Παράγωγοι Συναρτήσεων – Εφαρμογές Παραγώγων.**
- 4. Ορισμένα – Αόριστα Ολοκληρώματα – Εμβαδόν.**

Ο διαχωρισμός έγινε με βάση το διαχωρισμό του τρέχοντος σχολικού βιβλίου, για τον, προφανή λόγο, ο μαθητής αλλά και ο καθηγητής, να ανατρέχουν στα περιεχόμενα παράλληλα με την διδασκαλία της αντίστοιχης (εξεταστέας) ύλης.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν

- ✓ Σύντομη επανάληψη της θεωρίας με εύστοχες **παρατηρήσεις, υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα**, από αυτά που έχουν «πέσει» στις Πανελλήνιες και **κρίσιμες υποδείξεις για τις ασκήσεις.**
- ✓ Τα **θέματα** των εξετάσεων, από **το 1975 μέχρι και σήμερα**, που αφορούν το κεφάλαιο βαλμένα με χρονολογική σειρά, για να φαίνεται η «πορεία μέσα στο χρόνο» του κεφαλαίου.
- ✓ Οι λύσεις, **σε πλήρη έκταση, χωρίς παραλείψεις και ευκόλως εννοούμενα**, γραμμένες **με υποδειγματικό τρόπο** για να αποτελούν», εκτός των άλλων και ένα «πρότυπο» γραφής για τους μαθητές, βρίσκονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου και όχι αμέσως μετά το θέμα, δίνοντας έτσι τα περιθώρια στον μαθητή, να προσπαθήσει μόνος του να βρει την απάντηση, πριν καταφύγει στην έτοιμη απάντηση.
- ✓ Δυο έτοιμα διαγωνίσματα για κάθε κεφάλαιο, επιπέδου Πανελληνίων για «επί τόπου» έλεγχο γνώσεων

Θ
έ
μ
Πα
τ
α
Κ
α
τ
ε
ύ
θ
υ
ν
σ
η
ς

νελλήνιες 1975 - 2008

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί

Μην εμπιστεύεσαι το ένστικτό, που πιθανόν είναι
ανύπαρκτο, προσπάθησε να δημιουργήσεις κριτήρια.

Κεφάλαιο 1^ο

Μιγαδικοί

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις	ΜΕ 15 – 34
Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΜΘ 35 – 74
Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΜΑ 75 – 128

Συντομογραφίες

- * * ΜΕ = Μιγαδικοί σύντομη επανάληψη.
- * * ΜΘ = Μιγαδικοί εκφωνήσεις θεμάτων.
- * * ΜΑ = Μιγαδικοί απαντήσεις θεμάτων.

Ειδανιάληψη

✂

Η εμπειρία δεν πωλείται ... αποκτιέται ...
ακριβώς γιατί είναι απολύτως προσωπική

Το Σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών

Το **Σύνολο των Μιγαδικών αριθμών** συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ και περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς $a \in \mathbb{R}$, όλους τους Φανταστικούς αριθμούς $\beta i \in \mathbb{I}$, όλα τα αθροίσματα της μορφής $a + \beta i$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$. Δηλαδή το $\mathbb{C}$ περιέχει κάθε αριθμό που είναι ή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $a + \beta i$.

Αλγεβρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i$, η μορφή $a + \beta i$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **αλγεβρική** ή **κανονική** μορφή του z και **απλοποιεί** πάρα πολύ τις πράξεις μιγαδικών.

Αν χρησιμοποιήσεις την αλγεβρική μορφή για του μιγαδικούς, τότε ισχύει :

✓ Αν $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ τότε $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = \gamma$ και $\beta = \delta$.

Δηλαδή ισχύει : $a + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow a = \gamma$ και $\beta = \delta$.

✓ $z = a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $\beta = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ και $\text{Im}(z) = 0$.

Για να είναι μηδέν ένας μιγαδικός πρέπει να είναι μηδέν το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος.

✓ $z = a + \beta i \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ή $\beta \neq 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) \neq 0$ ή $\text{Im}(z) \neq 0$.

Για να μην είναι μηδέν ένας μιγαδικός αρκεί να μην είναι μηδέν ή το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος, (ένα από τα δυο).

✓ $z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow a \neq \gamma$ ή $\beta \neq \delta \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) \neq \text{Re}(z_2)$ ή $\text{Im}(z_1) \neq \text{Im}(z_2)$.

Για να είναι διαφορετικοί δυο μιγαδικοί αρκεί να είναι διαφορετικά τα πραγματικά ή τα φανταστικά τους μέρη (ένα από τα δυο).

Οι ανισότητες και οι ιδιότητες τους δεν έχουν νόημα μέσα στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Δεν μπορείς να βάλεις σε θέση μεγέθους δύο καθαρά μιγαδικούς αριθμούς (δηλαδή μιγαδικούς με $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$).

1. Για την πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$:

$$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

Για την πρόσθεση ισχύουν οι ιδιότητες

- I) **Αντιμεταθετική** : για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
 II) **Προσεταιριστική** : για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει :
 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
 III) **Ουδέτερο στοιχείο** το $0 = 0 + 0i$ που είναι τέτοιο ώστε $0 + z = z + 0 = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
 IV) **Αντίθετο στοιχείο** : για κάθε $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ υπάρχει ο $-z = -\alpha - \beta i \in \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει : $z + (-z) = (\alpha + \beta i) + (-\alpha - \beta i) = 0 + 0i = 0 \in \mathbb{C}$.

Προφανώς : $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \alpha + \gamma = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ και

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \beta + \delta = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) .$$

Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

2. Για την αφαίρεση του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $\alpha + \beta i$:

$$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

Δηλαδή αντί να αφαιρέσεις, προσθέτεις τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δυο μιγαδικών $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους.

3. Για τον πολλαπλασιασμό δύο μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ ισχύει :

$$(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$$

Για τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες

- I. Αντιμεταθετική :** για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
- II. Προσεταιριστική :** για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
- III. Ουδέτερο στοιχείο** το $1 = 1 + 0i$ που είναι τέτοιο ώστε $1 \cdot z = z \cdot 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- IV. Αντίστροφο στοιχείο :** για κάθε $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ υπάρχει ο $\frac{1}{z} \neq 0$ για τον οποίο ισχύει : $z \cdot \frac{1}{z} = 1$
- V. Επιμεριστική** ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση** : για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ισχύει $(z_1 \pm z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 \pm z_2 \cdot z_3$.

4. Για να εκφράσεις το **πηλίκο** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$, στην **αλγεβρική** μορφή $\kappa + \lambda i$, **πολλαπλασιάζεις** αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με τον συζυγή του z_2 ($\overline{z_2} = \gamma - \delta i \neq 0$) δηλαδή $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ και αν χρειάζεται αντικαθιστάς με τις **αλγεβρικές μορφές** κάνεις τις πράξεις :
- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών

$z^v = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{v \text{ παράγοντες}}$ με $v \in \mathbb{N}$ και $v > 1$.

Ορίζουμε : $z^1 = z$ και αν $z \neq 0 + 0i$ τότε $z^0 = 1$, $z^{-v} = \frac{1}{z^v}$.

Δυνάμεις του i.

- ✓ $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- ✓ $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$,

δηλαδή **μετά το i^3 οι τιμές του i^v επαναλαμβάνονται.**

$$i^v = i^{4\kappa+v} = i^{4\kappa} i^v = (i^4)^\kappa i^v = 1^\kappa i^v = i^v = \begin{cases} 1, & \text{αν } v=0 \\ i, & \text{αν } v=1 \\ -1, & \text{αν } v=2 \\ -i, & \text{αν } v=3 \end{cases}$$

Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών.

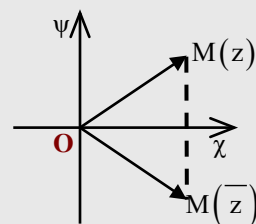
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}_+$
3. $z + \overline{z} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
4. $z - \overline{z} = 2\beta i = 2\operatorname{Im}(z) \cdot i \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2 \cdot i}$
5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
6. $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_v} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_v}, v \in \mathbb{N}^*.$
7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
8. $\overline{\alpha \cdot z} = \alpha \cdot \overline{z}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } z \in \mathbb{C}$
9. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_v} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \dots \cdot \overline{z_v}, v \in \mathbb{N}^*.$
10. $\overline{z^v} = (\overline{z})^v$
11. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\overline{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση :

Το **άθροισμα** και το **γινόμενο** συζυγών είναι **πραγματικός** ενώ η **διαφορά** συζυγών είναι **φανταστικός** αριθμός.

$z + \overline{z}$ και $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$, ενώ $z - \overline{z} \in i\mathbb{R}$.



Η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ έχει πάντα δυο λύσεις:

Αν $\Delta \geq 0$ τότε οι **λύσεις** είναι **πραγματικές** και

Αν $\Delta < 0$ τότε οι **λύσεις** είναι **συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί**:

$$z_1 = \frac{-\beta - i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \text{ και } z_2 = \frac{-\beta + i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}.$$

Μέτρο (απόλυτη τιμή) μιγαδικού αριθμού.

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$\checkmark \quad |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

$$\checkmark \quad |z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = \frac{1}{z} \\ z = \frac{1}{\bar{z}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 1 \\ \text{δηλαδή η εικόνα του } z \\ \text{ανήκει στον κύκλο } (O, 1) \end{cases}$$

Προσοχή Η ιδιότητα $|\chi|^2 = \chi^2$ δεν ισχύει για καθαρά μιγαδικούς αριθμούς.

Γενικά : Αν $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$, είναι $|z|^2 \neq z^2$.

$$\checkmark \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\checkmark \quad |z^v| = |z|^v$$

$$\checkmark \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{Αν } z_2 \neq 0.$$

$$\checkmark \quad |z^{-v}| = |z|^{-v} \quad z \neq 0, \quad \text{Εφαρμογή για } v = 1: \quad |z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|}.$$

$$\checkmark \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

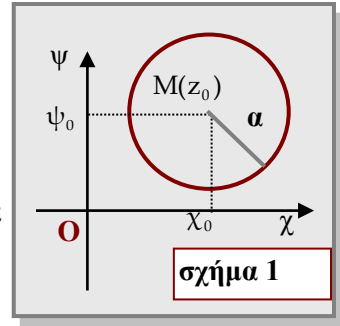
Εξισώσεις – Ανισώσεις

1. Εξισώσεις στις οποίες συνυπάρχουν : z , $|z|$, $\bar{z}$, κλπ.

Στις εξισώσεις αυτής της μορφής προσπαθείς κατ' αρχάς να χρησιμοποιήσεις τις ιδιότητες του μέτρου, των συζυγών κ λ π, για να τις φέρεις σε απλούστερη μορφή. Αν όμως όλα αυτά δεν «καρποφορήσουν» τότε υπάρχει πάντα ο «τυφλοσοφούρης» δηλαδή η αντικατάσταση του z με την αλγεβρική του μορφή $z = \chi + \psi i$.

2. Εξίσωση $|z - z_0| = a \in \mathbb{R}, a > 0$.

1^{ov} Αν $a \in \mathbb{R}, a > 0, z_0 = \chi_0 + \psi_0 i$, συγκεκριμένος μιγαδικός με $\chi_0, \psi_0 \in \mathbb{R}$, τότε η σχέση $|z - z_0| = a$ παριστάνει εξίσωση του κύκλου, στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο $K(z_0) = K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνα a και αντίστροφα, αν ο z ανήκει στον κύκλο, του



μιγαδικού επιπέδου, με κέντρο $K(z_0) = K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνα a τότε είναι

$$|z - z_0| = a.$$

δηλαδή :

Αν $z = \chi + \psi i$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$|z - z_0| = a \Leftrightarrow (\chi - \chi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = a^2.$$

* Το $|z - z_0|$ παριστάνει(συμβολίζει) την απόσταση του z από τον z_0 .

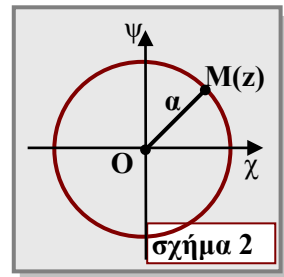
2^{ov} Αν $z_0 = 0$ τότε η $|z - z_0| = a$ παίρνει τη μορφή:

$$|z| = a, a > 0 \text{ και παριστάνει κύκλο με κέντρο}$$

την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με a ,

αντίστροφα κάθε κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και

ακτίνα a έχει εξίσωση $|z| = a$.



Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία : Αν $z = \chi + \psi i$ τότε $|z| = a \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = a^2$.

που σημαίνει ότι :

Όλοι οι μιγαδικοί με μέτρο a βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας a .

ειδικά

Αν $a = 1$ τότε η εξίσωση $|z| = a$ παίρνει τη μορφή $|z| = 1$ και παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$, ακτίνα 1 και αναλυτική εξίσωση : $\chi^2 + \psi^2 = 1$.

3. Ανίσωση $|z - z_0| > \alpha$ ή $|z - z_0| \geq \alpha$ ή $|z - z_0| < \alpha$ ή $|z - z_0| \leq \alpha$

με $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

Η Ανίσωση π.χ. $|z - z_0| \geq \alpha$ με $\alpha > 0$ **(1)** επιλύεται ως εξής :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση που προκύπτει από την (1) δηλαδή την

$|z - z_0| = \alpha$ (2). Η (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(z_0)$ και ακτίνα α .

Εδώ θα πρέπει να ξέρεις ότι

Το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών χωρίζεται από έναν κύκλο σε 3 «κομμάτια»

Τα **σημεία του κύκλου**, τα **εσωτερικά σημεία** και τα **εξωτερικά σημεία**.

Τα **εσωτερικά σημεία** ικανοποιούν την ανίσωση $|z - z_0| < \alpha$, τα **εξωτερικά**

σημεία ικανοποιούν την ανίσωση $|z - z_0| > \alpha$ και τα **σημεία του κύκλου**

ικανοποιούν την εξίσωση $|z - z_0| = \alpha$,

Αν υπάρχει και «=» στην ανίσωση τότε στις λύσεις θα περιλαμβάνονται και τα σημεία της γραμμής, δηλαδή αν η ανίσωση είναι $\leq$ τότε λύσεις είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα σημεία της γραμμής.

3. Ανίσωση : $\alpha \leq |z - z_0| \leq \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta > 0$.

Η Ανίσωση $\alpha \leq |z - z_0| \leq \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και

$\alpha, \beta > 0$ **(1)** επιλύεται ως εξής :

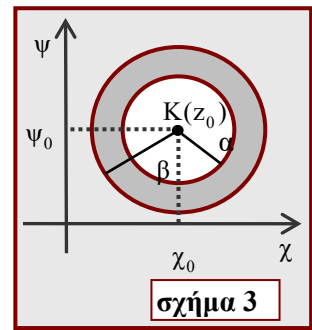
Θεωρείς τις αντίστοιχες εξισώσεις που προκύπτουν

από την (1) δηλαδή την $|z - z_0| = \alpha$ **(2)** και

$|z - z_0| = \beta$ **(3)**. Η (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K(z_0)$ και ακτίνα α και η (3) παριστάνει επίσης

κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα β .



Πρόκειται προφανώς για δυο ομόκεντρους κύκλους όπως στο σχήμα 3 και λύσεις είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του επιπέδου που ονομάζεται δακτύλιος.

4. Εξίσωση $P(|z - z_0|) = 0$ ή $P(|z|) = 0$.

Εξισώσεις των πιο πάνω μορφών αντιμετωπίζονται πρώτα αλγεβρικά και αφού οδηγηθούν στην μορφή $|z - z_0| = \alpha$ ή $|z| = \alpha$, $\alpha > 0$, επιλύονται όπως πιο πάνω.

5. Ανίσωση $P(|z - z_0|) > 0$ ή $P(|z - z_0|) \geq 0$ κλπ. .

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $P(|z - z_0|) = 0$, την αντιμετωπίζεις πρώτα αλγεβρικά και αφού καταλήξεις σε μια από τις μορφές $|z - z_0| > \alpha$ ή $|z - z_0| < \alpha$ κ.λ.π. με $\alpha > 0$ την επιλύεις όπως προηγούμενα.

6. Εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Η σχέση $|z - z_1| = |z - z_2|$, όπου z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί παριστάνει την εξίσωση της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(z_1), B(z_2)$.

7. Ανίσωση $|z - z_1| > |z - z_2|$ ή $|z - z_1| < |z - z_2|$ κλπ.

Για να επιλύσεις ανισώσεις των πιο πάνω μορφών θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση: $|z - z_1| = |z - z_2|$ η οποία παριστάνει την εξίσωση της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(z_1), B(z_2)$.

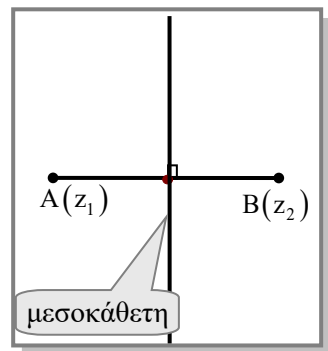
Η μεσοκάθετη χωρίζει το επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα, στο ένα από αυτά είναι το A και στο άλλο το B.

Στην συνέχεια αντικαθιστάς στην ανίσωση το z

με ένα από τα z_1, z_2 πχ με το z_1 . Αν το z_1 επαληθεύει την ανίσωση, λύσεις

είναι τα σημεία του επιπέδου από την ίδια μεριά με το $A(z_1)$ αλλιώς λύσεις

είναι τα σημεία που βρίσκονται στο άλλο ημιεπίπεδο.



Αιτιολογία

8. Εξίσωση $|z - z_1| = \kappa |z - z_2|$, με $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$

Η σχέση $|z - z_1| = \kappa |z - z_2|$ όπου z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, παριστάνει **εξίσωση κύκλου (Απολλώνιος κύκλος)** και αντιμετωπίζεται (πιο εύκολα) με αντικατάσταση του z με την μορφή $\chi + \psi i$ και πράξεις.

9. Ανίσωση $|z - z_1| < \kappa |z - z_2|$, $|z - z_1| > \kappa |z - z_2|$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\kappa > 0$ (κλπ)

Για να επιλύσεις ανισώσεις των πιο πάνω μορφών κάνεις τα εξής :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $|z - z_1| = \kappa |z - z_2|$ οπότε ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω διαπιστώνεις ότι ή εξίσωση παριστάνει κύκλο τον οποίο βέβαια μέσω της διαδικασίας θα έχεις βρει.

Τέλος, οι λύσεις της ανίσωσης, θα είναι τα εσωτερικά ή τα εξωτερικά σημεία του κύκλου

10. Εξίσωση $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $2a > |z_1 - z_2|$ (1).

Αν M είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2

τότε, όπως είναι γνωστό, είναι : $ME_1 = |z - z_1|$ και $ME_2 = |z - z_2|$.

Έτσι η (1) γίνεται $ME_1 + ME_2 = 2a$ (2)

Από την (2) συμπεραίνεις ότι ζητάς να βρεις το σύνολο των σημείων M του επιπέδου, των οποίων το **άθροισμα των αποστάσεων** από τα σταθερά σημεία E_1, E_2 του επιπέδου, είναι σταθερό και ίσο με $2a$.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι το ζητούμενο σύνολο σημείων είναι **έλλειψη** με εστίες τα σημεία $E_1(z_1), E_2(z_2)$ και **μεγάλο ημιάξονα a** με την προϋπόθεση ότι $2a > E_1E_2 = |z_1 - z_2|$.

11. Ανίσωση με μορφή :
$$\begin{cases} |z - z_1| + |z - z_2| > 2a \text{ ή} \\ |z - z_1| + |z - z_2| < 2a \text{ κλπ} \end{cases}, a \in \mathbb{R}, a > 0,$$

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ και } 2a > |z_1 - z_2| \quad (1)$$

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \quad (2).$

Αν M είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, όπως είναι γνωστό η (2) παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία $E_1(z_1), E_2(z_2)$ και μεγάλο ημιάξονα a .

Αν στην (1) θέσεις $z = z_1$ ή $z = z_2$ (ή αν θέσεις $z = (0, 0)$ θα επισημάνεις τα σημεία που ικανοποιούν την ανίσωση.

12. Εξίσωση
$$\left| |z - z_1| - |z - z_2| \right| = 2a, a \in \mathbb{R}, a > 0, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ και}$$

$$2a < |z_1 - z_2| \quad (1).$$

Αν M είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, όπως είναι γνωστό : $ME_1 = |z - z_1|$ και $ME_2 = |z - z_2|$.

Έτσι η (1) γίνεται $|ME_1 - ME_2| = 2a \quad (2)$. Από την (2) συμπεραίνεις ότι ζητάς να βρεις το σύνολο των σημείων $M(z)$ του επιπέδου, των οποίων **το απόλυτο της διαφοράς των αποστάσεων** από τα σταθερά σημεία E_1, E_2 του επιπέδου, είναι σταθερό και ίσο με $2a$.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι το ζητούμενο σύνολο σημείων είναι **υπερβολή** με εστίες τα σημεία $E_1(z_1), E_2(z_2)$ και μεγάλο ημιάξονα a .

13. Ανίσωση με μορφή :
$$\begin{cases} ||z - z_1| - |z - z_2|| > 2a, \\ ||z - z_1| - |z - z_2|| < 2a \end{cases}, a \in \mathbb{R}, a > 0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

και $2a < |z_1 - z_2|$ (1)

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $|ME_1 - ME_2| = 2a$ (2).

Αν M είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, ως γνωστό η (2) παριστάνει **υπερβολή** με εστίες τα σημεία $E_1(z_1), E_2(z_2)$ και **μεγάλο ημιάξονα** a .

Αν στην (1) θέσεις $z = z_1$ ή $z = z_2$ θα επισημάνεις τα σημεία που ικανοποιούν την ανίσωση.

14. Γεωμετρικοί τόποι που προκύπτουν από συνθήκη.

Στις περιπτώσεις που ζητάει να βρεις ένα γεωμετρικό τόπο και σου δίνει μια παράσταση η οποία ικανοποιεί μια συνθήκη, αντικαθιστάς τον μιγαδικό που περιέχεται, με την αλγεβρική του μορφή $\chi + \psi i$.

Κάνεις πράξεις, για να φέρεις την αρχική παράσταση στην μορφή $\kappa + \lambda i$ και απαιτείς να ισχύει η συνθήκη, αυτό θα σου δώσει μια εξίσωση που θα είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου. Όλη η ιστορία είναι θέμα πράξεων και μόνο.

Δες μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα :

Παράδειγμα :

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν είναι γνωστό ότι : ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι :

α. φανταστικός **β.** πραγματικός.

$$\begin{aligned} \text{Αν } z = \chi + \psi i, \text{ τότε : } \frac{z-1}{z-2i} &= \frac{\chi + \psi i - 1}{\chi + \psi i - 2i} = \frac{(\chi-1) + \psi i}{\chi + (\psi-2)i} \\ &= \frac{(\chi^2 - \chi + \psi^2 - 2\psi) + i(2\chi + \psi - 2)}{\chi^2 + (\psi-2)^2} = \frac{\chi^2 - \chi + \psi^2 - 2\psi}{\chi^2 + (\psi-2)^2} + \frac{2\chi + \psi - 2}{\chi^2 + (\psi-2)^2} i. \end{aligned}$$

Επομένως :

α) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν

$$\frac{\chi^2 - \chi + \psi^2 - 2\psi}{\chi^2 + (\psi - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - \chi + \psi^2 - 2\psi = 0 \\ \chi^2 + (\psi - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - \chi - 2\psi = 0 \\ \chi^2 \neq 0 \text{ και } \psi \neq 2 \end{cases}.$$

Η $\chi^2 + \psi^2 - \chi - 2\psi = 0$ είναι της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$,

με $A = -1$, $B = -2$ και $\Gamma = 0$ και είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 + 4 - 0 = 5 > 0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow$

$\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$ με εξαίρεση το σημείο $A(0, 2)$ που ανήκει στον κύκλο και οι συντεταγμένες του μηδενίζουν τον παρονομαστή.

β) Ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\frac{2\chi + \psi - 2}{\chi^2 + (\psi - 2)^2} = 0$

δηλαδή, αν και μόνο αν $\begin{cases} 2\chi + \psi - 2 = 0 \\ \chi^2 + (\psi - 2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi + \psi - 2 = 0 \\ \chi^2 \neq 0 \text{ και } \psi \neq 2 \end{cases}.$

Άρα οι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $2\chi + \psi - 2 = 0$, με εξαίρεση το σημείο $A(0, 2)$.

2. Αν $z = \chi + \psi i$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z όταν :

$$(z - \bar{z})^2 + 8(z + \bar{z}) = 16.$$

Απάντηση :

Αν $z = \chi + \psi i$ τότε $(z - \bar{z})^2 + 8(z + \bar{z}) = 16 \Leftrightarrow (2\psi i)^2 + 8(2\chi) = 16 \Leftrightarrow$

$-4\psi^2 + 16\chi = 16 \Leftrightarrow \psi^2 = 4(\chi - 1)$. Αν θέσεις **$X = \chi - 1$** οπότε **$\chi = X + 1$** ,

Αιτιαθεί

η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\psi^2 = 4X$ άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή με $p = 2$, και υπάρχει μια μετατόπιση προς τα δεξιά λόγω του $\chi = X + 1$ άρα κορυφή το $A(X=0, \psi=0) = A(1, 0)$, και εστία το σημείο

$$E\left(X = \frac{p}{2}, 0\right) = E(\chi - 1 = 1, 0) = E(2, 0).$$

3. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς z έτσι ώστε να επαληθεύουν τις σχέσεις : $|z-3| = |z+3|$ (1) και $|z-4| > \sqrt{13}$ (2)

Απάντηση :

Η (1) παριστάνει την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $A(z_1), B(z_2)$ όπου $z_1 = -3, z_2 = 3$. Δηλαδή τον άξονα $\psi'\psi$.

Η (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{13}$.

Άρα λύσεις τα σημεία του άξονα $\psi'\psi$ που ταυτόχρονα είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{13}$.

Επειδή $4 > 4 > \sqrt{13}$ άρα ο κύκλος δεν τέμνει ούτε εφάπτεται του άξονα $\psi'\psi$ άρα τελικά λύσεις είναι όλα τα σημεία του άξονα $\psi'\psi$.

Παρατήρηση :

Η άσκηση θα μπορούσε να δοθεί και ως εξής :

Να δείξετε ότι αν $|z-3| = |z+3|$ και $|z-2| > \sqrt{13}$ τότε είναι $z \in \mathbb{I}$.

Επισήμανση 1 :

Για να αποδείξεις ή για να βρεις τότε ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + \beta i \neq 0$ είναι πραγματικός, μπορείς να εργαστείς με έναν από τους εξής τρόπους :

α. Να δείξεις ότι ο z είναι ίσος με τον συζυγή του ακολουθώντας την

$$\text{«διαδρομή» } z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \beta = \text{Im}(z) = 0$$

(δηλαδή να δείξεις ότι η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα $\chi'\chi$).

- β. **Να δείξεις ότι το φανταστικό του μέρος είναι ίσο με το μηδέν**, δηλαδή **να δείξεις ότι $\beta = \text{Im}(z) = 0$** , αφού πρώτα γράψεις τον z στην κανονική του μορφή $\alpha + \beta i$, (αν δεν είναι.)

- γ. **Να δείξεις ότι : $z^2 = |z|^2$** , ακολουθώντας την «διαδρομή»

$$z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z^2 = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \alpha - \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = \text{Im}(z) = 0, \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

- δ) **Να δείξεις ότι ο z είναι άθροισμα ή γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.**

Επισήμανση 2:

Για να **αποδείξεις ή για να βρεις** ότι ένας μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i \neq 0$ **είναι φανταστικός**, μπορείς να εργαστείς με έναν από τους εξής τρόπους :

- α. **Να δείξεις ότι ο z είναι ίσος με τον αντίθετο του συζυγή του**

$$\text{ακολουθώντας την «διαδρομή» } z = -\bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \text{Re}(z) = 0$$

δηλαδή η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα ψψ'.

- β. **Να δείξεις ότι το πραγματικό του μέρος είναι ίσο με το μηδέν**, δηλαδή **να δείξεις ότι $\alpha = \text{Re}(z) = 0$** , αφού πρώτα γράψεις τον z στην κανονική του μορφή $\alpha + \beta i$, (αν δεν είναι).

- γ. **Να δείξεις ότι : $z^2 = -|z|^2$** , ακολουθώντας την «διαδρομή»

$$z^2 = -|z|^2 \Leftrightarrow z^2 = -z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow z(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \text{Re}(z) = 0, \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}.$$

- δ) **Να δείξεις ότι ο z είναι διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.**

Σε *όλες* τις παραπάνω περιπτώσεις, αν η άσκηση **μιλάει** για τον $z = \alpha + \beta i \neq 0$, **στο τέλος** θα πρέπει να αντικαταστήσεις τις λύσεις που βρήκες στον μιγαδικό και να **απορρίψεις εκείνες που μηδενίζουν** (πιθανόν) **ταυτόχρονα το $\text{Re}(z)$ και το $\text{Im}(z)$** , δηλαδή οδηγούν στο μιγαδικό της μορφής $0 + 0i$.

Παραδείγματα :

1.

Πανελλήνιες 1991

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Αν $\omega = \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$, τότε να αποδειχθεί ότι :

- i)** ο ω είναι φανταστικός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός,
ii) ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

i) Ο ω είναι **φανταστικός** αν και μόνον αν $\omega = -\overline{\omega} \Leftrightarrow \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} = -\overline{\left(\frac{z + \alpha i}{iz + \alpha}\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} = -\frac{\overline{z + \alpha i}}{\overline{iz + \alpha}} \Leftrightarrow \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} = -\frac{\overline{z} + \alpha i}{i \cdot \overline{z} + \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} = \frac{-\overline{z} + \alpha i}{-i \cdot \overline{z} + \alpha} \Leftrightarrow (z + \alpha i)(-i \cdot \overline{z} + \alpha) = (iz + \alpha)(-\overline{z} + \alpha i)$$

$$\Leftrightarrow -i \cdot \overline{z} \cdot z + \alpha z - \alpha i^2 \overline{z} + \alpha^2 i = -i \cdot \overline{z} \cdot z - \alpha \overline{z} + i^2 z \alpha + \alpha^2 i$$

$$\Leftrightarrow \alpha z + \alpha \overline{z} = -\alpha \overline{z} - z \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \cdot \overline{z} = -2\alpha z \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\overline{z} = -z}.$$

Που σημαίνει ότι ο z είναι **φανταστικός**.

ii) Είναι $|\omega| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z + \alpha i|}{|iz + \alpha|} = 1 \Leftrightarrow |z + \alpha i| = |iz + \alpha| \Leftrightarrow$

$$(z + \alpha i)(\overline{z + \alpha i}) = (iz + \alpha)(\overline{iz + \alpha}) \Leftrightarrow (z + \alpha i)(\overline{z} + \alpha i) = (iz + \alpha)(\overline{iz} + \overline{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$(z + \alpha i)(\overline{z} - \alpha i) = (iz + \alpha)(-i \overline{z} + \alpha) \Leftrightarrow$$

$$z \overline{z} - \alpha zi + \alpha i \overline{z} - \alpha^2 i^2 = -i^2 z \overline{z} + iz \alpha - \alpha i \overline{z} + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$z \overline{z} - \alpha \cdot z \cdot i + \alpha \cdot i \cdot \overline{z} + \alpha^2 = z \overline{z} + i \cdot z \cdot \alpha - \alpha \cdot i \cdot \overline{z} + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$-\alpha \cdot z \cdot i + \alpha \cdot i \cdot \overline{z} = i \cdot z \cdot \alpha - \alpha \cdot i \cdot \overline{z} \Leftrightarrow 2\alpha i \overline{z} = 2\alpha iz \Leftrightarrow \boxed{\overline{z} = z}.$$

Που σημαίνει ότι ο z είναι **Πραγματικός**.

Με παρόμοιο τρόπο λύνονται και πολλά ακόμα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων, με πιο πρόσφατο παράδειγμα το 2^ο θέμα του 2005

2.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1984**ΘΕΜΑ 4^ο**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \chi + \psi i$ με $\psi \neq 0$ (χ, ψ πραγματικοί αριθμοί).

Θέτουμε: $\omega = \frac{\overline{z}^2}{z-1}$ όπου $\overline{z}$ ο συζυγής του z .

Να δείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνον αν το σημείο (χ, ψ) ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$, ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

$$\begin{aligned} \text{Αν } \omega &= \frac{\overline{z}^2}{z-1} \Leftrightarrow \omega = \frac{(\chi - \psi i)^2}{\chi + \psi i - 1} = \frac{\chi^2 - 2\chi\psi i + (\psi i)^2}{(\chi - 1) + \psi i} = \\ &= \frac{\chi^2 - \psi^2 - 2\chi\psi i}{(\chi - 1) + \psi i} = \frac{(\chi^2 - \psi^2 - 2\chi\psi i)((\chi - 1) - \psi i)}{((\chi - 1) + \psi i)((\chi - 1) - \psi i)} = \\ &= \frac{(\chi^2 - \psi^2)(\chi - 1) - (\chi^2 - \psi^2)\psi i - 2\chi\psi i(\chi - 1) + 2\chi\psi^2 i^2}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} \Leftrightarrow \\ \omega &= \frac{[(\chi^2 - \psi^2)(\chi - 1) - 2\chi\psi^2]}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} - \frac{[(\chi^2 - \psi^2)\psi + 2\chi\psi(\chi - 1)]}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} i. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \omega \text{ πραγματικός} \Leftrightarrow (\chi^2 - \psi^2)\psi + 2\chi\psi(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi[(\chi^2 - \psi^2) + 2\chi(\chi - 1)] = 0 \\ \psi \neq 0 \text{ από την υπόθεση} \end{array} \right) \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 + 2\chi^2 - 2\chi = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 2\chi - \psi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\chi^2 - \frac{2}{3}\chi\right) - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\chi^2 - 2\frac{1}{3}\chi + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\left[\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2 - 3\psi^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{\psi^2}{\frac{1}{3}} = 1. \quad (1)$$

Η (1) παριστάνει **υπερβολή** !! Πράγματι τότε (το 1984) εκτός από την

Αιβαδειά

«κλασική περίπτωση των κωνικών τομών, διδάσκονταν και οι κωνικές τομές με μετατοπισμένες εστίες, τώρα έμεινε μόνο ο κύκλος με κέντρο διαφορετικό από το O . Επειδή $\psi \neq 0$ είναι **υπερβολή χωρίς τις κορυφές**.

3. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς z έτσι ώστε : $|z-3| = |z+3|$ (1)

Η (1) παριστάνει την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $A(z_1), B(z_2)$ όπου $z_1 = -3, z_2 = 3$ δηλαδή τον άξονα $\psi\psi$.



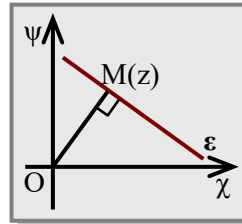
Προβλήματα με τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή.

Αν $M(z)$ και $N(z_1)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και z_1 στο μιγαδικό επίπεδο τότε :

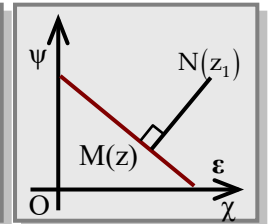
- ✓ Το $|z|$ εκφράζει την απόσταση του O από το M .
- ✓ Το $|z-z_1|$ εκφράζει την απόσταση του N από το M .

1. Αν ο z «κινείται» σε ευθεία ε τότε :

- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :
η απόσταση $OM = d(O, \varepsilon)$.



- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z-z_1|$



(η ελάχιστη απόσταση των z και z_1), είναι η απόσταση $NM = d(N, \varepsilon)$.

Εφαρμογή : Να βρεθεί το «ελάχιστο μέτρο» του z (ελάχιστη τιμή του $|z|$) καθώς και η ελάχιστη απόστασή του από τον $z_1 = 2-5i$, αν ο z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $\varepsilon : \psi = -\chi + 3$.

Απάντηση : Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση $d(O, \varepsilon)$, έτσι : Η $\psi = -\chi + 3 \Leftrightarrow \chi + \psi - 3 = 0$.

Άρα θα είναι $d(O, \varepsilon) = \frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(O, \varepsilon) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα η ελάχιστη

τιμή για το $|z|$ είναι $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ελάχιστη απόστασή του z από τον $z_1 = 2 - 5i$

είναι η απόσταση $d(N, \varepsilon) = \frac{|2-5-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d(N, \varepsilon) = 3\sqrt{2}$ άρα η ελάχιστη τιμή για το $|z - z_1|$ είναι $3\sqrt{2}$.

2. Αν ο z «κινείται» σε κύκλο κέντρου $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνας ρ τότε :

✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :

η απόσταση $OA = |OK - \rho|$.

✓ Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι :

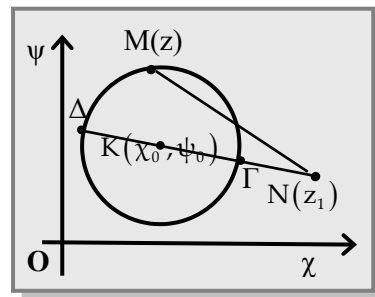
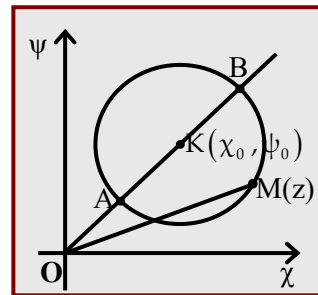
η απόσταση $OB = |OK + \rho| = OK + \rho$.

✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z - z_1|$ είναι :

η απόσταση $NG = |NK - \rho|$.

✓ Η μέγιστη τιμή του $|z - z_1|$ είναι :

η απόσταση $ND = |NK + \rho| = NK + \rho$.



Εφαρμογή :

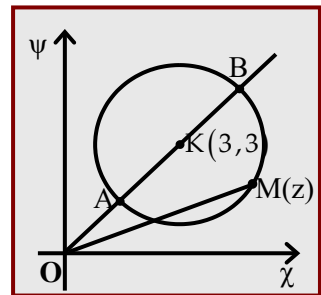
Αν ο z «κινείται» στον κύκλο $(\chi - 3)^2 + (\psi - 3)^2 = 2$ να βρεις την ελάχιστη τιμή του $|z|$ καθώς και τη μέγιστη απόσταση του z από τον μιγαδικό $z_1 = 2 + i$.

Αυτός ο κύκλος έχει κέντρο $K(3, 3)$ και ακτίνα

$$\rho = \sqrt{2} \cdot (OK) = \sqrt{\chi_0^2 + \psi_0^2} = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$\Leftrightarrow (OK) = 3\sqrt{2} \text{ άρα : Η ελάχιστη τιμή του } |z|$$

$$\text{είναι } (OA) = |(OK) - \rho| = |3\sqrt{2} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}.$$

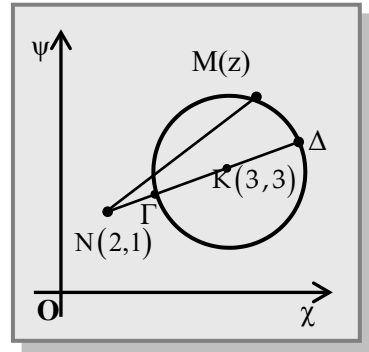


Αιβαδειά

$$\begin{aligned} (NK) &= \sqrt{(\chi_K - \chi_N)^2 + (\psi_K - \psi_N)^2} \\ &= \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \text{ άρα :} \end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του $|z - z_1|$ είναι

$$(NB) = |NK + \varrho| = |\sqrt{5} + \sqrt{2}| \Leftrightarrow (NB) = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$$



3.

Αν ο z «κινείται» σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ τότε :

Δεν έχει νόημα να ψάχνεις το μέγιστο, ελάχιστο για το $|z|$

✓ Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών

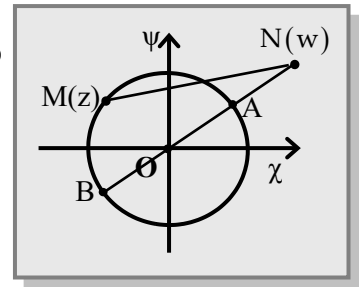
z, w είναι η $NA = |ON - \rho| = ||w| - \rho|$ που

είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

✓ Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών

z, w είναι η $NB = |ON + \rho| = |w| + \rho$ που

είναι και η μέγιστη τιμή του $|z - w|$.



4.

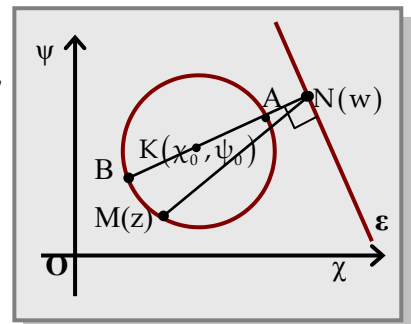
Αν ο z «κινείται» σε κύκλο κέντρου $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνας ρ και ο w σε ευθεία ε τότε :

✓ Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών

z, w , που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$, είναι η $NA = |KN - \rho|$, όπου KN η κάθετος στην ε από το K .

✓ Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών

z, w , που είναι και η μέγιστη τιμή του $|z - w|$, είναι η $NB = |KN + \rho|$.



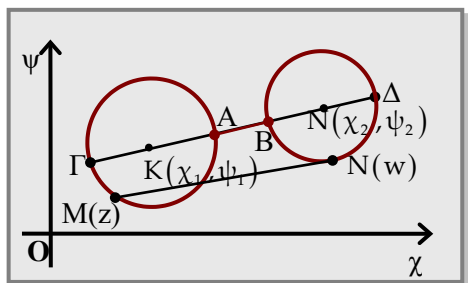
5.

Αν ο z «κινείται» σε κύκλο κέντρου $K(\chi_1, \psi_1)$ και ακτίνας R και ο w σε κύκλο κέντρου $N(\chi_2, \psi_2)$ και ακτίνας ρ με $KN > \rho + R$ τότε :

✓ Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z, w , που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$, είναι η $AB = |KN - (\rho + R)|$.

✓ Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z, w , που είναι και η

μέγιστη τιμή του $|z - w|$, είναι η $\Gamma\Delta = |KN + (\rho + R)|$.

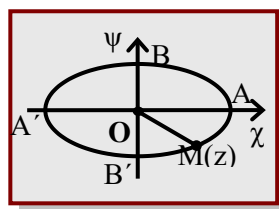


6.

Αν ο z «κινείται» σε έλλειψη $C: \frac{\chi^2}{a^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1, \beta^2 = a^2 - \gamma^2$ τότε :

✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :
η απόσταση $(OB) = (OB') = \beta$.

✓ Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι :
η απόσταση $(OA) = (OA') = a$.



✓ Η ελάχιστη απόσταση δυο μιγαδικών z_1 και z_2 , που ανήκουν στην έλλειψη είναι η $(BB') = 2\beta$.

✓ Η μέγιστη απόσταση δυο μιγαδικών z_1 και z_2 , που ανήκουν στην έλλειψη είναι η $(AA') = 2a$.

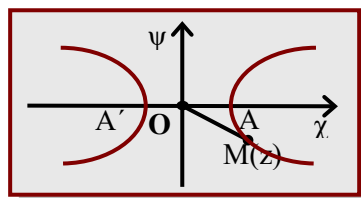
7.

Αν ο z «κινείται» σε υπερβολή $C: \frac{\chi^2}{a^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1, \beta^2 = \gamma^2 - a^2$ τότε :

✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :
η απόσταση $(OA) = (OA') = a$.

✓ Η ελάχιστη απόσταση δυο μιγαδικών

z_1 και z_2 που ανήκουν στην υπερβολή είναι η απόσταση $(AA') = 2a$.



Εκφωνήσεις Θεμάτων

1.

ωαυελλήυες 1977

ΘΕΜΑ 3^ο

Για τον όχι αρνητικό αριθμό α να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την ισότητα:

$$|z|^2 - 2iz + 2\alpha(1+i) = 0.$$

(Σημείωση: Το i είναι η φανταστική μονάδα).

2.

ωαυελλήυες 1979

ΘΕΜΑ 3^ο

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β ! Λυκείου (αυτές που ακυρώθηκαν λόγω της διαρροής των θεμάτων) γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

1. Δείξτε ότι κάθε καθαρός μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν τετράγωνο μιγαδικού αριθμού.

2. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τότε σύμφωνα με την ερώτηση 1 υπάρχει ένα $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο

$$\text{ώστε } \alpha \cdot \beta = z^2. \text{ Αποδείξτε την ισότητα } |\alpha| + |\beta| = \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + z \right| + \left| \frac{\alpha + \beta}{2} - z \right|.$$

Το 2 ερώτημα είναι η άσκηση 9 της Α ομάδας κεφ 2.3 τρέχοντος σχολικού.

3.

ωαυελλήυες 1979

ΘΕΜΑ 3^ο

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β ! Λυκείου αυτές που έγιναν στη θέση αυτών που ακυρώθηκαν.

A. Αν $z \neq -1 + 0i$ και $z \neq 1 + 0i$, δείξτε ότι:

α) Όταν $|z| = 1$ τότε ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός.

β) Όταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός τότε $|z| = 1$.

B. Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $z = -\sin\theta + i\eta\mu\theta$.

Το A ερώτημα είναι η άσκηση 2 Β ομάδας κεφ 2.3 σχολικό.

4.

ωανελλήνικες 1982

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β Λυκείου γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να διατυπωθεί το θεώρημα De Moivre.

B. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(1 + iz)^v = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$ με v φυσικό αριθμό και

$z \in \mathbb{C}$ δεν έχει πραγματική λύση.

Το θέμα είναι εκτός ύλης ΟΛΟΚΛΗΡΟ και δεν θα απαντηθεί .

5.

ωανελλήνικες 1983

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β Λυκείου γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, όπου z_1, z_2 συμβολίζουν μιγαδικούς αριθμούς. Σε ποια περίπτωση ισχύει το ίσον ;

B. Έστω ω με $\omega^3 = 1$, $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 1$. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $K = (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5)$.

6.

ωανελλήνικες 1984**ΘΕΜΑ 4^ο**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \chi + \psi i$ με $\psi \neq 0$ (χ, ψ πραγματικοί αριθμοί).

Θέτουμε: $\omega = \frac{\overline{z}^2}{z - 1}$ όπου $\overline{z}$ ο συζυγής του z .

Να δείξετε ότι ω είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνον αν το σημείο (χ, ψ) ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$, ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της.

7.

παανελλήνιες 1986

ΘΕΜΑ 2^ο

A. i) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού.

ii) Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 .

Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

B. Έστω ότι $z = (2\chi - 3) + (2\psi - 1)i$ με $\chi, \psi \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (χ, ψ) για τα οποία $|2z - 1 + 3i| = 3$, είναι κύκλος του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα.

8.

παανελλήνιες 1989

ΘΕΜΑ 2^ο

i) Να αποδειχθεί ότι κάθε n -οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής

$$\zeta_\kappa = \cos \frac{2\kappa\pi}{n} + i \sin \frac{2\kappa\pi}{n}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

ii) Να λυθεί, στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση:

$$z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0.$$

9.

παανελλήνιες 1991

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Αν $\omega = \frac{z + ai}{iz + a}$, με $a \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq ai$, τότε να αποδειχθεί ότι :

i) ο ω είναι φανταστικός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός,

ii) ισχύει $|\omega| = 1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

10.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1993**ΘΕΜΑ 2^ο**

A. Δίνεται η συνάρτηση: $f(z) = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{z+\overline{z}}$ με $z \in \mathbb{C}$ και $\operatorname{Re}(z) \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z)$.

β. Να βρείτε το είδος της καμπύλης στην οποία ανήκουν τα σημεία

$M(\chi, \psi)$ για τα οποία οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha\chi + \beta\psi$ με

$\alpha, \beta, \chi, \psi \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \chi \neq 0$ ικανοποιούν τη σχέση: $\operatorname{Re}[f(z)] = 0$.

11.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1994**ΘΕΜΑ 2^ο**

i) Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των

εξισώσεων: $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$ και $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$.

