Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά

Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 2ος

Παράγωγοι

ακρότατα

αδύνατες ολοκλήρωμα

αόριστο

μελέτη συνάρτησης

De L'Hospital

ορισμένο

Περιέχει θεωρία με παρατηρήσεις, αποδείξεις και σχόλια-μεθοδολογία.

Περιέχει λυμένα παραδείγματα, ασκήσεις για λύση

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο

σε όλους εκείνους που θέλουν

να προσπαθήσουν

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 2ος

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:
Δαμιανός Μωραΐτης
© copyright για την παρούσα έκδοση:
Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς»**

ISBN SET: 9786188485730
ISBN 2ου τόμου: 9786188485747

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρόλογος

Το βιβλίο, είναι ο 2ος Τόμος της σειράς που αφορά την **εξεταστέα ύλη** της Γ! Λυκείου και περιέχει τη θεωρία, παραδείγματα και ασκήσεις στα κεφάλαια :

α. ***Παράγωγοι – εφαρμογές των παραγώγων.***

β. ***Ολοκλήρωμα – Εμβαδόν***.

Με τον τόμο αυτό ολοκληρώνεται η ***εξεταστέα*** ύλη.

Στην διάρκεια της συγγραφής και αυτού του βιβλίου κατά νου είχα το μαθητή ο οποίος ενδιαφέρεται να μάθει και ταυτόχρονα αγωνιά για την επιτυχία του στις **Πανελλήνιες Εξετάσεις**, και στον 2ο τόμο περιλαμβάνονται πολλές παρατηρήσεις, υποδείξεις και μεθοδολογίες οι οποίες αποτελούν το απόσταγμα γνώσης από την τριακονταετή και πλέον ενασχόλησή μου με τα θέματα των Πανελληνίων Εξετάσεων.

Το βιβλίο αυτό επίσης αποτελεί συμπλήρωμα της προσπάθειας που έγινε με τα άλλα δυο βιβλία με τίτλο «***Το Θέμα***», στα οποία και σας παραπέμπω για πλήρη γνώση **μιας *μοναδικής, στην κυριολεξία, συλλογής.***

Μιας συλλογής που περιλαμβάνει όλα τα των θέματα που τέθηκαν στις τακτικές και επαναλληπτικές Πανελλήνιες εξετάσεις των Ημερησίων, Εσπερινών Λυκείων και Τ. Ε. Λ. από το 1975 μέχρι σήμερα.

Τα θέματα των εξετάσεων είναι τακτοποιημένα κατά κεφάλαιο ύλης της Γ Λυκείου (Μιγαδικοί – Συνέχεια – Παράγωγος – Ολοκλήρωμα) ***και έχουν απαντηθεί με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο***

Φεβρουάριος 2022

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα

Τα «***Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ ! Λυκείου***» χωρίζονται σε δυο μέρη, το ***Α Μέρος*** περιλαμβάνει τους ***Μιγαδικούς*** και το ***Β Μέρος*** περιλαμβάνει τις ***Συναρτήσεις***.

Ο δεύτερος τόμος περιέχει δυο κεφάλαια :