(ii) Θεωρούμε τους μιγαδικούς z, w και w_1 τέτοιους ώστε:

$$w = z - iz \quad \text{και} \quad w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Να δείξετε ότι, αν το α μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $w = \overline{w_1}$ τότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται σε μια υπερβολή.

12.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1995**ΘΕΜΑ 1^ο**

B. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

ισχύει: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ αν και μόνον αν $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0$.

13.

ωανελλήνικες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. α. Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης

$$\alpha_n \chi^n + \alpha_{n-1} \chi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0 = 0 \text{ με } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ πραγματικούς}$$

αριθμούς και $\alpha_n \neq 0$, να αποδείξετε ότι και ο συζυγής του $\overline{z_0}$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β. Αν η πολωνυμική εξίσωση $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό $2 - 3i$ να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^2 + \beta\chi + \gamma$ στο σημείο $A(1, f(1))$ όταν το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z_0 με $\text{Im } z_0 < 999$ και το σύνολο A των μιγαδικών αριθμών z με $z \neq z_0$ και $z \neq \overline{z_0}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \overline{z_0}|} = \frac{1998}{|z - z_0| |z - \overline{z_0}|}.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους οι εικόνες δυο μιγαδικών αριθμών του συνόλου A .

Ποιοι είναι αυτοί οι μιγαδικοί αριθμοί ; Να εξετάσετε την περίπτωση $z_0 = \overline{z_0}$.

14.

ωαυελλήνυες 1999**ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \chi + \psi i$, $\chi, \psi \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι, στο μιγαδικό επίπεδο, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\chi, \psi)$ που είναι τέτοια ώστε: $|z-1|^2 + |z-3-2i|^2 = 6$, είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Το 1999 ήταν η **τελευταία χρονιά** που η Γ ! Λυκείου εξετάστηκε με το σύστημα των **Δεσμών**.

Οι μιγαδικοί ήταν στην ύλη της 1^{ης} Δέσμης $\equiv$ **Θετική Κατεύθυνση**.

Από το **2000** και μετά τα Θέματα είναι πραγματικά κλιμακούμενης δυσκολίας και το νέο χαρακτηριστικό είναι ότι :

Το 1^ο θέμα είναι πάντοτε ερωτήσεις «Σωστού – Λάθους», αντιστοίχισης, πολλαπλής επιλογής.

Το 2^ο θέμα είναι άσκηση – εφαρμογή της θεωρίας.

Το 3^ο θέμα είναι άσκηση η οποία επιμερίζεται σε υποερωτήματα, τα οποία πρέπει να είναι στην πραγματικότητα ο βηματισμός για το τελευταίο ερώτημα.

Το 4^ο θέμα είναι **Πρόβλημα** με περισσότερα από ένα ερωτήματα και είναι το μόνο που επιτρέπεται να περιέχει ερωτήσεις από διαφορετικές ενότητες (συνδυαστικό θέμα).

15.

ωανελλήνικες 2000 Τεχνολογικής

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$.

(α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

(β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Το ερώτημα είναι εκτός ύλης

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. **Το ερώτημα είναι εκτός ύλης**

γ) Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα :

A. $\frac{\pi}{4} - \theta$

B. $\frac{\pi}{2} + \theta$

Γ. $\theta - \frac{\pi}{2}$

Δ. $\pi + \theta$

Μονάδες 3

δ) Το z^4 είναι ίσο με:

A. 4

B. $4i$

Γ. $-4i$

Δ. -4

Μονάδες 3

B. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών

z , για τους οποίους ισχύει: $\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$.

Μονάδες 10

16.

Εσωτερικά 2000 Τεχνολογικής

Παρασκευή 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Στη στήλη I του επόμενου πίνακα δίνονται ορισμένα σύμβολα και παραστάσεις που έχουν σχέση με το μιγαδικό αριθμό z .

Κάθε ένα από αυτά είναι ίσο με μία μόνο από τις εκφράσεις που δίνονται στη στήλη II.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $\operatorname{Re}(z)$	1. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
B. $ z $	2. β
Γ. $\overline{z}$	3. βi
Δ. $z \cdot \overline{z}$	4. $\alpha - \beta i$
E. $z + \overline{z}$	5. $\alpha^2 + \beta^2$
ΣΤ. $z - \overline{z}$	6. α
Z. $\operatorname{Im}(z)$	7. 2α
	8. $2\beta i$
	9. $-\alpha + \beta i$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 14

B. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 3 - 4i$. Να βρείτε:

(α) το πραγματικό μέρος $\operatorname{Re}(z)$ και το φανταστικό μέρος $\operatorname{Im}(z)$ του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 3

(β) το συζυγή $\overline{z}$ του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 4

(γ) το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού z .

Μονάδες 4

17.

Εβδομημιά 2000 Θετικής

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8i$ και $z_2 = 4 - 5i$.

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_1}{z_2}$.

Μονάδες 8

γ. Αν $z = z_1 - \overline{z_2}$ να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4 .

Το ερώτημα είναι εκτός ύλης

Μονάδες 9

18.

Παυελλήμνες 2000

Δευτέρα 12 Ιουνίου

Το θέμα των μιγαδικών του έτους 2000 αφορούσε την τριγωνομετρική μορφή σε συνδυασμό με πίνακες και επομένως ήταν **τελείως εκτός ύλης**. Αναφέρεται όμως για ιστορικούς λόγους.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z+i}{z-2i}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 2i$ όπου $\overline{z}$ ο συζυγής του z .

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1 = f(9-5i), \quad w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

Μονάδες 12

β) Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του

μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος (α). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

A. Στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

B. Συμμετρία ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.

Γ. Συμμετρία ως προς τον άξονα $\psi'\psi$.

Δ. Συμμετρία ως προς την ευθεία $\psi = \chi$.

E. Ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Μονάδες 5

γ) Αν M ο πίνακας του ερωτήματος (**β**), τότε να βρεθεί ο πίνακας X ώστε να ισχύει: $MX = K$, όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων

O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$

Μονάδες 8

19.

ωανελλήνικες 2000 - Εωαναληρωτικές Τεχν/κής

Παρασκευή 15 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 .

Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Μονάδες 5

A.2. Αν $z_1 = \rho_1 (\eta\mu\theta_1 + i\sigma\upsilon\nu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2 (\eta\mu\theta_2 + i\sigma\upsilon\nu\theta_2)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

Λιβαδειά

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{z_1}{z_2}$	1. $\rho_1 \cdot \rho_2 (\eta\mu(\theta_1 + \theta_2) + i\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2))$
β. $z_1 \cdot z_2$	2. $\rho_1^v (\sigma\upsilon\nu(v\theta_1) + i\eta\mu(v\theta_1))$
γ. z_1^v	3. $\frac{\rho_1}{\rho_2} (\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2))$
	4. $\frac{\rho_1}{\rho_2} (\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2))$
	5. $\rho_1 \cdot \rho_2 (\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2))$
	6. $\rho_1^v (\eta\mu(v\theta_1) - i\sigma\upsilon\nu(v\theta_1))$

Μονάδες 7,5

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} + i\eta\mu \frac{2\pi}{3} \right)$ και

$z_2 = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{3} + i\eta\mu \frac{5\pi}{3}$. Τότε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με :

A. 2 B. 2i Γ. -2 Δ. -2i E. 2(1 - i)

Μονάδες 4,5

B.2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Να υπολογίσετε το z^{16} .

Μονάδες 8

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

20.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΤΙΚΗΣ

Παρασκευή 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι

$$z_1^{20} - z_2^{20} = 0.$$

Μονάδες 12

Δαμιανός Μωραΐτης

- β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του α. ερωτήματος με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου n για τις οποίες το z_1^n είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

21.

Εσπερινά 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. (α) Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:
- $$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

[Το ερώτημα αυτό είναι ίδιο ακριβώς με αντίστοιχο ερώτημα στα Εσπερινά 2001 και είναι εκτός ύλης].

Μονάδες 6,5

- B. (β) Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης I του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης II που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $\operatorname{Re}(z)$	1. $-\alpha - \beta i$
B. $\operatorname{Im}(z)$	2. $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	3. $\alpha + \beta$
Δ. $\overline{z}$	4. α
E. $ z $	5. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot \overline{z}$	6. $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Μονάδες 6

Γ. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Μονάδες 4,5

22.

παυελλήνες 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 .

Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\overline{z}|$

δ. $|z| = |\overline{z}|$

ε. $|i \cdot \overline{z}| = |z|$

Μονάδες 5



Δαμιανός Μωραΐτης

- B.1.** Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα..

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1 ^2$	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $-\left \overline{z}\right $	δ. -5
5. $ i \cdot z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

- B.2.** Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

23.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 - ΕΣΑΝΑΛΗΩΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

- α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z + 16| = 4|z + 1|$
- β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 1| = |z - i|$
- γ) Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Μονάδες 7

24.

Εσωτερικά 2001 - Εωαναληρωτικές

Παρασκευή 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ I°

- A. α)** Να αποδείξετε ότι, αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 6,5

- β)** Αν $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $z + \overline{z}$	1. $\alpha - \beta$
B. $z - \overline{z}$	2. 2α
Γ. $z \cdot \overline{z}$	3. $2\beta i$
Δ. $ \overline{z} $	4. $\alpha + \beta$
	5. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
	6. $\alpha^2 + \beta^2$

Μονάδες 6

- B. α)** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \kappa + 15i$ και $z_2 = 5 + \lambda i$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ ώστε να ισχύει

$$z_1 = 5 \cdot \overline{z_2}.$$

Μονάδες 6

- β)** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , ώστε να ισχύει: $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 5 + 2i$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2}{1+i}$.

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z = \chi + \psi i$, όπου $\chi, \psi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό z .

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Μονάδες 9

25.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α) Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β) Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι:

$$f(13) = \rho \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right).$$

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Μονάδες 8

γ) Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με

κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z και $f(13)$.

[Το ερώτημα αυτό είναι πλέον εκτός ύλης].

Λ ι β α δ ε ι ά

Μονάδες 8

26.

Εσωτερικά 2002

Τετάρτη 5 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, ισχύει: $|z| = \alpha^2 + \beta^2$.

Μονάδες 2

8. Για τον μιγαδικό αριθμό i ισχύει $i^4 = 1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1 + i$ και $z_2 = 3 - 4i$.

α. Να υπολογίσετε τον μιγαδικό $z_1 + 5z_2$.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε τον μιγαδικό $\frac{z_2}{z_1}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού

$$z_1 \text{ είναι } \operatorname{Arg}(z_1) = \frac{3\pi}{4}$$

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8

Μονάδες 7

27.

ωανελλήνικες 2002 - Εωαναληωτικές**Δευτέρα 8 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

[Το ερώτημα αυτό είναι ίδιο ακριβώς με αντίστοιχο ερώτημα στα Εσπερινά 2001 και είναι εκτός ύλης].

Μονάδες 15

28.

ωανελλήνικες 2002 - Ομογενείς**Τρίτη 17 Σεπτεμβρίου**

B. α. Αν $z = \chi + \psi i \neq 0$, $|z| = \rho$, και θ ένα όρισμα του z , να αποδείξετε ότι ο z παίρνει τη μορφή: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Μονάδες 8,5

β. Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_1 = z_2$ τότε:

1. $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 + \theta_2 = 0$.
2. $\rho_1 + \rho_2 = 0$ και $\theta_1 = \theta_2 + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
3. $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
4. $\rho_1 - \rho_2 = 0$ και $\theta_1 + \theta_2 = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$.

α. Αν $\frac{z_2}{z_1} = \chi + \psi i$, $\chi, \psi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\chi = -1$ και $\psi = 2$.

Λιβαδειά

Μονάδες 8

β. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $\chi^2 + \beta\chi + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να

βρείτε τις τιμές των β και γ .

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών για τους οποίους ισχύει: $|z - 2z_1| = |z_2|$.

Μονάδες 9

29.

παυελλήνες 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει :

$$|z| = |\bar{z}| = |-z|.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Να αποδείξετε ότι $\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4 \\ \operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha \end{cases}$.

Μονάδες 6

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi - 2$.

Μονάδες 9

- γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

30.

Εβδομαδιά 2003**Τετάρτη 25 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί

αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$.

Μονάδες 3

2. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί

αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\overline{z} = -\chi + \psi i$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί αριθμοί και

$$w = \frac{i(i+z)}{i-z} \text{ με } z \neq i. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α. $w = \frac{2\chi}{\chi^2 + (\psi-1)^2} + \frac{1-\chi^2-\psi^2}{\chi^2 + (\psi-1)^2} i.$

Μονάδες 8

- β.** αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$.

Μονάδες 8

- γ.** αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

Λ ι β α δ ε ι ά

Μονάδες 9

31.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΕΠΑΝΑΛΗΘΤΙΚΕΣ

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\text{Im}(z) \geq 0$.

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο

σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται

σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $\chi'\chi$.

Μονάδες 13

32.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΟΡΘΟΓΕΝΕΙΣ

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**) αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

3. $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$.

4. $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$.

όπου $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = \left| f(\overline{z}) \right|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 9

γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

33.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 4^ο

γ) Με δεδομένη τη σχέση $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$ να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

Μονάδες 6

34.

Εσωτερικά 2004

Παρασκευή 4 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma + \delta i \neq 0$, να

αποδείξετε ότι:
$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

Μονάδες 9

B. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης II** (δυο αριθμοί στη **Στήλης II** περισεύουν).

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. i^1	1. $-i$
B. i^2	2. $+1$
Γ. i^3	3. i
Δ. i^4	4. -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παραπάνω πίνακα, και δίπλα ακριβώς σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

(α) Αν $\text{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

(β) Αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

- (γ) Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Μονάδες 7

- (δ) Οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

35.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 5 Ιουλίου

Τον Ιούλιο του 2004 στις επαναληπτικές υπάρχει το 3^ο θέμα που συνδυάζει μιγαδικούς και συναρτήσεις και θα αντιμετωπισθεί εκεί.

36.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2004 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Μονάδες 10

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις B, Γ να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- B. Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 3

- Γ. Για κάθε μιγαδικό $z_1 = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\overline{\overline{z}} = -\alpha + \beta i$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\chi = 3 - \kappa$ και $\psi = 2\kappa + 1$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Αν $3\operatorname{Re}(z) + 4\operatorname{Im}(z) = 3$ τότε $\kappa = -2$.

Μονάδες 9

β. Αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

Μονάδες 10

γ. οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

37.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - Ομογενείς

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z = \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε

την τιμή της παράστασης: $K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$.

Μονάδες 5

38.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $z_1 = \frac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

39.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και

$$w = \kappa + 4i, \kappa > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0$ και $|w| = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $z + \mu \cdot \overline{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

40.

Πανελλήνιες 2005 - Εωσυναληρωτικές

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 4i \\ 2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i \end{cases}, \text{ να βρείτε τους } z_1, z_2.$$

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν: $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και

$$|w - 3 - i| \leq \sqrt{2} :$$

i. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

Μονάδες 10

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 5

41.

Εσπερινά 2005 - Εωσυναληρωτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{\chi + 3i}{2 - i}, \chi \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το χ , ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

Μονάδες 10

β. Αν $\chi = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

γ. Αν $\chi = 4$, να βρείτε το z .

Μονάδες 9

42.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{\kappa z_1 - iz_2}{z_2 - \kappa z_1}$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $\text{Im}(w) = -1$.

Μονάδες 9

43.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

Λ ι β α δ ε ι ά

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -1$.

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 , στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

44.

εβδομαδιά 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$.

Μονάδες 7

- B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή Λ, αν αυτή είναι Λανθασμένη.

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες

$M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και

$\overline{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 4\chi + 13 = 0$ (1).

- α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

- β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της

παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13} |\overline{z_2}| + i^{2006}$.

Μονάδες 9

- γ. Αν $z_1 = 2 + 3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - z_1| = 5$.

Μονάδες 7

Δαμιανός Μωραΐτης

45.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$
Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^2 + \chi + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $\chi = 2$.
Μονάδες 7

46.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $(5z-1)^5 = (z-5)^5$.

α) Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z|=1$.

Μονάδες 10

γ) Αν $w = 5z + 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

47.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί να αποδειχθεί ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2+ai}{\alpha+2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \frac{2+ai}{\alpha+2i}$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2v} = (-z_2)^v$ για κάθε φυσικό αριθμό v .

Μονάδες 8

Δαμινός Μωραΐτης

Εσωτερικά 2007**48.****Τετάρτη 30 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Β. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι Λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = z \cdot \overline{z}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

Μονάδες 9

β. Αν ισχύει $z + \overline{z} = 2$ να βρείτε το $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Μονάδες 7

γ. Αν $|z| = 2$ και $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ να βρείτε το λ .

Μονάδες 9

49.**παυελλήνες 2007 - Εωσνααληωτικές****Τρίτη 3 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 4^ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \overline{z_1}}{2 + \overline{z_1}}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με

$\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο

Μονάδες 6

Λιβαδειά

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και

$$\text{να δειχθεί ότι } (z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = 0$$

Μονάδες 10

50.

Εσωτερικά 2007 - Επαναληπτικές

Τετάρτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ) , αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ) , αν αυτή είναι Λανθασμένη.

1. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνών τους.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| = |iz|$

α. i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z .

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία M απέχουν από την αρχή $O(0, 0)$

απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν $\operatorname{Re}(z) = 0$, τότε να δείξετε ότι $z = -i$.

Μονάδες 7

51.

ωανελλήνικες 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει:

$$|z|^n = |z^n|$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

- α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

Μονάδες 5

- β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Μονάδες 10

- ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{z} + \frac{\overline{z}}{z}$.

Μονάδες 10

52.

ωανελλήνικες 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $az^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\Delta \neq 0$

$a \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6 \quad \text{και} \quad \left| w - (1 - i) \right| = \left| w - (3 - 3i) \right| \quad \text{τότε να βρείτε:}$$

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 6

53.

Εβδομήντα 2008

Τετάρτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Αν $z_1 = a + bi$ και $z_2 = \gamma + di$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 7

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι Λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1 + z_2| > |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

A. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι

$\lambda = -6$, $\mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 14

B. Να αποδείξετε ότι :

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

Μονάδες 6

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

Μονάδες 5

54.

ωανελλήμνες 2008 - Εωαναληωτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0, \text{ όπου } \beta \text{ και } \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για

τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$

Μονάδες 8

Λιβαδερά

Των διδαχών σου το αποτέλεσμα



Αυταπάτες

ωανελλήνικες 1977

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν θέσεις $z = \chi + \psi i$ με $\chi, \psi \in \mathbb{R}$ η εξίσωση γίνεται :

$$\begin{aligned} |\chi + \psi i|^2 - 2i(\chi + \psi i) + 2\alpha(1+i) &= 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - 2\chi \cdot i - 2\psi \cdot i^2 + 2\alpha + 2\alpha i = 0 \\ \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - 2\chi i + 2\psi + 2\alpha + 2\alpha i &= 0 \Leftrightarrow (\chi^2 + \psi^2 + 2\psi + 2\alpha) - 2(\chi - \alpha)i = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 + 2\psi + 2\alpha = 0 \\ \chi - \alpha = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \psi^2 + 2\psi + 2\alpha = 0 \\ \chi = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 + 2\psi + \alpha^2 + 2\alpha = 0 \\ \chi = \alpha \end{cases} (\Sigma) \end{aligned}$$

και επειδή από την υπόθεση είναι $\chi, \psi \in \mathbb{R}$, άρα η 1^η εξίσωση :

$$\begin{aligned} \psi^2 + 2\psi + \alpha^2 + 2\alpha &= 0 \text{ πρέπει να έχει λύση στο } \mathbb{R} \text{ επομένως θα έχει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \\ 2^2 - 4 \cdot 1(\alpha^2 + 2\alpha) &\geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot 1(\alpha^2 + 2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow -4(\alpha^2 + 2\alpha - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 \leq 0 \quad (1).$$

Η (1) είναι ανίσωση 2^{ου} βαθμού και θα λυθεί σύμφωνα με τα γνωστά :

$$\text{Διακρίνουσα } \Delta_1 = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8.$$

$$\text{Άρα ρίζες } \alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 - \sqrt{2} \\ \alpha_2 = -1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ άρα πίνακας προσήμου για το}$$

$\alpha^2 + 2\alpha - 1$ είναι :

$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
+	↓	↓	+
	0	0	

Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\alpha^2 + 2\alpha - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$-1 - \sqrt{2} \leq \alpha \leq -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \text{και επειδή } \alpha \geq 0 \text{ άρα } 0 \leq \alpha \leq -1 + \sqrt{2}.$$

Για τις τιμές αυτές του α το αρχικό σύστημα (Σ) έχει λύσεις $\chi = \alpha$ και ψ_1, ψ_2 .

Όπου ψ_1, ψ_2 λύσεις της $\psi^2 + 2\psi + \alpha^2 + 2\alpha = 0$

Άρα λύσεις της εξίσωσης οι μιγαδικοί : $z_1 = \alpha + \psi_1 i$ και $z_2 = \alpha + \psi_2 i$

1.

παυελλήμνες 1979

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β ! Λυκείου (αυτές που ακυρώθηκαν λόγω της διαρροής των θεμάτων) γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

ΘΕΜΑ 3^ο

1) Αν ο $z = \alpha + \beta i$ είναι καθαρά μιγαδικός, αυτό σημαίνει ότι $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Έστω $w = \chi + \psi i$. Αν η εξίσωση $z = w^2$ (1) έχει πάντοτε λύση τότε ο z θα μπορεί να γραφτεί ως τετράγωνο ενός μιγαδικού. Πράγματι αν

$$z = w^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = (\chi + \psi i)^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \chi^2 - \psi^2 + 2\chi\psi i \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - \psi^2 = \alpha \neq 0 & (2) \\ 2\chi\psi = \beta \neq 0 & (3) \end{cases}.$$

Από (3) έπεται ότι $\chi \neq 0$ και $\psi \neq 0$ (αφού $\alpha, \beta \neq 0$) άρα $\psi = \frac{\beta}{2\chi}$ οπότε (2) $\Leftrightarrow$

$$\chi^2 - \left(\frac{\beta}{2\chi}\right)^2 = \alpha \Leftrightarrow \chi^2 - \frac{\beta^2}{4\chi^2} = \alpha \Leftrightarrow 4\chi^4 - \beta^2 = 4\alpha\chi^2 \Leftrightarrow 4\chi^4 - 4\alpha\chi^2 - \beta^2 = 0, \text{ η}$$

τελευταία εξίσωση έχει Διακρίνουσα : $\Delta = 16\alpha^2 + 16\beta^2 > 0$ αφού $\alpha, \beta \neq 0$, άρα

έχει πάντοτε λύσεις άρα και η $\psi = \frac{\beta}{2\chi}$ έχει πάντοτε λύσεις άρα και η $z = w^2$

έχει πάντοτε λύσεις, οπότε ο z θα μπορεί να γραφτεί ως τετράγωνο ενός μιγαδικού.

2) Έστω $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 \cdot i$ και $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 \cdot i$ τότε :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \cdot i \\ \text{και} \\ z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) \cdot i \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} |z_1 + z_2|^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 \\ \text{και} \\ |z_1 - z_2|^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 \end{cases} \quad \text{άρα}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_2^2) + (\beta_1^2 + 2\beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_2^2) + (\alpha_1^2 - 2\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - 2\beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_2^2) \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_2^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2((\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)) \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Λιβαδερά

3) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τότε θα υπάρχουν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε

$\alpha = z_1^2 \Leftrightarrow |\alpha| = |z_1|^2, \beta = z_2^2 \Leftrightarrow |\beta| = |z_2|^2$ και σύμφωνα με την εκφώνηση θα υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $\alpha\beta = z^2$.

Τότε $z^2 = \alpha\beta = z_1^2 \cdot z_2^2 = (z_1 \cdot z_2)^2 \Leftrightarrow z = z_1 \cdot z_2$ άρα

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + z \right| + \left| \frac{\alpha + \beta}{2} - z \right| &= \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} + z_1 \cdot z_2 \right| + \left| \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} - z_1 \cdot z_2 \right| = \\ &= \left| \frac{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 \cdot z_2}{2} \right| + \left| \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 \cdot z_2}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| (z_1 + z_2)^2 \right| + \frac{1}{2} \left| (z_1 - z_2)^2 \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| (z_1 + z_2)^2 \right| + \left| (z_1 - z_2)^2 \right| \right) = \frac{1}{2} 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} + z \right| + \left| \frac{\alpha + \beta}{2} - z \right| = |\alpha| + |\beta|.$$

2.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1979

ΘΕΜΑ 3^ο

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β ! Λυκείου αυτές που έγιναν στη θέση αυτών που ακυρώθηκαν.

Α. Έστω $z \neq -1 + 0i$ και $z \neq 1 + 0i$ τότε :

α) Όταν $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1, z, \bar{z} \neq 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$ οπότε ο αριθμός :

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{\frac{1}{\bar{z}} - 1}{\frac{1}{\bar{z}} + 1} = \frac{\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}}}{\frac{1 + \bar{z}}{\bar{z}}} = \frac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}} = \frac{\overline{1 - z}}{\overline{1 + z}} = \frac{\overline{1 - z}}{1 + z} = -\frac{\overline{z - 1}}{z + 1} = -\frac{\overline{z - 1}}{z + 1} \quad \text{είναι}$$

καθαρός φανταστικός γιατί ισούται με τον αντίθετο του συζυγούς του.

β) Όταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός τότε :

$$\frac{z-1}{z+1} = -\frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+1) = -(z+1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} - 1 = -(z \cdot \bar{z} - z + \bar{z} - 1) \Leftrightarrow$$

$$z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} - 1 = -z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2z \cdot \bar{z} - 2 = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

B. $z = -\sin\theta + i\eta\mu\theta \Leftrightarrow z = 1(-\sin\theta + i\eta\mu\theta) = 1(\sin(\pi - \theta) + i\eta\mu(\pi - \theta))$
 οπότε προφανώς το μέτρο είναι $\rho = 1$ και το όρισμα του μιγαδικού
 $z = -\sin\theta + i\eta\mu\theta$ είναι $\pi - \theta$ (εκτός ύλης).

3.

παανελλήνιες 1982

Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β Λυκείου γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Θεωρία.

β) Το θέμα είναι εκτός ύλης ΟΛΟΚΛΗΡΟ και δεν θα απαντηθεί.

4.

παανελλήνιες 1983

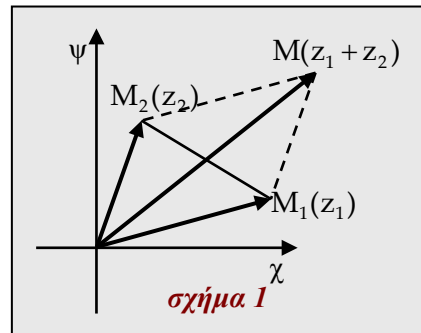
Το Θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Β Λυκείου γιατί εκεί είχαν «μεταφερθεί» οι μιγαδικοί.

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \chi_1 + \psi_1 \cdot i$ και $z_2 = \chi_2 + \psi_2 \cdot i$ με εικόνες τα σημεία $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ και συντεταγμένες (χ_1, ψ_1) , (χ_2, ψ_2) .

- Αν τα σημεία** $O, M_1(z_1), M_2(z_2)$, **δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία** (σχήμα 1), τότε το άθροισμα $z_1 + z_2 = \chi_1 + \chi_2 + (\psi_1 + \psi_2) \cdot i$, γεωμετρικά παριστάνεται από το σημείο M του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο έχει

συντεταγμένες $(\chi_1 + \chi_2, \psi_1 + \psi_2)$ και



είναι η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου OM_1MM_2 .

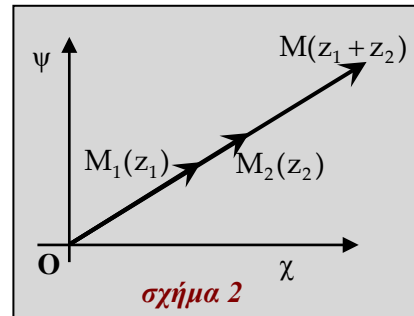
Είναι φανερό και από τον τρόπο που υπολογίζεται το άθροισμα, αλλά και από το σχήμα 1, λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο

$$OM_2M \text{ ότι θα ισχύει: } (OM) < (OM_2) + (M_2M) \Leftrightarrow |\overline{OM}| < |\overline{OM_2}| + |\overline{M_2M}|$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

- **Αν τα σημεία** $O, M_1(z_1), M_2(z_2)$

βρίσκονται στην ίδια ευθεία και αν επί πλέον τα M_1 και M_2 , βρίσκονται από το ίδιο μέρος του O (σχήμα 2), τότε η εικόνα M του αθροίσματος $z_1 + z_2$ θα βρίσκεται επίσης πάνω στην ευθεία



αυτή και αν είναι $OM_1 = M_2M \Leftrightarrow |z| = |\overline{OM}_1| = |\overline{M_2M}|$ τότε

$$(OM) = (OM_2) + (M_2M) \Leftrightarrow |\overline{OM}| = |\overline{OM}_2| + |\overline{M_2M}| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση : $(OM) \leq (OM_2) + (M_2M) \Leftrightarrow$

$$|\overline{OM}| \leq |\overline{OM}_2| + |\overline{M_2M}| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

B. Αν $\omega^3 = 1$, τότε $\omega^3 = 1 \Leftrightarrow \omega^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega \in \mathbb{C}$,

$\omega \neq 1$ άρα $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\Delta = \dots -3$ άρα $\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Η παράσταση : $K = (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5) =$

$$(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^3 \cdot \omega)(1 - \omega^3 \cdot \omega^2) \text{ και } \omega^3 = 1 \text{ άρα}$$

$$K = (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2) = [(1 - \omega)(1 - \omega^2)]^2 = (1 - \omega^2 - \omega + \omega^3)^2 =$$

$$(2 - \omega^2 - \omega)^2 = (\omega^2 + \omega - 2)^2 = [(\omega + 2)(\omega - 1)]^2.$$

$$\checkmark \quad \omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega + 2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \\ \omega - 1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$[(\omega + 2)(\omega - 1)]^2 = \left[\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \right]^2 = \left[\frac{(i\sqrt{3})^2 - 3^2}{4} \right]^2 = 9$$

$$\checkmark \quad \omega = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} \omega + 2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \\ \omega - 1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{οπότε}$$

$$[(\omega+2)(\omega-1)]^2 = \left[\frac{3-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \right]^2 = \left[\frac{(-i\sqrt{3})^2 - 3^2}{4} \right]^2 = \left[\frac{-3-9}{4} \right]^2 = 9$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $K = (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$

5.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1984

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\text{Αν } \omega = \frac{\bar{z}}{z-1} \Leftrightarrow \omega = \frac{(\chi - \psi i)^2}{\chi + \psi i - 1} = \frac{\chi^2 - 2\chi\psi i + (\psi i)^2}{(\chi - 1) + \psi i} = \frac{\chi^2 - \psi^2 - 2\chi\psi i}{(\chi - 1) + \psi i} =$$

$$\frac{(\chi^2 - \psi^2 - 2\chi\psi i)((\chi - 1) - \psi i)}{((\chi - 1) + \psi i)((\chi - 1) - \psi i)} =$$

$$\frac{(\chi^2 - \psi^2)(\chi - 1) - (\chi^2 - \psi^2)\psi i - 2\chi\psi i(\chi - 1) + 2\chi\psi^2 i^2}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} \Leftrightarrow$$

$$\omega = \frac{[(\chi^2 - \psi^2)(\chi - 1) - 2\chi\psi^2]}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} - \frac{[(\chi^2 - \psi^2)\psi + 2\chi\psi(\chi - 1)]}{(\chi - 1)^2 + \psi^2} i.$$

$$\text{Άρα } \omega \text{ πραγματικός} \Leftrightarrow (\chi^2 - \psi^2)\psi + 2\chi\psi(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi[(\chi^2 - \psi^2) + 2\chi(\chi - 1)] = 0 \\ \psi \neq 0 \text{ από την υπόθεση} \end{array} \right) \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 + 2\chi^2 - 2\chi = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 2\chi - \psi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\chi^2 - \frac{2}{3}\chi\right) - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\chi^2 - 2\frac{1}{3}\chi + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\left[\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2 - 3\psi^2 = 1 \Leftrightarrow$$

Λιβαδεϊά

$$\frac{\left(\chi - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{\psi^2}{\frac{1}{3}} = 1 \quad (1)$$

Η (1) παριστάνει **υπερβολή** !! Πράγματι τότε (το 1984) εκτός από την «κλασική περίπτωση των κωνικών τομών, διδάσκονταν και οι κωνικές τομές με μετατοπισμένες εστίες, τώρα έμεινε μόνο ο κύκλος με κέντρο διαφορετικό από το Ο. Επειδή $\psi \neq 0$ είναι **υπερβολή χωρίς τις κορυφές**.

6. **ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1986**

ΘΕΜΑ 2^ο

Α) Θεωρία

Β) Είναι $|2z - 1 + 3i| = 3 \Leftrightarrow \left| 2 \underbrace{((2\chi - 3) + (2\psi - 1)i)}_z - 1 + 3i \right| = 3 \Leftrightarrow$

$$|2(2\chi - 3) + 2(2\psi - 1)i - 1 + 3i| = 3 \Leftrightarrow |4\chi - 6 + 4\psi i - 2i - 1 + 3i| = 3 \Leftrightarrow$$

$$|(4\chi - 7) + (4\psi + 1)i| = 3 \Leftrightarrow |(4\chi - 7) + (4\psi + 1)i|^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$(4\chi - 7)^2 + (4\psi + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 16\chi^2 - 56\chi + 49 + 16\psi^2 + 8\psi + 1 = 9 \Leftrightarrow$$

$$16\chi^2 + 16\psi^2 - 56\chi + 8\psi + 41 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - \frac{56}{16}\chi + \frac{8}{16}\psi + \frac{41}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 + \psi^2 - \frac{7}{2}\chi + \frac{1}{2}\psi + \frac{41}{16} = 0 \quad (1) \quad \text{Η (1) είναι της μορφής}$$

$$\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0 \quad \text{με } A = -\frac{7}{2}, B = \frac{1}{2} \quad \text{και } \Gamma = \frac{41}{16} \quad \text{και}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{41}{16} = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} - \frac{41}{4} = \frac{9}{4} > 0 \quad \text{άρα παριστάνει}$$

κύκλο με κέντρο :

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right) \quad \text{και ακτίνα } \rho = \frac{3}{4}$$

7.

παυελλήνους 1989

ΘΕΜΑ 2^οi) Θεωρία **Εκτός ύλης**

$$\text{ii)} \quad z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z^6 + 2z^5 + z^4) + z^4 + 2z^3 + z^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$z^4(z^2 + 2z + 1) + z^2(z^2 + 2z + 1) + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^4(z+1)^2 + z^2(z+1)^2 + (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2(z^4 + z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2(z^4 + 2z^2 + 1 - z^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2[(z^2+1)^2 - z^2] = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2(z^2+1+z)(z^2+1-z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z+1=0 \\ z^2+1+z=0 \\ z^2+1-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \quad \text{ή} \quad z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

8.

παυελλήνους 1991

B. i) Ο ω είναι φανταστικός αν και μόνον αν

$$\omega = -\overline{\omega} \Leftrightarrow \frac{z+ai}{iz+\alpha} = -\overline{\left(\frac{z+ai}{iz+\alpha}\right)} \Leftrightarrow \frac{z+ai}{iz+\alpha} = -\frac{\overline{z+ai}}{\overline{iz+\alpha}} \Leftrightarrow \frac{z+ai}{iz+\alpha} = -\frac{\overline{z}+ai}{i \cdot \overline{z}+\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+ai}{iz+\alpha} = \frac{-\overline{z}+ai}{-i \cdot \overline{z}+\alpha} \Leftrightarrow (z+ai)(-i \cdot \overline{z}+\alpha) = (iz+\alpha)(-\overline{z}+ai)$$

$$\Leftrightarrow -i \cdot \overline{z} \cdot z + \alpha z - ai^2 \overline{z} + \alpha^2 i = -i \cdot \overline{z} \cdot z - \alpha \overline{z} + i^2 z \alpha + \alpha^2 i$$

$$\Leftrightarrow \alpha z + \alpha \overline{z} = -\alpha \overline{z} - z \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \cdot \overline{z} = -2\alpha z \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Που σημαίνει ότι ο z είναι φανταστικός.

Λιβαδεϊά

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \text{Είναι } |\omega| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z + \alpha i}{iz + \alpha} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z + \alpha i|}{|iz + \alpha|} = 1 \Leftrightarrow |z + \alpha i| = |iz + \alpha| \Leftrightarrow \\
 (z + \alpha i)(\overline{z + \alpha i}) &= (iz + \alpha)(\overline{iz + \alpha}) \Leftrightarrow (z + \alpha i)(\overline{z} + \overline{\alpha i}) = (iz + \alpha)(\overline{iz} + \overline{\alpha}) \Leftrightarrow \\
 (z + \alpha i)(\overline{z} - \alpha i) &= (iz + \alpha)(-i\overline{z} + \alpha) \Leftrightarrow z\overline{z} - \alpha zi + \alpha i\overline{z} - \alpha i^2 = \\
 -i^2 z\overline{z} + iz\alpha - \alpha i\overline{z} + \alpha^2 &\Leftrightarrow z\overline{z} - \alpha zi + \alpha i\overline{z} + \alpha = z\overline{z} + iz\alpha - \alpha i\overline{z} + \alpha^2 \Leftrightarrow \\
 -\alpha zi + \alpha i\overline{z} &= iz\alpha - \alpha i\overline{z} \Leftrightarrow 2\alpha i\overline{z} = 2\alpha iz \Leftrightarrow \overline{z} = z.
 \end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι ο z είναι **Πραγματικός**.

9.

ωανελλήνικες 1993

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\begin{aligned}
 \text{A.} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{z} - 1\right)\left(\overline{-\frac{1}{z}} + 1\right)}{-\frac{1}{z} + \left(\overline{-\frac{1}{z}}\right)} = \frac{\frac{-1 - \overline{z}}{z} \cdot \left(-\frac{1}{z} + 1\right)}{-\frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{z}\right)} = \\
 \frac{\frac{-1 - \overline{z}}{z} \cdot \frac{-1 + z}{z}}{-\frac{1}{z} - \frac{1}{z}} &= \frac{\frac{(-1 - \overline{z})(-1 + z)}{z \cdot z}}{\frac{-z - \overline{z}}{z \cdot z}} = \frac{(-1 - \overline{z})(-1 + z)}{-z - \overline{z}} = \frac{(1 - z) + \overline{z}(1 - z)}{-z - \overline{z}} \\
 &= \frac{(1 - z)(1 + \overline{z})}{-(z + \overline{z})} = \frac{(z - 1)(\overline{z} + 1)}{z + \overline{z}} = f(z). \\
 \text{B.} \quad f(z) &= \frac{(\alpha\chi + \beta\psi i - 1)(\overline{\alpha\chi + \beta\psi i} + 1)}{\alpha\chi + \beta\psi i + \overline{\alpha\chi + \beta\psi i}} = \frac{(\alpha\chi + \beta\psi i - 1)(\alpha\chi - \beta\psi i + 1)}{\alpha\chi + \beta\psi i + \alpha\chi - \beta\psi i} = \\
 \frac{\alpha^2\chi^2 - \alpha\beta\chi\psi i + \alpha\chi + \alpha\chi\beta\psi i + \beta^2\psi^2 + \beta\psi i - \alpha\chi + \beta\psi i - 1}{2\alpha\chi} &= \\
 \frac{\alpha^2\chi^2 + \beta^2\psi^2 - 1}{2\alpha\chi} + \frac{2\beta\psi i}{2\alpha\chi} &=
 \end{aligned}$$

Επομένως $\operatorname{Re}[f(z)] = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 \chi^2 + \beta^2 \psi^2 - 1}{2\alpha\chi} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \chi^2 + \beta^2 \psi^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\chi^2}{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} + \frac{\psi^2}{\left(\frac{1}{\beta^2}\right)} = 1.$$

Η τελευταία εξίσωση όπως θα θυμάσαι προφανώς . . .  . . .
παριστάνει, τι άλλο, έλλειψη.

10.

ωαυελλήμυες 1994

ΘΕΜΑ 2^ο

i) Η εξίσωση $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)^2 + z(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(z^2 + 1)(z^2 + 1 + z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 1 = 0 & (1) \\ z^2 + z + 1 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Η (1) έχει λύσεις τις $z = \pm i$ και $z^2 + z + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3$, άρα

$$\text{λύσεις } z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ και } z_4 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Οι ρίζες $z_{1,2} = \pm i$ ικανοποιούν την $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$ γιατί $z_1 = i$

$$i^{16} + 2 \cdot i^{14} + 1 = (i^2)^8 + 2 \cdot (i^2)^7 + 1 = (-1)^8 + 2 \cdot (-1)^7 + 1 = 1 - 2(-1) + 1 = 0, \text{ όμοια}$$

και η $z_2 = -i$, όμως οι z_3 και z_4 δεν ικανοποιούν την $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$ γιατί

αν $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ τότε η παράσταση $z^{16} + 2z^{14}$ θα είναι **άρρητη**

(θα περιέχει $\sqrt{3}$) και δεν μπορεί να ισούται με -1 για να ισχύει

$$z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0.$$

Λιβαδειά

Παρατήρηση : Μια πιο έγκυρη απόδειξη χρειάζεται την τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού (τύπος De Moivre) που τώρα είναι εκτός ύλης.

ii) Έστω οι μιγαδικοί z, w και w_1 , τέτοιοι ώστε : $w = z - iz$ και

$$w_1 = \frac{1}{\alpha} + \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Έστω $z = \chi + \psi i$ τότε $w = \chi + \psi i - i(\chi + \psi i) \Leftrightarrow w = \chi + \psi i - i\chi - \psi i^2 \Leftrightarrow$

$$w = (\chi + \psi) + (-\chi + \psi)i$$

$$\text{Αν } w = \overline{w_1} \Leftrightarrow (\chi + \psi) + (-\chi + \psi)i = \overline{\frac{1}{\alpha} + \alpha i} \Leftrightarrow (\chi + \psi) + (-\chi + \psi)i = \frac{1}{\alpha} - \alpha i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{1}{\alpha} \\ -\chi + \psi = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = \frac{1}{\alpha} & (1) \\ \chi - \psi = \alpha & (2) \end{cases} \quad (1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \chi + \psi = \frac{1}{\chi - \psi} \Leftrightarrow$$

$$(\chi + \psi)(\chi - \psi) = 1 \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 = 1.$$

Οπότε η εικόνα P του z στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται

(προφανώς)



...

σε μια **ισοσκελή υπερβολή**.

11.

ωαυελλήμυες 1995

ΘΕΜΑ I'

$$\text{B. } \alpha) \text{ Αν } |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_2)}$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$0 = -z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} = -z_2 \cdot \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} = -\overline{z_1} \cdot z_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = -\overline{z_1} \cdot z_2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} = -\overline{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0.$$

12.

πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. α. Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης : $\alpha_v \chi^v + \alpha_{v-1} \chi^{v-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0 = 0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_v$ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha_v \neq 0$, τότε

$$\alpha_v z_0^v + \alpha_{v-1} z_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_v z_0^v + \alpha_{v-1} z_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_v z_0^v} + \overline{\alpha_{v-1} z_0^{v-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 z_0} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_v \overline{z_0^v} + \alpha_{v-1} \overline{z_0^{v-1}} + \dots + \alpha_1 \overline{z_0} + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha_v \overline{z_0^v} + \alpha_{v-1} \overline{z_0^{v-1}} + \dots + \alpha_1 \overline{z_0} + \alpha_0 = 0$ το οποίο σημαίνει πως και ο συζυγής του z_0 , ο $\overline{z_0}$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

β. Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\chi^2 + \beta \chi + \gamma = 0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό $2 - 3i$ τότε

$$(2 - 3i)^2 + \beta(2 - 3i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow 4 - 12i - 9 + 2\beta - 3\beta i + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\beta + \gamma - 5) - 3(\beta + 4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta + \gamma - 5 = 0 \\ \beta + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 13 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

Παρ' όλο που το υπόλοιπο θέμα αφορά τις εφαρμογές των παραγώγων, για λόγους συνέχειας το απαντάμε και εδώ.

Αν **$\beta = -4$ και $\gamma = 13$** τότε η $f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 13$, οπότε

$$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 13 = 10 \text{ και } f'(\chi) = (\chi^2 - 4\chi + 13)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 2\chi - 4$$

οπότε $f'(1) = -2$ άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$\psi - f(1) = f'(1)(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 10 = -2(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = -2\chi + 12.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Η σχέση $\frac{1}{|z - z_0|} + \frac{1}{|z - \overline{z_0}|} = \frac{1998}{|z - z_0||z - \overline{z_0}|}$

με απαλοιφή παρονομαστών γίνεται :

$$|z - z_0| + |z - \overline{z_0}| = 1998, \text{ και αν}$$

$$M(z), E_1(z_0) \text{ και } E_2(\overline{z_0}) \text{ είναι}$$

οι εικόνες των μιγαδικών z, z_0 και

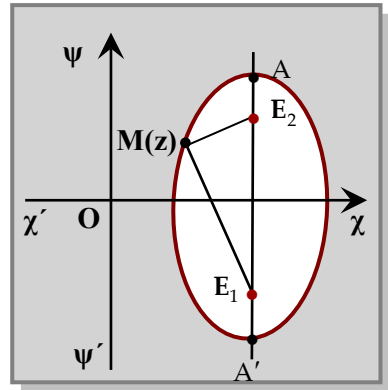
$$\overline{z_0} \text{ αντίστοιχα, τα } |z - z_0|, |z - \overline{z_0}|$$

εκφράζουν τις αποστάσεις του M από

τα E_1, E_2 , τότε η σχέση

$$|z - z_0| + |z - \overline{z_0}| = 1998 \text{ εκφράζει έλλειψη με εστίες } E_1, E_2 \text{ και}$$

$2a = 1998$, δεξ σχήμα. πιο πάνω.



Παρατήρηση : Αν $z_0 = \chi_0 + \psi_0 \cdot i$ οπότε $\overline{z_0} = \chi_0 - \psi_0 \cdot i$ τότε οι εστίες είναι $E_1(\chi_0, \psi_0), E_2(\chi_0, -\psi_0)$.

Προφανώς λοιπόν ο $\chi' \chi$ είναι μεσοκάθετος στην $E_1 E_2$ και η μεγαλύτερη απόσταση, για δυο σημεία της έλλειψης είναι όταν οι μιγαδικοί βρεθούν στα σημεία A' και A οπότε οι απόστασή τους είναι 1998 (ίση με $2a$ δηλ ο μεγάλος άξονας), οι μιγαδικοί είναι της μορφής : $z = \chi_0 + 999 \cdot i$ και

$$z' = \chi_0 - 999 \cdot i.$$

✓ Αν $z_0 = \overline{z_0}$ σημαίνει, καταρχήν πως οι εστίες συμπίπτουν και επειδή

$$z_0 = \overline{z_0} \Leftrightarrow \text{Im}(z_0) = 0 \Leftrightarrow \psi_0 = 0 \text{ και } z_0 = \chi_0 + 0i = \chi_0, \text{ οπότε η έλλειψη}$$

γίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο $K(\chi_0, 0)$ του $\chi' \chi$ και ακτίνα 999 γιατί

$$|z - z_0| + |z - \overline{z_0}| = 1998 \Leftrightarrow 2|z - z_0| = 1998 \Leftrightarrow |z - z_0| = 999 \Leftrightarrow$$

$$|z - \chi_0| = 999.$$

13.

ωανελλήνικες 1999

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \chi + \psi i$, $\chi, \psi \in \mathbb{R}$, τότε

$$|z-1|^2 + |z-3-2i|^2 = 6 \Leftrightarrow |\chi + \psi i - 1|^2 + |\chi + \psi i - 3 - 2i|^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$|(\chi-1) + \psi i|^2 + |(\chi-3) + (\psi-2)i|^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$((\chi-1)^2 + \psi^2) + ((\chi-3)^2 + (\psi-2)^2) = 6 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 + \chi^2 - 6\chi + 9 + \psi^2 - 4\psi + 4 = 6 \Leftrightarrow$$

$$2\chi^2 + 2\psi^2 - 8\chi - 4\psi + 8 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 2\psi + 4 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με

$A = -4, B = -2, \Gamma = 4$, οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-4)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 4 = 4 > 0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(2, 1)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow \rho = 1.$$

14.

ωανελλήνικες 2000 Τεχνολογικής

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. α) $z = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i-3i^2}{2^2+3^2} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$

β) Είναι $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ και $\sin\theta = \frac{\chi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα προφανώς η γωνία $\theta = -\frac{\pi}{4}$ άρα

$$1-i = \sqrt{2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\sin\frac{\pi}{4} - i \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} \right).$$

Λιβαδερά

γ) Β. δ) Α.

$$\text{Β.} \quad \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |z-(1+0i)| = |z-(0+i)|,$$

η τελευταία σχέση εκφράζει την **μεσοκάθετο των σημείων A(1, 0) και B(0, 1)**.

✓ Παρ' όλο που το σχολικό βιβλίο δεν προχωρά, σ' αυτές τις περιπτώσεις στον υπολογισμό της εξίσωσης της μεσοκάθετου και επομένως αν δεν το ζητάει, **ξεχωριστά** δεν χρειάζεται να την υπολογίσεις, θυμίζω την

$$\text{διαδικασία : Βρίσκεις το μέσον } \chi = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\psi = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \text{ άρα μέσον το } M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \text{ Βρίσκεις το}$$

συντελεστή διεύθυνσης, μέσα από την καθετότητα : Είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{1-0}{0-1} = -1, \text{ οπότε αν } \lambda \text{ ο συντελεστής της μεσοκάθετου}$$

$$\text{τότε } \lambda \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda(-1) = -1 \text{ άρα } \lambda = 1. \text{ οπότε η μεσοκάθετη έχει}$$

συντελεστή **$\lambda = 1$** και περνάει από το $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ άρα έχει εξίσωση :

$$\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0) \Leftrightarrow \psi - \frac{1}{2} = 1\left(\chi - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \psi - \frac{1}{2} = \chi - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\psi = \chi \text{ (η διχοτόμος του } 1^{\text{ου}} \text{ και του } 3^{\text{ου}} \text{ τεταρτημορίου)}$$

15.

Ερωτηνιά 2000 Τεχνολογικής

Παρασκευή 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

A. 6, B. 1, Γ. 4, Δ. 5, Ε. 7, ΣΤ. 8, Ζ. 2

B α) το πραγματικό μέρος $\text{Re}(z) = 3$ και το φανταστικό μέρος $\text{Im}(z) = -4$

β) Ο συζυγής $\overline{z} = 3 + 4i$, γ) το μέτρο $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Δαμιανός Μωραΐτης

16.

Εσωτερικά 2000 Θετικής**Δευτέρα 12 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8i$ και $z_2 = 4 - 5i$.

α. Είναι $z_1 \cdot z_2 = (7 + 8i)(4 - 5i) = 28 - 35i + 32i + 40 = 68 - 3i$.

β.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7 + 8i}{4 - 5i} = \frac{(7 + 8i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{28 + 35i + 32i + 40i^2}{4^2 + 5^2} = \frac{-12 + 67i}{41}$$

γ. $z = z_1 - \overline{z_2} \Leftrightarrow z = (7 + 8i) - (4 + 5i) = 3 + 3i = 3(1 + i)$, και αν θέσεις

$$w_1 = 1 + i \text{ θα είναι : } \rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ και } \sin\theta = \frac{\chi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ επομένως : } z = 3w = 3\sqrt{2} \left(\sin\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4} \right).$$

Από το θεώρημα De Moivre είναι

$$z = \rho(\sin\theta + i \cdot \eta\mu\theta) \Leftrightarrow z^v = \rho^v (\sin(v\theta) + i \cdot \eta\mu(v\theta)) \text{ άρα}$$

$$z = 3\sqrt{2} \left(\sin\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow z^4 = 3^4 (\sqrt{2})^4 \left(\sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \eta\mu\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right) \Leftrightarrow$$

$$z^4 = 81 \cdot 4 (\sin\pi + i \cdot \eta\mu\pi) \Leftrightarrow z^4 = -324.$$

17.

παανελλήνιες 2000**Δευτέρα 12 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Το θέμα των μιγαδικών του έτους 2000 αφορούσε την τριγωνομετρική μορφή σε συνδυασμό με πίνακες και επομένως ήταν τελείως εκτός ύλης. Αναφέρεται όμως για ιστορικούς λόγους και επομένως δεν θα απαντηθεί.

18.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Παρασκευή 15 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία

Τα θέματα **A.2.**, **B.1.**, **B.2.** αφορούν την Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού που τώρα είναι εκτός ύλης, αναφέρονται μόνον για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθούν.

19.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΤΙΚΗΣ

Παρασκευή 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Η εξίσωση $z^2 + 2z + 2 = 0$ έχει $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ άρα έχει ως

ρίζες τους **συζυγείς μιγαδικούς**: $z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \frac{2(-1 \pm i)}{2} = -1 \pm i$ άρα

$z_1 = -1 + i$ και $z_2 = -1 - i$.

Επομένως $z_1^{20} - z_2^{20} = (-1 + i)^{20} - (-1 - i)^{20} = [(-1 + i)^2]^{10} - [(-1 - i)^2]^{10}$.

Όμως $(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2 \cdot i$, όμοια $(-1 - i)^2 = 2 \cdot i$ άρα

$$z_1^{20} - z_2^{20} = (-2i)^{10} - (2i)^{10} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_1^{20} - z_2^{20} = 0}$$

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, τότε είναι $\boxed{z_1 = -1 + i}$

i) $n = 2k$, άρτιος, τότε

$$z_1^{2k} = (-1 + i)^{2k} = [(-1 + i)^2]^k = (1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2)^k = (-2i)^k = (-2)^k i^k =$$

$$\begin{cases} (-2)^k \in \mathbb{R} & \text{αν } k = 0 \\ (-2)^k i \notin \mathbb{R} & \text{αν } k = 1 \\ (-2)^k (-1) \in \mathbb{R} & \text{αν } k = 2 \\ (-2)^k (-i) \notin \mathbb{R} & \text{αν } k = 3 \end{cases}.$$

Δηλαδή το z_1^v είναι πραγματικός αριθμός όταν $\kappa = 0$ οπότε $v = 0$, όταν $\kappa = 2$ οπότε $v = 4$, όταν $\kappa = 4$ οπότε $v = 8$, όταν $\kappa = 6$ οπότε $v = 12$, δηλαδή όταν v είναι όρος της ακολουθίας $0, 4, 8, 12, \dots$ η οποία είναι αριθμητική πρόοδος (επειδή $4 - 0 = 8 - 4 = 12 - 8$) με **1^ο όρο το 0 και $\omega = 4$** .

ii) $v = 2\kappa + 1$ (περιττός), τότε

$$z_1^{2\kappa+1} = (-1+i)^{2\kappa+1} = (-1+i)^{2\kappa}(-1+i) = \left[(-1+i)^2\right]^\kappa (-1+i) = (-2i)^\kappa (-1+i) = (-2)^\kappa i^\kappa (-1+i) = (-2)^\kappa \cdot i^\kappa \cdot z_1 \text{ και επειδή είναι } (-2)^\kappa \cdot i^\kappa \neq \overline{z_1} \text{ άρα}$$

$(-2)^\kappa \cdot i^\kappa \cdot z_1$ Μιγαδικός αριθμός επομένως το $v = 2\kappa + 1$ (περιττός) **αποκλείεται**

Τελικά το z_1^v είναι πραγματικός αριθμός όταν το v ανήκει σε μια από τις δυο

$$\text{πρόοδους: } \begin{cases} (\alpha_v) \text{ με } \alpha_1 = 0, \omega = 4 \\ (\beta_v) \text{ με } \beta_1 = 3, \omega = 4 \end{cases}.$$

20.

Εσπερινά 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Θεωρία. **εκτός ύλης**

β) A. 4, B. 7, Γ. 1, Δ. 2, E. 5, ΣΤ. 6

B. α)

$$\bullet \quad z_1 = 1 + i \Leftrightarrow \varrho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ και } \text{συν}\theta = \frac{\chi}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ επομένως: } z_1 = \sqrt{2} \left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4} \right).$$

$$\bullet \quad z_2 = i = 0 + i \Leftrightarrow \varrho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \text{ και } \text{συν}\theta = \frac{\chi}{\varrho} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\varrho} = \frac{1}{1} = 1 \text{ άρα } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ επομένως:}$$

$$z_2 = 1 \cdot \left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow z_2 = \text{συν}\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}.$$

Λιβαδερά

$$\beta) \quad z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \right) \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right)$$

21.

ωανελλήνες 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Θεωρία .

A.2. α. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ **Σωστό.**

β. $|z^2| = z^2$ **Λάθος.**

γ. $|z| = -|\overline{z}|$ **Λάθος.**

δ. $|z| = |\overline{z}|$ **Σωστό.**

ε. $|i \cdot \overline{z}| = |z|$ **Σωστό.**

B.1. 1. ζ , 2. γ , 3. α , 4. δ , 5. β .

B.2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z} = \frac{1}{z} \text{ ή} \\ z = \frac{1}{\overline{z}} \end{cases}$

22.

ωανελλήνες 2001 - Εωαναληρωτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $|z + 16| = 4|z + 1| \Leftrightarrow |\chi + \psi i + 16| = 4|\chi + \psi i + 1| \Leftrightarrow$

$$|(\chi + 16) + \psi i|^2 = 16|(\chi + 1) + \psi i|^2 \Leftrightarrow (\chi + 16)^2 + \psi^2 = 16[(\chi + 1)^2 + \psi^2]$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 + 32\chi + 256 + \psi^2 = 16\chi^2 + 32\chi + 16 + 16\psi^2 \Leftrightarrow 15\chi^2 + 15\psi^2 = 240 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 + \psi^2 = 16 \text{ (1) .}$$

Άρα ο Γεωμετρικός Τόπος είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 4$

β. Έστω $|z-1| = |z-i|$, αν θέσω $z_1 = 1$, $z_2 = i$ η σχέση παίρνει τη μορφή $|z-z_1| = |z-z_2|$ και επομένως ο αντίστοιχος Γ Τ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ όπου $A(1, 0)$ η εικόνα του $z_1 = 1 = 1 + 0i$ και $B(0, 1)$ η εικόνα του $z_2 = i = 0 + i$.

γ. Αν $z = \chi + \psi i$ τότε :

$$\begin{aligned} |\chi + \psi i - 1| &= |\chi + \psi i - i| \Leftrightarrow |(\chi - 1) + \psi i| = |\chi + (\psi - 1)i| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |(\chi - 1) + \psi i|^2 &= |\chi + (\psi - 1)i|^2 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 + \psi^2 = \chi^2 + (\psi - 1)^2 \\ \chi^2 - 2\chi + 1^2 + \psi^2 &= \chi^2 + \psi^2 - 2\psi + 1^2 \Leftrightarrow -2\chi = -2\psi \Leftrightarrow \chi = \psi \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα οι μιγαδικοί που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β) θα είναι λύσεις του συστήματος (1) και (2)

$$\begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 16 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi^2 = 16 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 = 8 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \pm 2\sqrt{2} \\ \psi = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Άρα οι μιγαδικοί που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των

ερωτημάτων (α) και (β) είναι $z_1 = 2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2}$ και $z_2 = -2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$

$$\bullet \quad z_1 = 2\sqrt{2} + i \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4, \text{ και}$$

$$\text{syn}\theta = \frac{\chi}{\rho} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{άρα } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{επομένως :}$$

$$z_1 = 4 \left(\text{syn} \frac{\pi}{4} + i \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\bullet \quad z_2 = -2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \rho = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = 4, \text{ και}$$

$$\text{syn}\theta = \frac{\chi}{\rho} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \text{άρα } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{επομένως : } z_2 = 4 \left(\text{syn} \frac{5\pi}{4} + i \cdot \eta\mu \frac{5\pi}{4} \right).$$

23.

Εσωτερικά 2001 - Εξαναληπτικές

Παρασκευή 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Θεωρία

β) A. 2, B. 3, Γ. 6, Δ. 5.

B. α) $z_1 = 5 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow \kappa + 15i = 5 \cdot (5 - \lambda i) \Leftrightarrow \kappa + 15i = 25 - 5\lambda i \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 25 \\ \lambda = -3 \end{cases}$

β) Έστω $z = \chi + \psi i$ τότε $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 5 + 2i \Leftrightarrow |z|^2 + 2\psi i = 5 + 2i \Leftrightarrow$

$$\chi^2 + \psi^2 + 2\psi i = 5 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = 5 \\ 2\psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 = 4 \\ \psi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \pm 2 \\ \psi = 1 \end{cases}$$

άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = -2 + i$.

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{1^2+1^2} = 1-i.$

β) $z = 1-i \Leftrightarrow \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, και $\sin\theta = \frac{\chi}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\theta = -\frac{\pi}{4}$ επομένως :

$$z = \sqrt{2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

γ) $z = 1-i$, έστω $z_0 = 2 + 0 \cdot i$ τότε

$$|z - z_0| = |1-i - (2+0 \cdot i)| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

άρα ο z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

24.

Ωανελλήμνες 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

α. Είναι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z =$

$$(i^3 + i^{4 \cdot 2} + i^{4 \cdot 3 + 1} + i^{4 \cdot 4 + 2})z = (-i + 1 + i - 1)z = 0 \cdot z = 0.$$

β. Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, τότε :

$$f(13) = i^{13} \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = i^{12+1} \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = i \cdot \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow f(13) = \rho \cdot (i \cdot \cos \theta - \sin \theta) = \rho \cdot (i \cos \theta - \sin \theta) \Leftrightarrow$$

$$f(13) = \rho \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right)$$

γ. Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, τότε :

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{άρα το σημείο είναι το}$$

$$A(1, \sqrt{3}), \quad f(13) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$f(13) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow f(13) = -\sqrt{3} + i.$$

Άρα το σημείο είναι το $B(-\sqrt{3}, 1)$ και το τρίτο σημείο είναι το $O(0, 0)$

$$\text{Άρα } (OAB) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} (1+3) = 2$$

25.

Εξωεργασία 2002**Τετάρτη 5 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο****B.**7. **Λάθος.**8. **Σωστό.****Αι β α δ ε ι ά**

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι : $z_1 + 5z_2 = -1 + i + 5 \cdot (3 - 4i) = -1 + i + 15 - 20i = 14 - 19i$.

β. Είναι : $\frac{z_2}{z_1} = \frac{15 - 20i}{-1 + i} = \frac{15 - 20i}{-1 - i} = \frac{(15 - 20i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} =$

$$\frac{-15 + 15i + 20i - 20i^2}{(-1)^2 - (i)^2} = \frac{-15 + 35i + 20}{1 + 1} \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{5}{2} + \frac{35}{2}i.$$

γ. $z_1 = -1 + i \Leftrightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, και $\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$,

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{άρα} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

δ. $z_1 = -1 + i$ άρα από το προηγούμενο ερώτημα είναι $z_1 = -1 + i \Leftrightarrow$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{4} \right) \quad z_1^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \left(8 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \cdot \eta\mu \left(8 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow z_1^8 = 16 (\cos 6\pi + i \cdot \eta\mu 6\pi) \Leftrightarrow z_1^8 = 16.$$

26.

ωαυελλήνυες 2002 - Εωαυαληωτικές

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία

27.

ωαυελλήνυες 2002 - Ομογευείς

Τρίτη 17 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Θεωρία (Εκτός ύλης)

β. 3

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{3 + 6i + 4i - 8}{1^2 + 2^2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$, αν

$$\frac{z_2}{z_1} = \chi + \psi i \quad \text{τότε} \quad \chi = -1 \quad \text{και} \quad \psi = 2.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

β) $\frac{z_2}{z_1} = -1 + 2i$ οπότε αν η $\frac{z_2}{z_1}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τότε η άλλη ρίζα θα είναι η $-1 - 2i$ και αυτό σημαίνει ότι ισχύουν οι εξισώσεις :

$$\begin{cases} (-1 + 2i)^2 + \beta(-1 + 2i) + 2\gamma = 0 \\ (-1 - 2i)^2 + \beta(-1 - 2i) + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4i - 4 - \beta + 2\beta i + 2\gamma = 0 \\ 1 + 4i - 4 - \beta - 2\beta i + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\gamma - 3 - \beta + 2\beta i - 4i = 0 \\ 2\gamma - 3 - \beta - 2\beta i + 4i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\gamma - 3 - \beta = 0 \\ 2\beta - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{5}{2} \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Από ότι φαίνεται δεν χρειάζονταν και οι δυο εξισώσεις αρκούσε η μια.

γ. $|z - 2z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z - 2(1 - 2i)| = |3 + 4i| \Leftrightarrow$

$$|z - (2 - 4i)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \Leftrightarrow |z - (2 - 4i)| = 5$$

Άρα ο Γ. Τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(2, -4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

28.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. α) **Σωστό.**

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

α. Είναι $z = \alpha + \beta i$ άρα $w = 3z - i\bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (-\alpha + 3\beta)i$, οπότε προφανώς

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4 \\ \operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha \end{cases}$$

Λιβαδερά

β. Αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi - 12$, αυτό σημαίνει πως το $\operatorname{Re}(w)$ και το $\operatorname{Im}(w)$ θα την επαληθεύουν άρα $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Re}(w) - 12 \Leftrightarrow 3\beta - \alpha = (3\alpha - \beta + 4) - 12 \Leftrightarrow 4\beta = 4\alpha - 8 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$ άρα προφανώς οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $\psi = \chi - 2$

γ. Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι η απόσταση από την αρχή $O(0, 0)$, επειδή ο μιγαδικός κινείται στην ευθεία $\varepsilon: \psi = \chi - 2$ άρα το μέτρο του θα είναι η απόσταση του O από τα σημεία M της ευθείας.

Η απόσταση του O από τα σημεία M της ευθείας γίνεται ελάχιστη όταν η OM είναι κάθετη στην ευθεία.

$$H \psi = \chi - 2 \Leftrightarrow \chi - \psi - 2 = 0 \text{ οπότε } d(O, \varepsilon) = \frac{|0 - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

(Θυμίζω : Αν $\varepsilon: A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ είναι μια ευθεία και $K(\chi_0, \psi_0)$ ένα

σημείο τότε $d(K, \varepsilon) = \frac{|A\chi_0 + B\psi_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ είναι η απόσταση το K από την ε)

Άλλος τρόπος : Η $\psi = \chi - 2$ έχει συντελεστή $\lambda = 1$ άρα η κάθετη από το O θα έχει συντελεστή $\lambda' = -1$ και εξίσωση : $\psi = -\chi$.

Το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι η λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} \psi = \chi - 2 \\ \psi = -\chi \end{cases} \Leftrightarrow \psi = 1, \chi = -1 \text{ άρα το κοινό σημείο είναι το } M(-1, 1) \text{ και}$$

επομένως $|z| = (OM) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$ η ελάχιστη τιμή του z .

Παρατήρηση : Με τον δεύτερο τρόπο βρίσκεις επί πλέον και ποιος είναι ο z με το ελάχιστο μέτρο

29.

Εξωεργασία 2003

Τετάρτη 25 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Σωστό, 4. Λάθος

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\begin{aligned}
 \alpha. \quad w &= \frac{i(i+z)}{i-z}, \quad z \neq i, \quad z = \chi + \psi i \quad \text{άρα} \quad w = \frac{i(i+z)}{i-z} = \frac{i^2 + iz}{i-z} = \\
 &= \frac{-1 + \chi i + \psi i^2}{i - (\chi + \psi i)} = \frac{-1 + \chi i - \psi}{i - \chi - \psi i} = \frac{-(\psi + 1) + \chi i}{-\chi - (\psi - 1)i} = \frac{[-(\psi + 1) + \chi i][-\chi + (\psi - 1)i]}{[-\chi - (\psi - 1)i][-\chi + (\psi - 1)i]} \\
 &= \frac{\chi(\psi + 1) - \chi^2 i - (\psi + 1)(\psi - 1)i - \chi(\psi - 1)}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} = \\
 &= \frac{\chi\psi + \chi - \chi^2 i - (\psi^2 - 1)i - \chi\psi + \chi}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} = \frac{2\chi - (\psi^2 + \chi^2 - 1)i}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} = \\
 &= \frac{2\chi}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} + \frac{-\psi^2 - \chi^2 + 1}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta. \quad (\text{Από το } \alpha. \text{ ερώτημα}) \quad \text{Είναι } w &= \frac{i(i+z)}{i-z}, \quad z \neq i, \quad z = \chi + \psi i \quad \text{άρα} \\
 w &= \frac{i(i+z)}{i-z} = \frac{i^2 + iz}{i-z} = \dots = \frac{2\chi}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} + \frac{-\psi^2 - \chi^2 + 1}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} i \quad \text{οπότε αν ο} \\
 w &\text{ είναι πραγματικός αριθμός, τότε θα είναι } \frac{-\psi^2 - \chi^2 + 1}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \\
 -\psi^2 - \chi^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi^2 + \chi^2 = 1}.
 \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$ εκτός από το σημείο $(0, 1)$ γιατί $z \neq i$.

$$\begin{aligned}
 \gamma. \quad \text{αν ο } z &\text{ είναι πραγματικός αριθμός, τότε } \psi = 0 \text{ άρα} \\
 w &= \frac{2\chi}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} + \frac{-\psi^2 - \chi^2 + 1}{\chi^2 + (\psi - 1)^2} i = \frac{2\chi}{\chi^2 + 1^2} + \frac{-\chi^2 + 1}{\chi^2 + 1^2} i = \frac{2\chi}{\chi^2 + 1} + \frac{-\chi^2 + 1}{\chi^2 + 1} i. \\
 \text{Είναι } |w| &= \left| \frac{2\chi}{\chi^2 + 1} + \frac{-\chi^2 + 1}{\chi^2 + 1} i \right| = \sqrt{\left(\frac{2\chi}{\chi^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{-\chi^2 + 1}{\chi^2 + 1} \right)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{4\chi^2}{(\chi^2 + 1)^2} + \frac{(-\chi^2 + 1)^2}{(\chi^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{4\chi^2 + \chi^4 - 2\chi^2 + 1}{(\chi^2 + 1)^2}} = \sqrt{\frac{\chi^4 + 2\chi^2 + 1}{(\chi^2 + 1)^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(\chi^2 + 1)^2}{(\chi^2 + 1)^2}} = \sqrt{1} = 1 \Leftrightarrow |w| = 1.
 \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

30.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αν $|z| = 2$ τότε ο z «κινείται» σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

Αν $\text{Im}(z) \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0$, άρα ο z βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\chi'\chi$ οπότε τελικά ο z «κινείται» στο «πάνω» ημικύκλιο του κύκλου $O(0,0)$ και $\rho = 2$.

β. Αν $|z| = 2$ και $z = \chi + \psi i$ τότε $|z|^2 = \chi^2 + \psi^2 = 4$ και ο $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(z + \frac{4 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4 \cdot \bar{z}}{|z|^2} \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4 \cdot \bar{z}}{4} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) =$$

$$\frac{1}{2} (\chi + \psi i + \chi - \psi i) = \frac{1}{2} 2\chi \Leftrightarrow w = \chi \text{ άρα ο } w \text{ είναι πραγματικός οπότε}$$

«κινείται» στον άξονα $\chi'\chi$.

$$\text{Επειδή } w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right) \Leftrightarrow |w| = \left| \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| z + \frac{4}{z} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|z| + \frac{4}{|z|} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{4}{2} \right) = 2.$$

Άρα $|w| \leq 2 \Leftrightarrow |\chi| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \chi \leq 2$ άρα ο w θα «κινείται» στο ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον $\chi'\chi$.

31.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. γ. 1. Σ, 2. Σ, 3. Λ, 4. Σ.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

$$\alpha) |f(z)| = |f(\bar{z})| \Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z} \right| = \left| \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}} \right| \Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z|} = \frac{|\bar{z}+i|}{|\bar{z}|} \text{ και επειδή}$$

$$|z| = |\bar{z}| \text{ άρα } |z+i| = |\bar{z}+i| \Leftrightarrow |z+i|^2 = |\bar{z}+i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+i)(\overline{z+i}) = (\bar{z}+i)(\overline{\bar{z}+i}) \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+\bar{i}) = (\bar{z}+i)(\overline{\bar{z}}+\bar{i}) \Leftrightarrow$$

$$(z+i)(\bar{z}-i) = (\bar{z}+i)(z-i) \Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 = z\bar{z} - i\bar{z} + iz - i^2 \Leftrightarrow$$

$$-iz + i\bar{z} = -i\bar{z} + iz \Leftrightarrow -2iz = -2i\bar{z} \Leftrightarrow \mathbf{z = \bar{z}}.$$

Που σημαίνει ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

$$\beta) |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |z+i| = |z| \Leftrightarrow$$

$|z - (0 - i)| = |z - (0 + 0 \cdot i)|$, η τελευταία ισότητα δείχνει ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος στο τμήμα AO όπου $A(0, -1)$ και $O(0, 0)$.

γ) Αν $z = \chi + \psi i$ τότε

$$f(z) = \frac{z+i}{z} = \frac{\chi + \psi i + i}{\chi + \psi i} = \frac{\chi + (\psi + 1)i}{\chi + \psi i} = \frac{(\chi + (\psi + 1)i)(\chi - \psi i)}{(\chi + \psi i)(\chi - \psi i)} =$$

$$\frac{\chi^2 - \chi\psi i + \chi(\psi + 1)i + \psi(\psi + 1)}{\chi^2 + \psi^2} = \frac{\chi^2 + \psi^2 + \psi}{\chi^2 + \psi^2} + \frac{\chi}{\chi^2 + \psi^2} i.$$

$$\text{Αν } \operatorname{Re}(f(z)) = 2 \Leftrightarrow \frac{\chi^2 + \psi^2 + \psi}{\chi^2 + \psi^2} = 2 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 + \psi = 2(\chi^2 + \psi^2) \Leftrightarrow$$

$\chi^2 + \psi^2 - \psi = 0$ **(1)**, η οποία είναι εξίσωση της μορφής :

$\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A = 0$, $B = -1$, $\Gamma = 0$ οπότε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1 > 0, \text{ άρα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{1}{2},$$

άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$.

32.

ΨΑΛΛΗΜΕΣ 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 4^ο

γ. Από τη σχέση $\left|z + \frac{1}{z}\right| = |z| \Leftrightarrow \left|\frac{z^2 + 1}{z}\right| = |z| \Leftrightarrow \frac{|z^2 + 1|}{|z|} = |z| \Leftrightarrow$

$$|z^2 + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow |(\chi + \psi i)^2 + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow |\chi^2 - \psi^2 + 2\chi\psi i + 1| = |z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|(\chi^2 - \psi^2 + 1) + 2\chi\psi i| = |z|^2 \Leftrightarrow \sqrt{(\chi^2 - \psi^2 + 1)^2 + (2\chi\psi)^2} = \chi^2 + \psi^2 \Leftrightarrow$$

$$(\chi^2 - \psi^2 + 1)^2 + (2\chi\psi)^2 = (\chi^2 + \psi^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\chi^2 - \psi^2)^2 + 2(\chi^2 - \psi^2) + 1 + 4\chi^2\psi^2 = \chi^4 + 2\chi^2\psi^2 + \psi^4$$

$$\Leftrightarrow \chi^4 - 2\chi^2\psi^2 + \psi^4 + 2(\chi^2 - \psi^2) + 1 + 4\chi^2\psi^2 = \chi^4 + 2\chi^2\psi^2 + \psi^4$$

$$\Leftrightarrow 2(\chi^2 - \psi^2) = -1 \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

33.

ΕΞΩΘΕΡΙΝΑ 2004

Παρασκευή 4 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. **Θεωρία.**

Β. Α. 3, Β. 4, Γ. 1, Δ. 2.

ΘΕΜΑ 4^ο

Αν $z = \chi + \psi i$ τότε: $\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i \Leftrightarrow$

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\left(\frac{\chi + \psi i + \chi - \psi i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\chi + \psi i - (\chi - \psi i)}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\chi}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\psi i}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi^2 = \alpha \\ \psi^2 = 1 - \alpha \end{cases} \quad (1).$$

Έτσι λοιπόν :

α. αν $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \psi = 0 \Leftrightarrow \psi^2 = 0$ άρα λόγω της (1) $\Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β. αν $\alpha = 0$ τότε λόγω της (1) είναι $\begin{cases} \chi^2 = 0 \\ \psi^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ \psi = \pm 1 \end{cases}$ άρα $z = \pm i \Leftrightarrow$

$$z^2 = (\pm i)^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0.$$

γ. για τον πραγματικό αριθμό α λόγω της (1) ισχύει :

$$\begin{cases} \alpha = \chi^2 \geq 0 \\ 1 - \alpha = \psi^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1$$

δ. Λόγω της (1) : $\begin{cases} \chi^2 = \alpha \\ \psi^2 = 1 - \alpha \end{cases}$ παρατήρησε πως $\chi^2 + \psi^2 = \alpha + (1 - \alpha) \Leftrightarrow$

$$\chi^2 + \psi^2 = 1$$

Άρα προφανώς οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο, με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

34.

επαναληπτικές 2004 - Επαναληπτικές

Δευτέρα 5 Ιουλίου

Τον Ιούλιο του 2004 στις επαναληπτικές υπάρχει το 3^ο θέμα που συνδυάζει μιγαδικούς και συναρτήσεις και θα αντιμετωπισθεί εκεί.

35.

Εβδομαστιά 2004 - Εωαναληωτικές

ΘΕΜΑ 1^ο

Τετάρτη 7 Ιουλίου

Α. Θεωρία, Β. Σωστό, Γ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \chi + \psi i$, όπου χ, ψ πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\chi = 3 - \kappa$ και $\psi = 2\kappa + 1$.

α. αν $3\operatorname{Re}(z) + 4\operatorname{Im}(z) = 3$, τότε $3(3 - \kappa) + 4(2\kappa + 1) = 3 \Leftrightarrow$

$$9 - 3\kappa + 8\kappa + 4 = 3 \Leftrightarrow 5\kappa = -10 \Leftrightarrow \kappa = -2.$$

β. αν $|z - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - 1|^2 = 5 \Leftrightarrow |\chi + \psi i - 1|^2 = 5 \Leftrightarrow$

$$|(\chi - 1) + \psi i|^2 = 5 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 + \psi^2 = 5 \Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 = 5 \text{ και}$$

επειδή $\chi = 3 - \kappa$ και $\psi = 2\kappa + 1$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$(3 - \kappa)^2 - 2(3 - \kappa) + 1 + (2\kappa + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$9 - 6\kappa + \kappa^2 - 6 + 2\kappa + 1 + 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 5 \Leftrightarrow 5\kappa^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0.$$

Άρα $\chi = 3$ και $\psi = 1$ άρα $z = 3 + i$ άρα $|z| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} \Leftrightarrow$

$$|z| = \sqrt{10}.$$

γ. Επειδή $\chi = 3 - \kappa$ και $\psi = 2\kappa + 1$ άρα από την 1^η εξίσωση είναι

$$\kappa = 3 - \chi \text{ οπότε η 2^η εξίσωση γίνεται: } \psi = 2(3 - \chi) + 1 \Leftrightarrow \psi = 6 - 2\chi + 1$$

$\Leftrightarrow \psi = -2\chi + 7$ άρα οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο

μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, με εξίσωση $\psi = -2\chi + 7$.

36.

ωανελλήνικες 2004 - Ομογενείς

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$, .

α) Αν ο w είναι πραγματικός, τότε $w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2 + 1} = \overline{\left(\frac{z}{z^2 + 1}\right)} \Leftrightarrow$

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z^2 + 1}} \Leftrightarrow z \overline{z}^2 + z = z^2 \overline{z} + \overline{z} \Leftrightarrow z \overline{z}^2 - z^2 \overline{z} + z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-z \overline{z} (z - \overline{z}) + (z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \overline{z})(1 - z \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \overline{z} \text{ ή} \\ z \overline{z} = 1 \end{cases} \text{ άρα}$$

$$z = \overline{z} \text{ τότε } z \text{ πραγματικός ή } z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

β) Αν $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}z^2 + \sqrt{3} = 3z \Leftrightarrow \sqrt{3}z^2 - 3z + \sqrt{3} = 0$,

$$\Delta = (-3)^2 - 4\sqrt{3}\sqrt{3} = 9 - 12 = -3, \text{ τότε λύσεις :}$$

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(-\sqrt{3} + i)}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow z_1 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2},$$

$$z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(-\sqrt{3} - i)}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

γ) Επειδή z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί θα είναι :

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = \frac{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}{4} = \frac{3 + 1}{4} = 1 \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = 1 \text{ και}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} + \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -\sqrt{3} \text{ τότε}$$

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2} = \frac{1^3 - i}{4 + (-\sqrt{3})^2} = \frac{1 - i}{4 + 3} \Leftrightarrow K = \frac{1 - i}{7}$$

Μπορείς να
χρησιμοποιή
σεις και τους
τύπους του
Vieta

37.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Έστω $z_1 = \frac{9}{z_1}$ τότε $z_1 \overline{z_1} = 9 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$.

β. Αρκεί να δείξεις ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ ισούται με τον συζυγή του.

$$\text{Είναι } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} + \overline{\left(\frac{z_2}{z_1} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} + \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} \text{ άρα ο}$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \text{ είναι πραγματικός, επειδή } z = \overline{z} \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2\text{Im}(z) = 0.$$

$$\begin{aligned} \gamma. \text{ Είναι } |z_1 + z_2 + z_3| &= |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = \\ &= 9 \left| \frac{z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \right| = 9 \frac{|z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = 9 \frac{|z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|. \end{aligned}$$

38.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί : $z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w = \kappa + 4i$, $\kappa > 0$.

Για τους z, w ισχύουν : $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0$ και $|w| = 5$.

α. $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2 + 3 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$. Άρα $z = 1^2 - 2 + (3 - 2 \cdot 1)i \Leftrightarrow \mathbf{z = -1 + i}$

β. $|w| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\kappa^2 + 4^2} = 5 \Leftrightarrow \kappa^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \Leftrightarrow \kappa = \pm 3$ και
 επειδή $\kappa > 0$ άρα $\mathbf{\kappa = 3}$

γ. Έστω ότι ισχύει $z + \mu \bar{z} = 3i - w \Leftrightarrow -1 + i + \mu(-1 - i) = 3i - w$ (1),

από το προηγούμενο ερώτημα είναι : $\kappa = 3$ άρα $w = 3 + 4i$ άρα η (1)

γίνεται : $-1 + i + \mu(-1 - i) = 3i - (3 + 4i) \Leftrightarrow -1 + i - \mu - \mu i = 3i - 3 - 4i \Leftrightarrow$

$2 - \mu + (2 - \mu)i = 0 \Leftrightarrow \mu = 2.$

39.

Πανελλήνιες 2005 - Εξαναληπτικές

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$ τότε $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 4i \\ 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha + \beta i + \gamma + \delta i = 4 + 4i \\ 2(\alpha + \beta i) - (\gamma - \delta i) = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i = 4 + 4i \\ (2\alpha - \gamma) + (2\beta + \delta)i = 5 + 5i \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 4 & (1) \\ \beta + \delta = 4 & (2) \\ 2\alpha - \gamma = 5 & (3) \\ 2\beta + \delta = 5 & (4) \end{cases}$ από (1) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη είναι

$\alpha = 3$ οπότε $\gamma = 1$ και από (2) και (4) με αφαίρεση είναι $\beta = 1$ οπότε $\delta = 3$ άρα $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 + 3i$.

β. i. Είναι $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ οπότε η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$|z - 1 - 3i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (1 + 3i)| = \sqrt{2}$ (1).

Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 3)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$, επομένως η

$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ παριστάνει τα εσωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα

σημεία της γραμμής. Επίσης $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |w - (3 + i)| = \sqrt{2}$ η οποία παριστάνει κύκλο

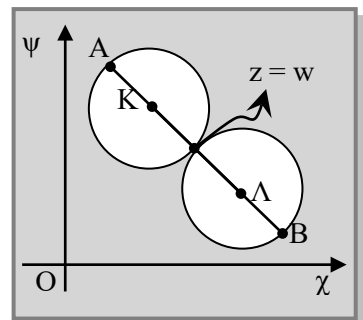
με κέντρο $\Lambda(3, 1)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{2}$,

επομένως η $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$ παριστάνει τα

εσωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα σημεία της γραμμής.

Παρατηρήστε πως οι κύκλοι είναι ίσοι.

Λι β α δ ε ι α



$$\text{Είναι } \mathbf{KL} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \rho_1 + \rho_2$$

άρα οι δυο ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά επομένως υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$, δηλαδή λύση είναι ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής.

- ii. Αφού ο z κινείται στον ένα κύκλο και ο w στον άλλον η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ προφανώς είναι η $\mathbf{AB = KL + \rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}}$.

40.

Εξωθερινά 2005 - Εωαναληθτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{\chi + 3i}{2 - i}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Ο $z = \frac{\chi + 3i}{2 - i} = \frac{(\chi + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2\chi + 6i + \chi i - 3}{2^2 + 1^2} = \frac{2\chi - 3}{5} + \frac{6 + \chi}{5}i$.

Για να είναι φανταστικός ο z πρέπει $\frac{2\chi - 3}{5} = 0 \Leftrightarrow 2\chi - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{\chi = \frac{3}{2}}$.

β. Αν $\chi = -6$, τότε $z = \frac{-6 + 3i}{2 - i} = \frac{(-6 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2(-6) + 6i + (-6)i - 3}{2^2 + 1^2} = \frac{-12 + 6i - 6i - 3}{5} = \frac{-12 - 3}{5} \Leftrightarrow \mathbf{z = -3}$ άρα ο z είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Αν $\chi = 4$, $z = \frac{-4 + 3i}{2 - i} = \frac{(-4 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2(-4) + 6i + (-4)i - 3}{2^2 + 1^2} = \frac{-8 + 6i - 4i - 3}{5} = \frac{-11 + 2i}{5}$ άρα $\mathbf{z = -\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i}$.

41.

παυελλήνες 2005 - Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μυγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3 + i$ και $z_2 = 1 - 3i$.

α)

1^{ος} τρόπος Είναι $iz_2 = i(1 - 3i) = i - 3i^2 = 3 + i = z_1$ άρα $\frac{z_1}{z_2} = i$ ή

2^{ος} τρόπος Είναι $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{1-3i} = \frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{(3+i)(1+3i)}{1^2+3^2} = \frac{3+9i+i+3i^2}{1^2+3^2}$

$$= \frac{3+9i+i-3}{10} = \frac{(9+1)i}{10} = i.$$

Επίσης $|iz_1 + z_2|^2 = |i(3+i) + (1-3i)|^2 = |3i + i^2 + 1 - 3i|^2 = |-1 + 1|^2 = 0^2 = 0$

β) Είναι $\frac{z_1}{z_2} = i \Leftrightarrow z_1 = iz_2$ άρα $z_1^{2006} + z_2^{2006} = (iz_2)^{2006} + z_2^{2006} =$

$$i^{2006} \cdot z_2^{2006} + z_2^{2006} = (i^{2006} + 1)z_2^{2006} = (i^{4 \cdot 501 + 2} + 1)z_2^{2006} = (i^2 + 1)z_2^{2006} =$$

$$(-1 + 1)z_2^{2006} = 0.$$

γ) Είναι $\frac{z_1}{z_2} = i \Leftrightarrow z_1 = iz_2$ άρα $w = \frac{\kappa z_1 - iz_2}{z_2 - \kappa z_2} = \frac{\kappa iz_2 - iz_2}{z_2 - \kappa z_2} = \frac{(\kappa - 1)iz_2}{(1 - \kappa)z_2} = -i,$

επομένως $\text{Im}(w) = -1$.

42.

παυελλήνες 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι μυγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Λιβαδειά

Ένας, κατά τη γνώμη μου καλλίτερος τρόπος, είναι να αρχίσεις από το **β**.
ερώτημα γιατί μετά το **α. i**. περίπου είναι αυτονόητο.

β. Είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, άρα οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 «κινούνται» στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$.

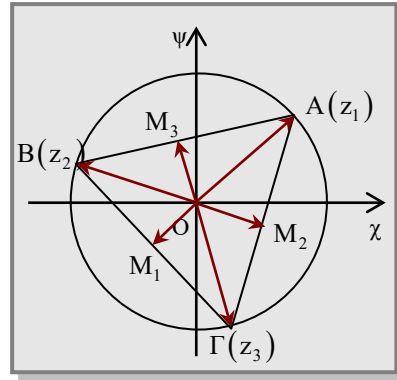
Η σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ γράφεται

$$z_2 = -(z_1 + z_3) \Leftrightarrow \overline{OB} = -(\overline{OA} + \overline{OG}) \Leftrightarrow$$

$$\overline{OB} = -2\overline{OM}_2 \quad (1), \text{ όπου } OM_1 \text{ η}$$

διάμεσος στο τρίγωνο OAG .

Στο σημείο αυτό μπορείς να συνεχίσεις με δυο τρόπους.



1^{ος} τρόπος : Από την (1) συμπεραίνεις ότι τα σημεία B, O και M_1 είναι στην ίδια ευθεία και επειδή το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές ($|z_1| = |z_3| = 1$) άρα η διάμεσος OM_1 θα είναι και ύψος άρα η BOM_1 θα είναι επίσης διάμεσος και ύψος στο BAG , άρα BAG ισοσκελές άρα $BA = BG$.
Με όμοιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι $AB = AG$, οπότε τελικά το ABG ισόπλευρο.

2^{ος} τρόπος : $(1) \Leftrightarrow |\overline{OB}| = 2|\overline{OM}_2| \Leftrightarrow |\overline{OM}_2| = \frac{1}{2}|\overline{OB}| = \frac{1}{2}|z_2|$, με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $|\overline{OM}_1| = \frac{1}{2}|\overline{OA}| = \frac{1}{2}|z_1|$, $|\overline{OM}_3| = \frac{1}{2}|\overline{OG}| = \frac{1}{2}|z_3|$ και επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ άρα $|\overline{OM}_1| = |\overline{OM}_2| = |\overline{OM}_3|$, όμως τα τρίγωνα OAG, OAB, OBG είναι ισοσκελή, άρα οι διάμεσοι τους θα είναι και ύψη. Οι χορδές AB, BG, AG είναι τελικά ίσες γιατί τα αποστήματά τους $OM_1 = OM_2 = OM_3$, άρα το τρίγωνο ABG ισόπλευρο.

α. i. Τα $|z_1 - z_2|, |z_3 - z_1|, |z_2 - z_3|$, εκφράζουν τις αποστάσεις των εικόνων των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 δηλαδή τα μήκη των τμημάτων AB, AG, BG .

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο άρα $AB = A\Gamma = B\Gamma$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|.$$

ii.

✓ Για να αποδείξεις το $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ έχεις δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος : $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow$

$$|z_1 - z_2| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq 4.$$

2^{ος} τρόπος : Το $|z_1 - z_2|$ εκφράζει την πλευρά $A\Gamma$ του ισόπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\rho = 1$ άρα είναι :

$$|z_1 - z_2| = (A\Gamma) = \lambda_3 = \rho \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3 \leq 4$$

✓ Για να αποδείξεις το $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -1$ έχεις $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow$

$$(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} \leq 4 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$1 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 2 - 4 \leq z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \Leftrightarrow z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2} \geq -2 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -1$$

Αν κάποιος διάλεγε να απαντήσει με την σειρά που εμφανίζονταν τα ερωτήματα τότε :

α. i. Έστω ότι ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$, επειδή $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$z_1 = -z_2 - z_3 \text{ άρα } |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$$

$$|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) = (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2}) \Leftrightarrow$$

Λ ι β α δ ε ι ά

$$(2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) = (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2}) \Leftrightarrow$$

$$2z_2 \overline{2z_2} + 2z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{2z_2} + z_3 \overline{z_3} = 2z_3 \overline{2z_3} + 2z_3 \overline{z_2} + z_2 \overline{2z_3} + z_2 \overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$4 + 2z_2 \overline{z_3} + 2z_3 \overline{z_2} + 1 = 4 + 2z_3 \overline{z_2} + 2z_2 \overline{z_3} + 1 \Leftrightarrow$$

$$2z_2 \overline{z_3} + 2z_3 \overline{z_2} = 2z_3 \overline{z_2} + 2z_2 \overline{z_3} \Leftrightarrow z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_2} = z_3 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} \text{ που είναι}$$

προφανής άρα ισχύει και η $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$, με όμοιο ακριβώς τρόπο

αποδεικνύεται και $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Για τις σχέσεις του **α. ii.** Δες πιο πάνω

β. Είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, άρα οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 «κινούνται» στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$.

Τα $|z_1 - z_2|, |z_3 - z_1|, |z_2 - z_3|$, εκφράζουν τις αποστάσεις των εικόνων των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 δηλαδή τα μήκη των τμημάτων AB, AG, BG .

Από το **α. ii.** είναι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ άρα το τρίγωνο ισόπλευρο

43.

εβδομαδιά 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. θεωρία.

B. 2. Σ.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η εξίσωση $\chi^2 - 4\chi + 13 = 0$ (1).

α. Είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36 < 0$ άρα ρίζες οι συζυγείς μιγαδικοί :

$$z_1 = \frac{4 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i, \quad z_2 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

$$\beta. \quad |z_1|^2 = |2 + 3i|^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \quad |z_1 \cdot z_2| = \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right| = \left| \frac{13}{1} \right| = 13,$$

$$|\overline{z_2}| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } A &= |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13} |\overline{z_2}| + i^{2006} = 13 - 2 \cdot 13 + \sqrt{13} \sqrt{13} + i^{4 \cdot 501 + 2} \\ &= 13 - 2 \cdot 13 + 13 + i^2 \Leftrightarrow A = -1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση : Δεν έχει σημασία πια από τις δυο ρίζες θα θεωρήσεις ως z_1 και πια ως z_2 , το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο, γιατί z_1 και z_2 είναι συζυγείς και επομένως $|z_1| = |z_2|$

$$\gamma. \quad |z - z_1| = 5 \Leftrightarrow |z - (2 + 3i)| = 5, \text{ άρα ο } z \text{ κινείται σε κύκλο με κέντρο :}$$

$$K(2, 3) \text{ και ακτίνα } \rho = 5.$$

44.

ωανελλήνικες 2006 - Εωαναληωτικές

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Σωστό.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι μυγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4 - z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^2 + \chi + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha. \quad (4 - z)^{10} = z^{10} \Leftrightarrow |(4 - z)^{10}| = |z^{10}| \Leftrightarrow |4 - z|^{10} = |z|^{10} \Leftrightarrow |4 - z|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|(4 - \chi) - \psi i|^2 = |\chi + \psi i|^2 \Leftrightarrow (4 - \chi)^2 + (-\psi)^2 = \chi^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - \chi)^2 = \chi^2 & (1) \\ (-\psi)^2 = \psi^2 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Η (2) είναι προφανής και η (1) είναι ισοδύναμη με } \begin{cases} 4 - \chi = \chi & (3) \\ 4 - \chi = -\chi & (4) \end{cases}.$$

Λιβαδειά

Η (3) έχει λύση $\chi = 2$, ενώ η (4) είναι αδύνατη, άρα η εξίσωση $(4 - z)^{10} = z^{10}$ οδηγεί στην $\chi = 2$, που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην κατακόρυφη ευθεία $\chi = 2$.

45.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 1. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Από την ισότητα $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$ και επειδή $(5z - 1)^5, (z - 5)^5 \in \mathbb{C}$

άρα $|(5z - 1)^5| = |(z - 5)^5| \Leftrightarrow |5z - 1|^5 = |z - 5|^5$, όμως τα

$|5z - 1|, |z - 5| \in \mathbb{R}^+$ και άρα $|5z - 1|^5 = |z - 5|^5 \Leftrightarrow |5z - 1| = |z - 5|$.

β) **1^{ος} τρόπος** Είναι $|5z - 1| = |z - 5| \Leftrightarrow (5z - 1)(\overline{5z - 1}) = (z - 5)(\overline{z - 5})$

$$\Leftrightarrow (5z - 1)(5\bar{z} - 1) = (z - 5)(\bar{z} - 5) \Leftrightarrow$$

$$25z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} + 1 = z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} + 25.$$

$$24z\bar{z} = 24 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

2^{ος} τρόπος Αν $z = \chi + \psi i$ τότε $|5z - 1| = |z - 5| \Leftrightarrow$

$$|5(\chi + \psi i) - 1| = |(\chi + \psi i) - 5| \Leftrightarrow |(5\chi - 1) + 5\psi i| = |(\chi - 5) + \psi i| \Leftrightarrow$$

$$(5\chi - 1)^2 + 25\psi^2 = (\chi - 5)^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 1 \text{ άρα } |z| = 1$$

γ) **1^{ος} τρόπος** $w = 5z + 1 \Leftrightarrow w - 1 = 5z \Leftrightarrow |w - 1| = |5z| \Leftrightarrow |w - 1| = 5|z|$

$$\Leftrightarrow |w - 1| = 5 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow |w - (1 + 0i)| = 5 \text{ άρα ο } w \text{ κινείται σε κύκλο με}$$

κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

2^{ος} τρόπος Αν $w = \alpha + \beta i$ και $z = \chi + \psi i$ τότε $w = 5z + 1 \Leftrightarrow w - 1 = 5z \Leftrightarrow$

$$(\alpha - 1) + \beta i = 5(\chi + \psi i) = 5\chi + 5\psi i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 5\chi \\ \beta = 5\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{\alpha - 1}{5} \\ \psi = \frac{\beta}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } |z| = 1 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(\alpha - 1)^2}{25} + \frac{\beta^2}{25} = 1 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 25 \text{ η}$$

τελευταία είναι ης μορφής $(\chi - \chi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2$ και όπως είναι γνωστό από την Β' Λυκείου, παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

46.

ωανελλήνικες 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Θεωρία

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι $z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \Rightarrow |z| = \left| \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \right| = \frac{|2 + \alpha i|}{|\alpha + 2i|} = \frac{\sqrt{4 + \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 4}} = 1$

Επομένως $|z| = 1$ και άρα η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Για $\alpha = 0$ είναι $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$ και για $\alpha = 2$ είναι $z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1$

i. Έστω A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα,

$$\text{είναι: } (AB) = |z_1 - z_2| = |-i - 1| = |1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

ii. $(z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = [(-i)^2]^v = (-1)^v, (-z_2)^v = (-1)^v.$

$$\text{Άρα } (z_1)^{2v} = (-z_2)^v.$$

Λ ι β α δ ε ι ά

Εβδομαστιά 2007

47.

Τετάρτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Λάθος,

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Η αλγεβρική μορφή του $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$ είναι $z = \chi + \psi \cdot i$ άρα θα είναι

$$\begin{cases} \chi = \lambda - 2 \\ \psi = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \chi + 2 \\ \psi = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \chi + 2 \\ \psi = 2\chi + 4 \end{cases} \text{ από την δεύτερη εξίσωση είναι}$$

προφανές ότι ο z «κινείται» στην ευθεία $\psi = 2\chi + 4$.

β. Έστω $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$, είναι $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2(\lambda - 2)$. Αν ισχύει

$z + \bar{z} = 2$ άρα θα είναι $2(\lambda - 2) = 2 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$ και επομένως

$$z = 1 + 6i. \text{ Άρα } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1 + 6i}{(1 + 6i)(1 - 6i)} = \frac{1 + 6i}{1^2 + 6^2} = \frac{1}{37} + \frac{6}{37}i \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{37}.$$

γ. Είναι $|z| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + 4\lambda^2}$. Αν $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 2)^2 + 4\lambda^2} = 2 \Leftrightarrow$

$$(\lambda - 2)^2 + 4\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(5\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases} \text{ και επειδή } \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ άρα } \lambda \neq 0, \text{ μένει } \lambda = \frac{4}{5}.$$

48.

ωανελλήνικες 2007 - Εωαναληωτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω $z_2 - z_1 = \kappa \in \mathbb{R}$ άρα $z_2 = z_1 + \kappa$.

$$\text{Από } z_2 = \frac{2 - \overline{z_1}}{2 + z_1} \Rightarrow \frac{2 - \overline{z_1}}{2 + z_1} = z_1 + \kappa \Leftrightarrow 2 - \overline{z_1} = 2z_1 + 2\kappa + z_1 \overline{z_1} + \kappa \overline{z_1} \Leftrightarrow$$

$$2 - \alpha + \beta i = 2\alpha + 2\beta i + 2\kappa + \alpha^2 + \beta^2 + \kappa\alpha - \kappa\beta i \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 2\kappa + \alpha^2 + \beta^2 + \kappa\alpha - 2 + \alpha - \kappa\beta i + 2\beta i - \beta i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha + \kappa\alpha + 2\kappa - 2 - \kappa\beta i + 2\beta i - \beta i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\kappa + 3)\alpha + 2(\kappa - 1) + \beta(1 - \kappa)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + (\kappa + 3)\alpha + 2(\kappa - 1) = 0 & (1) \\ 2(\kappa - 1) = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$H (2) \Leftrightarrow \kappa = 1 \text{ άρα } z_2 - z_1 = \kappa = 1$$

β. Από την (1) του **α.** ερωτήματος είναι $\alpha^2 + \beta^2 + (\kappa + 3)\alpha + 2(\kappa - 1) = 0$ και

$$\kappa = 1 \text{ άρα } \alpha^2 + \beta^2 + (1 + 3)\alpha + 2(1 - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha = 0 \quad (3).$$

Η (3) είναι της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A = 4, B = 0, \Gamma = 0$

και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 2^2 + 0^2 - 4 \cdot 0 = 4 > 0$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(-2, 0) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος κέντρου $K(-2, 0)$ και $\rho = 1$.

γ. $z_1^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + (\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι

$$\text{φανταστικός τότε } \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = \beta \end{cases}.$$

Η $\alpha = -\beta$ απορρίπτεται γιατί πρέπει $\alpha \cdot \beta > 0$, άρα $\alpha = \beta$ και επομένως ο

$$z_1 = \alpha + \alpha i \text{ και η (3) του ερωτήματος } \mathbf{\beta.} \text{ πιο πριν γίνεται } \alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -2 \end{cases}. \text{ Η } \alpha = 2 \text{ απορρίπτεται γιατί } \alpha \cdot \beta > 0$$

που σημαίνει ότι $\alpha \neq 0$ άρα $\alpha = -2$ και $z_1 = 2 + 2i$.

Λ ι β α δ ε ι ά

$$\text{Είναι } (z_1 + 1 + i) = (2 + 2i + 1 + i) = 3 + 3i \text{ και}$$

$$(\overline{z_1} + 1 - i) = (2 - 2i + 1 - i) = 3 - 3i \text{ άρα}$$

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = (3 + 3i)^{20} - (3 - 3i)^{20}$$

$$\text{Είναι } (3 + 3i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3i + (3i)^2 = 9 - 9 + 18i = 18i \text{ άρα}$$

$$(3 + 3i)^{20} = [(3 + 3i)^2]^{10} = (18i)^{10} \text{ και}$$

$$(3 - 3i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3i + (3i)^2 = 9 - 9 - 18i = -18i$$

$$(3 - 3i)^{20} = [(3 - 3i)^2]^{10} = (-18i)^{10} = (18i)^{10} .$$

$$\text{Επομένως } (z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z_1} + 1 - i)^{20} = (18i)^{10} - (18i)^{10} = 0 .$$

49.

Εξωεργασία 2007 - Εωαναληρωτικές

Τετάρτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. 1. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z - 1 + i| = |iz|$

α. i) $|z - 1 + i| = |iz| = |i||z| = |z| \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z| \quad (1) \Leftrightarrow$

$|z - (1 - i)| = |z - (0 + 0i)|$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M των μιγαδικών z είναι η μεσοκάθετος στο τμήμα AO , όπου $A(1, -1)$, $O(0, 0)$

ii) Αν στην (1) θέσεις όπου $z = \chi + \psi i$ έχεις $|\chi + \psi i - 1 + i| = |\chi + \psi i| \Leftrightarrow$

$$|(\chi - 1) + (\psi + 1)i| = |\chi + \psi i| \Leftrightarrow |(\chi - 1) + (\psi + 1)i|^2 = |\chi + \psi i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\chi - 1)^2 + (\psi + 1)^2 = \chi^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 + 2\psi + 1 = \chi^2 + \psi^2 \Leftrightarrow$$

$$-2\chi + 2\psi = -2 \Leftrightarrow \chi - \psi = 1 \Leftrightarrow \psi = \chi - 1 \quad (2).$$

Η απόσταση του Μ από το Ο είναι το $|z|$ άρα αν ο Μ απέχει από το Ο(0, 0)

$$\begin{aligned} \text{απόσταση ίση με } \sqrt{5} \text{ τότε } |z| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 5 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \chi^2 + (\chi - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \\ \chi^2 + \chi^2 - 2\chi + 1 = 5 & \quad 2\chi^2 - 2\chi - 4 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - \chi - 2 = 0. \text{ Η τελευταία έχει ρίζες} \\ \chi_1 = -1 \Rightarrow \psi_1 = -2 & \text{ και } \chi_2 = 2 \Rightarrow \psi_1 = 1. \end{aligned}$$

Άρα δύο σημεία απέχουν από την αρχή Ο(0, 0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$

β. Αν $\operatorname{Re}(z) = 0$ και στην (1) θέσεις όπου $z = \psi \cdot i$ έχεις $|\psi i - 1 + i| = |\psi i|$
 $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \psi = -1$ άρα $z = -i$.

50.

παυελλήνους 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 1. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και $z_3 = 1 + i$.

α. $|z_1|^2 = |i|^2 = 1$, $|z_2|^2 = |1|^2 = 1$, $|z_3|^2 = |1 + i|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ άρα

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2.$$

β. Έστω ότι για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$ (1), τότε

ι. Μπορείς να απαντήσεις με δυο τρόπους

1^{ος} τρόπος : Αντικαθιστάς στην (1) $z = \chi + \psi \cdot i$, $z_1 = i$, $z_2 = 1$ και έχεις :

$$\begin{aligned} |\chi + \psi \cdot i - i| &= |\chi + \psi \cdot i - 1| \Leftrightarrow |\chi + (\psi - 1)i|^2 = |(\chi - 1) + \psi \cdot i|^2 \Leftrightarrow \\ \chi^2 + (\psi - 1)^2 &= (\chi - 1)^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - 2\psi + 1 = \chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 \Leftrightarrow \\ -2\psi &= -2\chi \Leftrightarrow \chi = \psi \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z). \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος : η $|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |z - (0 + i)| = |z - (1 + 0i)|$ σημαίνει ότι ο z

βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος AB όπου $A(0, 1)$ και $B(1, 0)$ και όπως είναι φανερό το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και ορθογώνιο και η μεσοκάθετος στην AB θα είναι η διχοτόμος της γωνίας AOB δηλαδή η ευθεία $\psi = \chi$ άρα για τον z που βρίσκεται στην $\psi = \chi$ ισχύει $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$.

ii. Από το ερώτημα β. i. είναι $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ άρα ο $z = \chi + \chi \cdot i$ και επομένως

$$A = \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\chi + \chi \cdot i}{\chi - \chi \cdot i} + \frac{\chi - \chi \cdot i}{\chi + \chi \cdot i} = \frac{(\chi + \chi \cdot i)^2}{(\chi - \chi \cdot i)(\chi + \chi \cdot i)} + \frac{(\chi - \chi \cdot i)^2}{(\chi - \chi \cdot i)(\chi + \chi \cdot i)}$$

$$\frac{\chi^2 - \chi^2 + 2\chi^2 \cdot i + \chi^2 - \chi^2 - 2\chi^2 \cdot i}{(\chi - \chi \cdot i)(\chi + \chi \cdot i)} = 0.$$

51.

Πανελλήνιες 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β γ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω οι μιγαδικοί z και w για τους οποίους ισχύει :

$$\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6 \quad \text{και} \quad \left| w - (1 - i) \right| = \left| w - (3 - 3i) \right|.$$

α. $\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6 \Leftrightarrow \left| i + 2\sqrt{2} \right| |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} |z| = 6 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{9} |z| = 6 \Leftrightarrow 3 |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$, ακτίνα 2 και εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = 4$.

β. Στο ερώτημα αυτό μπορείς να απαντήσεις με δυο τρόπους.

1^{ος} τρόπος (γρήγορος): Σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου η εξίσωση $\left| w - (1 - i) \right| = \left| w - (3 - 3i) \right|$ παριστάνει **την μεσοκάθετη στο**

τμήμα AB , όπου $A(1, -1)$ και $B(3, -3)$.

2^{ος} τρόπος : Αν $w = \chi + \psi i$ τότε η $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$ γίνεται

$$|\chi + \psi i - (1 - i)| = |\chi + \psi i - (3 - 3i)| \Leftrightarrow$$

$$|(\chi - 1) + (\psi + 1)i| = |(\chi - 3) + (\psi + 3)i| \Leftrightarrow$$

$$|(\chi - 1) + (\psi + 1)i|^2 = |(\chi - 3) + (\psi + 3)i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\chi - 1)^2 + (\psi + 1)^2 = (\chi - 3)^2 + (\psi + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 + 2\psi + 1 = \chi^2 - 6\chi + 9 + \psi^2 + 6\psi + 9 \Leftrightarrow 4\chi - 4\psi - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi - \psi - 4 = 0.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η ευθεία με εξίσωση $\chi - \psi - 4 = 0$.

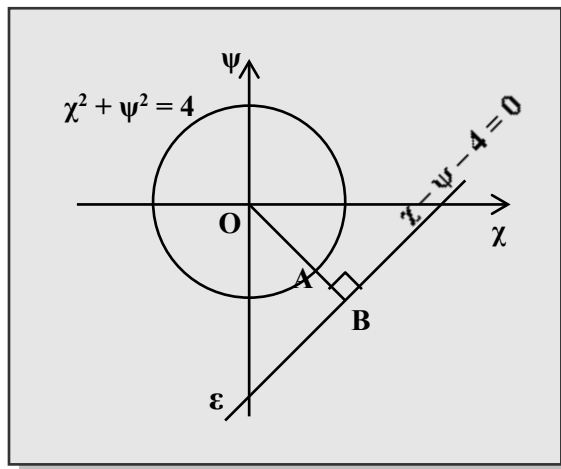
Ο δεύτερος τρόπος έχει λίγες περισσότερες πράξεις δίνει όμως καλλίτερα αποτελέσματα με την έννοια ότι έχεις στα χέρια σου την εξίσωση της ευθείας που είναι η αναλυτική έκφραση του Γεωμ. Τόπου, πράγμα που θα σου χρειαστεί για τα δυο επόμενα ερωτήματα.

γ. Επειδή $|w| = |\overline{OM}|$, όπου M η εικόνα του w ο οποίος κινείται στην ευθεία $\varepsilon: \chi - \psi - 4 = 0$.

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|w|$ θα είναι η απόσταση του O από την ευθεία

$$\text{δηλ } |w|_{\min} = d(O, \varepsilon) = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |w|_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

δ. Όλη η ιστορία στηρίζεται στο παρακάτω σχήμα



όπου ο μιγαδικός z κινείται στον κύκλο $\chi^2 + \psi^2 = 4$ και ο w στην ευθεία $\chi - \psi - 4 = 0$, οπότε ο μαθητής αυθαίρετα μα εντελώς αυθαίρετα θα πρέπει να δεχτεί ότι η ελάχιστη τιμή για το $|z - w|$ είναι η απόσταση AB όταν το OB είναι το κάθετο τμήμα από το O προς την ϵ οπότε

$$|z - w| = OB - OA = |w|_{\min} - \rho = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

52.

Εξωερινά 2008

Τετάρτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία.

B.

1. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

A. Μπορείς να απαντήσεις με δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι **η μια** ρίζα της εξίσωσης τότε ο

$z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$ θα είναι η άλλη ρίζα της, οπότε :

$$\begin{cases} z_1 + \overline{z_1} = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\lambda}{2} \\ z_1 \cdot \overline{z_1} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\mu}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} = 2 \\ \frac{\mu}{3} = |z_1|^2 = \left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -6, \mu = 6.$$

2^{ος} τρόπος Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι **η μια** ρίζα της εξίσωσης τότε θα

επαληθεύει την εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$ δηλαδή

$$3(1+i)^2 + \lambda(1+i) + \mu = 0 \Leftrightarrow 3(1+2i+i^2) + \lambda + \lambda i + \mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$3+6i-3+\lambda+\lambda i+\mu=0 \Leftrightarrow \lambda+\mu+(\lambda+6)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ \lambda+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -6, \mu = 6.$$

Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι **η μια** ρίζα της εξίσωσης τότε η άλλη είναι η

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - i.$$

Β. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha. z_1^2 = (1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1^2 + 2i - 1 = 2i$$

$$z_2^2 = (1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1^2 - 2i - 1 = -2i \text{ άρα } z_1^2 + z_2^2 = 2i - 2i = 0$$

$$\beta. z_1^{2008} = (z_1^2)^{1004} = (2i)^{1004} = 2^{1004} i^{1004} = 2^{1004} \text{ γιατί } i^{1004} = i^{4 \cdot 251} = i^{501} = 1$$

$$\text{όμοια } z_2^{2008} = (z_2^2)^{1004} = (-2i)^{1004} = 2^{1004} i^{1004} = 2^{1004} \text{ άρα}$$

$$z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1004} + 2^{1004} = 2 \cdot 2^{1004} = 2^{1005}.$$

53.

ωανελλήνικες 2008 - Εωαναληρωτικές

Πέμπτη 3 Ιουλίου

Γ. δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$z^2 + \beta z + \gamma = 0, \text{ όπου } \beta \text{ και } \gamma \text{ πραγματικοί αριθμοί.}$$

α. Στο ερώτημα μπορείς να απαντήσεις με δυο τρόπους :

1^{ος} τρόπος Αν ο αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι **η μια** ρίζα της εξίσωσης τότε ο

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ θα είναι η άλλη ρίζα της, οπότε από τους τύπους του}$$

$$\text{Vieta θα είναι : } \begin{cases} z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = -\frac{\beta}{1} = -\beta \\ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = \frac{\gamma}{1} = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\beta = 1 \\ \gamma = |z_1|^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\beta = -1 \text{ και } \gamma = 1.}$$

2^{ος} τρόπος Αν ο αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι **η μια** ρίζα της εξίσωσης τότε θα

επαληθεύει την εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ δηλαδή

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+2 \cdot 1 \cdot i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2}{4} + \frac{\beta + i\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} + \frac{\beta + i\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow 2i\sqrt{3} - 2 + 2\beta + 2i\beta\sqrt{3} + 4\gamma = 0 \Leftrightarrow 2(-1 + \beta + 2\gamma) + 2\sqrt{3}(1 + \beta)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1 + \beta + 2\gamma = 0 \\ 1 + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 1 + 2\gamma = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\beta = -1, \gamma = 1.}$$

Άρα η εξίσωση γίνεται $z^2 - z + 1 = 0$.

β. 1^{ος} τρόπος $z_1^3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{8} =$

$$\frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (-3) - i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{1-9}{8}$$

$$\Leftrightarrow z_1^3 = -1.$$

2^{ος} τρόπος αφού το z_1 είναι ρίζα της $z^2 - z + 1 = 0$ θα είναι $z_1^2 - z_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$(z_1 + 1)(z_1^2 - z_1 + 1) = 0 \Leftrightarrow z_1^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -1.$$

γ. $|w| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{2} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{2i\sqrt{3}}{2} \right| = |i\sqrt{3}| = |0+i\sqrt{3}| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow$

$|w| = \sqrt{3}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w

είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{3}$.

**Μην ανησυχείς... από την επόμενη εβδομάδα
στα καφέ θα σπέρνουνε φραπέ και θα φυτρώνουν Ευρώ
Σύλλογος προστασίας του δικαιώματος στην τεμπελιά ο «Αραχτός»**



Θ

έ

μ

Πανελλήνιες 1975 - 2008

τ

α

Κ

α

τ

ε

ύ

θ

υ

ν

σ

η

ς

Κεφάλαιο 2^ο

Όριο - Συνέχεια

✕
Όποιος με ευκολία σου τάζει ότι θες,
για εχθρό να τον λογιάζεις και όχι για φίλο.

Κεφάλαιο 2ο

Συναρτήσεις Όριο – Συνέχεια

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις	ΟΣΕ 135 –154
Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΟΣΘ 155 –188
Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλήνιων Εξετάσεων	ΟΣΑ 189 –222

Συντομογραφίες

- * * ΟΣΕ = Όριο – Συνέχεια σύντομη επανάληψη.
- * * ΟΣΘ = Όριο – Συνέχεια εκφωνήσεις θεμάτων.
- * * ΟΣΑ = Όριο – Συνέχεια απαντήσεις θεμάτων.

Εισαμάληψη

✕
Η εμπειρία δεν πωλείται ... αποκτιέται ...
ακριβώς γιατί είναι απολύτως προσωπική

Ορισμός :

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Παρατήρηση : Αν η f με πεδίο ορισμού A είναι συνάρτηση, και $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 = \chi_2$ τότε θα είναι και $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

Πεδίου ορισμού: Το πεδίο ορισμού είναι τόσο σημαντικό για τη λειτουργία μιας συνάρτησης όσο και ο τύπος της. Πολλές φορές σου δίνει τον τύπο μιας πραγματικής συνάρτησης χωρίς να σου δίνει το πεδίο ορισμού της. Αυτό δεν είναι και πολύ «σωστό» αλλά συμβαίνει. Όταν λοιπόν δεν σου δίνει το πεδίο ορισμού μιας **πραγματικής** συνάρτησης, θα το βρίσκεις εσύ, βρίσκοντας το σύνολο που έχει για στοιχεία του όλα τα $\chi \in \mathbb{R}$, για τα οποία η **$f(\chi)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.**

Για τις ανάγκες της εύρεσης του πεδίου ορισμού οι συναρτήσεις χωρίζονται στις πιο κάτω κατηγορίες:

1^η	Πολυωνυμική συνάρτηση : $P(\chi) = \alpha_n \chi^n + \alpha_{n-1} \chi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$
2^η	Ρητή συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$
3^η	Άρρητή συνάρτηση : $f(\chi) = \sqrt[n]{P(\chi)}$
4^η	Συνάρτηση που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς.
5^η	Συνάρτηση της μορφής $\psi = \log[P(\chi)]$ ή της μορφής $\psi = \ln[P(\chi)]$.
6^η	Συνάρτηση της μορφής $\psi = [P(\chi)]^{Q(\chi)}$.

1^{ον} Αν η συνάρτηση είναι **πολυωνυμική**, τότε το πεδίο ορισμού της είναι **όλο το $\mathbb{R}$.**

2^{ον} Αν η συνάρτηση είναι ρητή, δηλαδή $f(\chi) = \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ τότε το πεδίο ορισμού της είναι το **$\mathbb{R}$** αφού αφαιρέσεις τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Έστω $f(x) = \frac{11x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. Είναι $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Άρα Π Ο είναι το $A = \mathbf{R} - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

3^{ov} Αν η συνάρτηση είναι άρρητη, δηλαδή $f(x) = \sqrt{P(x)}$ τότε το πεδίο ορισμού της, θα είναι το διάστημα ή τα διαστήματα για τα οποία ισχύει : **$P(x) \geq 0$** .

Έστω $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Είναι $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Άρα πίνακας

προσήμου για το $x^2 - 3x + 2$ είναι:

$-\infty$	1	2	$+\infty$
+	-	+	

Άρα Π Ο είναι το $A = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

4^{ov} Αν η συνάρτηση είναι τριγωνομετρικής μορφής θα θυμάσαι τα εξής :

1. Η $f(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού : $A = \mathbf{R}$.
2. Η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού : $A = \mathbf{R}$.
3. Η $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει πεδίο ορισμού : $A = \mathbf{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, \kappa \in \mathbf{R}$.
4. Η $f(x) = \sigma\phi x$ έχει πεδίο ορισμού : $A = \mathbf{R} - \{ \kappa\pi \}, \kappa \in \mathbf{R}$.

5^{ov} Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $\psi = \log[P(x)]$ ή της μορφής $\psi = \ln[P(x)]$ τότε το πεδίο ορισμού της, θα είναι **το διάστημα ή τα διαστήματα** για τα οποία ισχύει : **$P(x) > 0$** .

1. Έστω $f(x) = \log(1 - 3x)$. Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει :

$$1 - 3x > 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ άρα πεδίο ορισμού το } A = \left(-\infty, \frac{1}{3} \right)$$

2. Έστω $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$. Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει :

$$x^2 + 3x + 2 > 0.$$

Είναι $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 3\chi + 2$ είναι:

$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
+	-	+	

Άρα Π Ο είναι το $A = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

3. Έστω $f(\chi) = \ln(\ln \chi)$. Για να έχει νόημα $f(\chi)$ πρέπει : $\chi > 0$ για να έχει νόημα ο $\ln \chi$ και ταυτόχρονα $\ln \chi > 0 \Leftrightarrow \ln \chi > \ln 1 \Leftrightarrow \chi > 1$ για να έχει νόημα ο $\ln(\ln \chi)$. Άρα πεδίο ορισμού το $A = (1, +\infty)$

6^ο Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $\psi = [P(\chi)]^{Q(\chi)}$ π χ της μορφής $\psi = [3\chi - 1]^{2+\chi}$, $\psi = [-7\chi + 2]^{\frac{3}{5}}$, $\psi = \chi^a$ με $a \in \mathbb{R}$, $\psi = \chi^\chi$ κ λ π, τότε το πεδίο ορισμού της, θα είναι **το διάστημα** ή τα διαστήματα για τα οποία ισχύει : $P(\chi) > 0$.

1. Έστω $f(\chi) = (2\chi + 5)^{3\chi}$.

Για να έχει νόημα η $f(\chi)$ πρέπει : $2\chi + 5 > 0 \Leftrightarrow 2\chi > -5 \Leftrightarrow \chi > -\frac{5}{2}$ άρα πεδίο

ορισμού το $A = \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

2. Έστω $f(\chi) = \chi^{3\chi}$.

Για να έχει νόημα η $f(\chi)$ πρέπει : $\chi > 0$ άρα πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

Αν ο **τύπος** μιας συνάρτησης **περιέχει** δυο ή **περισσότερες** από τις προηγούμενες 6 **μορφές**, βρίσκεις ξεχωριστά, το αντίστοιχο **διάστημα**, για την κάθε μορφή και έπειτα βρίσκεις την τομή όλων των διαστημάτων.

1. Να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \frac{1}{\ln(\chi+1)} + \sqrt{e^\chi - 2}$

Η παράσταση $\varphi(\chi)$ έχει νόημα, όταν :

- 1^ο έχει νόημα η $\ln(\chi + 1)$, δηλαδή $\chi + 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > -1 \Leftrightarrow \chi \in (-1, +\infty)$

- 2^ο $\ln(\chi + 1) \neq 0$ (λόγω παρονομαστή) άρα $\ln(\chi + 1) \neq \ln 1 \Leftrightarrow \chi + 1 \neq 1 \Leftrightarrow \chi \neq 0$.

- 3^ο $e^\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^\chi \geq 2 \Leftrightarrow \ln(e^\chi) \geq \ln 2$ (επειδή $\ln \chi$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση), άρα $\chi \geq \ln 2$

Άρα Π Ο το $A = (\ln 2, +\infty)$ (αφού $\ln 2 > 0 > -1$).

Προσοχή

α) Όταν έχεις να λύσεις ανισότητες της μορφής $e^{\varphi(\chi)} > \alpha$ τότε :

1. με $\alpha < 0$ είναι **ταυτότητα** (ενώ η $e^{\varphi(\chi)} < \alpha$ με $\alpha < 0$ είναι αδύνατη).
2. με $\alpha = 0 \Leftrightarrow e^{\varphi(\chi)} > 0$ είναι ταυτότητα (ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$)
3. με $\alpha > 0 \Leftrightarrow e^{\varphi(\chi)} > \alpha \Leftrightarrow \ln(e^{\varphi(\chi)}) > \ln \alpha \Leftrightarrow \varphi(\chi) > \ln \alpha \dots$

β) Όταν έχεις να λύσεις ανισότητες της μορφής $\ln(\varphi(\chi)) > \alpha$ τότε :

$$\ln(\varphi(\chi)) > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\varphi(\chi)) > \alpha \cdot \ln e \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\varphi(\chi)) > \ln(e^\alpha) \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\chi) > e^\alpha \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases}.$$

✓ Το πεδίο ορισμού θα το βρίσκεις **οπωσδήποτε** .

Ορισμοί

✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο $\mathbf{A}$ θα λέγεται **άρτια**

εάν Για κάθε $\chi \in \mathbf{A}$ 1) $-\chi \in \mathbf{A}$

και 2) $\varphi(-\chi) = \varphi(\chi)$.

✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο $\mathbf{A}$ θα λέγεται **περιττή**

εάν Για κάθε $\chi \in \mathbf{A}$ 1) $-\chi \in \mathbf{A}$

και 2) $\varphi(-\chi) = -\varphi(\chi)$.

Παρατήρηση Για να μπορέσεις να εξετάσεις αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή θα πρέπει το πεδίο ορισμού της να είναι συμμετρικό σύνολο ως προς το 0 δηλαδή για κάθε θετικό αριθμό που περιέχει να περιέχει και τον αντίθετό του αρνητικό αριθμό.

✓ Μια συνάρτηση φ λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει : Αν $\chi_1 < \chi_2$ τότε $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

✓ Μια συνάρτηση φ λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει : Αν $\chi_1 < \chi_2$ τότε $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

Αιτιολογία

- ✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$$\varphi(\chi_0) \geq \varphi(\chi) \text{ για κάθε } \chi \in A$$

- ✓ Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$$\varphi(\chi_0) \leq \varphi(\chi) \text{ για κάθε } \chi \in A.$$

- ✓ Αν το σύνολο A είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού τότε το ακρότατο ονομάζεται **τοπικό**, ενώ αν το σύνολο A είναι το πεδίο ορισμού τότε το ακρότατο ονομάζεται **ολικό**.

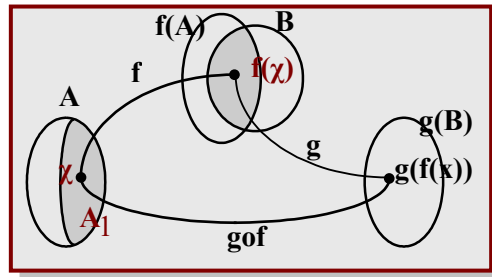
Ορισμός

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(\chi) = g(f(\chi))$.

Το **πεδίο ορισμού** της $g \circ f$ είναι το σύνολο :

$$A_1 = \{\chi \in A \text{ με } f(\chi) \in B\}.$$

Δηλαδή είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία $\chi \in A$ (του πεδίου ορισμού της f), για τα οποία το $f(\chi) \in B$ (στο πεδίο ορισμού της g).



Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

- ✓ Από την πιο πάνω εφαρμογή είναι φανερό ότι $g \circ f \neq f \circ g$. Γενικότερα μιλώντας, αν f και g είναι δυο συναρτήσεις τέτοιες ώστε να **ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$** , τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες.

Άρα δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.

- ✓ Αν f , g και h είναι τρεις συναρτήσεις και **ορίζεται** η $h \circ (g \circ f)$, τότε **ορίζεται** και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση $h \circ (g \circ f)$ τη λέμε σύνθεση των f , g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.

Μια συνάρτηση $\varphi : A \rightarrow B$ λέγεται **συνάρτηση 1 – 1** (ένα προς ένα), όταν για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$, τότε $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Όταν η **συνάρτηση f** είναι **1 – 1** θα ισχύει η **ισοδυναμία** :

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

S O S Όλες οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις, είναι **1 – 1**.

- ✓ Άρα όλες οι γνωστές **μονότονες** συναρτήσεις: $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $\varphi(x) = ax^3$ με $a \neq 0$, $g(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$, $h(x) = e^x$, $\theta(x) = \log x$, $\omega(x) = \ln x$ είναι συναρτήσεις **1 – 1**.
- ✓ Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι **1 – 1** αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως πx η συνάρτηση :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^x & \text{αν } x \leq 0 \\ \ln x & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

Προσοχή μέθοδος : Αν θες να δείξεις για μια συνάρτηση ότι είναι **1 – 1**, θα εξετάσεις την μονοτονία της και αν είναι γνησίως μονότονη θα είναι και **1 – 1**.

Διαφορετικά

Στην Πράξη : Ξεκινάς με το $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ και αν καταλήξεις σε $x_1 = x_2$ τότε η φ είναι **1 – 1**

Οι τρεις προτάσεις που ακολουθούν είναι ισοδύναμες και είναι αντίστοιχα η αλγεβρική, αναλυτική και η γεωμετρική εικόνα μιας συνάρτησης που είναι **1 – 1**.

1. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ είναι και $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Αιτιαδαιά

- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
- Κάθε ευθεία $// \chi'$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Άρα αν C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, τότε αυτές θα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = \chi$.

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως μονότονη** τότε είναι **1 – 1** και επομένως **ορίζεται η αντίστροφή της**, f^{-1} , η οποία, όπως αποδεικνύεται είναι **συνάρτηση** και έχει το **ίδιο είδος μονοτονίας** με την f .

Το **Πεδίο Ορισμού** της f είναι **Πεδίο τιμών** για την f^{-1} και **αντίστροφα**

Όριο Συνάρτησης

Προσοχή

- Είναι αυτονόητο πως **για να έχει νόημα** το όριο μια συνάρτησης φ όταν το $\chi \rightarrow \chi_0$, θα πρέπει η φ να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ για να μπορεί ο χ να «πλησιάζει» όσο κοντά θέλουμε το χ_0 .

Αποδεικνύεται πως το όριο μιας συνάρτησης φ είναι ανεξάρτητο από τα άκρα α, β , μας ενδιαφέρει γενικά να υπάρχει διάστημα «γύρω» από το χ_0 .

- Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση φ έχει **όριο** στο χ_0 , τότε αυτό είναι **μοναδικό** και συμβολίζεται με $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$.

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\left[\begin{array}{l} \alpha) \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (\varphi(\chi) - \lambda) = 0 \\ \beta) \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(\chi_0 + h) = \lambda \end{array} \right. .$$

- $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$ εάν και μόνον εάν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0^+} \varphi(\chi)$.

Θεώρημα 1**S O S**

Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda > 0$, τότε $\varphi(\chi) > 0$ σε μια περιοχή γύρω από το χ_0 .

Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda < 0$, τότε $\varphi(\chi) < 0$ σε μια περιοχή γύρω από το χ_0 .

Θεώρημα 2

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι :

1. Υπάρχουν τα όρια $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \geq \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.
2. $f(\chi) \geq g(\chi)$ για κάθε χ κοντά στο χ_0

Θεώρημα

Με την **προϋπόθεση** ότι υπάρχουν τα όρια : $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ ισχύει :

1. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) + g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) + \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.
2. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) \cdot g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.
3. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = \frac{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)}{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)}$, με την προϋπόθεση ότι : $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) \neq 0$.
4. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} |f(\chi)| = \left| \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \right|$.
5. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \sqrt[n]{f(\chi)} = \sqrt[n]{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)}$, με την προϋπόθεση $f(\chi) \geq 0$ κοντά στο χ_0 .

$$✓ \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (\kappa \cdot f(\chi)) = \kappa \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi), \quad \text{για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

$$✓ \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \left[(f(\chi))^v \right] = \left(\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \right)^v, \quad \text{για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

Επισημάνσεις:

- ✓ Σε κάθε περίπτωση πρέπει να εξασφαλίζεις πως υπάρχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ ή (α, χ_0) ή (χ_0, β) στο οποίο να ορίζονται και οι δυο συναρτήσεις f και g

Αιτιολογία

✓ Όταν υπάρχουν τα $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ τότε υπάρχει και το

$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) + g(\chi)), \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) \cdot g(\chi))$, το αντίθετο δεν ισχύει πάντα.

✓ Όταν είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} |f(\chi)| = \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε για το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ μπορεί να

συμβαίνει ένα από τα εξής :

α) $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \lambda$ β) $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = -\lambda$ γ) Να μην υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \chi^\nu = \chi_0^\nu$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} P(\chi) = P(\chi_0)$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$, $Q(\chi_0) \neq 0$,

$\lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\chi \eta \mu \frac{1}{\chi} \right) = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \eta \mu \chi = \eta \mu \chi_0$, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \eta \mu \chi = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \sigma \nu \chi = 1$

$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \chi}{\chi} = 1$, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \chi - 1}{\chi} = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta \mu(\alpha \cdot \chi)}{\beta \cdot \chi} = \frac{\alpha}{\beta}$

Κριτήρια παρεμβολής.

Αν για τις συναρτήσεις **f**, **g** και **h**, με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A, ισχύει

1. $h(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$
 2. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) = \lambda$ } τότε και: $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \lambda$

Όριο σύνθετης συνάρτησης.

Αν πρέπει να βρεις όρια της μορφής $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(g(\chi))$, μιας σύνθετης δηλαδή

συνάρτησης ($f \circ g$) στο σημείο χ_0 , τότε κάνεις αυστηρά τα εξής :

i) Θέτεις $u = g(\chi)$.

ii) Υπολογίζεις (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} u = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.

iii) Υπολογίζεις (αν υπάρχει) το $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(\chi) \neq u_0$ κοντά στο χ_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(g(\chi)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

✓ Αν έχεις να υπολογίσεις το όριο ρητής συνάρτησης $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, όπως πιο

πάνω, τότε βρίσκεις το Π Ο, βρίσκοντας τις **ρίζες** του παρονομαστή $Q(\chi)$ και διακρίνεις δυο περιπτώσεις :

α) Το $\chi \rightarrow \chi_0$ και χ_0 **δεν είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ ($Q(\chi_0) \neq 0$) τότε

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}.$$

β) Το $\chi \rightarrow \chi_0$ και χ_0 **είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ ($Q(\chi_0) = 0$) τότε

αν το χ_0 **είναι ρίζα** και του αριθμητή $P(\chi)$ ($P(\chi_0) = 0$), επειδή ισχύει ότι

«το χ_0 είναι ρίζα ενός πολωνύμου εάν και μόνον εάν το $\chi - \chi_0$ είναι

παράγοντας του πολωνύμου», παραγοντοποιείς αριθμητή και παρονομαστή

$$\text{και έχεις : } \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{(\chi - \chi_0)P_1(\chi)}{(\chi - \chi_0)Q_1(\chi)} = \frac{P_1(\chi)}{Q_1(\chi)}.$$

Την τελευταία διαδικασία την επαναλαμβάνεις διαρκώς, μέχρι το χ_0 να **μην**

είναι πλέον ρίζα του παρονομαστή οπότε και υπολογίζεις το

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{P_v(\chi_0)}{Q_v(\chi_0)}.$$

✓ **Παραστάσεις που περιέχουν ριζικά αλλάζουν, εντελώς, τη μορφή τους αν τις πολλαπλασιάσεις με μια ή περισσότερες συζυγείς παραστάσεις :**

✓ Η $\sqrt{a}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{a}$.

✓ Η $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

✓ Η $a \pm \sqrt{b}$ είναι συζυγής με την $a \mp \sqrt{b}$.

Αιτιαδειά

- ✓ Η $\sqrt[n]{\alpha} \pm \beta$ είναι συζυγής με την $\sqrt[n]{\alpha} \mp \beta$.
- ✓ Η $\sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[n]{\alpha^2} - \sqrt[n]{\alpha\beta} + \sqrt[n]{\beta^2}$.
- ✓ Η $\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\beta}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[n]{\alpha^2} + \sqrt[n]{\alpha\beta} + \sqrt[n]{\beta^2}$.
- ✓ Η $\sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[n]{\alpha^{v-\mu}}$.

Για τα άπειρα όρια αποδεικνύεται ότι :

- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = +\infty$, όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο χ_0 , θα είναι και $\varphi(\chi) > 0$.
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = -\infty$, όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο χ_0 , θα είναι και $\varphi(\chi) < 0$.
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = +\infty$, τότε θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} [-\varphi(\chi)] = -\infty$.
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = -\infty$, τότε θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} [-\varphi(\chi)] = +\infty$.
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \pm \infty$, τότε θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{\varphi(\chi)} = 0$
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = 0$, και $\varphi(\chi) > 0$, όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο χ_0 , θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{\varphi(\chi)} = +\infty$.
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = 0$, και $\varphi(\chi) < 0$, όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο χ_0 , θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{\varphi(\chi)} = -\infty$
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \pm \infty$, τότε θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} |\varphi(\chi)| = +\infty$
- ✓ Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = +\infty$, τότε θα είναι και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \sqrt[n]{\varphi(\chi)} = +\infty$

Super S O S για τις ασκήσεις

Με εφαρμογή των πιο πάνω ιδιοτήτων προκύπτει ότι :

✓

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi^2} = +\infty$$

και γενικά

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi^{2\kappa}} = +\infty$$

✓

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\chi^3} = +\infty$$

γενικά

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\chi^{2\kappa+1}} = +\infty$$

✓

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi^3} = -\infty$$

γενικά

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi^{2\kappa+1}} = -\infty$$

Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει το :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi^3} \text{ ούτε και γενικότερα το } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi^{2\kappa+1}}$$

Όπως και στην περίπτωση που το όριο της φ είναι αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι και στην

περίπτωση που το όριο της φ είναι άπειρο $\left(\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \pm \infty \right)$ **ισχύουν**

αντίστοιχες ιδιότητες για τις πράξεις αρκεί βέβαια να μπορούν να εκτελεστούν δεξ τους επόμενους πίνακες με το τι ισχύει ακριβώς.

Αν στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ το						
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ είναι :	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} [f(\chi) + g(\chi)]$ είναι	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	X	X

Αν στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ το										
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ είναι :	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ είναι :	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} [f(\chi) \cdot g(\chi)]$ θα είναι :	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	X	X	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- ✓ Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει X , σημαίνει ότι το όριο δεν μπορεί να υπολογισθεί με απ' ευθείας εφαρμογή των ιδιοτήτων. Σ' αυτές περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** ή **απροσδιοριστία** .

- ✓ Το αντίστοιχο όριο μπορεί και να υπάρχει, εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που έχεις, επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις **θα προσπαθείς** να το υπολογίσεις με άλλον τρόπο κάνοντας πρώτα πράξεις και μετασχηματισμούς στη παράσταση που έχεις.

Η διαδικασία αυτή λέγεται **άρση της απροσδιοριστίας**.

- ✓ Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων αντίστοιχα είναι οι :

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

- ✓ Επειδή $f - g = f + (-g)$ και $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι :

$$(+\infty) - (+\infty)$$

$$\frac{0}{0} \text{ και } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Προσοχή δεν είναι απροσδιοριστία πχ το $\frac{0}{\pm\infty}$ ή το $\frac{\pm\infty}{0}$, απροσδιοριστίες

είναι μόνο τα $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και αυτό προς το παρόν, γιατί αργότερα στο 2^ο κεφάλαιο θα μάθουμε τρόπο για να αίρουμε και αυτές τις απροσδιοριστίες .

Με την επιφύλαξη της πιο πάνω παρατήρησης για το τι είναι και τι δεν είναι απροσδιοριστία, για το πηλίκο συναρτήσεων ισχύει ο συνοπτικός πίνακας :

Αν στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ το			
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ είναι :	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$ ή $\pm \infty$	$\pm \infty$
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$ είναι :	$\pm \infty$	0	$\beta \in \mathbb{R}$ $\beta \neq 0$
$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ θα είναι :	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$

Όριο Συνάρτησης στο άπειρο

✓ Ισχύει :

Super **S O S** για τις ασκήσεις

•

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^v = +\infty$$

και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^v} = 0$$

•

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi^v = \begin{cases} +\infty & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } v \text{ περιτός} \end{cases}$$

και

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\chi^v} = 0$$

Για την **πολυωνυμική συνάρτηση**

• $P(\chi) = \alpha_v \chi^v + \alpha_{v-1} \chi^{v-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} P(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} (\alpha_v \chi^v)$$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi} = 0$, ενώ **δεν υπάρχουν τα όρια** : $\begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \eta\mu\chi \\ \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \sigmaυν\chi \end{cases}$.

Για την **Ρητή συνάρτηση**

• $\Phi(\chi) = \frac{\alpha_v \chi^v + \alpha_{v-1} \chi^{v-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0}{\beta_\mu \chi^\mu + \beta_{\mu-1} \chi^{\mu-1} + \dots + \beta_1 \chi + \beta_0}$, $\alpha_v, \beta_\mu \neq 0$, ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \Phi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{\alpha_v \chi^v}{\beta_\mu \chi^\mu} \right) = \lim_{\chi \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{\alpha_v}{\beta_\mu} \chi^{v-\mu} \right)$$

Το όριο μιας ρητής συνάρτησης $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ είναι :

- i) **0** αν ο βαθμός του αριθμητή $<$ από το βαθμό του παρονομαστή.
- ii) **Το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων**
αν ο βαθμός του αριθμητή $=$ με το βαθμό του παρονομαστή.
- iii) **$+\infty$ ή $-\infty$** αν ο βαθμός του αριθμητή $>$ από το βαθμό του παρονομαστή.

Επειδή το όριο ρητής συνάρτησης εξαρτάται από το βαθμό των όρων του κλάσματος θα **παρατηρείς** μήπως **οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων εξαρτώνται από παράμετρο**, οπότε η λύση της άσκησης θα ξεκινά με την διερεύνηση : **ποιες τιμές της παραμέτρου μηδενίζουν τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων ;**

✓ Για την **Εκθετική συνάρτηση** $\Phi(\chi) = a^\chi$ ισχύει :

i) $a > 1$ $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \Phi(\chi) = 0$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \Phi(\chi) = +\infty$.

ii) $0 < a < 1$ $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \Phi(\chi) = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \Phi(\chi) = 0$

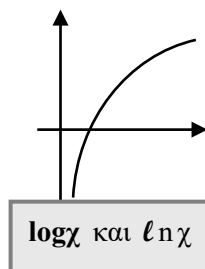
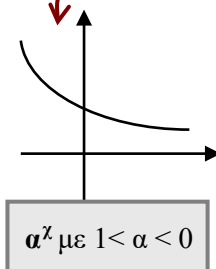
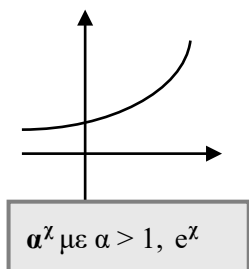
✓ Ειδικά για την **Εκθετική συνάρτηση** $\Phi(\chi) = e^\chi$ ισχύει :

$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} e^\chi = 0$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^\chi = +\infty$.

✓ Για τις **Λογαριθμικές συναρτήσεις** $\begin{cases} \Phi(\chi) = \log \chi \\ \Phi(\chi) = \ln \chi \end{cases}$ ισχύει :

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \Phi(\chi) = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0} \Phi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \Phi(\chi) = -\infty$.

Τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής τα θυμάσαι πιο καλά αν έχεις στο μυαλό σου τις γραφικές παραστάσεις τους



Συνέχεια μιας συνάρτησης φ στο χ_0 .

Έστω μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $\chi_0 \in A$.

Θα λέμε ότι η φ είναι συνεχής στο χ_0 , όταν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \varphi(\chi_0)$.

✓ Ενώ το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$, κάτω από προϋποθέσεις, υπάρχει και όταν το

$\chi_0 \notin A$, η συνέχεια μιας συνάρτησης έχει νόημα μόνον αν $\chi_0 \in A$.

✓ Μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $\chi_0 \in A$ όταν :

iii) Δεν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$.

iv) Υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi)$ αλλά είναι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \neq \varphi(\chi_0)$.

✓ Γεωμετρικά, η συνέχεια μιας συνάρτησης στο χ_0 σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_φ της φ , δεν διακόπτεται πουθενά, παρά μόνο στα σημεία ή στα διαστήματα που « λείπουν » από το πεδίο ορισμού της

✓ Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $\chi_0 \in \mathbb{R}$

Ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} P(\chi) = P(\chi_0)$.

✓ Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε χ_0 του πεδίου

ορισμού της ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \left(\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} \right) = \frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$.

✓ Οι συναρτήσεις $f(\chi) = \eta\mu\chi$ και $g(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ είναι συνεχείς, αφού για

κάθε $\chi_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \eta\mu\chi = \eta\mu\chi_0$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi_0$.

✓ Οι συναρτήσεις $f(\chi) = a^\chi$ με $0 < a \neq 1$, $\varphi(\chi) = e^\chi$ και $g(\chi) = \ell n \chi$ είναι συνεχείς.

Αιτιαδαιά

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Από τον ορισμό της συνέχειας στο χ_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο χ_0 , τότε και οι συναρτήσεις :

$f + g$, $\kappa \cdot f$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ με $g(\chi_0) \neq 0$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$ είναι επίσης συνεχείς στο χ_0 , με την προϋπόθεση, βέβαια ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το χ_0 .

Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα δηλαδή μπορεί πχ το άθροισμα $f + g$ να είναι συνεχής συνάρτηση αλλά αυτό δεν σημαίνει πως σίγουρα και η f και η g είναι συνεχείς συναρτήσεις.

✓ Από των συνδυασμό των πιο πάνω προκύπτει ότι :

Οι συναρτήσεις $f(\chi) = \epsilon\phi\chi$ και $g(\chi) = \sigma\phi\chi$ είναι συνεχείς ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

✓ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(\chi_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο χ_0 .

✓ Μια συνάρτηση ϕ θα την λέμε **συνεχή σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

✓ Μια συνάρτηση ϕ θα την λέμε **συνεχή σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} \phi(\chi) = \phi(\alpha)$$

και

$$\lim_{\chi \rightarrow \beta^-} \phi(\chi) = \phi(\beta)$$

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

Θεώρημα του Bolzano ... Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης

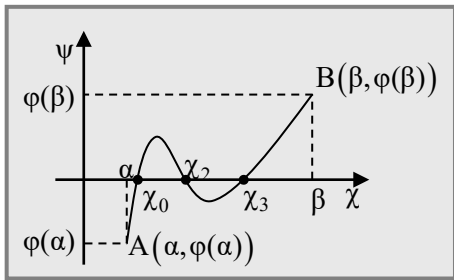
φ στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, \varphi(a))$

και $B(\beta, \varphi(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του

άξονα χ , αφού $\varphi(a) < 0$ και $\varphi(\beta) > 0$,

η γραφική παράσταση της φ θα τέμνει

τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Έστω μια συνάρτηση φ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν η φ είναι **συνεχής** στο $[a, \beta]$ (στο κλειστό) και, επιπλέον,

ισχύει $\varphi(a) \cdot \varphi(\beta) < 0$,

τότε **υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\chi_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $\varphi(\chi_0) = 0$.**

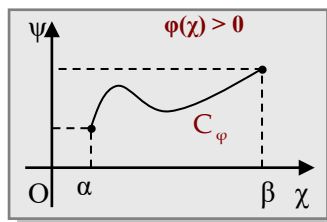
Ή αλλιώς πως η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Παρατηρήσεις

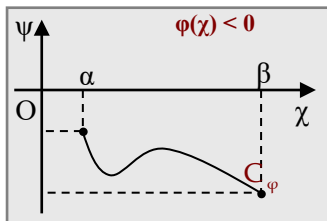
Από το θεώρημα του Bolzano είναι φανερό ότι :

Μια συνάρτηση φ που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή

✓ ή θα είναι θετική για κάθε $\chi \in \Delta$ και η γραφική της παράσταση C_φ θα βρίσκεται **ολόκληρη πάνω από τον χ** .



✓ ή θα είναι αρνητική για κάθε $\chi \in \Delta$ και η γραφική της παράσταση C_φ θα βρίσκεται **ολόκληρη κάτω από τον χ** .

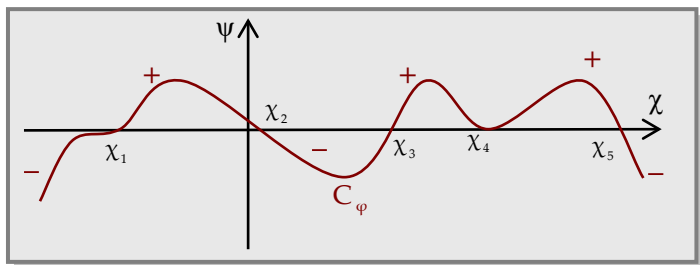


Γενικά δηλαδή μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ που δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε **διατηρεί το πρόσημο της** σ' ολόκληρο το διάστημα Δ .

Αιτιαδαιά

****** Αν δεν ισχύει έστω και μια από τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano τότε δεν μπορείς να βγάλεις κανένα συμπέρασμα για την συνάρτηση.

- ✓ Μια συνεχής συνάρτηση **φ διατηρεί το πρόσημο της** σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της (δες προσεκτικά το σχήμα).



Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση **φ** , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα **$[a, b]$** .

Αν η **φ** είναι **συνεχής** στο **$[a, b]$** (στο κλειστό) και, επιπλέον, ισχύει **$\varphi(a) \neq \varphi(b)$** , τότε για **κάθε αριθμό η** μεταξύ των $\varphi(a)$ και $\varphi(b)$ **υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $\chi_0 \in (a, b)$** τέτοιο, ώστε : **$\varphi(\chi_0) = \eta$** .

Ή αλλιώς πως η εξίσωση $\varphi(\chi) = \eta$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

ΘΕΩΡΗΜΑ Μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν **φ** είναι μια συνεχής συνάρτηση στο **$[a, b]$** , τότε η **φ** παίρνει στο **$[a, b]$** μια μέγιστη τιμή **M** και μια ελάχιστη τιμή **m** .

Δηλαδή, υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε να ισχύει , αν $m = \varphi(\chi_1)$ και

$M = \varphi(\chi_2)$ τότε **$m \leq \varphi(\chi) \leq M$** , για κάθε $\chi \in [a, b]$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

1^{ον} Αν μια συνάρτηση **φ** είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα **(a, b)** , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το

διάστημα **(A, B)** , όπου **$A = \lim_{\chi \rightarrow a^+} \varphi(\chi)$** και **$B = \lim_{\chi \rightarrow b^-} \varphi(\chi)$** .

2^{ον} Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (β, α) .

Αν η **συνάρτηση φ** είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει **$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \leq 0$** και όχι **$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$** , όπως απαιτεί το **Θ. Bolzano**, τότε εξετάζεις δυο περιπτώσεις :

- ✓ Αν **$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = 0$** τότε **$\varphi(\alpha) = 0$** ή **$\varphi(\beta) = 0$** και είναι προφανές πως η **$\varphi(\chi)$** έχει μια τουλάχιστον λύση : **α ή β** .
- ✓ Αν **$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$** τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο $[\alpha, \beta]$ οπότε η **$\varphi(\chi) = 0$** έχει μια τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα **(α, β)** .

Εκφωνήσεις Θεμάτων

1.

παυελλήνικες 1978**ΘΕΜΑ 3^ο**

- i) Να δώσετε τον ορισμό του ορίου συνάρτησης $\varphi(\chi)$ όταν : $\chi \rightarrow \chi_0$ η συνάρτηση φ έχει όριο τον πραγματικό αριθμό λ .
- ii) Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού αυτού.
- iii) Να βρείτε, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των ορίων, το όριο

$$\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 3\chi + 20}{3\chi - 4} .$$

2.

παυελλήνικες 1979**ΘΕΜΑ 3^ο**

- i) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της ; Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σ' ένα διάστημα .
- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση φ που δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \chi^2 \eta \mu \frac{1}{\chi} & \text{αν } \chi \neq 0 \\ 0 & \text{αν } \chi = 0 \end{cases} \quad \text{είναι συνεχής.}$$

3.

παυελλήνικες 1980**ΘΕΜΑ 2^ο**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} \frac{|\chi|(\chi-1)}{\chi} & \text{αν } \chi \neq 0 \\ 1 & \text{αν } \chi = 0 \end{cases} .$$

- i) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να γίνει η γραφική παράσταση της.
- ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\chi + \sqrt{\chi^2 + 2\chi + 3} \right) .$

4.

παυελλήμνες 1981**ΘΕΜΑ 1^ο**

A) Να βρεθεί το όριο $\lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{|\chi| - 1}$

B) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi^2 + \chi - 2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow -2} \varphi(\chi)$.

5.

παυελλήμνες 1982**ΘΕΜΑ 1^ο**

α) Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις πραγματικών αριθμών $h(\chi)$ και $g(\chi)$ έχουν όριο τον ίδιο πραγματικό αριθμό κ καθώς το χ «τείνει» στο $+\infty$. Αν για την συνάρτηση $f(\chi)$ ισχύει $h(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$ να αποδειχθεί ότι η $f(\chi)$ έχει όριο τον ίδιο πραγματικό αριθμό κ καθώς το χ «τείνει» στο $+\infty$.

β) Να υπολογισθεί το $\lim_{v \rightarrow +\infty} A$ όπου $A = \sqrt[3]{3^v + 5^v + 7^v}$ $v = 1, 2, 3, \dots$

(Υπενθυμίζεται ότι : $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ όταν $v \rightarrow \infty$, με $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$)



Στο θέμα έγινε «κατάλληλη» προσαρμογή για να ταιριάζει με τη σημερινή ύλη.

ΘΕΜΑ 3^ο

Η συνάρτηση g ορίζεται από τον τύπο $g(\chi) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\chi^{2v+1} + \chi^2}{\chi^{2v} + 1}$,

με $v = 1, 2, 3, \dots$ και $\chi \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $\chi = 1$ και $\chi = -1$

Το θέμα αναφέρεται για ιστορικούς, κυρίως, λόγους, αλλά και «**προς γνώσιν και συμμόρφωση**» που έλεγαν και παλιά και δεν πρόκειται να αναπτυχθεί.

Λι β α δ ε ι ά

Το 1983 άρχισε το σύστημα με τις Δέσμες που σε πολλά σημεία έμοιαζε με το σημερινό.

Περίπου η Α Δέσμη = Θετική και Δ Δέσμη = Τεχνολογική Κατεύθυνση

6.

ωανελλήνικες 1983 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

- i) Αν f, g δυο συναρτήσεις με $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \alpha$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} g(\chi) = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) \cdot g(\chi)) = \alpha \cdot \beta$.

- ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\chi^3} \left(\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi \right) \right]$.

7.

ωανελλήνικες 1983 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

- A) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της ;
- B) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

i)
$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{4\chi^2 - 9\chi + 2}{\chi - 2} & \text{αν } \chi \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{αν } \chi = 2 \end{cases} \text{ στο } \chi_0 = 2.$$

ii)
$$g(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{αν } \chi \geq 0 \\ \frac{1}{\chi} & \text{αν } \chi < 0 \end{cases} \text{ στο } \chi_0 = 0.$$

8.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1984 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

- i) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < |\alpha| < 1$ να αποδείξετε ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \alpha^\chi = 0$.
- ii) Αν $|\lambda| < 2$ να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^\chi + 2^{\chi+1}}{2\lambda^\chi - 3 \cdot 2^{\chi-1}}$.

Το θέμα ήταν διατυπωμένο με ακολουθίες αλλά επειδή έχει ενδιαφέρον αναφέρεται κατάλληλα προσαρμοσμένο.

9.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1984 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

- i) Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού της ένα σύνολο A υποσύνολο του $\mathbb{R}$, που περιέχει ένα διάστημα (α, β) , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και έστω χ_0 ένα από τα άκρα του διαστήματος (α, β) .
- Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο χ_0 το $+\infty$ και τι εννοούμε όταν λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο χ_0 το $-\infty$;
- ii) Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής χ με $\psi(\chi) = \frac{2\chi - 10}{5 - \sqrt{5}\chi}$. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 5} \psi(\chi)$.

10.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1985 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

- α) Έστω μια συνάρτηση f . Αν υπάρχουν δυο άλλες συναρτήσεις h και g με κοινό όριο, τέτοιες ώστε να είναι $h(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$ τότε και η f έχει το ίδιο όριο.
- β) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(\chi) = \sqrt[3]{\chi^2 - 2\chi + 3}$ καθώς το $\chi \rightarrow +\infty$.

Λιβαδειά

11.

ωαυελλήυες 1985 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$.

Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς :

- i) Πότε η f λέγεται άρτια
- ii) Πότε η f λέγεται περιττή
- iii) Πότε η f λέγεται περιοδική
- iv) Πότε η f λέγεται φραγμένη άνω και
- v) Πότε η f λέγεται φραγμένη κάτω

12.

ωαυελλήυες 1986 Α Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα Δ και έστω $\chi_0 \in \Delta$.

Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς :

- i) Πότε η f λέγεται συνεχής στο χ_0 ;
- ii) Πότε η f λέγεται συνεχής αριστερά στο χ_0 ;
- iii) Πότε η f λέγεται συνεχής δεξιά στο χ_0 ;

B) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(\chi) = \begin{cases} 3\alpha e^{\chi+1} + \chi & \text{αν } \chi \leq -1 \\ 2\chi^2 - \alpha\chi + 3\beta & \text{αν } -1 < \chi < 0 \text{ να είναι συνεχής στο } \mathbb{R} . \\ \beta \eta \mu \chi + \alpha \sigma \nu \chi + 1 & \text{αν } 0 \leq \chi \end{cases}$$

13.

ωαυελλήμυες 1987 Α Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

i) Αν $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \varphi(\chi) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\varphi(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, να δείξετε

$$\text{ότι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(\chi)} = 0$$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20}$

14.

ωαυελλήμυες 1987 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 1^ο

Το 1987 υπήρχαν από αυτό το κεφάλαιο μόνο οι ορισμοί αύξουσας, φθίνουσας και γνήσια αύξουσας, γνήσια φθίνουσας συνάρτησης

15.

ωαυελλήμυες 1989 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{B. Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(\chi) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{\chi^3} + 1 & \text{αν } 0 < \chi \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{\chi - 1}}{\chi^2 - 4} & \text{αν } \chi > 2 \end{cases}.$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2$

ωαυελλήυες 1995 Α Δέση

16.

ΘΕΜΑ 1^ο

- B. β)** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2 + i \cdot f(\alpha)$, $w = f(\beta) + i \cdot \beta^2$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$.
Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

17.

ωαυελλήυες 1995 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. α.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\chi_0) = \eta$.

18.

ωαυελλήυες 1996 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 1^ο

- B.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
α. Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

19.

ωανελλήνικες 1998 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 1^ο****Β.** Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$f(f(\chi)) + f^3(\chi) = 2\chi + 3, \chi \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι «ένα προς ένα»**β.** Να λύσετε την εξίσωση $f(2\chi^3 + \chi) = f(4 - \chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Την δεκαετία 1990 – 1999 δεν υπήρξε άλλο θέμα μόνον με όρια και συνέχεια, υπήρξαν ερωτήματα που περιείχαν τέτοια θέματα, αλλά το κύριο ερώτημα αφορούσε άλλο κεφάλαιο και έτσι προτίμησα να τα «δούμε» στα επόμενα κεφάλαια.

ωανελλήνικες με το νέο σύστημα

Το 1999 αρχίζει, από την Β' Λυκείου, η εφαρμογή του «νέου» συστήματος και το 2000 εφαρμόζεται και στους μαθητές της Γ'.

Στο νέο σύστημα γίνεται μια προσπάθεια να γίνουν οι εξετάσεις πιο «αντικειμενικές». Αυτό γίνεται με δυο, κυρίως, τρόπους :

1^ο Με την εφαρμογή των ερωτήσεων «ανοικτού τύπου», όπως ερωτήσεις Σωστού – Λάθους, Αντιστοίχισης κλπ και την ταυτόχρονη αλλαγή στις ασκήσεις πλήρους ανάπτυξης, οι οποίες τώρα διατυπώνονται όχι πια με ένα τελικό ερώτημα (συνήθως και με στρυφνό τρόπο διατυπωμένο) αλλά με μια σειρά από ερωτήματα τα οποία, τελικά, οδηγούν στο τελικό ερώτημα.

2^ο Με σχετικά πιο ορθολογική διαμόρφωση των θεμάτων όσων αφορά τον βαθμό δυσκολίας αλλά και την μορφή τους, πχ το 1^ο περιλαμβάνει θεωρία το 2^ο είναι άσκηση – εφαρμογή της θεωρίας κλπ.

Παράλληλα συνεχίζονται για λίγο και οι εξετάσεις «παλιού τύπου» γι' αυτό και υπάρχουν κάποια "διπλά θέματα".

20.

Πανελλήνιες 2000 Τεχνολογική κατεύθυνση

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(\chi) = \begin{cases} \chi^2 - 8\chi + 16 & \text{αν } 0 < \chi < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(\chi - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-\chi} & \text{αν } \chi \geq 5 \end{cases}$$

- i) Να βρεθούν τα $\lim_{\chi \rightarrow 5^-} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi)$

Μονάδες 6

- ii) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 5$

Μονάδες 10

- iii) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος ii) να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi)$

Μονάδες 9

21.

Εσπερινά 2000 - Θετικής

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - \chi}{\chi - 1} & , \chi < 1 \\ \alpha\chi - 2\alpha + 3 & , \chi \geq 1 \end{cases}$$

- α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 13

- β. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi)$

Μονάδες 12

22.

ωανελλήνικες 2000 – ΤΕΛ

Παρασκευή 23 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

B. Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4x-12}$

β) Το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

23.

ωανελλήνικες 2000 – Εωσυναληθτικές Θετικές

Παρασκευή 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^οΔίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για

την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\ln 2x} = 5$

α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

24.

ωανελλήνικες 2001 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^οA. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος ώστε να

ισχύει $f(x_0) = \xi$.

25.

Εσωτερικά 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $2 - \chi^4 \leq f(\chi) \leq 2 + \chi^4$,
για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(0) = 2$

Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 9

26.

Πανελλήνιες 2001 Θετική κατεύθυνση

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Το θέμα που υπήρχε σ' αυτές τις εξετάσεις και αφορούσε τα όρια χρειαζόταν κανόνες L' Hospital για το θέμα αυτό δεξ στο επόμενο κεφάλαιο περί παραγώγων.

27.

Πανελλήνιες 2001 – ΤΕΛ

Σάββατο 16 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 9}{\chi + 3}, & \chi \neq -3 \\ \alpha, & \chi = -3 \end{cases}$.

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = -3$.

28.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 5 Ιουλίου

Το 2001 υπάρχουν κάποιες ερωτήσεις που αφορούν αυτό το κεφάλαιο αλλά, επειδή αποτελούν ενότητα με τις υπόλοιπες θα τις δούμε μαζί στα επόμενα κεφάλαια.

29.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

- B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[α, β]$ και συνεχής στο $(α, β]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[α, β]$ μία μέγιστη τιμή.
Μονάδα 1
- β.** Κάθε συνάρτηση, που είναι $1 - 1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
Μονάδα 1
- γ.** Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $χ_0$ και $\lim_{χ \rightarrow χ_0} |f(χ)| = 0$ τότε $\lim_{χ \rightarrow χ_0} f(χ) = 0$
Μονάδα 1
- ε.** Αν $\lim_{χ \rightarrow χ_0} f(χ) > 0$ τότε $f(χ) > 0$ κοντά στο $χ_0$.
Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι $1 - 1$.

- α.** Να δείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

Μονάδες 7

Λιβαδερά

30.

Εβδομημιά 2002**Τετάρτη 5 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 3^ο**

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο χ_0 , τότε ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) + g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) + \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) .$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο χ_0 , τότε ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) \cdot g(\chi)) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} & \text{αν } \chi < 2 \\ -\chi^2 + \kappa & \text{αν } \chi \geq 2 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε :

α. Το κ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2$

Μονάδες 7

β. Το όριο $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi)$.

Μονάδες 5

31.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002 – ΤΕΕ

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

- α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- β. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

32.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.
- β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

- ε. Η Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Μονάδες 2

33.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

Δεν υπήρχε θέμα που να αφορά το κεφάλαιο αυτό

34.

Πανελλήνιες 2003 – ΤΕΕ

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 + 6\chi - 7}{\chi - 1}, & \chi \neq 1 \\ \lambda - 2, & \chi = 1 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

β) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 + 6\chi - 7}{\chi - 1}$.

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

35.

Πανελλήνιες 2003 – Εσωτερικά ΤΕΕ

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 9}{\chi^2 - 3\chi}$

β) $\lim_{\chi \rightarrow 9} \frac{\sqrt{\chi} - 3}{\chi - 9}$

36.

Εσωτερικά 2003

Τετάρτη 25 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο χ_0 , τότε ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = \frac{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)}{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)}, \text{ εφόσον είναι } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) \neq 0.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{2\}$

- α. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi}$,

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} \chi^2 & \text{αν } \chi < 5 \\ 10\chi - 25 & \text{αν } \chi \geq 5 \end{cases}$ και το σημείο $\chi_0 = 5$.

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\chi_0 = 5$

Μονάδες 5

37.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΕΞΕΤΑΣΗ

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = 0$.

Μονάδες 5

38.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \ell$ αν και μόνο αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0^-} f(\chi) = \ell$

Μονάδες 2

39.

ΕΞΩΤΕΡΝΙΚΑ 2004

Παρασκευή 4 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} 4\chi^2 + 3 & \text{αν } \chi < 1 \\ 6\chi + \kappa & \text{αν } \chi \geq 1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}.$

α. Να βρείτε το κ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$
Μονάδες 10

40.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - ΤΕΕ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{2\chi - 18}{\sqrt{\chi} - 3}, & \chi > 9 \\ \lambda\chi + 3, & \chi \leq 9 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}.$

α) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 9^-} f(\chi).$

β) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 9^+} f(\chi).$

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 9.$

41.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 – ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΤΕΕ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{3\chi^2 - 9\chi}{\chi - 3}$

Μονάδες 10

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \begin{cases} \chi^3 - 1 & , \chi \leq 1 \\ \lambda \chi^2 - \lambda^2 & , \chi > 1 \end{cases}$.

1) Να υπολογιστεί το $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi)$.

Μονάδες 4

2) Να υπολογιστεί το $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi)$.

Μονάδες 4

3) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 7

42.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 – ΕΩΝΑΛΗΘΕΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές, οι συνθέσεις δηλαδή, είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = \chi$ που διχοτομεί τις γωνίες

$\angle XO\Psi$ και $\angle X'O\Psi'$.

Μονάδες 2

Λιβαδειά

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο χ_0 , τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \sqrt[k]{f(\chi)} = \sqrt[k]{\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)}$,

εφόσον $f(\chi) \geq 0$ κοντά στο χ_0 με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$.

Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ (1) και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$ (2), να αποδείξετε ότι :

α. $|z| = 1$.

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$.

Μονάδες 5

γ. Η εξίσωση $\chi^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 9

43.

Εσωτερικά 2004 - Εωαναληωτικές

Τετάρτη 7 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \sqrt{4\chi^2 + 1} + 2\chi$, $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 1}{\chi} = 2.$

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το : $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi).$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{\alpha\chi^2 + \beta\chi + 3}{\chi - 2}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$

και ισχύει η σχέση : $f(3) + 3f(1) = 0.$

α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha = 1$ και $\beta = 0.$

Μονάδες 9

44.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον

$\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε : $f(\chi_0) = \eta.$

Μονάδες 9

A. 2 Πότε η ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Λιβαδεία

- α.** Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $ξ \in (α, β)$ ώστε $f(ξ) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$.
Μονάδες 2
- β.** Αν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) + g(\chi))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.
Μονάδες 2
- γ.** Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $\psi = \chi$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
Μονάδες 2
- δ.** Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = 0$ και $f(\chi) > 0$ κοντά στο χ_0 , τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{f(\chi)} = +\infty$.
Μονάδες 2
- στ.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $\chi \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $\chi \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
Μονάδες 2

45.

Εβδομαστιά 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.
- 1.** Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow P$ λέγεται συνάρτηση 1 — 1, όταν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $\chi_1 \neq \chi_2$, τότε $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$.

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(\chi_0)$, όταν $f(\chi) < f(\chi_0)$ για κάθε $\chi \in A$.

Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο χ_0 και ισχύει $f(\chi) \leq g(\chi)$ κοντά στο χ_0 , τότε $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \geq \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi)$.

Μονάδες 2

46.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΤΕΕ

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1}, & \chi < -1 \\ \kappa\chi + \mu, & -1 \leq \chi \leq 1 \quad \text{όπου } \kappa, \mu \in \mathbb{R}. \\ \chi^2 + 2\chi + 5 + \ln\chi, & \chi > 1 \end{cases}$

- α) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow -1^-} f(\chi)$.
- β) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow -1^+} f(\chi)$.
- γ) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi)$.
- δ) Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi)$.
- ε) Να βρείτε τα κ, μ , ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα τα $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi)$ και $\lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi)$.

47.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΤΕΕ

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 2x + 1, & x > 2 \end{cases}.$$

- α) Να υπολογιστούν τα: $f(0)$ και $f(3)$
- β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
- γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
- δ) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

48.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. 2 Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται «1 – 1» ;

Μονάδες 4

- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Δείξτε ότι η f είναι 1 – 1”.

Μονάδες 7

Αφορά, προφανώς άλλο κεφάλαιο, αλλά αναφέρεται γιατί χρειάζεται στην απάντηση του επόμενου ερωτήματος που αφορά αυτό το κεφάλαιο .

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$

και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8)) = -2$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι : $f(0) = 0$

Μονάδες 4

49.

Εσωτερικά 2005 – Εωαναληωτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

2. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 3

Β. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

3. Αν $\chi \neq 0$, τότε ισχύει: $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi^2} = -\infty$

Μονάδες 2

Λιβαδεϊά

5. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (\kappa \cdot f(\chi)) = \kappa \cdot \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi)), \text{ για κάθε σταθερά } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \begin{cases} -\chi^3 + 1, & \chi < 1 \\ \chi^4 - 1, & \chi \geq 1 \end{cases}.$

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 6

50.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο χ_0 , τότε ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} |f(\chi)| = \left| \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) \right|$$

Μονάδες 2

5. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

51.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- β.** Αν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) > 0$ τότε $f(\chi) > 0$ κοντά στο χ_0 .
- γ.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

Μονάδες 2

52.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι Λανθασμένη.

1. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $\chi_0 \in \Delta$.

Έστω επίσης $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$.

$$\text{Αν } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = +\infty \quad \text{τότε} \quad \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{1}{f(\chi)} = -\infty$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\chi + \lambda, & \chi \leq 1 \\ \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi}, & \chi > 1 \end{cases}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Ι.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 10

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 – ΕΩΝΑΛΗΝΩΤΙΚΕΣ

Λιβαδε

53.

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ είναι 1 – 1 και μόνο αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(\chi) = \psi$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς χ .

Μονάδες 2

54.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

β) Έστω μία συνάρτηση f και το σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της.

Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο χ_0 ;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

3. Αν $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) < 0$, τότε $f(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0 .

Μονάδες 2

55.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο

Δαμιανός Μωραΐτης

τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο χ_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο χ_0 .

Μονάδες 2

- ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \alpha^\chi = 0$.

Μονάδες 2

56.

Εβδομησινά 2007**Τετάρτη 30 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A.2. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

- B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι Λανθασμένη.

2. Μια συνάρτηση f είναι $1 - 1$, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $\chi'\chi$) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) < 0$, τότε $f(\chi) < 0$ κοντά στο χ_0 .

Μονάδες 2

4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

57.

Πανελλήνιες 2007 - Εσθνααληστικές

ίδες 2

Τρίτη 3 Ιουλίου

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το

διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi)$ και $B = \lim_{\chi \rightarrow \beta^-} f(\chi)$.

Μονάδες 2

58.

Εξωτερικά 2007 – Εδαναληωτικές

Τετάρτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ) , αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ) , αν αυτή είναι Λανθασμένη.

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $\chi'\chi$, της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

3. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof) = (hog)of$

Μονάδες 2

59.

ωανελλήνες 2007 – Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 1^ο

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

2. Ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sin \chi - 1}{\chi} = 1$.

Μονάδες 2

60.

Πανελλήνιες 2008**Σάββατο 24 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(\chi)) = \chi, \chi \in A \quad \text{και} \quad f^{-1}(f(\psi)) = \psi, \psi \in f(A).$$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

61.

Εσπερινά 2008**Τετάρτη 28 Μαΐου**

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Έστω f μια συνάρτηση και χ_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της .

Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο χ_0 ;

Μονάδες 6

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ) , αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ) , αν αυτή είναι Λανθασμένη.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $\chi \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $\chi \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
Μονάδες 3

62.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1 - 1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (f(\chi) - \ell) = 0$

Μονάδες 2

Αυταπάτες

1.

ωαυελλήυυεσ 1978**ΘΕΜΑ 3^ο**

- i) Θεωρία .
- ii) Θεωρία .
- iii) Αν $\varphi(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 20}{3\chi - 4}$, είναι Π Ο το $A = \mathbb{R}$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 3} (3\chi - 4) = 9 - 4 = 5 \neq 0$ άρα : $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 3\chi + 20}{3\chi - 4} = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 20}{3 \cdot 3 - 4} =$

$$\frac{9 - 9 + 20}{9 - 4} = \frac{20}{5} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi^2 - 3\chi + 20}{3\chi - 4} = 4.$$

2.

ωαυελλήυυεσ 1979**ΘΕΜΑ 3^ο**

- i) Θεωρία.
- ii) Έστω η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi) = \begin{cases} \chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} & \text{αν } \chi \neq 0 \\ 0 & \text{αν } \chi = 0 \end{cases}$.

$$\text{Είναι } |\varphi(\chi)| = \left| \chi^2 \eta\mu \frac{1}{\chi} \right| = |\chi^2| \left| \eta\mu \frac{1}{\chi} \right| = \chi^2 \left| \eta\mu \frac{1}{\chi} \right| \leq \chi^2 \Leftrightarrow |\varphi(\chi)| \leq \chi^2 \Leftrightarrow$$

$$-\chi^2 \leq \varphi(\chi) \leq \chi^2.$$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} (-\chi^2) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^2 = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \varphi(\chi) = 0 \text{ οπότε } \lim_{\chi \rightarrow 0} \varphi(\chi) = 0 = \varphi(0).$$

Άρα η φ είναι συνεχής.

3.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1980

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|(x-1)}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Ο τύπος της f ισοδύναμα γράφεται : $f(x) = \begin{cases} \frac{-x(x-1)}{x} & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \\ \frac{x(x-1)}{x} & \text{αν } x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \\ x-1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

ι) Για να μελετήσεις τη συνέχεια πρέπει να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και για να βρεις το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ πρέπει να βρεις τα πλευρικά όρια.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x+1) = 1$ άρα

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ άρα

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$ ως ρητή και
- Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ γιατί δεν υπάρχει το όριο στο σημείο αυτό.

Επειδή η f είναι «τριπλού» τύπου θα χαραζεις ξεχωριστά τα τρία κομμάτια της Γραφικής παράστασης

- Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) = -x+1$ άρα θα έχει Γ Π μια ημιευθεία, την οποία για να βρεις θα δώσεις δυο τιμές στο x (που ανήκουν σ' αυτό το διάστημα) π.χ. $x = -1$ και $x = -2$ οπότε ισχύει ο

πίνακας αντίστοιχων τιμών

x	-1	-2
$f(x)$	2	3

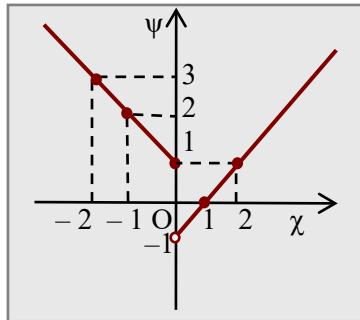
Διευθυντής Μωραΐτης

- Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f(x) = x - 1$ άρα θα έχει Γ Π μια ημιευθεία, την οποία για να βρεις θα δώσεις δυο τιμές στο x (που ανήκουν σ' αυτό το διάστημα) πχ $x = 1$ και $x = 2$

οπότε ισχύει ο πίνακας αντίστοιχων τιμών

x	1	2
$f(x)$	0	1

Άρα η Γ Π θα είναι κάπως έτσι



- ii) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = +\infty$ και $-\infty + \infty$

είναι ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ για να βρεις το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right)$ θα

πολλαπλασιάσεις και θα διαιρέσεις με τη συζυγή της παράσταση οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x \right)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x}$$

και επειδή $x \rightarrow +\infty$ άρα μπορείς να υποθέσεις ότι $x > 0$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi \left(2 + \frac{3}{\chi} \right)}{\chi \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + 1 \right)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{\chi}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}} + 1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\chi + \sqrt{\chi^2 + 2\chi + 3} \right) = 1.$$

4.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1981

ΘΕΜΑ Ι'

A) Έστω $\varphi(\chi) = \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{|\chi| - 1}$. Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow -1^-} (|\chi| - 1) = 0$ θα

προσπαθήσεις να απλοποιήσεις την φ .

Επειδή $\chi \rightarrow -1^-$, άρα $\chi \rightarrow -1$ και $\chi < -1 \Leftrightarrow \chi < 0$, άρα η φ γράφεται

$$\varphi(\chi) = \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{-\chi - 1} = \frac{(\chi - 1)^2}{-(\chi + 1)}. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{|\chi| - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{(\chi - 1)^2}{-(\chi + 1)} = - \left[\lim_{\chi \rightarrow -1^-} (\chi - 1)^2 \lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{1}{(\chi + 1)} \right] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{|\chi| - 1} = -[4(-\infty)] = +\infty$$

B) Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi^2 + \chi - 2}$.

i) Για το πεδίο ορισμού της φ έχεις : $\chi^2 + \chi - 2 = 0$, $\Delta = 9$ άρα ρίζες $\rho_1 = -2$, $\rho_2 = 1$, επομένως το ΠΟ είναι το **A = R - {-2, 1}**, άρα έχει νόημα το $\lim_{\chi \rightarrow -2} \varphi(\chi)$.

ii) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow -2} (\chi^2 + \chi - 2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 4 = 0$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow -2} (\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1 =$$

$$-8 - 4 - 2 - 1 = -15 \neq 0 \text{ επομένως}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -2} \varphi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi^2 + \chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{(\chi - 1)(\chi + 2)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi - 1} \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{1}{\chi + 2}.$$

$$\checkmark \text{ Είναι } \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi - 1} = \frac{(-2)^3 - (-2)^2 + (-2) - 1}{(-2) - 1} = \frac{-8 - 4 - 2 - 1}{-3} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^3 - \chi^2 + \chi - 1}{\chi - 1} = -\frac{15}{3}.$$

$$\checkmark \text{ Το } \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{1}{\chi + 2} \text{ δεν υπάρχει} \left(\text{είναι της μορφής } \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\chi} \right),$$

άρα **δεν υπάρχει το** $\lim_{\chi \rightarrow -2} \varphi(\chi)$.

5.

ωαυελλήμυες 1982

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Θεωρία κριτήριο παρεμβολής.

$$\beta) \text{ Είναι } \sqrt[3]{7^v} < \sqrt[3]{3^v + 5^v + 7^v} < \sqrt[3]{3 \cdot 7^v} \Leftrightarrow 7 < \sqrt[3]{3^v + 5^v + 7^v} < 7 \cdot \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} 7 < \lim_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3^v + 5^v + 7^v} < \lim_{v \rightarrow +\infty} (7 \cdot \sqrt[3]{3}) \text{ και}$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} 7 = 7, \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} (7 \cdot \sqrt[3]{3}) = 7 \lim_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3} = 7, \text{ από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής θα είναι και } \lim_{v \rightarrow +\infty} A = \lim_{v \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3^v + 5^v + 7^v} = 7$$

6.

ωαυελλήμυες 1983 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

i) Θεωρία.

$$\text{ii) Αν θέσεις } \varphi(\chi) = \sqrt{\chi^3} \left(\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi \right) \text{ τότε } \varphi(\chi) = \sqrt{\chi^3} \left(\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi \right) =$$

Λιβαδεϊά

$$\frac{\sqrt{\chi^3}(\sqrt{\chi^2+1}-\chi)(\sqrt{\chi^2+1}+\chi)}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi} = \frac{\sqrt{\chi^3}(\chi^2+1-\chi^2)}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi} = \frac{\sqrt{\chi^3}}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi} =$$

$$\frac{|\chi|\sqrt{\chi}}{|\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+\chi}, \text{ επειδή } \chi \rightarrow +\infty \text{ μπορείς να υποθέσεις ότι } \chi > 0 \text{ άρα}$$

$$\varphi(\chi) = \frac{|\chi|\sqrt{\chi}}{|\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+\chi} = \frac{\chi\sqrt{\chi}}{\chi\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+\chi} = \frac{\chi\sqrt{\chi}}{\chi\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)} = \frac{\sqrt{\chi}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)} \dots$$

$$\text{Άρα είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\chi^3}(\sqrt{\chi^2+1}-\chi) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\chi}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}+1\right)} = \frac{+\infty}{+2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\chi^3}(\sqrt{\chi^2+1}-\chi) \right] = +\infty$$

7.

Πανελλήνιες 1983 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

A) Θεωρία .

B) i) Το $4\chi^2 - 9\chi + 2$ έχει $\Delta = \dots 81 - 32 = 49$ άρα ρίζες

$$\rho_1 = \frac{1}{4} \text{ και } \rho_2 = 2, \text{ άρα } 4\chi^2 - 9\chi + 2 = 4(\chi - 2)\left(\chi - \frac{1}{4}\right) = (\chi - 2)(4\chi - 1).$$

$$\text{Είναι } f(\chi) = \begin{cases} \frac{4\chi^2 - 9\chi + 2}{\chi - 2} & \text{αν } \chi \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{αν } \chi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{(\chi - 2)(4\chi - 1)}{\chi - 2} & \text{αν } \chi \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{αν } \chi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(\chi) = \begin{cases} 4\chi - 1 & \text{αν } \chi \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7 & \text{αν } \chi = 2 \end{cases}.$$

Στο $\chi_0 = 2$ είναι $f(2) = 7$ και $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} (4\chi - 1) = 7$. **άρα η f συνεχής.**

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\text{ii)} \quad \text{Αν } g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad \text{τότε είναι } g(0) = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \text{ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ άρα η g **ασυνεχής** στο $x_0 = 0$.

8.

Πανελλήνιες 1984 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

i) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0 < |\alpha| < 1$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.

Τώρα είναι τύπος χωρίς απόδειξη στη Θεωρία.

$$\text{ii)} \quad \text{Αν θέσεις } \varphi(x) = \frac{\lambda^x + 2^{x+1}}{2\lambda^x - 3 \cdot 2^{x-1}} \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{2^x \left(\frac{\lambda^x}{2^x} + 2 \right)}{2^x \left(2 \frac{\lambda^x}{2^x} - \frac{3}{2} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{\frac{\lambda^x}{2^x} + 2}{2 \frac{\lambda^x}{2^x} - \frac{3}{2}} \quad \text{και } |\lambda| < 2 \quad \text{άρα } \frac{|\lambda|}{2} < 1 \quad \text{τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^x = 0$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x + 2^{x+1}}{2\lambda^x - 3 \cdot 2^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\lambda^x}{2^x} + 2}{2 \frac{\lambda^x}{2^x} - \frac{3}{2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x}{2^x} + 2}{2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^x}{2^x} - \frac{3}{2}} = \frac{0 + 2}{0 - \frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

9.

Πανελλήνιες 1984 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

i) Θεωρία.

ii) Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x

Λι β α δ ε ι ά

$$\text{με } \psi(\chi) = \frac{2\chi - 10}{5 - \sqrt{5\chi}} \text{ τότε } \psi(\chi) = \frac{2(\chi - 5)(5 + \sqrt{5\chi})}{(5 - \sqrt{5\chi})(5 + \sqrt{5\chi})} = \frac{2(\chi - 5)(5 + \sqrt{5\chi})}{25 - 5\chi} =$$

$$\frac{2(\chi - 5)(5 + \sqrt{5\chi})}{5(5 - \chi)} = -\frac{2(5 + \sqrt{5\chi})}{5}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 5} \psi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 5} \left(-\frac{2(5 + \sqrt{5\chi})}{5} \right) = -\frac{2(5 + \sqrt{5 \cdot 5})}{5} = -\frac{2(5 + 5)}{5} = -4$$

άρα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 5} \psi(\chi) = -4$.

10.

Πανελλήνιες 1985 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

- α) Έστω μια συνάρτηση f . Αν υπάρχουν δυο άλλες συναρτήσεις h και g με κοινό όριο, τέτοιες ώστε να είναι $h(\chi) \leq f(\chi) \leq g(\chi)$, τότε και η f έχει το ίδιο όριο (Θεωρία).
- β) Επειδή $\chi^2 - 2\chi + 3 = \chi^2 - 2\chi + 1 + 2 = (\chi - 1)^2 + 2 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα έχει νόημα το όριο και είναι :

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{\chi^2 - 2\chi + 3} = \sqrt{\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^2 - 2\chi + 3)} =$$

$$\sqrt{\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^2} = \sqrt{+\infty} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = +\infty.$$

11.

Πανελλήνιες 1985 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

- α. Για τα i) ii) iii) Δες Θεωρία, τα iv) και v) είναι Θεωρία εκτός ύλης.

12.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1986 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3

Α) Θεωρία

Β) Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση :

$$f(\chi) = \begin{cases} 3\alpha e^{\chi+1} + \chi & \text{αν } \chi \leq -1 \\ 2\chi^2 - \alpha\chi + 3\beta & \text{αν } -1 < \chi < 0 \\ \beta\eta\mu\chi + \alpha\sigma\upsilon\nu\chi + 1 & \text{αν } 0 \leq \chi \end{cases} \quad \text{πρέπει να είναι συνεχής}$$

στο 0 και στο -1 άρα $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = f(0)$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow -1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} f(\chi) \quad \text{άρα}$$

$$\checkmark \begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\beta\eta\mu\chi + \alpha\sigma\upsilon\nu\chi + 1) = \beta\eta\mu 0 + \alpha\sigma\upsilon\nu 0 + 1 = \alpha + 1 \\ \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (2\chi^2 - \alpha\chi + 3\beta) = 2 \cdot 0^2 - \alpha \cdot 0 + 3\beta = 3\beta \end{cases} \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) \Leftrightarrow \alpha + 1 = 3\beta \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow -1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} (2\chi^2 - \alpha\chi + 3\beta) = 2 \cdot (-1)^2 - \alpha \cdot (-1) + 3\beta = \alpha + 3\beta + 2 \\ \lim_{\chi \rightarrow -1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} (3\alpha e^{\chi+1} + \chi) = 3\alpha e^{-1+1} - 1 = 3\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\text{άρα } \lim_{\chi \rightarrow -1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} f(\chi) \Leftrightarrow \alpha + 3\beta + 2 = 3\alpha - 1 \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta = 3 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα. Από την (2) με αντικατάσταση του 3β

$$\text{έχεις } 2\alpha - (\alpha + 1) = 3 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

$$\text{Οπότε η (1) γίνεται } 4 + 1 = 3\beta \Leftrightarrow 3\beta = 5 \Leftrightarrow \beta = \frac{5}{3}.$$

13.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1987 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

i) Τύπος στη θεωρία (χωρίς απόδειξη)

ii) Επειδή

Λιβαδειά

$\left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20} =$
 $(+\infty - (+\infty))(+\infty)$, είναι ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ. Θα απλοποιήσεις πρώτα τον
 τύπο της συνάρτησης.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \varphi(\chi) &= \left(\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \left(\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} + \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20}}{\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} + \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3}} = \\ &= \frac{\left((7\chi^4 + 6\chi + 5) - (7\chi^4 + 3\chi + 3) \right) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20}}{\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} + \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3}} = \\ &= \frac{(7\chi^4 + 6\chi + 5 - 7\chi^4 - 3\chi - 3) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20}}{\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} + \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3}} = \\ &= \frac{(3\chi + 2) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20}}{\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} + \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3}} = \frac{\chi \left(3 + \frac{2}{\chi} \right) \cdot \sqrt{\chi^2 \left(63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2} \right)}}{\sqrt{\chi^4 \left(7 + \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4} \right)} + \sqrt{\chi^4 \left(7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4} \right)}} = \\ &= \frac{\chi \left(3 + \frac{2}{\chi} \right) \cdot |\chi| \sqrt{63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2}}}{\chi^2 \sqrt{7 + \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4}} + \chi^2 \sqrt{7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4}}} \end{aligned}$$

Και επειδή $\chi \rightarrow +\infty$ άρα μπορείς να υποθέσεις ότι $\chi > 0$ άρα $|\chi| = \chi$ έτσι η

$$\begin{aligned} \text{συνάρτηση γίνεται } \varphi(\chi) &= \frac{\chi \left(3 + \frac{2}{\chi} \right) \cdot \chi \sqrt{63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2}}}{\chi^2 \sqrt{7 - \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4}} + \chi^2 \sqrt{7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4}}} \Leftrightarrow \\ \varphi(\chi) &= \frac{\chi^2 \left(3 + \frac{2}{\chi} \right) \sqrt{63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2}}}{\chi^2 \left(\sqrt{7 + \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4}} \right)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\varphi(\chi) = \frac{\left(3 + \frac{2}{\chi}\right) \sqrt{63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2}}}{\sqrt{7 + \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4}}} \quad \text{και επομένως :}$$

$$\left(\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{\chi}\right) \sqrt{63 - \frac{5}{\chi} + \frac{20}{\chi^2}}}{\sqrt{7 + \frac{6}{\chi^3} + \frac{5}{\chi^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{\chi^3} + \frac{3}{\chi^4}}} = \frac{(3+0)\sqrt{(63-0+0)}}{\sqrt{7+0+0} + \sqrt{7+0+0}} = \frac{3\sqrt{63}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{9}\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{7\chi^4 + 6\chi + 5} - \sqrt{7\chi^4 + 3\chi + 3} \right) \cdot \sqrt{63\chi^2 - 5\chi + 20} = \frac{9}{2}.$$

14.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1987 Δ Δέση

Υπήρχαν μόνο Ορισμοί.

15.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1989 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο**B)** Για να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2$ η συνάρτηση :

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{\chi^3} + 1 & \text{αν } 0 < \chi \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{\chi - 1}}{\chi^2 - 4} & \text{αν } \chi > 2 \end{cases} \quad \text{πρέπει } \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = f(2).$$

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{\chi - 1}}{\chi^2 - 4}$, επειδή μηδενίζεται και ο παρονομαστής

αλλά και ο αριθμητής όταν $\chi \rightarrow 2$ άρα θα πολλαπλασιάσεις με την συζυγή

$$\text{παράσταση : } \frac{1 - \sqrt{\chi - 1}}{\chi^2 - 4} = \frac{(1 - \sqrt{\chi - 1})(1 + \sqrt{\chi - 1})}{(\chi^2 - 4)(1 + \sqrt{\chi - 1})} = \frac{(1 - (\chi - 1))}{(\chi - 2)(\chi + 2)(1 + \sqrt{\chi - 1})} =$$

Λιβαδερά

$$\frac{(2-\chi)}{(\chi-2)(\chi+2)(1+\sqrt{\chi-1})} = \frac{-(\chi-2)}{(\chi-2)(\chi+2)(1+\sqrt{\chi-1})} = \frac{-1}{(\chi+2)(1+\sqrt{\chi-1})}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{1-\sqrt{\chi-1}}{\chi^2-4} = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{-1}{(\chi+2)(1+\sqrt{\chi-1})} = \frac{-1}{4(1+\sqrt{2-1})} = \frac{-1}{4 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{Είναι, από τον τύπο της συνάρτησης, } \lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \left(\frac{3\alpha}{\chi^3} + 1 \right) = \frac{3\alpha}{8} + 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) \Leftrightarrow -\frac{3\alpha}{8} + 1 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 3\alpha - 8 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

ελληνικές 1995 Α Δέσμη

16.

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. β) Αν $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ τότε

$$\left| f(\beta) + i \cdot \beta^2 \right|^2 + \left| \alpha^2 + i \cdot f(\alpha) \right|^2 = \left| (f(\beta) + i \cdot \beta^2) - (\alpha^2 + i \cdot f(\alpha)) \right|^2.$$

$$\text{Άρα } f^2(\beta) + \beta^4 + \alpha^4 + f^2(\alpha) = (f(\beta) - \alpha^2)^2 + (\beta^2 - f(\alpha))^2 \text{ άρα}$$

$$f^2(\beta) + \beta^4 + \alpha^4 + f^2(\alpha) = f^2(\beta) - 2f(\beta)\alpha^2 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\beta^2 f(\alpha) + f^2(\alpha) \text{ άρα}$$

$$-2f(\beta)\alpha^2 - 2\beta^2 f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\beta)\alpha^2 + f(\alpha)\beta^2 = 0 \quad (1).$$

Επειδή $\alpha \cdot \beta \neq 0$ άρα $\alpha^2 > 0$ και $\beta^2 > 0$, ως τετράγωνα μη μηδενικών αριθμών,

άρα η (1) μπορεί να ισχύει για δυο λόγους :

✓ $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ οπότε τα α και β είναι ρίζες της $f(\chi) = 0$ ή

✓ $f(\alpha)$ και $f(\beta) \neq 0$ οπότε $f(\beta)\alpha^2 + f(\alpha)\beta^2 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} f(\alpha) = 0$

Που σημαίνει πως τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι **ετερόσημοι αριθμοί**.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \cdot f(β) < 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α, β) \subseteq [α, β]$.

Παρατήρηση Όταν «μιλάει» για ρίζα σε κλειστό διάστημα $[α, β]$ υπαινίσσεται ότι ρίζες μπορεί να είναι και τα άκρα, οπότε θα κάνεις διερεύνηση τι γίνεται στα άκρα $α$ και $β$.

17.

παυελλήνους 1995 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

A. α. Θεωρία

18.

παυελλήνους 1996 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Για $x > 0$ είναι $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \lambda x}{x} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} + \lambda \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lambda, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lambda \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda = \sqrt{1+0} + \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda + 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

19.

παυελλήνους 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ άρα $\begin{cases} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \\ f^3(x_1) = f^3(x_2) \end{cases},$

επειδή **f συνάρτηση** και με πρόσθεση κατά μέλη θα έχεις

Λι β α δ ε ι ά

$$f(f(\chi_1)) + f^3(\chi_1) = f(f(\chi_2)) + f^3(\chi_2) \text{ άρα } 2\chi_1 + 3 = 2\chi_2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\chi_1 = \chi_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι } 1 - 1 .$$

$$\beta. \text{ Αφού η } f \text{ είναι } 1 - 1 \text{ άρα } f(2\chi^3 + \chi) = f(4 - \chi) \Leftrightarrow 2\chi^3 + \chi = 4 - \chi \Leftrightarrow$$

$$2\chi^3 + 2\chi - 4 = 0 \Leftrightarrow \chi^3 + \chi - 2 = 0 \text{ η τελευταία έχει ρίζα το } \rho = 1 \text{ άρα με βάση το}$$

σχήμα Horner για το $P(\chi) = \chi^3 + \chi - 2$, θα έχουμε

1	0	1	-2	$\rho = 1$
↓				
1	1	2	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi) = \chi^3 + \chi - 2$ με το διώνυμο $\chi - 1$ είναι

$$\pi(\chi) = \chi^2 + \chi + 2 \text{ δηλαδή είναι } \chi^3 + \chi - 2 = (\chi^2 + \chi + 2)(\chi - 1), \text{ άρα}$$

$$\chi^3 + \chi - 2 = 0 \Leftrightarrow (\chi^2 + \chi + 2)(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \chi^2 + \chi + 2 = 0 \end{cases} \text{ και επειδή η}$$

$$\chi^2 + \chi + 2 = 0 \text{ δεν έχει ρίζες } (\Delta = -7) \text{ άρα μοναδική λύση η } \chi = 1.$$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΜΕ ΤΟ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

20.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 Τεχνολογική κατεύθυνση

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

i) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 5^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 5} (\chi^2 - 8\chi + 16) = 25 - 40 + 16 = 1$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 5} ((\alpha^2 + \beta^2) \ln(\chi - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-\chi}) =$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \lim_{\chi \rightarrow 5} \ln(\chi - 5 + e) + 2(\alpha + 1) \lim_{\chi \rightarrow 5} (e^{5-\chi}) =$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \ln(5 - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-5} = \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + 1) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ii) Για να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 5$ η συνάρτηση πρέπει :

$$\lim_{\chi \rightarrow 5^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 5^+} f(\chi) = f(5) \text{ άρα } \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \quad \beta = 0.$$

iii) Για τις τιμές των $\alpha = -1$, $\beta = 0$ του ερωτήματος ii) είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(((-1)^2 + 0^2) \ln(\chi - 5 + e) + 2(-1 + 1)e^{5-\chi} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\ln(\chi - 5 + e)) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\ln \chi) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = +\infty$$

21.

Εξωτερινά 2000 - Θετικής

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Είναι } f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - \chi}{\chi - 1} & , \chi < 1 \\ \alpha\chi - 2\alpha + 3 & , \chi \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi(\chi - 1)}{\chi - 1} & , \chi < 1 \\ \alpha\chi - 2\alpha + 3 & , \chi \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(\chi) = \begin{cases} \chi & , \chi < 1 \\ \alpha\chi - 2\alpha + 3 & , \chi \geq 1 \end{cases} \text{ άρα}$$

α. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 1$ πρέπει:

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1), \text{ είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \chi = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\alpha\chi - 2\alpha + 3) = -\alpha + 3 \text{ άρα πρέπει } -\alpha + 3 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

β. Η συνάρτηση για $\alpha = 2$ γίνεται : $f(\chi) = \begin{cases} \chi & , \chi < 1 \\ 2\chi - 1 & , \chi \geq 1 \end{cases}$.

Επειδή $2 > 1$ άρα $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} (2\chi - 1) = 3$, επειδή $-2 < 1$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -2} \chi = -2$$

Λιβαδεϊά

22.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – ΤΕΛ

Παρασκευή 23 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

- Β. α) $\chi^2 + 4\chi - 12 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi = 2$ ή $\chi = -6$ άρα πεδίο ορισμού για την f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-6, 2\}$ και η f απλοποιείται ως εξής

$$f(\chi) = \frac{\chi - 2}{\chi^2 + 4\chi - 12} = \frac{\chi - 2}{(\chi - 2)(\chi + 6)} \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{1}{\chi + 6}$$

β) Το $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{1}{\chi + 6} = \frac{1}{2 + 6} = \frac{1}{8}$

23.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΤΙΚΗΣ

Παρασκευή 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την

οποία ισχύει : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi} = 5$.

Θέτεις $g(\chi) = \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi}$ τότε : $\lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) = 5$ και $g(\chi) = \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi}$

$$\Leftrightarrow f(\chi) - e^{2\chi} + 1 = g(\chi)\eta\mu 2\chi \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi)\eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1.$$

- α. Είναι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι $f(0) =$

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow 0} (g(\chi)\eta\mu 2\chi + e^{2\chi} - 1) = \lim_{\chi \rightarrow 0} g(\chi) \lim_{\chi \rightarrow 0} \eta\mu 2\chi + \lim_{\chi \rightarrow 0} (e^{2\chi} - 1) \\ &= 5\eta\mu 0 + (e^{2 \cdot 0} - 1) = 5 \cdot 0 + (1 - 1) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

24.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Θεωρία.

25.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2 - \chi^4 \leq f(\chi) \leq 2 + \chi^4$ (1),
για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α) Από (1) για $\chi = 0$ έχεις $2 - 0^4 \leq f(0) \leq 2 + 0^4 \Leftrightarrow 2 \leq f(0) \leq 2 \Leftrightarrow$

$$f(0) = 2$$

β) Από (1) είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} (2 - \chi^4) = 2 - 0^4 = 2$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0} (2 + \chi^4) = 2 + 0^4 = 2$

άρα λόγω της (1) και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι και

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 2, \text{ οπότε}$$

η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$ γιατί $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 2 = f(0)$.

26.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 Θετική κατεύθυνση

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Το θέμα που υπήρχε σ' αυτές τις εξετάσεις και αφορούσε τα όρια χρειαζόταν κανόνες $L' \text{ Hospital}$ για το θέμα αυτό δεξ στο επόμενο κεφάλαιο περί παραγώγων.

27.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 – ΤΕΛ

Σάββατο 16 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

A. β) Για να είναι συνεχής στο $\chi_0 = -3$ η $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 9}{\chi + 3}, & \chi \neq -3 \\ \alpha, & \chi = -3 \end{cases}$

πρέπει : $\lim_{\chi \rightarrow -3} f(\chi) = f(-3) = \alpha$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow -3} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{\chi^2 - 9}{\chi + 3} = \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{(\chi - 3)(\chi + 3)}{\chi + 3} = \lim_{\chi \rightarrow -3} (\chi - 3) = -6$ άρα

$\alpha = -6$.

28.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001 – ΕΩΑΝΑΛΗΩΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 5 Ιουλίου

Το 2001 υπάρχουν κάποιες ερωτήσεις που αφορούν αυτό το κεφάλαιο αλλά, θα τις δούμε μαζί στα επόμενα κεφάλαια.

29.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

- B.2. α. **Λάθος** Γιατί το θεώρημα απαιτεί η f να είναι συνεχής στο $[a, b]$, ενώ στο συγκεκριμένο ερώτημα η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(a, b]$
 β. **Λάθος**. γ. **Σωστό**. ε. **Σωστό**.

ΘΕΜΑ 3^ο

- α. Για να δείξεις ότι η g είναι 1 – 1 αρκεί να δείξεις την σχέση

$$g(\chi_1) = g(\chi_2) \Rightarrow \chi_1 = \chi_2.$$

Έστω λοιπόν $g(\chi_1) = g(\chi_2)$, επειδή η f είναι συνάρτηση θα ισχύει

$$g(\chi_1) = g(\chi_2) \Rightarrow f(g(\chi_1)) = f(g(\chi_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(\chi_1) = (f \circ g)(\chi_2) \text{ και επειδή η}$$

$f \circ g$ είναι 1 – 1 η σχέση $(f \circ g)(\chi_1) = (f \circ g)(\chi_2)$ οδηγεί σε $\chi_1 = \chi_2$ έτσι λοιπόν

έδειξες ότι **$g(\chi_1) = g(\chi_2) \Rightarrow \chi_1 = \chi_2$ άρα η g είναι 1 – 1.**

Δαμιανός Μωραΐτης

30.

Εξωεργασία 2002

Τετάρτη 5 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

B.

5. Σωστό

6. Λάθος.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2$ η $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} & \text{αν } \chi < 2 \\ -\chi^2 + \kappa & \text{αν } \chi \geq 2 \end{cases}$

πρέπει: $\lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = f(2)$.

Είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \frac{\chi(\chi^2 - 4)}{\chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \frac{\chi(\chi - 2)(\chi + 2)}{\chi - 2} = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \chi(\chi + 2) = 8$$

.

Είναι $f(2) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} (-\chi^2 + \kappa) = -4 + \kappa$. Άρα $-4 + \kappa = 8 \Leftrightarrow \kappa = -4$.

β. επειδή το $1 < 2$ άρα το όριο $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} = \frac{1^3 - 4 \cdot 1}{1 - 2} = \frac{1 - 4}{-1} = 3$.

31.

ωαυελλήνικες 2002 - ΤΕΕ

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(\chi) = \begin{cases} \lambda\chi^2 - 1, & \chi \geq 1 \\ \chi + 2, & \chi < 1 \end{cases}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\lambda\chi^2 - 1) = \lambda \cdot 1^2 - 1 = \lambda - 1$,

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} (\chi + 2) = 3.$$

β. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $\chi_0 = 1$ πρέπει

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1) \Leftrightarrow \lambda - 1 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Αι β α δ ε ι ά

32.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002 – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. β. Σωστό ε. Λάθος

33.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

Δεν υπήρχε θέμα που να αφορά το κεφάλαιο αυτό

34.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 – ΤΕΕ

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 + 6\chi - 7}{\chi - 1}, & \chi \neq 1 \\ \lambda - 2, & \chi = 1 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Επειδή $0 \neq 1$ άρα $f(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{0 - 1} = \frac{-7}{-1} = 7$. Επειδή $2 \neq 1$ άρα

$$f(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = \frac{9}{1} = 9.$$

β) Το $\chi^2 + 6\chi - 7$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 64$ άρα ρίζες

$$\rho_1 = \frac{-6 - 8}{2} = -7 \text{ και } \rho_1 = \frac{-6 + 8}{2} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 + 6\chi - 7}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi + 7)(\chi - 1)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi + 7) = 8.$$

γ) Είναι $f(1) = \lambda - 2$ και $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = 8$ άρα πρέπει $\lambda - 2 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 10$.

35.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 – ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ ΤΕΕ

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}.$$

36.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2003

Τετάρτη 25 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 5. Σωστό .

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

α. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - 3x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 3)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{0 - 3}{0 - 2} = \frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$ η $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25 & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$

πρέπει : $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x^2 = 25$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (10x - 25) = 50 - 25 = 25 = f(5)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Λ ι β α δ ε ι ά

37.

ωαυελλήυες 2003 – Εωαυαληωτικές

Τρίτη 8 Ιουλίυ

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Έστω η f με $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 1} - \chi$, επειδή

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sqrt{\chi^2 + 1} - \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty - \infty, \text{ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.}$$

$$\text{Άρα } f(\chi) = \frac{(\sqrt{\chi^2 + 1} - \chi)(\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi)}{\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi} \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{\chi^2 + 1 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi} \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi} \quad \text{άρα } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + 1} + \chi} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

38.

ωαυελλήυες 2004

Πέμπτη 27 Μαΐυ

Δεν υπήρχε θέμα που να αφορά το κεφάλαιο αυτό

39.

Εωωερυνά 2004

Παρασκευή 4 Ιυνίυ

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$ η $f(\chi) = \begin{cases} 4\chi^2 + 3 & \text{αν } \chi < 1 \\ 6\chi + \kappa & \text{αν } \chi \geq 1 \end{cases}, \kappa \in \mathbb{R}$

$$\text{πρέπει: } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (6\chi + \kappa) = \kappa + 6 = f(1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} (4\chi^2 + 3) = 4 \cdot 1 + 3 = 7.$$

$$\text{Άρα για να είναι η } f \text{ είναι συνεχής στο } \chi_0 = 1 \text{ θα είναι } \kappa + 6 = 7 \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

Δαμινός Μωραΐτης

40.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 – ΤΕΕ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3}, & x > 9 \\ \lambda x + 3, & x \leq 9 \end{cases}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} (\lambda x + 3) = 9\lambda + 3$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{2(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9^+} 2(\sqrt{x}+3) = 2(\sqrt{9}+3) = 12.$$

γ) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 9$ πρέπει $9\lambda + 3 = 12 \Leftrightarrow 9\lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

41.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 – ΕΣΩΤΕΡΙΝΑ ΤΕΕ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 9x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x(x-3)}{x-3} \lim_{x \rightarrow 3} (3x) = 9$

β) Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \leq 1 \\ \lambda x^2 - \lambda^2, & x > 1 \end{cases}$

1) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$.

2) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lambda x^2 - \lambda^2) = \lambda - \lambda^2$.

3) Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \text{ άρα } \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1.$$

Αι β α δ ε ι ά

42.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 – ΕΞΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. γ. **Λάθος** δ. **Σωστό** ε. **Σωστό**.

Γ. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Από την (1): $z + \frac{1}{z} = f(\alpha) \Leftrightarrow \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{f(\alpha)} \Leftrightarrow \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = f(\alpha)$. Άρα

$$\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}^2 + 1}{\overline{z}} = \frac{z^2 + 1}{z} \Leftrightarrow (\overline{z}^2 + 1)z = (z^2 + 1)\overline{z} \Leftrightarrow$$

$$\overline{z}^2 \cdot z + z = z^2 \cdot \overline{z} + \overline{z} \Leftrightarrow \overline{z}^2 z + z - z^2 \overline{z} - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} \cdot z(\overline{z} - z) - (\overline{z} - z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{z} - z)(\overline{z} \cdot z - 1) = 0 \quad (1).$$

Αν $\overline{z} - z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ ΑΤΟΠΟ γιατί $\text{Re}(z) \neq 0, \text{Im}(z) \neq 0$ οπότε

από την (1) θα είναι $\overline{z} \cdot z - 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{z} \cdot z = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

β. Από την (1): $z + \frac{1}{z} = f(\alpha) \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2 + 2z \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = f^2(\alpha)$

$\Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 = f^2(\alpha)$ και επειδή $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$ άρα θα είναι

$$f^2(\beta) + 2 = f^2(\alpha) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f^2(\beta) < f^2(\alpha).$$

γ. Αν θέσεις $h(\chi) = \chi^3 f(\alpha) + f(\beta)$ θα είναι: $h(-1) = (-1)^3 f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow$

$h(-1) = -f(\alpha) + f(\beta)$ και $h(1) = (1)^3 f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow h(1) = f(\alpha) + f(\beta)$ οπότε

$h(-1) \cdot h(1) = (-f(\alpha) + f(\beta))(f(\alpha) + f(\beta)) = f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$ λόγω του (β).

Επειδή η $h(\chi) = \chi^3 f(\alpha) + f(\beta)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική και

$h(-1) \cdot h(1) < 0$ άρα η $h(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα

στο διάστημα $(-1, 1)$ (Θ Bolzano).

Δαμιανός Μωραΐτης

43.

Εξωεργασία 2004 - Εωαναληρωτικές**Τετάρτη 7 Ιουλίου**Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α)

$$\begin{aligned}
 \text{i) Έστω } \varphi(x) &= \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+1}+2x-1}{x} = \frac{\sqrt{4x^2+1}+(2x-1)}{x} = \\
 &= \frac{(\sqrt{4x^2+1}+(2x-1))(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))}{x(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))} = \frac{(\sqrt{4x^2+1})^2 - (2x-1)^2}{x(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))} = \\
 &= \frac{4x^2+1-(4x^2-2\cdot 2x+1)}{x(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))} = \frac{4x^2+1-4x^2+4x-1}{x(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))} = \\
 &= \frac{4x}{x(\sqrt{4x^2+1}-(2x-1))} = \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}-(2x-1)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}-(2x-1)} = \frac{4}{\sqrt{4 \cdot 0^2+1}-(2 \cdot 0-1)} = \frac{4}{\sqrt{1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$$

$$\text{β) Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2+1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = +\infty - \infty \text{ έχεις}$$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

$$\text{Τότε } f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x = \frac{(\sqrt{4x^2+1}+2x)(\sqrt{4x^2+1}-2x)}{\sqrt{4x^2+1}-2x} =$$

$$\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x} \text{ και τότε είναι :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2+1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x} = \frac{1}{+\infty - (-\infty)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Λι β α δ ε ι α

ΘΕΜΑ 3^ο

α) Είναι $f(3) = \frac{\alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 3 + 3}{3-2} = 9\alpha + 3\beta + 3$ και $f(1) = \frac{\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 3}{1-2} =$

$-(\alpha + \beta + 3)$ άρα $f(3) + 3f(1) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta + 3 - 3(\alpha + \beta + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta + 3 - 3\alpha - 3\beta - 9 = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - 6 = 0$ άρα $\alpha = 1$

και η συνάρτηση f γίνεται $f(x) = \frac{x^2 + \beta x + 3}{x-2}$ και επειδή η γραφική παράσταση

της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση

$f(1) = -4 \Leftrightarrow \frac{1^2 + \beta \cdot 1 + 3}{1-2} = -4 \Leftrightarrow \frac{\beta + 4}{-1} = -4 \Leftrightarrow \beta + 4 = 4$ άρα $\beta = 0$

44.

Πανελλήνιες 2005

Τρίτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1 , A. 2 Θεωρία.

B. α. Λάθος , β. Λάθος , γ. Σωστό , δ. Σωστό , στ. Σωστό.

45.

Εξωτερικά 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Σωστό . 2. Λάθος . 3. Λάθος

46.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΤΕΕ

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1}, & \chi < -1 \\ \kappa\chi + \mu, & -1 \leq \chi \leq 1 \quad \text{όπου } \kappa, \mu \in \mathbb{R}. \\ \chi^2 + 2\chi + 5 + \ln\chi, & \chi > 1 \end{cases}$$

$$\alpha) \quad \text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow -1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{\chi^2 - 1}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{(-1)^2 - 1}{-1 - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -1^-} \frac{1 - 1}{-2} = 0.$$

$$\beta) \quad \text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow -1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1^+} (\kappa\chi + \mu) = -\kappa + \mu.$$

$$\gamma) \quad \text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\kappa\chi + \mu) = \kappa + \mu.$$

$$\delta) \quad \text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} (\chi^2 + 2\chi + 5 + \ln\chi) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 5 + \ln 1 = 8.$$

$$\varepsilon) \quad \text{Για να υπάρχουν ταυτόχρονα τα } \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) \text{ πρέπει :}$$

$$\begin{cases} -\kappa + \mu = 0 \\ \kappa + \mu = 8 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow 2\mu = 8 \Leftrightarrow \mu = 4, \text{ οπότε } \kappa + 4 = 8 \text{ άρα } \kappa = 4.$$

47.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΤΕΕ

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2 - \chi}, & \chi < 2 \\ 1, & \chi = 2 \\ \chi^3 - 3\chi^2 + 2\chi + 1, & \chi > 2 \end{cases}$$

Λιβαδειά

α) Επειδή $0 < 2$ άρα $f(0) = \frac{0^2 - 5 \cdot 0 + 6}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3,$

επειδή $3 > 2$ άρα $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 27 - 27 + 6 + 1 = 7$

β) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{2 - \chi} = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} \frac{(\chi - 3)(\chi - 2)}{2 - \chi} =$
 $\lim_{\chi \rightarrow 2^-} [-(\chi - 3)] = 1.$

γ) Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 2^+} (\chi^3 - 3\chi^2 + 2\chi + 1) =$
 $2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 12 + 4 + 1 = 1.$

δ) Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow 2^+} f(\chi) = 1 = \lim_{\chi \rightarrow 2^-} f(\chi),$ προφανώς η f είναι συνεχής στο $\chi_0 = 2.$

48.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - ΕΩΘΑΝΑΛΗΘΩΤΙΚΕΣ

Τετάρτη 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 2 Θεωρία

B. δ. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

β. Έστω ότι η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία

$A(1, 2005)$ και $B(-2, 1),$ επί πλέον η συνάρτηση, από το ερώτημα α., έχει αποδειχθεί πως είναι 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1}. \text{ Έτσι λοιπόν η εξίσωση } f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8)) = -2 \Leftrightarrow$$

$$f[f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8))] = f(-2) \Leftrightarrow -2004 + f(\chi^2 - 8) = f(-2),$$

επειδή η C_f της f διέρχεται από το σημείο $B(-2, 1)$ άρα $f(-2) = 1$

άρα $-2004 + f(\chi^2 - 8) = f(-2) = 1 \Leftrightarrow f(\chi^2 - 8) = 2005$ και επειδή η

Δαμινός Μωραΐτης

C_f της f διέρχεται και από το σημείο $A(1, 2005)$ προφανώς $f(1) = 2005$,

$$f(\chi^2 - 8) = 2005 \Leftrightarrow f(\chi^2 - 8) = f(1) \Leftrightarrow \chi^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow \chi^2 = 9 \Leftrightarrow \chi = \pm 3$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} = 2005.$$

α. Θέτεις $h(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2}$ οπότε $\lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) = 2005$ και

$$h(\chi) = \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} \Leftrightarrow f(\chi) - \chi = h(\chi) \cdot \chi^2 \Leftrightarrow f(\chi) = h(\chi) \cdot \chi^2 + \chi \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} (h(\chi) \cdot \chi^2 + \chi) = \left(\lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^2 + \lim_{\chi \rightarrow 0} \chi \right) = 2005 \cdot 0 + 0 \Leftrightarrow$$

$\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (από την εκφώνηση) άρα

$$f(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = 0.$$

49.

Εξωεργασία 2005 - Εξαναληρωτικές

Παρασκευή 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

2. Θεωρία.

B **3. Λάθος** **5. Σωστό.**

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \begin{cases} -\chi^3 + 1, & \chi < 1 \\ \chi^4 - 1, & \chi \geq 1 \end{cases}$.

α. i) Στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική

ii) Για να είναι συνεχείς στο $\chi_0 = 1$ θα πρέπει: $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1)$.

Λι β α δ ε ι ά

$$\text{Είναι } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (-\chi^3 + 1) = -1^3 + 1 = 0,$$

$$f(1) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi^4 - 1) = 1^4 - 1 = 0$$

Άρα είναι πράγματι $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1)$ και επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής .

50.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 – Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

γ) 2. Σωστό, 5. Σωστό.

51.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006

Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. β. Σωστό, γ. Σωστό.

52.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. 1. Λάθος.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(\chi) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\chi + \lambda, & \chi \leq 1 \\ \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi}, & \chi > 1 \end{cases}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

I. Για να είναι συνεχής η f στο $\chi_0 = 1$ πρέπει $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = f(1)$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi} = \frac{1^2 - 8 \cdot 1 + 4}{4 \cdot 1} = -\frac{3}{4}.$

Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \left(-\frac{3}{4}\chi + \lambda \right) = -\frac{3}{4} + \lambda.$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) \Leftrightarrow -\frac{3}{4} + \lambda = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda = 0.$

53.

ωανελλήνικες 2006 – Εωαναληρωτικές

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. δ. Σωστό.

54.

ωανελλήνικες 2006 – Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

β) Θεωρία

γ) 3. Σωστό.

55.

ωανελλήνικες 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2 Θεωρία

B. γ. Λάθος, ε. Σωστό.

56.

Εξωερινά 2007

Τετάρτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Θεωρία.

B. 2. Σωστό, 3. Σωστό, 4. Σωστό.

Λιβαδεϊά

57.

ωαυελλήνυες 2007 – Εωαυαληωτικές

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. α. Λάθος, ε. Λάθος .

58.

Εωωερυνά 2007 – Εωαυαληωτικές

Τετάρτη 4 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Θεωρία.

B. 2. Σωστό, 3. Σωστό.

59.

ωαυελλήνυες 2007 – Ομογευνείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

β) Θεωρία

γ) 2. Λάθος.

60.

ωαυελλήνυες 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Θεωρία.

B α. Σωστό β. Σωστό .

61.

Εωωερυνά 2008

Τετάρτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.2. Θεωρία.

B. 3. Σωστό

62.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008 – ΕΠΑΝΑΛΗΘΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 3 Ιουλίου

Γ. α. Σωστό. , ε. Σωστό.

Θ

έ

μ

Πανελλήνιες 1975 - 2008

τ

α

Κεφάλαιο 3^ο

Κ

α

τ

ε

ύ

θ

υ

ν

σ

η

ς

Παράγωγοι
μονοτονία
ακρότατα

✕
Όποιος με ευκολία σου χαρίζει κάτι σήμερα,
πολλά θα σου ζητήσει με απαίτηση αύριο.

Κεφάλαιο 3^ο

Παράγωγοι Συναρτήσεων Εφαρμογές των παραγώγων

Σύντομη επανάληψη – Παρατηρήσεις

ΠΣΕ 222 – 264

Θέματα Πανελλήνιων Εξετάσεων

ΠΣΘ 265 – 366

Συντομογραφίες

* * ΠΣΕ = Παράγωγοι Συναρτήσεων σύντομη επανάληψη.

* * ΠΣΘ = Παράγωγοι Συναρτήσεων εκφωνήσεις θεμάτων.

Εισαγωγή

Ορισμός

Έστω ο λόγος : $\frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$ με $\chi \neq \chi_0$.

Αν υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε

και μόνον τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$, το

δε όριο $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$ λέγεται παράγωγος της f στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$ και

συμβολίζεται με $f'(\chi_0)$ που διαβάζεται « f τόνος του χ_0 ».

• Δηλαδή :

$$f'(\chi_0) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \quad (1)$$

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$

είναι $\lambda = f'(\chi_0)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$ γίνεται :

$$\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0)$$

Προσοχή Παρατηρήσεις S O S για τις ασκήσεις :

- Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$, όταν το

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \text{ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, άρα με}$$

βάση και τη θεωρία των ορίων θα ισχύει ισοδύναμα ότι :

Μια συνάρτηση θα λέγεται **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$, αν και μόνον αν :

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0^+} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0^-} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \in \mathbf{R}.$$

- Αν στην σχέση $f'(\chi_0) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$, θέσεις $\chi - \chi_0 = h$ τότε

$\chi = h + \chi_0$, που σημαίνει ότι όταν $\chi \rightarrow \chi_0$ τότε $h \rightarrow 0$, και ο τύπος (1)

$$\text{γίνεται : } f'(\chi_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$$

- Ο παράγωγος αριθμός μιας συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$ λέγεται **ρυθμός μεταβολής**, είναι **πραγματικός αριθμός** και εκφράζει την «ταχύτητα» με την οποία «τείνουν» να μεταβληθούν οι τιμές της f στο χ_0
- Ο παράγωγος αριθμός μιας συνάρτησης **f στο χ_0** συμβολίζεται επίσης με $\frac{df(\chi_0)}{d\chi}$ ή ισοδύναμα $\left.\frac{df(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\chi_0}$ συμβολισμός του Leibnitz.

Παρατηρήσεις

- ✓ Αν πρόκειται για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της **f** στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0) \quad .$$
- ✓ Αν πρόκειται για κίνηση ενός κινητού που η θέση του στο καρτεσιανό επίπεδο εκφράζεται από τη συνάρτηση $\psi = f(t)$ (συνάρτηση θέσης), τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο t_0 $\left(f'(t_0)\right)$, εκφράζει την (στιγμιαία) ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή

$$v(t_0) = f'(t_0) \quad .$$
- ✓ Αν πρόκειται για την ταχύτητα ενός κινητού **$v(t)$** , τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης **v** στο t_0 $\left(v'(t_0)\right)$, εκφράζει την (στιγμιαία) επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή **$a(t_0) = v'(t_0)$** .
- ✓ Αν η συνάρτηση εκφράζει άλλο μέγεθος, π. χ. οικονομικό μέγεθος όπως είναι το κόστος παραγωγής ή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, εκφράζει το

ρυθμό μεταβολής του μεγέθους, όταν η παραγωγή γίνει χ_0 μονάδες και ονομάζεται αντίστοιχα : **Οριακό κόστος , Οριακό κέρδος .**

Παράγωγος αριθμός και συνέχεια μιας συνάρτησης στο $\chi = \chi_0$

Θεώρημα :

Όταν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο χ_0 , τότε θα είναι και **συνεχής** στο χ_0 .

- Μια συνάρτηση συνεχής στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$ **δεν είναι σίγουρο** πως είναι και παραγωγίσιμη στο χ_0 .
- Όταν μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής** τότε σίγουρα **δεν είναι και παραγωγίσιμη**, γιατί αν ήταν παραγωγίσιμη θα έπρεπε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, να είναι και συνεχής.
- ✓ Όταν στον τύπο μιας συνάρτησης υπάρχει **ρίζα** , τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της **εκτός** από τα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, δηλαδή **εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τη ρίζα**.
- ✓ Όταν προσπαθείς να υπολογίσεις τα πλευρικά όρια του πηλίκου μεταβολών και το ένα από αυτά είναι $\pm \infty$, τότε δεν χρειάζεται να υπολογίσεις το άλλο, είναι προφανές ότι κι αν ακόμα υπάρχει το όριο του $\lambda(\chi)$ στο χ_0 αποκλείεται να είναι πραγματικός αριθμός, έτσι **η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη** .
- ✓ Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο χ_0 (δηλαδή η f είναι «διπλού» τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής, γιατί αν η f **δεν είναι συνεχής τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη**.

- ✓ Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει απόλυτο, επειδή δεν είναι πάντα εύκολο να ξέρεις πότε παραγωγίζεται και πότε όχι μια συνάρτηση, σε συμφέρει, αφού βρεις το πεδίο ορισμού και πριν κάνεις οτιδήποτε άλλο, να απαλλάσσεις την συνάρτηση από τα απόλυτα, μετατρέποντας την έτσι σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου και να αναζητάς, αν χρειάζεται, τα πλευρικά όρια.
- ✓ Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η τιμή $f(\chi_0)$ δίνεται ξεχωριστά (δηλαδή η f είναι «διπλού» τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο χ_0 , γιατί αν η **f δεν είναι συνεχής στο χ_0 τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη στο χ_0 .**

- ✓ Όταν δίνεται ο $f'(\chi_0)$ (η όταν ζητάει να τον υπολογίσεις) και στη συνέχεια ζητάει να βρεις το όριο μιας παράστασης $P(\chi) = \dots$ μέσα στην οποία υπάρχει η f , τότε σε συμφέρει να ξεκινάς από το :

$$\lambda(\chi) = \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \quad (1), \text{ με } \chi \neq \chi_0 \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \lambda(\chi) = f'(\chi_0), \text{ οπότε}$$

λύνοντας την (1) θα έχεις **$f(\chi) = \lambda(\chi)(\chi - \chi_0) + f(\chi_0)$.**

Την τελευταία σχέση την αντικαθιστάς στο $P(\chi)$ και υπολογίζεις το όριο.

- ✓ Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης υπάρχουν παράμετροι τις οποίες πρέπει να βρεις για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο που πιθανόν αλλάζει ο τύπος της τότε είναι σκόπιμο να απαιτείς πρώτα η συνάρτηση να είναι συνεχής, βρίσκοντας έτσι μια επί πλέον συνθήκη για τις παραμέτρους.

- ✓ Όταν δίνεται το $f(\chi + \psi)$ και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$

$$\text{τότε χρησιμοποιείς τον τύπο : } \lambda(\chi_0) = \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h} \text{ και αν το}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda(\chi_0) \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει ο παράγωγος αριθμός και μόνον τότε

χρησιμοποιείς το σύμβολο : $f'(\chi_0)$

✓ Όταν δίνεται το $f(\chi + \psi) = \dots$ και δίνει και κάποια $f(\alpha) = \dots$,

$f(\beta) = \dots$ και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$ τότε χρησιμοποιείς

τον τύπο : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$ και για να βρεις με τι πρέπει να

αντικαταστήσεις τα χ, ψ στον τύπο $f(\chi + \psi) = \dots$ μπορείς να βάζεις :

$$\begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \chi = \beta \end{cases} \text{ οπότε } \begin{cases} \psi = \alpha - \beta \\ \chi = \beta \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \chi + \psi = \alpha \\ \psi = \beta \end{cases} \text{ οπότε } \begin{cases} \chi = \alpha - \beta \\ \psi = \beta \end{cases} \text{ ή απλά}$$

$\chi = \alpha, \psi = \beta$ την μια φορά ,και ξανά δεύτερη φορά $\chi = \beta$ και $\psi = \alpha$
και λύνεις το σύστημα.

✓ Όταν ο τύπος της συνάρτησης f «εμπλέκεται» μέσα σε διπλή
ανισότητα $\dots \leq f(\chi) \leq \dots$ ή κάτι παρόμοιο θα ξεκινάς από το

$$\lambda(\chi) = \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}, \text{ θα βλέπεις ότι σου λείπει το } f(\chi_0), \text{ το οποίο ή θα}$$

δίνεται ή θα υπολογίζεται από την αρχική παράσταση αν θέσεις $\chi = \chi_0$ ή αν
η συνάρτηση αναφέρεται ως συνεχής (ειδικά τότε) θα υπολογίζεται από
τη σχέση $f(\chi_0) = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(\chi) = \kappa$ είναι: $f'(\chi) = \kappa' = 0$.

2. Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(\chi) = \chi$ είναι: $f'(\chi) = \chi' = 1$.

3. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^v$ είναι: $f'(\chi) = (\chi^v)' = v \cdot \chi^{v-1}$

αλλά και αν $f(\chi) = \chi^a$, όπου $a \in \mathbb{R}$, πάλι είναι : $f'(\chi) = (\chi^a)' = a \cdot \chi^{a-1}$.

4. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ είναι: $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

5. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι: $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

6. Η παράγωγος της $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι : $f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

7. Η παράγωγος της $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι : $f'(x) = (\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

8. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι: $f'(x) = (e^x)' = e^x$.

9. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι: $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Προσοχή Παρατήρηση S O S για τις ασκήσεις :

Από την Β Λυκείου, είναι εξ' ορισμού, $\sqrt[v]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{v}} = x^\rho$ όπου $\rho = \frac{\mu}{v}$.

Πρακτικά για να βρεις την παράγωγο μιας συνάρτησης f με τύπο :

1. $f(x) = \sqrt[v]{x^\mu}$ θα γράφεις τη συνάρτηση : $f(x) = \sqrt[v]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{v}}$, οπότε η

παράγωγος της συνάρτησης είναι : $f'(x) = (\sqrt[v]{x^\mu})' = \left(x^{\frac{\mu}{v}}\right)' = \frac{\mu}{v} \cdot x^{\frac{\mu}{v}-1}$.

✓ **Εφαρμογή** : Αν $f(x) = \sqrt{x}$, ΠΟ είναι το $A = [0, +\infty)$, και

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ άρα με $x \neq 0$ είναι :

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}} \quad \text{θα γράφεις τη συνάρτηση : } f(x) = \frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}} = \frac{1}{x^{\frac{\mu}{v}}} = x^{-\frac{\mu}{v}},$$

οπότε η παράγωγος είναι:
$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[v]{x^\mu}} \right)' = \left(x^{-\frac{\mu}{v}} \right)' = -\frac{\mu}{v} \cdot x^{-\frac{\mu}{v}-1}.$$

Κανόνες Παραώγισης

1. $(\kappa \cdot f(x))' = \kappa \cdot f'(x)$ (παράγωγος της συνάρτησης $\kappa \cdot f(x)$).
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (παράγωγος αθροίσματος).
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (παράγωγος του γινομένου).
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ (παράγωγος του πηλίκου).

Εφαρμογή :

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = \frac{1' \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{0 \cdot g(x) - g'(x)}{[g(x)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει :

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή για να παραγωγίσεις τη συνάρτηση $f(g(x))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζεις την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(x)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζεις με την παράγωγο της g .

Τύποι Παραγωγίσιμης σύνθετης συνάρτησης

Απλή συνάρτηση	Σύνθετη συνάρτηση
$(\chi^{\alpha})' = \alpha \cdot \chi^{\alpha-1}$ $\chi \in (0, +\infty), \alpha \in \mathbb{R}$	$([f(\chi)]^{\alpha})' = \alpha \cdot [f(\chi)]^{\alpha-1} \cdot f'(\chi)$ Με $f(\chi) > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$
$(\sqrt{\chi})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$ Π Ο το $A = [0, +\infty)$ Δεν παραγωγίζεται στο $\chi_0 = 0$	$(\sqrt{f(\chi)})' = \frac{1}{2\sqrt{f(\chi)}} f'(\chi) \quad \text{με } f(\chi) \geq 0$ Δεν παραγωγίζεται στο $\chi_0 : f(\chi_0) = 0$
$(\alpha^{\chi})' = \alpha^{\chi} \cdot \ln \alpha, \alpha > 0$	$(\alpha^{[f(\chi)]})' = \alpha^{[f(\chi)]} \cdot \ln \alpha \cdot [f(\chi)]', \text{ με } \alpha > 0$
$(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$	i) $[\eta\mu(f(\chi))]' = \sigma\upsilon\nu(f(\chi)) \cdot f'(\chi)$ ii) $[f(\eta\mu\chi)]' = f'(\eta\mu\chi) \cdot (\eta\mu\chi)' = f'(\eta\mu\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$
$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$	i) $[\sigma\upsilon\nu(f(\chi))]' = -\eta\mu(f(\chi)) \cdot f'(\chi)$ ii) $[f(\sigma\upsilon\nu\chi)]' = f'(\sigma\upsilon\nu\chi) \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi)' = -f'(\sigma\upsilon\nu\chi) \eta\mu\chi$
$(\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	i) $[\varepsilon\varphi(f(\chi))]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(f(\chi))} \cdot f'(\chi) = \frac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2(f(\chi))}$ ii) $[f(\varepsilon\varphi\chi)]' = f'(\varepsilon\varphi\chi) \cdot (\varepsilon\varphi\chi)' = \frac{f'(\varepsilon\varphi\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$
$(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{1}{\eta\mu^2\chi}$	i) $[\sigma\varphi(f(\chi))]' = -\frac{1}{\eta\mu^2(f(\chi))} \cdot f'(\chi) = -\frac{f'(\chi)}{\eta\mu^2(f(\chi))}$ ii) $[f(\sigma\varphi\chi)]' = f'(\sigma\varphi\chi) \cdot (\sigma\varphi\chi)' = -\frac{f'(\sigma\varphi\chi)}{\eta\mu^2\chi}$
$(e^{\chi})' = e^{\chi}$	i) $(e^{f(\chi)})' = e^{f(\chi)} \cdot f'(\chi)$ ii) $[f(e^{\chi})]' = f'(e^{\chi}) \cdot (e^{\chi})' = f'(e^{\chi}) \cdot e^{\chi}$
$(\ln\chi)' = \frac{1}{\chi}$	i) $[\ln(f(\chi))]' = \frac{1}{f(\chi)} f'(\chi)$ ii) $[f(\ln\chi)]' = f'(\ln\chi) \cdot (\ln\chi)' = f'(\ln\chi) \cdot \frac{1}{\chi}$

- ✓ Από την Β Λυκείου, είναι γνωστό ότι : $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ και γενικότερα $a^b = e^{b \cdot \ln a}$, μια δύναμη της μορφής a^b με βάση a και εκθέτη b γράφεται ως $e^{\text{εκθέτης} \cdot \ln(\text{της βάσης})}$.

Αυτή η μετατροπή είναι απολύτως απαραίτητη για την απόδειξη των τύπων παραγωγίσιων των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = a^x$ και $f(x) = x^a$ καθώς και για τις συναρτήσεις της μορφής : $f(x) = P(x)^{Q(x)}$.

Όταν λοιπόν θα έχεις να παραγωγίσεις συνάρτηση η οποία έχει τη «μορφή» δύναμης με «βάση» και «εκθέτη» να εξαρτώνται από το x τότε θα ακολουθείς την εξής διαδικασία :

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x)^{Q(x)} \Rightarrow f'(x) = \left(P(x)^{Q(x)} \right)' = \left(e^{Q(x) \cdot \ln P(x)} \right)' = \\ &= e^{Q(x) \cdot \ln P(x)} \left(Q(x) \cdot \ln P(x) \right)' = P(x)^{Q(x)} \left(Q'(x) \cdot \ln P(x) + Q(x) \cdot (\ln P(x))' \right) = \\ &= P(x)^{Q(x)} \left(Q'(x) \cdot \ln P(x) + \frac{Q(x)}{P(x)} \cdot P'(x) \right). \end{aligned}$$

Υπ' όψη ότι σ' όλες αυτές τις συναρτήσεις Πεδίο Ορισμού είναι το

$$A = \{x \in \mathbb{R} / P(x) > 0\}$$

Παράδειγμα : Να βρεις την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (2x-1)^{x+1}$.

$$2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ άρα Πεδίο ορισμού το } A = \left(\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x) &= (2x-1)^{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \left((2x-1)^{x+1} \right)' = \left(e^{(x+1) \cdot \ln(2x-1)} \right)' = \\ &= e^{(x+1) \cdot \ln(2x-1)} \left((x+1) \cdot \ln(2x-1) \right)' = \\ &= (2x-1)^{x+1} \left((x+1)' \cdot \ln(2x-1) + (x+1) \cdot (\ln(2x-1))' \right) = \end{aligned}$$

$$(2x-1)^{x+1} \left(\ln(2x-1) + \frac{(x+1)}{2x-1} \cdot (2x-1)' \right) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (2x-1)^{x+1} \left(\ln(2x-1) + 2 \cdot \frac{(x+1)}{2x-1} \right)$$

Ένα **φαινομενικά** δύσκολο πρόβλημα

Αν $\psi = \varphi(x)$ είναι ο τύπος μιας συνάρτησης και $A(x_0, \varphi(x_0))$ ένα σημείο στην γραφική της παράσταση, η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0, \varphi(x_0))$ είναι $\psi - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0)$, όπου $\varphi'(x_0)$ ο παράγωγος αριθμός στο x_0 , δηλαδή «εξ' ορισμού» ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** είναι $\varphi'(x_0)$.

Άρα για να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης πρέπει :

1^{ov} Να καταγράψεις τον τύπο της εφαπτομένης

$$\psi - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1) .$$

2^{ov} Να ξέρεις το $A(x_0, \varphi(x_0))$ ή το x_0 οπότε αντικαθιστάς τα x_0 και $\varphi(x_0)$ στον τύπο **(1)**

* αν η άσκηση δεν δίνει το $A(x_0, \varphi(x_0))$ ή το x_0 τότε το x_0 θα είναι το πρώτο πράγμα που θα υπολογίζεις .

3^{ov} Να βρίσκεις την $\varphi'(x)$ για να υπολογίσεις, στη συνέχεια τον $\varphi'(x_0)$.

4^{ov} Να αντικαθιστάς το $\varphi'(x_0)$ στην $\psi - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0)$ **(1)** και τέλος να την μετασχηματίζεις σε μια πιο «βολική» μορφή .

Το πρόβλημα εμφανίζεται με **τρεις** μορφές :

1^η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ και το $A(x_0, \varphi(x_0))$, σημείο στην γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο A».

Αιβαδειά

- 2^η μορφή :** «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi)$, και ο συντελεστής λ της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.
- 3^η μορφή :** «Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi)$, και ένα σημείο $P(\chi_1, \psi_1)$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης που «περνάει» από το P.

Προσοχή Παρατηρήσεις SOS για τις ασκήσεις :

- ✓ Αν δίνεται ένα σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ (σημείο επαφής) και θες να δείξεις ότι μια ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f στο A, τότε ή δείχνεις $f'(\chi_0) = \lambda$ ή βρίσκεις την εφαπτομένη στο A και διαπιστώνεις ότι ταυτίζεται με την $\psi = \lambda\chi + \beta$.
- ✓ Αν δεν δίνεται το σημείο επαφής A και θες να δείξεις ότι μια ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f , τότε υποθέτεις ότι χ_0 είναι η τετμημένη του σημείου επαφής της $\psi = \lambda\chi + \beta$ και της C_f οπότε βρίσκεις την $f'(\chi)$ και απαιτείς $f'(\chi_0) = \lambda$.

Η τελευταία εξίσωση σου δίνει το χ_0 , βρίσκεις το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και η συνέχεια . . . είναι γνωστή.

Στο σημείο αυτό να ξεκαθαρίσεις το εζήξ : Για να εφάπτεται μια ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ στη γραφική παράσταση μια συνάρτησης **πρέπει και αρκεί**

να ισχύει $\lambda = f'(\chi_0)$, η μέθοδος που ξέρεις από τη Β Λυκείου, όπου απαιτούσες οι δυο γραμμές να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο αφορά μόνο την συνάρτηση f που έχει ως γραφική παράσταση ένα ημικύκλιο και δεν εφαρμόζεται εδώ.

- ✓ Αν έχεις δυο συναρτήσεις f και g και θες να βρεις την **κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων** C_f και C_g αντίστοιχα, τότε υποθέτεις ότι χ_0 είναι η τετμημένη του

κοινού τους σημείου των C_f και C_g , που είναι και το σημείο επαφής τους με την κοινή εφαπτομένη και λύνεις το σύστημα :

$$\begin{cases} f(\chi_0) = g(\chi_0) & \text{για να έχουν κοινό σημείο} \\ f'(\chi_0) = g'(\chi_0) & \text{για να έχουν κοινή εφαπτομένη} \end{cases}$$

Εννοείται πως αν δίνεται το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ή έστω μόνο το χ_0 τότε χρησιμοποιείς μόνο την δεύτερη σχέση $f'(\chi_0) = g'(\chi_0)$.

- ✓ Αν έχεις δυο συναρτήσεις f και g και σου ζητά να δείξεις ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι και εφαπτομένη της C_g (εννοείται πως το $A \notin C_g$) τότε βρίσκεις την εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και ακολουθείς τα βήματα που περιγράφονται στην 2^η περίπτωση των παρατηρήσεων της προηγούμενης σελίδας.

Εφαρμογές των Παραγώγων

Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f **συνεχής** σε ένα **διάστημα** Δ τότε :

- Αν $f'(\chi) > 0$, για κάθε **εσωτερικό** σημείο $\chi \in \Delta$, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ .
- Αν $f'(\chi) < 0$, για κάθε **εσωτερικό** σημείο $\chi \in \Delta$, τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ .

Παρατηρήσεις :

- ✓ Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.
Δηλαδή αν f γνησίως αύξουσα (Συμβολικά $\uparrow$) σε ένα διάστημα Δ , τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά $f'(\chi) > 0$, για κάθε $\chi \in \Delta$, γιατί μπορεί να

Αιτιαδαιά

υπάρχουν και σημεία του Δ , που η f' να μηδενίζεται, πάντως αν f γνησίως αύξουσα αποκλείεται η $f'(\chi) < 0$, θα είναι σίγουρα $f'(\chi) \geq 0$.

Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ (Συμβολικά $\searrow$).

✓ Το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί και για την f' και συγκεκριμένα :

Αν $f''(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta$, τότε είναι $f' \nearrow$ σ' όλο το Δ .

Αντίστοιχα αν $f''(\chi) < 0$ θα είναι $f' \searrow$.

✓ Για να μελετήσεις τη μονοτονία μιας συνάρτησης f μελετάς το πρόσημο της f' και

Αν η παράγωγος της συνάρτησης είναι :

- Πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού τότε λύνεις την ανίσωση $f'(\chi) \geq 0$.
- Πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού τότε φτιάχνεις πίνακα προσήμου για την $f'(\chi)$.
- Πολυωνυμική βαθμού μεγαλύτερου του 2 παραγοντοποιείς την $f'(\chi)$ και στη συνέχεια φτιάχνεις πίνακα προσήμου.
- Αν η συνάρτηση f' δεν είναι πολυωνυμική, τότε ανάλογα με την περίπτωση, λύνεις την ανίσωση : $f'(\chi) \geq 0$.

✓ Για να βρεις το **σύνολο τιμών** $f(A)$ μιας συνάρτησης f με Πεδίο Ορισμού A , βρίσκεις τα διαστήματα μονοτονίας της f και μετά βρίσκεις το **αντίστοιχο σύνολο τιμών** της σε κάθε ένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται από την μονοτονία.

Η ένωση των επιμέρους συνόλων τιμών, σου δίνει το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(A)$.

Ευτάξει «αργία μήτηρ ωάεης κακίας» αλλά της βλακειάς ωαία είναι η «μήτηρ»;

- ✓ Έστω συνάρτηση **f συνεχής** στο διάστημα Δ το σύνολο τιμών **f(Δ)** με τη βοήθεια της μονοτονίας της **f** στο Δ βρίσκεται ως εξής :

Διάστημα Δ που ορίζεται η f	Είδος μονοτονίας της f	Σύνολο τιμών f(Δ)
$[\alpha, \beta]$	$\Uparrow$	$[f(\alpha), f(\beta)]$
$[\alpha, \beta)$	$\Uparrow$	$\left[f(\alpha), \lim_{\chi \rightarrow \beta^-} f(\chi) \right)$
$(\alpha, \beta]$	$\Uparrow$	$\left(\lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi), f(\beta) \right]$
(α, β)	$\Uparrow$	$\left(\lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow \beta^-} f(\chi) \right)$
$[\alpha, \beta]$	$\Downarrow$	$[f(\beta), f(\alpha)]$
$[\alpha, \beta)$	$\Downarrow$	$\left(\lim_{\chi \rightarrow \beta^-} f(\chi), f(\alpha) \right]$
$(\alpha, \beta]$	$\Downarrow$	$\left[f(\beta), \lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi) \right)$
(α, β)	$\Downarrow$	$\left(\lim_{\chi \rightarrow \beta^-} f(\chi), \lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi) \right)$

****** Το Σύνολο τιμών μπορεί, μερικές φορές, εκτός από διαστήματα ή ένωση διαστημάτων, να περιέχει και μεμονωμένα στοιχεία, πχ αν η **f** είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα του Πεδίο ορισμού της ή αν είναι πολλαπλού τύπου. Οι περιπτώσεις αυτές θα εξεταστούν στη μελέτη μια συνάρτησης.

Μονοτονία βασικών συναρτήσεων :

f(χ) = a (σταθερή) **καμία**, **f(χ) = χ** **γνησίως αύξουσα**

f(χ) = $a\chi^3$ $\begin{cases} \text{Με } a > 0 \text{ γνησίως αύξουσα} \\ \text{Με } a < 0 \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$

Αιβαδειά

$$\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \quad \text{με } \alpha > 0$$

$$\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \quad \text{με } \alpha < 0$$

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
Ψ			

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
Ψ			

Ελάχιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Μέγιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

$$f(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$$

όπου $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0$

Av $\alpha > 0$  γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
 γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Av $\alpha < 0$  γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$
 γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$f(\chi) = \alpha^\chi$$

Av $\alpha > 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$

Av $0 < \alpha < 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$

$$f(\chi) = e^\chi \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbf{R}$$

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(\chi) = \sigma\eta\chi$	1	0	-1	0	-1
					

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(\chi) = \eta\mu\chi$	0	1	0	-1	0
					

Λήμμα SOS για τις ασκήσεις.

Έστω μια συνάρτηση f γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $\chi\chi'$, το πολύ σ' ένα σημείο.

Απόδειξη :

Έστω ότι $f \nearrow$ στο Δ και έστω ότι υπήρχαν σημεία $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$,

ώστε $f(\chi_1) = 0 = f(\chi_2)$ αυτό είναι άτοπο γιατί $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$

αφού $f \nearrow$.



Άνθρωπος άσχετος με την ελληνική πραγματικότητα, ο οποίος απορεί γιατί η πιο πάνω πρόταση ενώ χρησιμοποιείται άπειρες φορές από το σχολικό βιβλίο εντούτοις δεν αποδεικνύεται πουθενά μέσα σ' αυτό.

Εφαρμογές

A. Μονοτονία και σύγκριση

Αν η άσκηση «λέει» *Δίνεται η συνάρτηση f , να συγκριθούν οι παραστάσεις $f(g(x))$, $f(h(x))$* , τότε **μελετάς τη μονοτονία της** και με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της γνησίως φθίνουσας

συνάρτησης αποδεικνύεις ότι ισχύει $f(g(x)) \begin{matrix} >, \geq \\ <, \leq \end{matrix} f(h(x))$.

Παράδειγμα:

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις

$$f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \text{ και } f(1).$$

Απάντηση :

Είναι $x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{x^2+1}{x^2}$ και f γνησίως αύξουσα άρα $f(1) < f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$.

Παρατήρηση: όπως είδες μπορεί και να μη χρειαστεί να μελετήσεις τη μονοτονία, είτε γιατί σου τη δίνει η άσκηση είτε γιατί μπορεί να την έχεις «έτοιμη» από προηγούμενο ερώτημα.

B. Επίλυση ανίσωσης και μονοτονία

Αν η άσκηση «λέει» *Να λυθεί η ανίσωση :..... τότε*

Φέρνεις τα «πάντα» στο πρώτο μέλος φέρνοντας την ανίσωση στη μορφή

$\dots \begin{matrix} >, \geq \\ <, \leq \end{matrix} 0$, ονομάζεις το πρώτο μέλος $f(\chi)$ και **μελετάς τη μονοτονία της** f .

Με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της

γνησίως φθίνουσας συνάρτησης λύνεις την ανίσωση $f(\chi) \begin{matrix} >, \geq \\ <, \leq \end{matrix} 0$.

Παράδειγμα: Να λυθεί η ανίσωση : $\ln \chi \leq \chi^2 - \chi$.

Απάντηση :

Πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$, $\ln \chi \leq \chi^2 - \chi \Leftrightarrow \chi^2 - \chi - \ln \chi \geq 0$.

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 - \chi - \ln \chi$, γι' αυτήν έχεις :

Στο $(0, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων άρα βάση γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα και είναι :

$$f'(\chi) = 2\chi - 1 - \frac{1}{\chi}. \text{ Επομένως } f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi - 1 - \frac{1}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi^2 - \chi - 1}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\chi^2 - \chi - 1 \geq 0, \text{ γιατί είναι } \chi > 0.$$

Το $2\chi^2 - \chi - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \dots 9$ και ρίζες $\rho_1 = -\frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 1$ άρα

πίνακας μεταβολών για τις :

f', f στο $(0, +\infty)$ είναι

χ	$-\infty$	$-1/2$	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$		+	-	-	+
$f(\chi)$					

Παρατήρησε πως $f(1) = 1^2 - 1 - \ln 1 = 0$ και στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f' είναι

θετική άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $\chi > 1 \Leftrightarrow f(\chi) > f(1) \Leftrightarrow$

$$\chi^2 - \chi - \ln \chi \geq 0 \Leftrightarrow \ln \chi \leq \chi^2 - \chi.$$

Γ. Απόδειξη ανισότητας και μονοτονία

<u>1^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» <i>Αν για το x ισχύει ...</i> <i>π.χ. $x > 2$ να δείξετε ότι</i> <i>ισχύει η ανισότητα</i>	«Φέρνεις» την ανίσωση στη μορφή $f(x) \begin{matrix} >, \geq \\ <, \leq \end{matrix} 0 \text{ και μελετάς τη μονοτονία της } f.$ Με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης αποδεικνύεις το ζητούμενο.
<u>2^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» <i>Στο διάστημα Δ να δείξετε</i> <i>ότι ισχύει,</i>	«Φέρνεις» την ανίσωση στη μορφή $f(x) \begin{matrix} >, \geq \\ <, \leq \end{matrix} 0, \text{ οπότε αρκεί να δείξεις ότι οι}$ τιμές της f Μελετάς τη μονοτονία της f, με τη βοήθεια της μονοτονίας βρίσκεις το Πεδίο Τιμών, ελπίζοντας ότι αυτό θα περιέχει μόνο θετικές τιμές ή μόνο αρνητικές τιμές (δηλαδή μόνο τιμές που βολεύουν).

Δ. Ρίζες μιας εξίσωσης

Για την ύπαρξη και το πλήθος των ριζών μια εξίσωσης $f(x) = 0$ ακολουθείς (κατά περίπτωση) τα βήματα που παρουσιάζονται στον πίνακα των επόμενων σελίδων.

<u>1^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει <i>το πολύ μια ρίζα</i> στο διάστημα Δ.	<u>1^η επιλογή :</u> Δείχνεις ότι η f είναι μονότονη, άρα αν έχει ρίζα θα είναι μόνο μία <u>Προσοχή :</u> Δεν σου ζητάει να εξασφαλίσεις την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας, απλά ζητάει να εξασφαλίσεις ότι αν υπάρχει ρίζα θα είναι μόνο μία, δηλαδή να <u>αποκλείσεις ότι υπάρχουν</u> <u>περισσότερες από μία</u>. <u>2^η επιλογή :</u> Υποθέτεις ότι υπάρχουν δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$, στο Δ, οπότε στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ θα εφαρμόζεται το Θ. Rolle και επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα πρέπει να έχει μια τουλάχιστον λύση στο Δ, πράγμα που θα αποδεικνύεται ΑΤΟΠΟ είτε γιατί δεν θα υπάρχει λύση είτε γιατί αν υπάρχει δεν θα ανήκει στο Δ.
<u>2^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει <i>τουλάχιστον μια ρίζα</i> στο διάστημα Δ.	<u>1^η επιλογή :</u> Προσπαθείς να εφαρμόσεις το Θεώρημα Bolzano (αν εφαρμόζεται) στο διάστημα Δ. <u>2^η επιλογή :</u> Δείχνεις ότι η f είναι συνεχής και μονότονη και ότι $0 \in f(\Delta)$, άρα με βάση το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in \Delta$ έτσι ώστε : $f(\chi_0) = 0$. <u>3^η επιλογή :</u> Αν στην εξίσωση υπάρχει και η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f τότε τα φέρνεις όλα στο πρώτο μέλος φέρνοντας την εξίσωση στη μορφή $E(x) = 0$ και προσπαθείς να βρεις μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $g'(x) = E(x)$ και ταυτόχρονα για την $g(x)$ να εφαρμόζεται το Θ. Rolle.

<u>3^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.	<u>1^η επιλογή :</u> Δείχνεις ότι η f είναι μονότονη, άρα και συνεχής και βρίσκεις το $f(\Delta)$, με στόχο: αν το $0 \in f(\Delta)$ τότε με βάση τη συνέχεια και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \Delta$ έτσι ώστε : $f(x_0) = 0$, οπότε λόγω μονοτονίας δεν θα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια ρίζες. <u>2^η επιλογή :</u> Εξασφαλίζεις, με οποιοδήποτε τρόπο, την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ και κατόπιν υποθέτεις ότι υπάρχουν $\rho_1 < \rho_2$ της f στο Δ, οπότε στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2] \subseteq \Delta$ θα εφαρμόζεται το Θ. Rolle και επομένως δες πιο πάνω I^a περίπτωση, 2^a επιλογή.
<u>4^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης στο διάστημα Δ.	Μελετάς τη συνέχεια, τη μονοτονία της f και σε κάθε διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι μονότονη βρίσκεις το Σύνολο Τιμών για το διάστημα αυτό. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά, του πεδίου τιμών που περιέχει το 0 η συνάρτηση θα έχει μια ακριβώς ρίζα (λόγω και της μονοτονίας).
<u>5^η Περίπτωση :</u> Όταν η άσκηση «λέει» Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα Δ.	Μελετάς τη συνέχεια, τη μονοτονία της f και βρίσκεις το $f(\Delta)$ με στόχο : να διαπιστώσεις πως το $0 \notin f(\Delta)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες.

Εφαρμογές :**✓ Στην 1^η Περίπτωση :**

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{\chi^5}{5} + \frac{\chi^3}{3} + \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ μια **θετική** ρίζα .

1^{ος} τρόπος Έστω η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{\chi^5}{5} + \frac{\chi^3}{3} + \kappa$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$, έχει δύο θετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0 < \rho_1 < \rho_2$.

Στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, ως πολυωνυμική και $f(\rho_1) = 0 = f(\rho_2)$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ δηλαδή

$$0 < \rho_1 < \chi_0 < \rho_2 \text{ έτσι ώστε } f'(\chi_0) = 0 .$$

$$\text{Όμως } f'(\chi) = 5\frac{\chi^4}{5} + 3\frac{\chi^2}{3} = \chi^4 + \chi^2 \text{ και } f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^4 + \chi^2 = 0 ,$$

ΑΤΟΠΟ γιατί όταν $\chi > 0 \Leftrightarrow \chi^4 + \chi^2 > 0$

Άρα η $\frac{\chi^5}{5} + \frac{\chi^3}{3} + \kappa = 0$ έχει το πολύ μια θετική ρίζα.

$$\textbf{2^{ος} τρόπος}$$
 Είναι $f(\chi) = \frac{\chi^5}{5} + \frac{\chi^3}{3} + \kappa \Leftrightarrow f'(\chi) = 5\frac{\chi^4}{5} + 3\frac{\chi^2}{3} = \chi^4 + \chi^2$,

προφανώς είναι $f'(\chi) > 0$ όταν $\chi > 0$ άρα η f **γνησίως αύξουσα**

επομένως **αν η $f(\chi) = 0$ έχει ρίζα (θετική) τότε αυτή θα είναι μοναδική.**

✓ Στην 2^η και 3^η Περίπτωση :

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\left(\frac{3}{2}\right)^\chi + 3 \cdot 4^\chi - 4 = 0$, έχει ακριβώς μια

ρίζα την **$\chi = 0$** . Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \left(\frac{3}{2}\right)^\chi + 3 \cdot 4^\chi - 4$, η f είναι συνεχής

στο $\mathbb{R}$. Παρατήρησε πως : $\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3 \cdot 4^0 - 4 = 1 + 3 \cdot 1 - 4 = 0$ άρα το 0 είναι

μία ρίζα τη $f(\chi) = 0$.

$$\text{Επίσης είναι } f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 \cdot 4^x - 4 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 \cdot 4^x - 4\right)' =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{2} + 3 \cdot 4^x \ln 4 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ γιατί } \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0, \ln \frac{3}{2} > 0, 4^x > 0,$$

$\ln 4 > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

✓ Στην 5^η Περίπτωση :

Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

$$\varphi(x) = \ln(x-1) + 2, \quad x \in [2, e^2 + 1] \text{ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η}$$

$$\varphi(x) = 0 \text{ δεν έχει λύση στο διάστημα αυτό.}$$

$$\text{Είναι } \varphi(x) = \ln(x-1) + 2 \Leftrightarrow \varphi'(x) = (\ln(x-1) + 2)' \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{x-1}(x-1)' \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Επειδή } x \geq 2 \text{ άρα } x-1 \geq 1 > 0 \text{ άρα } \varphi'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [2, e^2 + 1].$$

Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών για την φ :

x	2	$e^2 + 1$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$		

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, e^2 + 1]$ και επομένως το σύνολο τιμών

είναι το $[\varphi(2), \varphi(e^2 + 1)]$. Το $\varphi(2) = \ln(2-1) + 2 \Leftrightarrow \varphi(2) = \ln 1 + 2 = 2$ και

$$\varphi(e^2 + 1) = \ln(e^2 + 1 - 1) + 2 \Leftrightarrow \varphi(e^2 + 1) = \ln e^2 + 2 = 2 \ln e + 2 = 4.$$

Οπότε είναι προφανές ότι σύνολο τιμών το $[2, 4]$.

Επειδή το $0 \notin [2, 4]$ άρα η $\varphi(x) = 0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[2, 4]$.

Προσοχή παρατηρήσεις

- α. Έστω μια συνάρτηση f με σύνολο ορισμού A , για την f δεν αρκεί να ισχύει $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in A$, για να μπορείς να πεις ότι το M είναι μέγιστο της συνάρτησης, πρέπει επιπλέον να υπάρχει $x_0 \in A$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = M$, τότε μόνον το M είναι μέγιστο.
- Ανάλογα αν ισχύει $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$.
- β. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο (ολικό), τότε αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τα τοπικά μέγιστα.
- Ανάλογα ισχύουν για το ελάχιστο (ολικό).
- γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης, δεν είναι πάντα μέγιστο της συνάρτησης.
- Ανάλογα ισχύουν για τα τοπικά ελάχιστα.
- δ. Ένα **τοπικό μέγιστο** μπορεί να είναι μικρότερο από ένα **τοπικό ελάχιστο**.

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση **f ορισμένη** σ' ένα διάστημα Δ

- ✓ Αν το x_0 είναι **εσωτερικό** σημείο του Δ .
- ✓ Αν η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0
- ✓ Παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 , τότε :

$$f'(x_0) = 0.$$

Παρατήρηση :

Το **αντίστροφο** του Θεωρήματος Fermat **δεν ισχύει**.

Για την ακρίβεια τα σημεία στα οποία η f' **μηδενίζεται**, δεν είναι πάντα θέσεις τοπικών ακρότατων.

✓ Κρίσιμα σημεία.

Τα **εσωτερικά σημεία** του Δ , στα οποία η **f' μηδενίζεται ή η f δεν παραγωγίζεται**, λέγονται **κρίσιμα σημεία της f στο Δ** .

✓ Πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης.

Για τη συνεχή συνάρτηση f , που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων είναι :

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f' μηδενίζεται ή η f δεν παραγωγίζεται,
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο σύνολο ορισμού της).

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Εστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- Αν $f'(\chi) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) < 0$ στο (χ_0, β) , τότε το $f(\chi_0)$ είναι **τοπικό μέγιστο** της f
- Αν $f'(\chi) < 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) > 0$ στο (χ_0, β) , τότε το $f(\chi_0)$ είναι **τοπικό ελάχιστο** της f
- Αν η $f'(\chi)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$, τότε το $f(\chi_0)$ **δεν είναι τοπικό ακρότατο** και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

✓ Πως βρίσκεις τα τοπικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f ;

Για να βρεις τα ολικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f , βρίσκεις τη μονοτονία και φτιάχνεις τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίον τοποθετείς τα άκρα (αν υπάρχουν) του πεδίου ορισμού, τις τιμές του χ που είναι θέσεις πιθανών ακρότατων και εφαρμόζεις το πιο πάνω Θεώρημα .

Είναι γνωστό ότι μια συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει **μέγιστο** και **ελάχιστο**.

✓ Πως βρίσκεις τα ολικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[α,β]$;

Για να βρεις τα ολικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[α, β]$, ακολουθείς τη εξής διαδικασία :

Βρίσκεις τα **τοπικά ακρότατα** της f στο $(α, β)$, καθώς και τις τιμές $f(α)$, $f(β)$.

- **Το μεγαλύτερο** από τα τοπικά μέγιστα και τα $f(α)$, $f(β)$ είναι **το μέγιστο (ολικό)** της f στο $[α, β]$.
- **Το μικρότερο** από τα τοπικά ελάχιστα και τα $f(α)$, $f(β)$ είναι **το ελάχιστο (ολικό)** της f στο $[α, β]$.

Αν μιας συνάρτησης ο τύπος περιέχει παράμετρο ή παραμέτρους και θες να βρεις την τιμή των παραμέτρων έτσι ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατα, ξεκινάς από την εξίσωση $f'(χ) = 0$ και σε συνδυασμό και με άλλες συνθήκες που (ίσως) σου δίνει υπολογίζεις την ή τις παραμέτρους.

Προσοχή πάντα στο τέλος να κάνεις πάντα επαλήθευση.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση : $f(χ) = 3χ^4 - 2λχ^3 + 6χ^2 + 1$, $χ \in \mathbb{R}$.

Να βρεθούν οι τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε η f στο $χ_0 = 1$ να έχει τοπικό ακρότατο .

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(χ) = (3χ^4 - 2λχ^3 + 6χ^2 + 1)'$
 $= 12χ^3 - 6λχ^2 + 12χ \Leftrightarrow f'(χ) = 6χ(2χ^2 - λχ + 2)$.

Αν στο $χ_0 = 1$ η f παρουσιάζει ακρότατο θα πρέπει , από το Θεώρημα Fermat

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1(2 \cdot 1^2 - λ \cdot 1 + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Επαλήθευση : Αν $λ = 4$ τότε $f(χ) = 3χ^4 - 8χ^3 + 6χ^2 + 1$,

$$f'(χ) = 6χ(2χ^2 - 4χ + 2) = 12χ(χ^2 - 2χ + 1) \Leftrightarrow f'(χ) = 12χ(χ - 1)^2.$$

Στο $χ_0 = 1$ όπως φαίνεται από τον τύπο της f' δεν αλλάζει πρόσημο, αλλά απλώς μηδενίζεται, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $λ$ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο $χ_0 = 1$.

Κυρτότητα – σημεία καμπής συνάρτησης

✓ Κοίλα – κυρτά συνάρτησης

Έστω μία συνάρτηση f **συνεχής** σ' ένα διάστημα Δ και **παραγωγίσιμη** στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι :

- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ ή αλλιώς ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ , αν η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ ή αλλιώς ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ , συμβολικά αν η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο εσωτερικό του Δ .
- ✓ Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους που προφανώς βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη.
- ✓ Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους που προφανώς βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη.

Πρακτικά :

Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά γίνεται με βάση το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα : Έστω μία συνάρτηση f **συνεχής** σ' ένα διάστημα Δ και **δυσ** φορές **παραγωγίσιμη** στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα, δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση f να είναι π. χ. κυρτή και η f'' να μην είναι **αυστηρά** θετική αλλά να υπάρχουν σημεία, εσωτερικά του Δ , όπου η f'' να γίνεται μηδέν.

Πάντως **αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή αποκλείεται η f'' να είναι αρνητική**.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$, η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, παρ' όλα αυτά η $f''(x) = 12x^2$ δεν είναι **αυστηρά** θετική αλλά υπάρχει και το $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$, στο οποίο η $f''(0) = 0$, προσέξτε πάντως ότι η f'' **δεν γίνεται ποθενά αρνητική**.

Αν η f είναι κοίλη ισχύουν αντίστοιχα πράγματα για την f'' .

✓ Σημεία καμψής

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση **f παραγωγίσιμη** σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .

Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίστροφα, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f .

Θεώρημα :

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε **$f''(x_0) = 0$** , δηλαδή το σημείο καμψής της f είναι σημείο ακρότατου για την f' .

Πρακτικά :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$

Πιθανές θέσεις σημείων καμψής μιας συνάρτησης **f** σ' ένα διάστημα Δ είναι

- i) Τα εσωτερικά σημεία $x_0 \in \Delta$ στα οποία η f'' μηδενίζεται.

ii) Τα εσωτερικά σημεία $\chi_0 \in \Delta$ στα οποία δεν υπάρχει η f'' ,

αν επιπλέον Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής.

S O S για τις ασκήσεις :

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν σε μια άσκηση σου ζητά να δείξεις ότι κάποιο χ_0 δεν είναι σημείο καμπής, **αρκεί να δείξεις** ότι $f''(\chi_0) \neq 0$, αν η άσκηση σου ζητά να δείξεις ότι η f δεν έχει καθόλου σημεία καμπής τότε δείχνεις ότι η εξίσωση $f''(\chi) = 0$ δεν έχει λύση στο Δ .

Θεώρημα ROLLE.

Αν μια συνάρτηση f :

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b)
- Και επί πλέον ισχύει $f(a) = f(b)$,

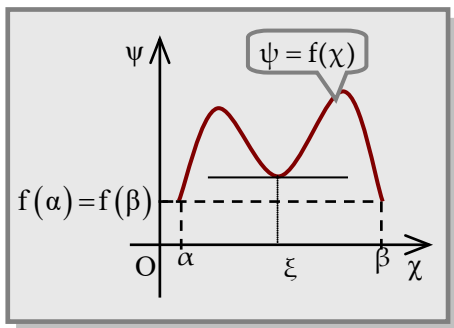
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$, ώστε : $f'(\xi) = 0$.

Παρατήρηση :

Με τη βοήθεια του Θ. Rolle μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f'(\chi) = 0$ σ' ένα διάστημα Δ .

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. ROLLE

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[a, b]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη του άξονα $\chi'\chi$.



Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού (Θ. Μ. Τ.)

Αν μια συνάρτηση f :

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$, ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Μ. Τ.

Έστω συνάρτηση f , στην οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο $[a, b]$.

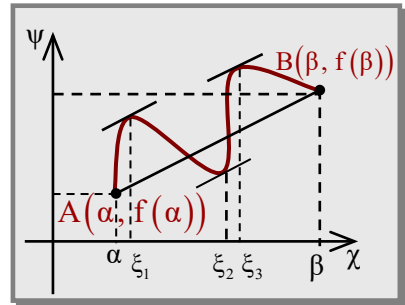
Αν AB η ευθεία με $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$

Ο συντελεστής της AB είναι

$\lambda_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Από το Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in$

(a, b) , ώστε $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$,

ώστε η εφαπτομένη C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Συνέπειες του Θ. Μ. Τ.

Θεώρημα I

Αν μια συνάρτηση f :

- Είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
- Και $f'(\chi) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

✓ Παρατήρηση :

Επειδή όπως ξέρεις, όταν μια συνάρτηση f είναι σταθερή ($f(\chi) = c$) τότε

$f'(\chi) = 0$. Άρα τελικά ισχύει η ισοδυναμία :

Αν για μια συνεχή συνάρτηση ισχύει $f'(\chi) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta \Leftrightarrow f(\chi) = c$.

Θεώρημα II

Αν δύο συναρτήσεις f, g :

- Είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ
- Και $f'(\chi) = g'(\chi)$, για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε
 $f(\chi) = g(\chi) + c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

✓ **Παρατήρηση :**

Επειδή όταν δυο συνεχείς συναρτήσεις f, g είναι ίσες ($f(\chi) = g(\chi)$) τότε θα είναι και $f'(\chi) = g'(\chi)$. Άρα τελικά ισχύει η ισοδυναμία :

Αν για δυο συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύει $f(\chi) = g(\chi) + c$, για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta \Leftrightarrow f'(\chi) = g'(\chi)$.

Προσοχή :

Οι παραπάνω συνέπειες του Θ. Μ. Τ. ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Αν θες να εξασφαλίσεις πως υπάρχει λύση για την : $f'(\chi_0) = 0$ σε κάποιο διάστημα (α, β) τότε μπορείς να «δουλέψεις» με τρεις τρόπους :

- 1^{ον} Να λύσεις, αν είναι εύκολο την $f'(\chi_0) = 0$.
- 2^{ον} Να προσπαθήσεις να εφαρμόσεις Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την f οπότε για την $f'(\chi_0) = 0$ υπάρχει μια τουλάχιστον λύση που ανήκει στο (α, β) .
- 3^{ον} Να θεωρήσεις την $f'(\chi)$ ως μια νέα συνάρτηση g τέτοια ώστε :

$g(\chi) = f'(\chi)$ και να προσπαθήσεις να εφαρμόσεις Bolzano για την g .

- ✓ Αν στην εξίσωση υπάρχει και η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f τότε τα φέρνεις όλα στο πρώτο μέλος φέρνοντας την εξίσωση στη μορφή $E(\chi) = 0$ και προσπαθείς να βρεις μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $g'(\chi) = E(\chi)$ και ταυτόχρονα για την $g(\chi)$ να εφαρμόζεται το Θ. Rolle.

Αιτιαδαιά

- ✓ Αν η άσκηση ζητάει να αποδείξεις μια ανισότητα της μορφής :

$$\kappa < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \lambda \text{ θεωρείς την συνάρτηση } f \text{ όπως εμφανίζεται στην πιο}$$

πάνω σχέση και διαπιστώνεις ότι για αυτήν ισχύουν οι προϋποθέσεις του

Θ. Μ. Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} . \text{ Αρκεί στη συνέχεια να δείξεις ότι}$$

$\kappa < f'(\xi) < \lambda$, πράγμα που συνήθως επιτυγχάνεται με απλό τρόπο , τις

πιο πολλές φορές μάλιστα ξεκινάς από την σχέση $\xi \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$.

- Αν η ανισοτική σχέση δεν είναι στην μορφή $\kappa < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \lambda$

αυτονόητο είναι πως κάνεις τους απαραίτητους μετασχηματισμούς για να την φέρεις σ' αυτή τη μορφή.

- Προσοχή όταν χρειάζεται να διαιρέσεις με μια παράσταση, να εξασφαλίζεις ότι αυτή είναι θετική, για να μην επηρεάσει την ανισότητα, αλλιώς εξετάζεις περιπτώσεις
- Αν υπάρχει απόλυτο διαιρείς πρώτα με το απόλυτο.
- Πολύ χρήσιμο είναι να θυμάσαι το κριτήριο παρεμβολής, θα σου χρειαστεί.

Αν μια συνάρτηση f :

- Είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
- Αν $f'(x) > 0$, για κάθε *εσωτερικό* σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι *γνησίως αύξουσα* στο Δ .
- Αν $f'(x) < 0$, για κάθε *εσωτερικό* σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι *γνησίως φθίνουσα* στο Δ

Εφαρμογές στο Hospital

Υπάρχουν τέσσερις μορφές απροσδιοριστίας στις οποίες εφαρμόζεται ο Hospital :

- **Μορφή πρώτη :** $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$
- **Μορφή δεύτερη :** $0 \cdot (\pm \infty)$
- **Μορφή τρίτη :** $\infty - \infty$
- **Μορφή τέταρτη :** 0^0 , 1^∞ , ∞^0

- **Μορφή πρώτη :** $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

Λύνονται με βάση τα δυο θεωρήματα του Hospital.

Παράδειγμα : Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi) = \frac{\ell n \chi - \chi + 1}{(\chi - 1)^2}$, στο $\chi_0 = 1$.

Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow 1} (\ell n \chi - \chi + 1) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi - 1)^2 = 0$ εξετάζεις το :

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\ell n \chi - \chi + 1)'}{((\chi - 1)^2)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\chi} - 1}{2(\chi - 1)(\chi - 1)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1 - \chi}{\chi}}{2(\chi - 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - \chi}{2\chi(\chi - 1)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - \chi}{2\chi^2 - 2\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{-\chi}{2\chi^2} = -\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{2\chi} = -\frac{1}{2} \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\ell n \chi - \chi + 1}{(\chi - 1)^3} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\ell n \chi - \chi + 1)'}{((\chi - 1)^2)'} = -\frac{1}{2}$$

- **Μορφή δεύτερη :** $0 \cdot (\pm \infty)$

Αν υποθέσουμε πως πρέπει να βρεις το όριο μιας παράστασης $f(\chi) \cdot g(\chi)$ με

$$\lim_{\chi \rightarrow} f(\chi) = 0 \text{ , } \lim_{\chi \rightarrow} g(\chi) = \pm \infty$$

Αιτιαδεται

1^{ος} τρόπος : $f(\chi) \cdot g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\frac{1}{g(\chi)}}$ **οπότε η απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$**

μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ $\frac{0}{0} \left(0 \cdot (\pm\infty) = \frac{0}{\frac{1}{\pm\infty}} = \frac{0}{0} \right).$

2^{ος} τρόπος : $f(\chi) \cdot g(\chi) = \frac{g(\chi)}{\frac{1}{f(\chi)}}$ **οπότε η απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$**

μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \left(0 \cdot (\pm\infty) = \frac{\pm\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right).$

Παράδειγμα : Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi) = \chi^5 \ln \chi$, όταν $\chi \rightarrow 0$.

Επειδή $\lim_{\chi \rightarrow 0} \chi^5 = 0$, $\lim_{\chi \rightarrow 0} \ln \chi = -\infty$ άρα (2^{ος} τρόπος)

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^5 \ln \chi) &= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\ln \chi}{\frac{1}{\chi^5}} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\ln \chi)'}{\left(\frac{1}{\chi^5}\right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{5\chi^4}{\chi^{10}}} = \\ &= - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi^{10}}{5\chi^5} = - \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi^5}{5} = 0. \end{aligned}$$

• **Μορφή τρίτη :** $\infty - \infty$

Μπορείς να ακολουθήσεις δυο τρόπους :

Αν υποθέσουμε πως πρέπει να βρεις το όριο μιας παράστασης $f(\chi) - g(\chi)$

1^{ος} τρόπος : $f(\chi) - g(\chi) = \frac{f(\chi) - g(\chi)}{\frac{1}{f(\chi) \cdot g(\chi)}} = \frac{\frac{1}{g(\chi)} - \frac{1}{f(\chi)}}{\frac{1}{f(\chi) \cdot g(\chi)}}$

οπότε η απροσδιοριστία $\infty - \infty$ μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$.

2ος τρόπος : $f(\chi) - g(\chi) = f(\chi) \left(1 - \frac{g(\chi)}{f(\chi)} \right)$ **οπότε η απροσδιοριστία**

$\infty - \infty$ μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\infty \left(1 - \frac{0}{0} \right)$.

Παράδειγμα : Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi) = \chi - \ell n \chi$, όταν $\chi \rightarrow +\infty$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ell n \chi = +\infty$ άρα $\varphi(\chi) = \chi - \ell n \chi = \chi \left(1 - \frac{\ell n \chi}{\chi} \right)$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ell n \chi}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\ell n \chi)'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \varphi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi - \ell n \chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ell n \chi}{\chi} \right) = +\infty (1 - 0) = +\infty$$

• **Μορφή τέταρτη :** 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Οι πιο πάνω απροσδιοριστίες εμφανίζονται όταν

η συνάρτηση είναι της μορφής : **$\varphi(\chi) = f(\chi)^{g(\chi)}$** και

- $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = 0$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) = 0$
- $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = 1$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) = \pm \infty$
- $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \pm \infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} g(\chi) = 0$

$$\chi_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Αυτές οι περιπτώσεις αντιμετωπίζονται, αρχικά, με αντικατάσταση του

$f(\chi)^{g(\chi)} = e^{g(\chi) \cdot \ln f(\chi)}$, στη συνέχεια θέτεις $u = g(\chi) \cdot \ln f(\chi)$, βρίσκεις το

$u_0 = \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} (g(\chi) \cdot \ln f(\chi))$ οπότε θα είναι **$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \varphi(\chi) = \lim_{u \rightarrow u_0} e^u$** .

Υπενθύμιση γι' αυτούς που ξεχνούν :

$$\lim_{u \rightarrow u_0} e^u = e^{u_0} \quad , \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \quad , \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Παράδειγμα : Να βρείτε τ όριο της $\varphi(\chi) = (1 + \chi)^{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi \rightarrow 0^-$.

Είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi} = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} (1 + \chi) = 1$ άρα απροσδιοριστία της μορφής $1^{-\infty}$

Είναι $\varphi(\chi) = (1 + \chi)^{\frac{1}{\chi}} = e^{\frac{1}{\chi} \ln(1+\chi)} = e^{\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}}$, θέτεις $u = \frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$, βρίσκεις το

$u_0 = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$, το $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\ln(\chi+1)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{(\ln(\chi+1))'}{\chi'} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{\chi+1}}{1} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\chi+1} = 1 \quad \text{άρα } \mathbf{u_0 = 1} .$$

Οπότε $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \varphi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} (1 + \chi)^{\frac{1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{\chi} \ln(\chi+1)} = \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e^1 = e$.

Προσοχή :

✓ Οι μορφές 0^0 , 1^∞ , ∞^0 είναι απροσδιόριστες και η αντικατάσταση του $f(\chi)^{g(\chi)} = e^{g(\chi) \cdot \ln f(\chi)}$ δεν **αίρει** την απροσδιοριστία, δεν λύνει δηλαδή άμεσα το πρόβλημα, απλά η αντικατάσταση αυτή μετατρέπει όλες αυτές της απροσδιόριστες μορφές στη μορφή : $0 \cdot (\pm\infty)$, την οποία όμως ξέρεις πώς να την χειριθείς.

✓ Αν στις απροσδιόριστες μορφές 0^0 , 1^∞ , ∞^0 , $0 \cdot (\pm\infty)$, το 0 και το 1 είναι σταθερές (δηλαδή σταθερές συναρτήσεις) και δεν προκύπτουν ως όρια μη σταθερών συναρτήσεων, όπως π.χ. στα όρια :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^0) \quad , \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^0) \quad , \quad \lim_{\chi \rightarrow 0} \left((\chi^\kappa)^0 \right) \quad , \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left((\chi^\kappa)^0 \right) ,$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (0 \cdot \ln \chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow 0^-} (0 \cdot \ln \chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^\chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (1^\chi), \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^{\eta\mu\chi}),$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} (1^{\eta\mu\chi}), \quad \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{2}} (0^{2\chi-1}) \text{ κ.λ.π. τότε το όριο προκύπτει άμεσα. και } \underline{\text{όχι}}$$

με εφαρμογή των κανόνων του HOSPITAL και να γιατί :

1. επειδή $\chi^0 = 1$ άρα	$\lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} 1 = 1$
	$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^0) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 = 1$
2. επειδή $0 \cdot \ln \chi = 0$ άρα	$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} (0 \cdot \ln \chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} 0 = 0$
	$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (0 \cdot \ln \chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 0 = 0$
3. επειδή $1^\chi = 1$ άρα	$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 = 1$
	$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} (1^\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} 1 = 1$
4. επειδή $1^{\eta\mu\chi} = 1$ άρα	$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^{\eta\mu\chi}) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} 1 = 1$
	$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} (1^{\eta\mu\chi}) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} 1 = 1$
5. επειδή $0^{2\chi-1} = 1$ άρα	$\lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{2}} (0^{2\chi-1}) = \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{2}} 1 = 1$

Η περίπτωση **4.** πιο πάνω είναι ξεχωριστή γιατί π.χ. αν επιχειρήσεις να βρεις το

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^{\eta\mu\chi}) \text{ με τον κλασικό τρόπο : } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (1^{\eta\mu\chi}) = 1^{\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \eta\mu\chi} \text{ θα διαπιστώσεις}$$

πως δεν υπολογίζεται γιατί σου θυμίζω πως το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \eta\mu\chi$, όπως άλλωστε και

το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\eta\chi$ δεν υπάρχουν .

Αιτιαδειά

Εκφωνήσεις Θεμάτων

ωαυελλήυες 1974

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων και γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση e^x παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{\lambda e^x - (1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$.

β. Με τη βοήθεια της παραγώγου της φ να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση φ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1.

ωαυελλήυες 1975

ΘΕΜΑ 1^ο

Έστω μια συνάρτηση $f: Q_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in Q_+^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(1) = 0$ και $f\left(\frac{1}{\rho}\right) = -f(\rho)$, για κάθε $\rho \in Q_+^*$.

β. Υποθέτουμε ακόμα ότι ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t , για τον οποίο ισχύει $f(t) = 0$ είναι ο $t = 1$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί ρ και τ με $\rho \neq \tau$ και $f(\rho) = f(\tau)$.

2.

ωαυελλήυες 1977

ΘΕΜΑ 1^ο

α. Να δείξετε ότι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της.

β. Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = a^x$, $0 < a < 1$, είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

γ. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει τη λύση $x = 2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει άλλη λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης : $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

β) Θεωρούμε το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές

$$P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta \text{ όπου } \alpha > 0 \text{ και } \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0.$$

Να δείξετε ότι για οποιουδήποτε διάφορους μεταξύ τους πραγματικούς

αριθμούς κ, λ με $\kappa \cdot \lambda \leq 0$ ισχύει η σχέση : $\left| \frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} \right| \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$

3.

ωαυελλήμυες 1978**ΘΕΜΑ 4^ο**

α. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του διαφορικού λογισμού να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση : $\psi = 1 + \sqrt[5]{(\chi + 2)^4}$ στο $\Delta = [-3, -1]$

β. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την προηγούμενη συνάρτηση στο διάστημα Δ .

4.

ωαυελλήμυες 1979**ΘΕΜΑ 3^ο**

Ένα πολύ ωραίο συνδυαστικό θέμα ανάμεσα στους μιγαδικούς και στις παραγώγους.

Αν $\Pi(\chi) = \chi^2 + 2|z_1 - z_2|\chi + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$, όπου z_1, z_2 είναι δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $\Pi(\chi) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό χ . Πότε μπορεί να ισχύει η ισότητα;

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $\Pi(\chi)$ βαθμού ≥ 2 .

α. Να δείξετε ότι αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι πολλαπλή ρίζα ^{*1} του $\Pi(\chi)$ τότε ο ρ είναι ρίζα της παραγώγου του $\Pi(\chi)$.

Λ ι β α δ ε ι ά

- β. Με τη βοήθεια της προηγούμενης ιδιότητας να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο

$$P(\chi) = \chi^4 + (\alpha - \beta)\chi^3 + 2\alpha\chi^2 - 5\chi + 4 \text{ να έχει πολλαπλή ρίζα τον αριθμό } 1.$$

*** Αν το ρ είναι πολλαπλή ρίζα ενός πολυωνύμου, αυτό σημαίνει πως το πολυώνυμο έχει ως παράγοντα το $(\chi - \rho)^k$ όπου k ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας, δηλαδή ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές το ρ επαναλαμβάνεται ως ρίζα

5.

παυελλήνικες 1980

ΘΕΜΑ 3^ο

- α. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση

$$\psi = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 - 6\chi + 1 \text{ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία } \chi = 1$$

$$\text{και } \chi = -2$$

- β. Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης (αφού αντικατασταθούν τα α και β με τις τιμές τους).

6.

παυελλήνικες 1982

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. Να δοθεί ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο χ_0

του πεδίου ορισμού της και στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της

γεωμετρικής σημασίας της παραγώγου στο σημείο χ_0 .

- β. Οι συναρτήσεις $f(\chi)$ και $g(\chi)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζονται παντού σε αυτό. Επί πλέον είναι $g(\chi) \neq 0$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

$$\text{Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση } \varphi(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)}.$$

$$\text{Να αποδειχθεί ότι αν } \varphi'(\rho) = 0 \text{ τότε είναι } \varphi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} \text{ όπου } g'(\rho) \neq 0, \text{ με}$$

$$\rho \in \Delta.$$

Δαμινός Μωραΐτης

7.

Πανελλήνιες 1983**ΘΕΜΑ 3^ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση της μεταβλητής χ με τύπο $\psi = \frac{5\chi}{\chi^2 + \chi + 1}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η πιο πάνω συνάρτηση έχει δυο ακρότατα, ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο και να υπολογισθούν αυτά τα ακρότατα.

Το 1983 άρχισε το σύστημα με τις **Δέσμες** που σε πολλά σημεία έμοιαζε με το σημερινό. Περίπου **A** Δέσμη = Θετική και **Δ** Δέσμη = Τεχν/κή

8.

Πανελλήνιες 1983 A Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Να αποδειχθεί :

α. Ότι για τη συνάρτηση $F(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi - c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει

$c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.

β. Αν $c \in [\alpha, \beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $\psi = f(\chi)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\chi > 0$ ισχύει η σχέση $\ln \chi \leq |\chi - 1|$.

β. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

Λιβαδιά

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi \ln \chi}{1 - \chi}, & 0 < \chi \neq 1 \\ 0 & \chi = 0 \\ -1 & \chi = 1 \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι

- i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0,1)$.
- iii) $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

9.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1983 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής :

$$(\chi_0 - \varepsilon, \chi_0 + \varepsilon).$$

- i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο χ_0 .
- ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο $M(\chi_0, f(\chi_0))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $\psi = f(\chi)$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(1, 1)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $\psi = \chi^3$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^2 - |\chi| - 2$.

Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

10.

πανελλήνιες 1984 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής χ με :

$$\psi(\chi) = \chi + \frac{4}{\chi}$$

- α . Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο των τιμών της ψ
- β . Να εξετάσετε την ψ ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 2]$ και $[2, +\infty)$.

11.

πανελλήνιες 1985 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

- α . Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $\chi_0 \in \Delta$ είναι $f'(\chi_0) = 0$.

Αν $f''(\chi_0) > 0$, τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Κριτήριο 2^{ης} παραγώγου, τώρα εκτός ύλης .

- β . Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2(\chi - 3) + 4$, $\chi \in \mathbb{R}$. Έστω χ_1, χ_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και χ_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή.

Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(\chi_1, f(\chi_1)), (\chi_2, f(\chi_2)), (\chi_3, f(\chi_3))$ είναι συνευθειακά.

12.

παανελλήνιες 1985 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 2^ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά, καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα.

Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει :

- α. Τα κοίλα άνω.
- β. Τα κοίλα κάτω.

ΘΕΜΑ 3^ο

β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω f , g συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in \Delta$.

Αν οι f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε να αποδειχθεί ότι και η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

β. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, 3)$.

13.

ωανελλήνικες 1986 Α Δέσμη**ΘΕΜΑ 4^ο**

A. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα:

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) και ότι στο σημείο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι $f'(\chi_0) = 0$.

Η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό μέγιστο αν :

Για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0]$ είναι $f'(\chi) \geq 0$ και για κάθε $\chi \in [\chi_0, \beta)$ είναι $f'(\chi) \leq 0$.

B. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)\chi^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\chi^2 - 10\chi + 7$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $\chi_0 = \frac{3}{2}$.

Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f .

14.

ωανελλήνικες 1986 Δ Δέσμη**ΘΕΜΑ 3^ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = 2\chi^3 + 3\chi^2 - 36\chi + 90$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{5}{2}\chi^2 + 7\chi - 1$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Αν C είναι η γραφική παράσταση της f , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $\left(1, \frac{23}{6}\right)$.

Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον $\chi\chi$.

15.

ωανελλήνικες 1987 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

- A.** Αν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα Δ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε να αποδειχθεί ότι $f'(\chi_0) = 0$.
- B.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^4 - 14\chi^2 + 24\chi$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A, B, Γ είναι παράλληλες προς τον άξονα $\chi'\chi$.
Να αποδειχθεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $\psi'\psi$.

16.

ωανελλήνικες 1987 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

- A.** Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
- B.** Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + 9\chi - 12$.
Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στην C και η εφαπτομένη της C στο σημείο A να έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό -3 .

17.

ωανελλήνικες 1988 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Θεωρούμε συνάρτηση g ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε
- Δαμιανός Μωραΐτης

ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ και $g(\chi_0) \neq 0$ τότε και η

συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και είναι $\left(\frac{1}{g}\right)'(\chi_0) = -\frac{g'(\chi_0)}{[g(\chi_0)]^2}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi + 1 + \frac{1}{\chi + 1}$.

i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

18.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1988 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} 3\chi^2 - 5\chi + 6 & \chi \leq 1 \\ 2\sqrt{\chi^2 + 3} & \chi > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 = 1$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω $v \in \mathbb{N}$ και $v > 1$. και η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^v$. Να αποδείξετε ότι $f'(\chi) = v\chi^{v-1}$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

B. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = 3\chi^3 - \alpha\chi^2 + \beta\chi - 3$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Εάν η f έχει τοπικά ακρότατα στα $\chi_1 = 1$ και $\chi_2 = -\frac{5}{9}$ τότε να βρεθούν οι αριθμοί α, β .

19.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1989 Α Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι $f'(\chi) = 0$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ .

Λ ι β α δ ε ι ά

B. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι :

i) Είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ .

ii) $f'' = g''$ και

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να δειχθεί ότι :

α. Για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι $f(\chi) - g(\chi) = c\chi$ όπου $c \in \mathbb{R}$

β. Αν η $f(\chi) = 0$ έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο $\chi_0 = \frac{\pi}{8}$.

20.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1989 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 + \frac{2\alpha}{\chi} + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται

στο $\chi_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_0 = 2$.

α. Να βρεθούν τα α, β

β. Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Να αποδείξετε ότι :

Αν οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in \Delta$ τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ και $(f + g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) + g'(\chi_0)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Να αποδειχθεί ότι :

α. Η συνάρτηση f με $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα.

21.

Πανελλήνιες 1990 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) τότε υπάρχει

$$\xi \in (a, b) \text{ τέτοιο ώστε να είναι } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{\alpha\chi^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)\chi^2 + (\gamma - \delta)\chi + \delta$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $\chi'\chi$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = 3\chi + \frac{1}{2\chi^2}$

A. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Λιβαδάειά

22.

πανελληνικές 1990 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αποδείξετε ότι :

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμες στο $\chi_0 \in \Delta$ τότε $(f \cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in \Delta$ και είναι

$$(f \cdot g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) + f(\chi_0) \cdot g'(\chi_0). \quad \text{Τώρα εκτός ύλης}$$

B. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει $g(-1) = 7$.

Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(\chi) = 3(\chi - 2)^2 \cdot g(2\chi - 5)$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(\chi) = \frac{\chi^4}{3} + \frac{2\alpha\chi^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)\chi^2 + (\alpha^3 + 7)\chi - 5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

23.

πανελληνικές 1991 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

B. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \sqrt{\chi} - \frac{\ln \chi}{2\sqrt{\chi}}$, $\chi > 0$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονotonίας της f .

24.

ωανελλήνικες 1991 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $\chi_0 \in \Delta$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{\chi \cdot f(\chi_0) - \chi_0 \cdot f(\chi)}{\chi - \chi_0} = f(\chi_0)' - \chi_0 \cdot f(\chi_0)$.

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(\chi) = \sqrt{\chi+3} + \chi - 3$, με $\chi \geq -3$ στο σημείο $\chi_0 = -3$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

α. Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) .

β. Για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ είναι $g(\chi) \neq 0$ και για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$ είναι

$$g'(\chi) \neq 0 \text{ και}$$

$$\gamma. \quad f(\beta) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g(\beta) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι :

1. Για την συνάρτηση F με $F(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ εφαρμόζεται το

θεώρημα του Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

2. Υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\chi_0)}{g'(\chi_0)} = \frac{f(\chi_0)}{g(\chi_0)}$.

B. α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) > 0$, με $\chi \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(\chi) = [f(\chi)]^\chi$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

*** Απαραίτητος μετασχηματισμός :

$$\alpha^\chi = e^{\chi \cdot \ln \alpha}$$

$$\text{δηλαδή } (\text{βάση})^{(\text{εκθέτης})} = e^{(\text{εκθέτης}) \cdot \ln(\text{βάσης})}$$

$$\text{πράγματι } \ln \alpha^\chi = \ln e^{\chi \ln \alpha} \Leftrightarrow \chi \ln \alpha = \chi \ln \alpha \cdot \ln e = \chi \ln \alpha.$$

Λ ι β α δ ε ι ά

β. Έστω $\alpha > 0$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με

$$g(\chi) = \alpha \sqrt{\chi^2 + 1}, \text{ όπου } \chi \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της

συνάρτησης: $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = \eta \mu^2 \chi - \sqrt{2} \eta \mu \chi + 2\sqrt{2}$.

25.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1992 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$.

α. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(\chi) = \ln f(\chi)$, $\chi \in \Delta$ στρέφει τα

κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(\chi) \cdot f''(\chi) \geq [f'(\chi)]^2$, $\chi \in \Delta$.

β. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με

$g(\chi) = \ln(\chi^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β. α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με

$$f(\chi) = \alpha^\chi - \chi, \quad \chi \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < \alpha < 1.$$

β. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η

$$\text{ισότητα: } \alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2) \text{ όπου } 0 < \alpha < 1.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Β. α. Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την

ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(\chi) = c \cdot e^\chi$ όπου c πραγματική σταθερά.

*** Μια πολύ σπουδαία και χρήσιμη ιδιότητα: $f = f' \Leftrightarrow f(\chi) = c \cdot e^\chi$.

Θυμηθείτε τη στα ολοκληρώματα.

- β. Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(\chi) \cdot \sin \chi + g(\chi) \cdot \eta \mu \chi = g(\chi) \cdot \sin \chi$ και $g(0) = 1992$.

26.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1992 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

- A. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\chi \in (0, 1)$ ισχύει η σχέση

$$1 + \chi < e^\chi < 1 + e \cdot \chi$$

- B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} \chi^3 \eta \mu \frac{1}{\chi} & \chi \neq 0 \\ 0 & \chi = 0 \end{cases}$.

- i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
 ii) Να βρεθεί η παράγωγος της f για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{\chi^2}{4}(2 \ln \chi - 1) - 2\chi(\ln \chi - 1)$, $\chi > 0$.

- α. Να βρεθεί η παράγωγος f' της f για κάθε $\chi > 0$.
 β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

27.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1993 Α Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

- B. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^4}} + 4$ με $\chi > 0$.

- α) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f

ΘΕΜΑ 4^ο

A . Δίνεται η ορθή γωνία $\chi O\psi$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m , του οποίου τα άκρα A και B «ολισθαίνουν» πάνω στις πλευρές $O\psi$ και $O\chi$ αντίστοιχα.

Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ και η θέση του πάνω

στον άξονα, $O\chi$ δίνεται από την συνάρτηση : $s(t) = v \cdot t$, $t \in [0, 5]$,

όπου t ο χρόνος σε sec .

- α)** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου t .
β) Ποιος είναι ο ρυθμός του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m .

28.

Πανελλήνιες 1993 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

A . Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{2}{3}\chi^3 - \frac{7}{2}\chi^2 + 3\chi + \mu$, όπου $\chi, \mu \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Μια βιομηχανία παράγει χ ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από

την συνάρτηση $K(\chi) = \frac{\alpha\chi^3}{4}$ όπου $\chi > 0$ και $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$.

Τα έσοδα από την πώληση χ ποσότητας του προϊόντος δίνεται από την

συνάρτηση $E(\chi) = \chi^2$, $\chi > 0$ και το κέρδος από την συνάρτηση

$f(\chi) = E(\chi) - K(\chi)$, $\chi > 0$.

- α.** Να βρείτε την ποσότητα χ_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με $M(\alpha)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

- β. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2} \right]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος.

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$ $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$

- Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f , να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της

29.

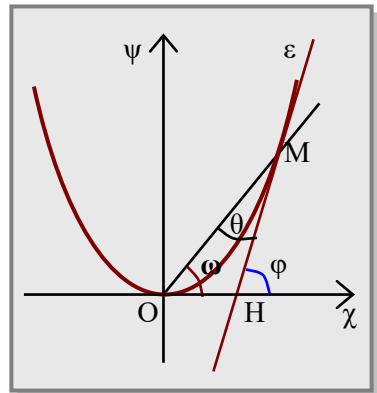
παυελλήμους 1994 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- β. Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$ και θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία MO , όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha > 0$).



- Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με

$$0 < f(x) < 1 \text{ και } f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e], \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχει}$$

μόνο ένας αριθμός $\chi_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε : $f(\chi_0) + \chi_0 \cdot \ln \chi_0 = \chi_0$.

ΘΕΜΑ 3^ο

- Α. Έστω p πραγματικός αριθμός, $A(x)$, $B(x)$ πολώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $B(p) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολώνυμο $f(x)$ τέτοιο ώστε

Λιβαδεία

$$A(\chi)B(\chi) = (\chi - \rho)^2 f(\chi), \text{ αν και μόνο αν } A(\rho) = A'(\rho) = 0$$

- B.** Έστω v ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις οποίες το πολυώνυμο $Q(\chi) = \chi^v (\nu \chi^3 + \kappa \chi^2 + \lambda \chi + 8)$ έχει παράγοντα το $(\chi - 2)^2$. ΑΠ. Είναι $\kappa = -4v + 2, \lambda = 4v - 8$

30.

ωανελλήνικες 1994 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \chi^2 - 2\chi \cdot \ln \chi$, με $\chi \in (0, +\infty)$.
- α.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 3^ο

- A.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΘΕΜΑ 4^ο

- A.** Έστω ότι η ευθεία $\psi = 2\chi + 5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Να βρείτε τα όρια :

α. $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - 2\chi]$.

β. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(\chi) + 4\chi}{\chi \cdot f(\chi) - 2\chi^2 + 3\chi} = 1$.

B. Να αποδείξετε ότι

α. $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Η εξίσωση $2 \cdot e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

31.

ωανελλήνικες 1995 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1$ με

$0 < \alpha < \beta$. Η ημιευθεία $\psi = (\epsilon\phi\theta) \cdot x$, $x > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τέμνει την C_1 στο

σημείο $\Gamma_1(x_1, y_1)$ και την C_2 στο σημείο $\Gamma_2(x_2, y_2)$.

α. Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_1 στο σημείο Γ_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_2 στο σημείο Γ_2 να αποδείξετε ότι το γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2$ είναι ίσον με $(\epsilon\phi\theta)^{-2}$.

β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\theta) = \lambda_1 \lambda_2$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση :

$$f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = \ln |f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

B . α. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο

διάστημα $[α, β]$ ισχύει: Αν $f'(χ) > 0$ για κάθε $χ \in (α, β)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, β]$.

33.

παυελλήμεις 1995 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 3^ο

A . β. Δίνεται η συνάρτηση $f(χ) = χ^4 - 2χ^2 + α$, $α \in \mathbb{R}$

- i) Αν $A(χ_1, f(χ_1))$, $B(χ_2, f(χ_2))$, $\Gamma(χ_3, f(χ_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $χ_1 < χ_2 < χ_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.
- ii) Αν $0 < α < 1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(χ) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

B . Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(χ) \neq 0$ για κάθε $χ \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε :

$$g(χ)f'(χ) = 2f(χ) \text{ για κάθε } χ \in \mathbb{R} .$$

Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(χ_0, f(χ_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(χ_0, g(χ_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2χ + 5 = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

A . Η αξία μιας μηχανής που τυπώνει βιβλία, μειώνεται με το χρόνο t

σύμφωνα με τον τύπο: $f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$ όπου A ένας θετικός

αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$, από την πώληση των βιβλίων που τυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση

$$K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}, \quad t \geq 0 . \quad \text{Υποθέτουμε ότι } K(0) = 0 .$$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι, ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν, συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

34.

Πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. α. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta$ είναι $f'(\chi) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

β. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f' = g$, $g' = -f$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς.

Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f'' + f = g'' + g = 0$ και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.

B. Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g . Να αποδείξετε ότι αν χ_1 και χ_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in (\chi_1, \chi_2)$ τότε η g έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (χ_1, χ_2) .

ΘΕΜΑ 3^ο

B. Να αποδείξετε τις ανισότητες :

α. $\eta\mu\chi < 2\chi$, αν $\chi > 0$.

β. $\eta\mu\chi > \chi - \frac{\chi^3}{3}$ αν $\chi > 0$.

35.

Πανελλήνιες 1996 Δ Δέση

ΘΕΜΑ 2^ο

A . α. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι αν $f'(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

β. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$f'(\chi) = g'(\chi) + \eta\mu^2\chi + e^\chi \quad \text{για } \chi \in [0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(\chi) < g(0) + f(\chi)$ για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$.

B . α. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = e^{a\chi}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τιμές της παραμέτρου a έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f'(\chi) + 2f'(\chi) = 3f(\chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

β. Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(\chi) = \lambda \cdot e^{\beta_1\chi} + \mu \cdot e^{\beta_2\chi}, \quad \text{με } \chi \in \mathbb{R}. \text{ Έστω ότι υπάρχει πραγματικός}$$

αριθμός χ_0 τέτοιος ώστε $g(\chi_0) = g'(\chi_0) = 0$.

Να αποδειχθεί ότι $\lambda = \mu = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

B . Έστω ότι $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά την χρονική στιγμή t , όπου $t \geq 0$

και $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση με : $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του

αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού

απορρόφησης κατά τη χρονικά στιγμή $t_0 = 0$.

Δαμιανός Μωραΐτης

36.

Πανελλήνιες 1997 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω a πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(a)}{g(a)}$ και $B = \frac{f'(a) - A \cdot g'(a)}{g(a)}$.

Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{a\}$, τέτοια ώστε :

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{a\}, \text{ να αποδειχθεί ότι}$$

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε : $(x-2)f''(x) + (\alpha x - \beta x^2)f'(x) = e^{x-2} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$ ώστε $f'(\rho) = 0$.

Να εξετάσετε αν το $f(\rho) = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

τέτοια ώστε: $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g\left(\frac{\chi_1}{2} + \frac{\chi_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)}$ για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε: υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει :
Λιβαδειά

$$g(\chi + \psi) = e^\psi g(\chi) + e^\chi g(\psi) + \chi\psi + \alpha \quad \text{για κάθε } \chi, \psi \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

i) $g(0) = -\alpha$

ii) $g'(\chi) = g(\chi) + g'(0)e^\chi + \chi$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

37.

ωανελλήνικες 1997 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$f''(\chi) - g''(\chi) = 4 \quad \text{για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f'(1) = g'(1), \quad f(2) = g(2).$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

B. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$. Να αποδειχθεί ότι :

i) $f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$

38.

ωανελλήνικες 1998 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

A. β. Αν η πολωνυμική εξίσωση $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί έχει ως ρίζα το μιγαδικό $2 - 3i$ να βρείτε τα β, γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi) = \chi^2 + \beta\chi + \gamma$ στο σημείο $A(1, f(1))$ όταν το χ μεταβάλλεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Β. Ένας γεωργός προσθέτει χ μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(\chi)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν $g(\chi) = M_0 + M(1 - e^{-\mu\chi})$, $\chi > 0$ όπου M_0 , M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(\chi)$.

Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

39.

ωανελλήνικες 1998 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2 \cdot t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές από τον τύπο: $E(t) = (t-1)\varphi(t)$ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη.

Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές σύμφωνα με τον τύπο $K(t) = \varphi(t+4)$, $t \geq 0$.

- α. Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$ για $t \geq 0$ όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.
- β. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;
- γ. Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $h(\chi) = 2^{12} (e^{-4\chi} - e^{-a\chi})$, $\chi \geq 0$ όπου a πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

α. Να δείξετε ότι : $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = h(0) = 0$

β. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(\chi)$.

γ. Αν χ_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και χ_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(\chi)$ να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα χ_1, χ_2 .

40.

ωαυελλήνυες 1999 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο χ_0 του διαστήματος Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε $f'(\chi_0) = 0$.

Β. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο χ_0 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση : $f''(\chi) > 4(f'(\chi) - f(\chi))$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi)e^{-2\chi}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι είναι $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

41.

ωαυελλήνυες 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Δαμιανός Μωραΐτης

B. α. Να αποδείξετε ότι $\ln(\chi+1) > \chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{1}{5}$ για κάθε $\chi \in [0, +\infty)$.

β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$[f(\chi)]^5 + 2[f(\chi)]^3 + 3f(\chi) = (\chi+1)\ln(\chi+1) - \frac{4}{5}\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{6} + 182 \text{ για}$$

κάθε $\chi \in [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\chi \in [0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \eta\mu^2(\alpha\chi)$ $\chi \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει $f''(\chi) + 4\alpha^2 \cdot f(\chi) = 2$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 1$

α. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f και να

αποδείξετε ότι $f(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [1, 3]$

Έγινε η απαραίτητη αναπροσαρμογή μιας και το **α)** ερώτημα που χρειαζόταν άμεσα στην απόδειξη του **β)** είναι εκτός ύλης.

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και

$$\text{ότι ισχύει } \frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}.$$

Να αποδείξετε ότι :

β) Η εξίσωση $\chi f'(\chi) - f(\chi) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

42.

ωανελλήνικες 2000 Α Δέσμη

Δευτέρα 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

B. Έστω η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B .

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα A και B , είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει :

$$f(x) - g(x) = x - 4, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

α. Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \quad \text{και} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 1}$$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

43.

ωανελλήνικες 2000 Δ Δέσμη

Τετάρτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

B. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

Δαμιανός Μωραΐτης

$$2\chi f(\chi) + (\chi^2 + 1)f'(\chi) = e^\chi \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}, \text{ με } f(0) = 1.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = \frac{e^\chi}{\chi^2 + 1}$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Το α. ερώτημα ανήκει στο επόμενο κεφάλαιο, αλλά αναφέρεται και εδώ γιατί χρειάζεται στο επόμενο ερώτημα, και θα το θεωρήσεις ως δεδομένο.

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΜΕ ΤΟ ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

44.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - Τεχνολογικής

Τρίτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 4^ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$:

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$

Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

Μονάδες 13

45.

Εσωτερικά 2000 - Τεχνολογικής

Παρασκευή 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

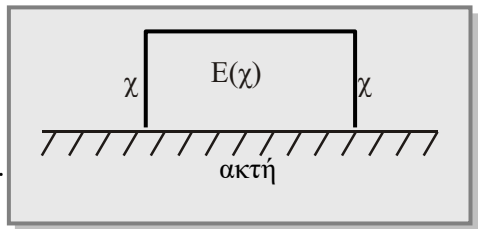
Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi^2 + 1}$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές



πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\chi)$ της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο : $E(\chi) = -2\chi^2 + 600\chi$ (υποθέτουμε ότι $0 < \chi < 300$).

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την τιμή του χ έτσι ώστε το εμβαδόν $E(\chi)$ της περιοχής να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 14

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Μονάδες 5

46.

Εσωτερικά 2000 - Θετικής

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 4^ο

Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με χ χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση :

Δαμιανός Μωραΐτης

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10, \quad 1 < x < 5.$$

- α. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.

Μονάδες 13

- β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και για $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα).

Μονάδες 12

Πανελλήνιες 2000 - Θετικής

47.

Δευτέρα 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, y_0)$

Μονάδες 4

- A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

- B1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντα συνεχής στο x_0 .
 β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
 γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 4,5

- B2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Α ι β α δ ε ι ά

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. $f(\chi) = 3\chi^3$, $\chi_0 = 1$	1. $\psi = -2\chi + \pi$
β. $f(\chi) = \eta\mu 2\chi$, $\chi_0 = \frac{\pi}{2}$	2. $\psi = \frac{1}{4}\chi + 1$.
γ. $f(\chi) = 3 \chi $, $\chi_0 = 0$	3. $\psi = 9\chi - 6$
δ. $f(\chi) = \sqrt{\chi}$, $\chi_0 = 4$	4. $\psi = -9\chi + 5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει

$$f'(\chi) > 0 \text{ για κάθε } \chi \in (0, 1).$$

Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι :

- α. Η ευθεία $\psi = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $\chi_0 \in (0, 1)$.

Μονάδες 7

$$\beta. \text{Υπάρχει } \chi_1 \in (0, 1), \text{ τέτοιο ώστε : } f(\chi_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

Μονάδες 12

- γ. Υπάρχει $\chi_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_2, f(\chi_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 2\chi + 2000$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο.

Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη

$$\text{συνάρτηση : } f(t) = \frac{\alpha \cdot t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

Δαμινός Μωραΐτης

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

48.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - Τ Ε Ε

Πέμπτη 15 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

- Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- Να βρείτε το σημείο στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να υπολογίσετε το ακρότατο αυτό.

49.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 - Τ Ε Λ

Παρασκευή 23 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Να βρείτε:

- Την παράγωγο της f στη θέση $x_0 = 2$.
- Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

Λ ι β α δ ε ι ά

B. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi - 1$, $\chi \in [-3, 1)$.

- α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
- β) Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f .

50.

εωαυαληωτικέσ 2000 - Τ Ε Ε

ΘΕΜΑ 2^ο

Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 1$.

- α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τα ακρότατα.

51.

ωαυελλήμυεσ 2000 - Εωαυαληωτικέσ Τεχυολογικήσ

ΘΕΜΑ 3^ο

Παρασκευή 15 Σεπτεμβρίου

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - \alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = 4$.

Μονάδες 5

- β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, 0)$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.

Μονάδες 10

- γ. Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\chi_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη χ_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα $\chi'\chi$.

Μονάδες 10

Δαμϊανός Μωραϊτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων.

Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές.

Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα.

Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα.

Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος $K(\chi)$ σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση

$$\text{ όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση : } K(\chi) = 10 \left(\chi + \frac{16}{\chi} + 40 \right)$$

όπου χ ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του **β.** ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

Μονάδες 4

52.

ωανελλήνικες 2000 – Εωσυναληστικές Θεσικής

Σάββατο 16 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ ,

τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 8

Λιβαδειά

- β. Αν $f'(\chi) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

Μονάδες 4,5

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Η συνάρτηση $f(\chi) = e^{1-\chi}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 2,5

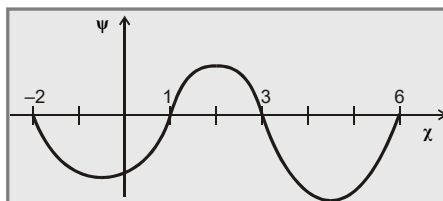
- β. Η συνάρτηση f με $f'(\chi) = -2\eta\mu\chi + \frac{1}{\eta\mu^2\chi} + 3$, όπου $\chi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 2,5

- γ. Αν $f'(\chi) = g'(\chi) + 3$ για κάθε $\chi \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2,5

B.2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 6]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την

Δαμινός Μωραΐτης

οποία ισχύει : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - e^{2\chi} + 1}{\eta\mu 2\chi} = 5$

α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 9

γ. Αν $h(\chi) = e^{-\chi} f(\chi)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του

στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$.

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 5

53.

ωανελλήνικες 2001 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3^ο

Δευτέρα 21 Μαΐου

Α. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x' .Β. Έστω η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$.α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) .β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.**ΘΕΜΑ 4^ο**Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 \cdot \sin 2a + 2x \cdot \sin^2 2a + \eta \mu^2 2a$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του a η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του a ανήκει σε παραβολή.

54.

ωανελλήνικες 2001 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 1^ο

Τετάρτη 23 Μαΐου

Β. Να αποδείξετε ότι :

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta \mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.β. Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta \mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.**ΘΕΜΑ 4^ο**Β. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.α. Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, ποιες είναι οι τιμές των α, β ;

Δαμινός Μωραΐτης

55.

Εσωτερικά 2001

Παρασκευή 25 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 3$, $\chi \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$.

Μονάδες 7

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.

Μονάδες 9

- γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2 - \chi^4 \leq f(\chi) \leq 2 + \chi^4$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) $f(0) = 2$.

Μονάδες 6

- β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 9

- γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα χ km την ώρα.

Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα.

Λι β α δ ε ι ά

Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι

$\left(5,5 + \frac{\chi^2}{200}\right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(\chi)$ της διαδρομής είναι :

$$K(\chi) = \frac{1800000}{\chi} + 500\chi, \text{ με } 0 < \chi \leq 90.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

56.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2001

Σάββατο 2 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο : $f(\chi) = \begin{cases} \alpha\chi^2 & \text{αν } \chi \leq 3 \\ \frac{1-e^{\chi-3}}{\chi-3} & \text{αν } \chi > 3 \end{cases}.$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}.$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4)).$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^3(\chi) + \beta \cdot f^2(\chi) + \gamma \cdot f(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + 6\chi - 1$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma.$

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

Δαμιανός Μωραΐτης

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 7

57.

ωανελλήνικες 2001 - Τ Ε Λ

ΘΕΜΑ 3^ο

Σάββατο 16 Ιουνίου

A. Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x

ετών δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4$, $10 \leq x \leq 35$.

Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

B. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 1 - x^2$ και

$g(x) = x - 1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τον τύπο και την παράγωγο των

συναρτήσεων : $f + g$, $\frac{g}{f}$

ΘΕΜΑ 4^ο

B. Δέκα κοινότητες ενώθηκαν σε ένα Δήμο σύμφωνα με το σχέδιο

"ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΣ". Ο πληθυσμός του Δήμου αυτού t χρόνια μετά την ένωση δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο

$$P(t) = 10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100 \quad 0 \leq t \leq 22$$

α. Να αποδείξετε ότι $P'(t) = te^{\frac{t}{10}}$

β. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού 10 χρόνια μετά την ένωση (στο τελικό αποτέλεσμα να λάβετε $e = 2,7$).

58.

ωανελλήνικες 2001 – Ανώφονται Τ Ε Ε**Τετάρτη 20 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 3^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$.

- α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
- δ. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

59.

ωανελλήνικες 2001 – Τ Ε Ε εσωτερικά**Τετάρτη 20 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

- α. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x$.
- β. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$.
- γ. $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- α. Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.
- β. Να βρείτε σε ποιο σημείο η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το υπολογίσετε.

60.

εωαναληρωτικές 2001 - Τ Ε Ε εσωτερικά

Παρασκευή 22 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = 2\chi^3 + 4\chi + \frac{1}{2}$.

β. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = (2\chi - 1)(\chi^2 + 1)$.

γ. $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi}$, $\chi \neq 0$.

ΘΕΜΑ 3^οΔίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = -2\chi^2 + \chi$.

- α. Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία.
- β. Να βρείτε σε ποιο σημείο χ_0 η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.
- γ. Να υπολογίσετε το τοπικό ακρότατο της συνάρτησης f .

61.

ωανελλήνικες 2001 - Εωαναληρωτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} \chi + \alpha & \text{αν } \chi \leq 1 \\ (1 - e^{-\chi+1}) \ln(\chi - 1) & \text{αν } \chi \in (1, 2] \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-\chi+1}}{\chi - 1}$.

Μονάδες 7

- β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 11

- γ. Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

[Υπόδειξη τα α , β χρειάζονται De l' Hopital]

62.

Εξωεργασία 2001 – Εωαναληρωτικές

Παρασκευή 6 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - \kappa \cdot x + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την τιμή του κ , για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Μονάδες 12

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(0, f(0))$, όταν $\kappa = 17$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

- β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f .

Μονάδες 12

- γ. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

63.

ωανελλήνικες 2002

Πέμπτη 30 Μαΐου

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι $1 - 1$.

α. Να δείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

Μονάδες 7

[Το α. ερώτημα αναφέρεται στο προηγούμενο κεφάλαιο και έχει απαντηθεί εκεί, εδώ αναφέρεται επειδή χρειάζεται οπωσδήποτε για την απόδειξη του β. ερωτήματος, οπότε θα το θεωρήσεις ως δεδομένο.]

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(\chi) + \chi^3 - \chi) = g(f(\chi) + 2\chi - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

64.

Εσπερινά 2002

Τετάρτη 5 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει :

$$(f + g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) + g'(\chi_0)$$

Μονάδες 9

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη Σ , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λ , αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(\chi) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 2$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 5

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

Παρατήρηση : Το θέμα είναι ίδιο ακριβώς με το 3^ο Θέμα Β. ερώτημα των πανελληνίων του 1999 Δ Δέσμη

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi - 2} & \text{αν } \chi < 2 \\ -\chi^2 + 4 & \text{αν } \chi \geq 2 \end{cases}$.

Να βρείτε :

- γ. Το ρυθμό μεταβολής της f στο $\chi_0 = 4$ και

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

δ. Την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(\chi) = \frac{f(\chi)}{\chi + 3} \quad \text{στο } -\infty.$$

Μονάδες 8

65.

Πανελλήνιες 2002 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \frac{1}{2}\chi^2 + \ln 2$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$

Μονάδες 5

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 12

66.

Πανελλήνιες 2002 - Τ Ε Ε εσωτερικά

Τετάρτη 12 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(\chi) = 2\chi^3 + 5, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(\chi) = \chi^2 + 1.$$

α. Να βρείτε την $f'(\chi)$ και την $g'(\chi)$

β. Να βρείτε την $[f(\chi) \cdot g(\chi)]'$.

γ. Να βρείτε την $\left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right]'$

Λιβαδειά

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -4(x^2 + 1) + 16x - 9$.

- α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία.
- β. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης.

67.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Δευτέρα 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

- γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, b]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 2

S O S

Πρόσεξε ιδιαίτερα αυτές τις ερωτήσεις και κυρίως διάβασε τις απαντήσεις.

- δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και σημείο $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 10

- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

Δαμιάνός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο : $f(x) = \frac{|\chi - z|^2 - |\chi + \overline{z}|^2}{\chi^2 + |z|^2}$,

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi)$, $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , εάν $|z+1| > |z-1|$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 8

68.

ωαυελλήμυες 2003

Πέμπτη 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

Λιβαδερά

- ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και $f'(\chi_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο χ_0 .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^5 + \chi^3 + \chi$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

- β. Να αποδείξετε ότι $f(e^{\chi}) \geq f(1 + \chi)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών

παραστάσεων της f και της f^{-1} .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) .

Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι :

- α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 8

- β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

Μονάδες 9

- γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

Δαμιανός Μωραΐτης

69.

Εσωτερικά 2003**Τετάρτη 4 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \varepsilon\phi\chi$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$$R_1 = R - \{\chi \mid \sin\chi = 0\} \text{ και ισχύει : } f'(\chi) = \frac{1}{\sin^2\chi}.$$

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη χ, ψ συνδέονται με τη σχέση $\psi = f(\chi)$, όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο χ_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του ψ ως προς το χ στο σημείο χ_0 την παράγωγο $f'(\chi_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(\chi) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) < 0$ στο (χ_0, β) , τότε το

$f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi^2 - 3\chi}{\chi - 2}$, $\chi \in R - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = \chi - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

Λ ι β α δ ε ι ά

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$ και το σημείο $x_0 = 5$.

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

70.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 11 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση : $f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \leq t \leq 10$

- α. Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$.
Μονάδες 5
- β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .
Μονάδες 7
- γ. Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
Μονάδες 7
- δ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.
Μονάδες 6

71.**παανελλήνιες 2003 - Τ Ε Ε****Τετάρτη 11 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- α) Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους :

$$f_1(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 13$$

$$f_2(x) = (x-1)(x^2 - 3x)$$

$$f_3(x) = x \cdot \sin x$$

$$f_4(x) = 2\eta\mu x + e^x$$

Να βρείτε τις πρώτες παραγώγους τους.

Μονάδες 12

- β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$,
 $x \neq 0$.

Μονάδες 13

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 - 4x + 1821$.

- α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

- β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του x , η f έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

- γ) Για κάθε θέση ακροτάτου x_0 , να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

72.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Τρίτη 8 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το

$f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

Ίδια ερώτηση με των εσπερινών του 2003.

- Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη

Εκτός ύλης τώρα πια.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

- γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Μονάδες 9



73.

ωανελλήνικες 2003 - Ομογενείς**Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x+1, & x > -\frac{4}{3} \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Για $x_0 \neq -\frac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος ώστε

$$f(x) = xf'(\xi).$$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$, $x > 0$ είναι

συνάρτηση 1-1 στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

Δαμιανός Μωραΐτης

74.

ωανελλήνικες 2004

Πέμπτη 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και χ_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(\chi_0) = 0$.

Μονάδες 10

- B. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot g'(\chi_0)$$

Μονάδες 2

- δ. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^2 \cdot \ln \chi$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα της.

Μονάδες 10

- β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία

Λ ι β α δ ε ι ά

καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^οΔίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$ όπου f : συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{και } f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

Μονάδες 8

75.

Εσωτερικά 2004**Παρασκευή 4 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f και g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο

Δαμιανός Μωραΐτης

$$(0, +\infty) \text{ και ισχύει : } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Μονάδες 3

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ , της εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f , παραγωγίσιμης στο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3 & \text{αν } x < 1 \\ 6x + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}.$$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , έτσι ώστε να ισχύει $\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

- δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 6

76.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - Τ Ε Ε

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\chi) = 2\chi^3 - 9\chi^2 + \alpha\chi + \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της f .

Μονάδες 5

- β) Αν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 5$ να βρείτε τα α και β .

Μονάδες 10

- γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα β) να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι χ μέτρα :

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του χ δίνεται από τον τύπο : $E(\chi) = -\chi^2 + 200\chi$.

Μονάδες 5

- β) Για ποια τιμή του χ το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε η μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

77.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - Τ Ε Ε ΕΣΩΤΕΡΙΝΑ

Τετάρτη 9 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

1) $f_1(\chi) = \chi \cdot \ln \chi, \chi > 0$

Μονάδες 5

2) $f_2(\chi) = \frac{\chi + 1}{e^\chi}$

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων :

1. $g_1(\chi) = \eta \mu \chi - \sigma \nu \eta \chi$

Μονάδες 8

2. $g_2(\chi) = 5\chi^3 - 7\chi^2 + \chi + 2004$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^οΔίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi^3 - 12\chi$.

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του χ η συνάρτηση έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

γ) Για κάθε θέση ακρότατου, να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

78.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004 - ΕΣΩΤΕΡΙΝΕΣ

Δευτέρα 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^οΑ. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν✓ η f είναι συνεχής στο Δ και✓ $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 9

Λιβαδεϊά

- B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.
- α.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

79.

Εξωεργασία 2004 - Εωσυναλησθητικές**Τετάρτη 7 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.
- Δ.** Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \sin \chi$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(\chi) = -\eta \mu \chi$

Μονάδες 3

- Ε.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- Η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 3

- ΣΤ.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ , $f'(\chi) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \sqrt{4\chi^2 + 1} + 2\chi$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

Δαμιανός Μωραΐτης

α. i) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 1}{\chi} = 2$. (έχει απαντηθεί στο 1^ο κεφάλαιο)

Μονάδες 10

ii) $f'(0) = 2f(0)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{\alpha\chi^2 + \beta\chi + 3}{\chi - 2}$, $\chi \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου α, β σταθεροί

πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση : $f(3) + 3f(1) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι : $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (έχει απαντηθεί στο 1^ο κεφάλαιο)

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, -4)$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = \chi + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

80.**ωαυελλήμυες 2004 - Ομυγευείς****Τρίτη 16 Σεπτεμβρίου****ΘΕΜΑ 2^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} -\chi^2 & , \quad \chi \leq 0 \\ \alpha\chi + \beta & , \quad 0 < \chi < 1 \\ 1 + \ln \chi & , \quad \chi \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ τότε :

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi^2}$

Μονάδες 9

Λιβαδειά

- ii) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1}, \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1}$
Μονάδες 8

81.

Πανελλήνιες 2005**Τρίτη 31 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A. 2 Πότε η ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = e^{\lambda\chi}$, $\lambda > 0$.

- α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

Μονάδες 3

- β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $\psi = \lambda e\chi$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(\chi) = e^{\chi - f(\chi)} \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

- α. Να δειχθεί ότι : $f(\chi) = \ln\left(\frac{1 + e^\chi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

*** Ένα πολύ χαρακτηριστικό ερώτημα που δείχνει ότι το Αόριστο

Ολοκλήρωμα στηρίζεται στην ισοδυναμία $f'(\chi) = g'(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi) + c$.

Δες στα Ολοκληρώματα **Πανελλήνιες 2005** το ίδιο θέμα πως λύνεται με ολοκλήρωμα .

Δαμιανός Μωραΐτης

82.

Εβδομηνιά 2005

Τετάρτη 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1^ο**A.**

1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 12

B.

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) τότε υπάρχει ένα,

$$\text{τουλάχιστον, } \xi \in (a, b) \text{ τέτοιο, ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 + \kappa\chi^2 + 3\chi - 2$, $\chi \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\kappa = -1$.

Μονάδες 5

- β.** Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

- γ.** Η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x-3}$

- α. Αν η ευθεία $\psi = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\kappa = 3$.

Μονάδες 10

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

83.**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Τ Ε Ε****Τρίτη 14 Ιουνίου****ΘΕΜΑ 3^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας πρώτη παράγωγος έχει τύπο:

$$f'(x) = x^2 - 2x$$

- α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

- γ) Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 6

- δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων.

Μονάδες 4

- ε) Αν $f'(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 4^ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται, ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 < t < 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

- α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);
Μονάδες 5
- β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
Μονάδες 8
- γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
Μονάδες 7
- δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;
Μονάδες 5

84.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Τ Ε Ε ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ

Τρίτη 14 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$, όπου α πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
Μονάδες 5
- β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι : $\alpha = 2$.
Μονάδες 10
- γ) Για $\alpha = 2$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) χ σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(\chi) = 4\chi^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(\chi) = 3\chi^2 + 20\chi$.

α) Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

Μονάδες 4

β) Να βρεθεί ο τύπος $P(\chi)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

Μονάδες 7

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

Μονάδες 6

δ) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος;

Μονάδες 8

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ**85.****Τετάρτη 6 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A. 1 Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \sqrt{\chi}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει : $f'(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

Δαμινός Μωραΐτης

- β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 .

Αν η f είναι κυρτή στο (α, χ_0) και κοίλη στο (χ_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

- α. Δείξτε ότι η f είναι 1-1".

Μονάδες 7

- β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία

$A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση :

$$f^{-1}(-2004 + f(\chi^2 - 8)) = -2.$$

Μονάδες 9

- γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η

εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\epsilon) : \psi = -\frac{1}{668}\chi + 2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - \chi}{\chi^2} = 2005.$$

- α. Να δείξετε ότι :

i. $f(0) = 0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε : $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^2 + \lambda(f(\chi))^2}{2\chi^2 + (f(\chi))^2} = 3$.

Μονάδες 7

86.

Εσωτερικά 2005 - Εωαναληρωτικές**Παρασκευή 8 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A. 1 Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(\chi) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \begin{cases} -\chi^3 + 1 & , \quad \chi < 1 \\ \chi^4 - 1 & , \quad \chi \geq 1 \end{cases}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
(είναι συνεχής, δες απαντήσεις 1^{ου} κεφαλαίου)

Μονάδες 6

- β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

- γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\kappa \cdot \chi - \chi^2}{4}$, της οποίας η εφαιπτομένη της γραφικής

της παράστασης στο σημείο $O(0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

Δαμιανός Μωραΐτης

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.

Μονάδες 10

87.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005 - Ομογενείς

Τρίτη 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

3. Ισχύει $(\eta \mu \chi)' = -\sigma \nu \chi$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} a + e^\chi, & \chi \leq 0 \\ \chi \cdot \ln \chi, & \chi > 0 \end{cases}$

A) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 10

B) Αν για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει $a = -1$:

Λι β α δ ε ι ά

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \chi - \ell \ln \chi + e^\chi$, $\chi \in (1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

β) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ell \ln \chi}{\chi}$, $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi}$, $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi)$

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

88.**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006****Σάββατο 27 Μαΐου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(\chi) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη

Δαμινός Μωραΐτης

στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

Μονάδες 6

- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

- γ. i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

- β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

- γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(a, \ln a)$ με $a > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής

Λιβαδερά

παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Μονάδες 9

- δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

89.

εβδομαδιά 2006

Τετάρτη 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- Β. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή Λ, αν αυτή είναι Λανθασμένη.

3. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού $\Delta = [0, +\infty)$, τότε

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ .

Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και

- $f'(\chi) = g'(\chi)$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε υπάρχει

σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $\chi \in \Delta$ ισχύει: $f(\chi) = g(\chi) + c$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\chi + \lambda, & \chi \leq 1 \\ \frac{\chi^2 - 8\chi + 4}{4\chi}, & \chi > 1 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. Για $\lambda = 0$

- α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

- β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Για $\kappa \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^3 - \kappa\chi^2 + 10$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

- I. Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

Μονάδες 5

II. Για $\kappa = 3$

- α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

- β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

- γ. και για κάθε $a \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = a - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

90.

Πανελλήνιες 2006 - Εσπερινές**Τετάρτη 5 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο****A.1** Να αποδείξετε ότι: $(\sin \chi)' = \cos \chi$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.**β.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 και $g(\chi_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{\chi_0} = \frac{f(\chi_0)g'(\chi_0) - f'(\chi_0)g(\chi_0)}{[g(\chi_0)]^2}$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $\chi \neq 0$ ισχύει: $[\ln|\chi|]' = \frac{1}{\chi}$

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και μόνο αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(\chi) = \psi$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς χ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^οΔίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1+e^\chi}{1+e^{\chi+1}}$, $\chi \in \mathbb{R}$.**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

γ. Για κάθε $\chi < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^\chi) + f(7^\chi) < f(6^\chi) + f(8^\chi)$

Μονάδες 7

Δαμιανός Μωραΐτης

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^2 + \chi + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $\chi = 2$.
Μονάδες 7

Έχει απαντηθεί.

- β.** Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $\chi = 2$ τέμνει τον άξονα $\psi\psi$ στο $\psi_0 = -3$, τότε :

- i.** να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi \cdot \ln(\chi+1) - (\chi+1) \cdot \ln \chi$ με $\chi > 0$.

- α. i.** Να αποδείξετε ότι: $\ln(\chi+1) - \ln \chi < \frac{1}{\chi}$, $\chi > 0$.

- ii.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 12

- β.** Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)$.

Μονάδες 5

- γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε

$$(\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}.$$

Μονάδες 8

91.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006 - Ομογενείς

Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 10

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{erf} x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

στο $R_1 = R - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

92.

ωανελλήνικες 2007

Πέμπτη 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.3** Πότε η ευθεία $\psi = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Μονάδες 3

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- β.** Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(\chi) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

- α.** Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

- β.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

- γ.** Αν χ_1, χ_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και χ_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$,

$B(\chi_2, f(\chi_2))$ και $\Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $\psi = -2\chi - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

Εβδομαστιά 2007**Τετάρτη 30 Μαΐου****93.****ΘΕΜΑ 1^ο**

A.1. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

και ισχύει $f'(\chi) = v \cdot \chi^{v-1}$.

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι Λανθασμένη.

5. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \eta\mu\chi$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε

$f'(\chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{4}{\chi}$, με $\chi > 0$.

α. Να βρείτε τα όρια : **i)** $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f'(\chi)}{f(\chi)}$, **ii)** $\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi \cdot f(\chi)}{(\chi - 2)^2}$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $O(0, 0)$ τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $\psi = -2\chi + 6$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν για κάθε $\chi \neq 0$ ισχύει $\chi \cdot f(\chi) = \chi + 2\eta\mu\chi$, τότε:

α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(\chi) < 3$ για κάθε $\chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Μονάδες 8

94.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007 - ΕΩΣΑΝΑΛΗΘΤΙΚΕΣ

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

A.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;
Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(\chi) = g'(\chi)$ για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε ισχύει $f(\chi) = g(\chi)$ για κάθε $\chi \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}, & \chi < 0 \\ \chi^2 + \alpha\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi, & \chi \geq 0 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = 3$.

Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = e^\chi - e \cdot \ln \chi$, $\chi > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι $f(\chi) \geq e$ για κάθε $\chi > 0$

Μονάδες 7

95.

Εσωτερικά 2007 - Εωαναληρωτικές**Τετάρτη 4 Ιουλίου****ΘΕΜΑ 1^ο**

A.1. Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(\chi_0) = f'(\chi_0) + g'(\chi_0)$$

Μονάδες 12

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι

Δαμιανός Μωραΐτης

Σωστή, ή (Λ) , αν αυτή είναι Λανθασμένη.

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

Μονάδες 12

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 9

- γ. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$, για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 8

96.

ωανελλήνικες 2007 - Ομογενείς

Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \eta \mu \chi$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(\chi) = \sigma \nu \chi$.

Μονάδες 10

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο χ_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 .

Μονάδες 2

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο χ_0 και $g(\chi_0) \neq 0$, τότε

και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\chi_0) = \frac{f'(\chi_0)g(\chi_0) - f(\chi_0)g'(\chi_0)}{[g(\chi_0)]^2}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \ell \eta \chi + \frac{1}{4\chi}$, $\chi \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, $f(e^5) > 0$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(\chi) - f(\chi) = -4e^{-3\chi} \quad \text{και} \quad f(0) = 2.$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(\chi) = e^{-\chi}f(\chi) - e^{-4\chi}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι : $f(\chi) = e^{\chi} + \frac{1}{e^{3\chi}}$.

Μονάδες 6

97.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008

Σάββατο 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(\chi) = \ln|\chi|$, $\chi \in \mathbb{R}^*$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|\chi|)' = \frac{1}{\chi}$.

Μονάδες 10

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα

κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Λ ι β α δ ε ι ά

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

- β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

- γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης :

$$x = e^{\frac{a}{x}} \text{ για όλες τις πραγματικές του } a.$$

Μονάδες 6

- δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο θέμα έχει γίνει η κατάλληλη αναπροσαρμογή γιατί το 1^ο ερώτημα (και μόνο αυτό) αφορούσε το επόμενο κεφάλαιο.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Να αποδείξετε ότι } g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

- γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \text{ και } g(0) = g'(0) = 1 \text{ τότε}$$

i. να αποδείξετε ότι : $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Μονάδες 4

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι $1 - 1$

Μονάδες 3

98.

Εσωτερικά 2008

Τετάρτη 28 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι Σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι Λανθασμένη.

2. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta\mu\chi)' = -\sigma\upsilon\nu\chi$.

Μονάδες 3

4. Αν μια συνάρτηση f είναι :

- ✓ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$
- ✓ παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, b) και
- ✓ $f(a) = f(b)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \begin{cases} 1 - \chi, & \chi \leq 1 \\ (\chi - 1)^2, & \chi > 1 \end{cases}$.

A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

α. συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 1$.

Μονάδες 8

β. παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 = 1$

Μονάδες 10

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + 2x + \kappa}{x}$, όπου κ είναι πραγματικός

αριθμός.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

B. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του κ .

Μονάδες 8

Γ. Για $\kappa = 1$

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 6

99.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008 – ΕΩΡΑΝΑΛΗΘΤΙΚΕΣ

Πέμπτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1^ο

B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \cdot \ln x, x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ \kappa, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $\kappa = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 7

**Η συνέχεια
στο 2^ο τόμο**

Αρχές Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων



Δαμανός Μωραΐτης

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας



Δαμανός Μωραΐτης

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Τάξης 1^η



Δαμανός Μυρτίτης
Назматис

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Παράγωγης
Τόμος 2ος



Δαμανός Μωραϊτης
Ηαδραεικός

Τα Θέμα

εἰς *ἐκκαρτήεις*
ἐπὶ *στατική*
καὶ *ἐνδανύουσες*



Δαμανός Μωραΐτης

Μαθηματικός