- ✓ Το **3ο Κεφάλαιο** αναφέρεται στις **Παραγώγους Συναρτήσεων**

- ✓ Το **4ο Κεφάλαιο** αναφέρεται στα θέματα : **Ολοκλήρωμα – Εμβαδόν.**

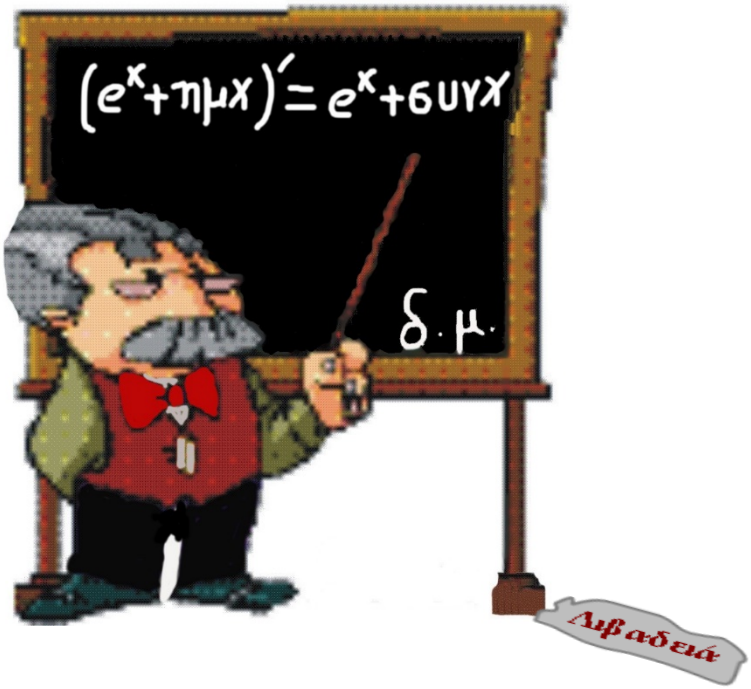
Για μια αναλυτική παρουσίαση των περιεχομένων δες τα περιεχόμενα του κάθε κεφαλαίου ξεχωριστά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγωγος

Θεωρία – υποδείξεις – παρατηρήσεις.



Παραδείγματα λυμένα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Μεθοδολογία – Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα : Παράγωγοι

Θεματική ενότητα	σελίδα
Η έννοια της παραγώγου – Παρατηρήσεις – Παραδείγματα	15
Ασκήσεις	59
Παράγωγος συνάρτησης	73
Παρατηρήσεις – Παραδείγματα	77
Ασκήσεις	94
Εξίσωση εφαπτομένης	105
Ρυθμός μεταβολής – παραδείγματα	114
Ασκήσεις	122
Θεώρημα Rolle – Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Παρατηρήσεις – Παραδείγματα	139
Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θ. Μ. Τ.) Παραδείγματα – Παρατηρήσεις	149
Ασκήσεις	155
Εφαρμογές των Παραγώγων – Μονοτονία	169
Μονοτονία Βασικών Συναρτήσεων, Παραδείγματα – Παρατηρήσεις	172
Μονοτονία και σύγκριση, Μονοτονία και Ανίσωση	181
Μονοτονία και Εξίσωση	186
Ακρότατα συνάρτησης – Θεώρημα Fermat	193
Παραδείγματα – Παρατηρήσεις	198
Ασκήσεις	213
Κυρτότητα – Σημεία καμπής μιας συνάρτησης – Παραδείγματα	239
Ασκήσεις	251
Ασύμπτωτες – Παραδείγματα – Ασκήσεις	261
Εφαρμογές στον De L' Hospital – Ασκήσεις	277
Μελέτη Συνάρτησης	283

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

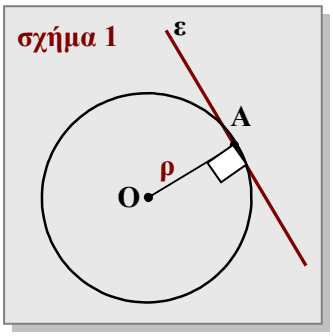
Η εμπειρία δεν πωλείται … αποκτιέται …
ακριβώς γιατί είναι απολύτως προσωπική

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

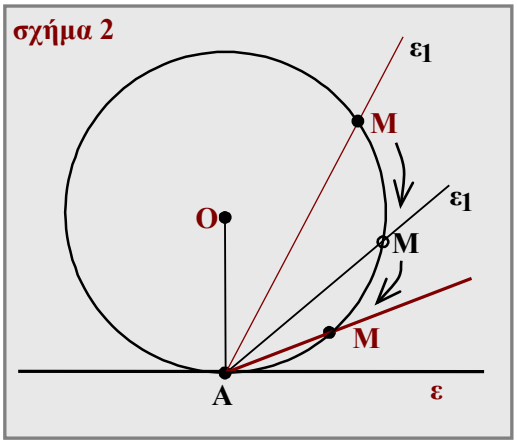
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Απαραίτητες έννοιες

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο , R), σε ένα σημείο του **Α,** είναι η ευθεία **ε** που είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο σημείο Α (σχήμα 1).
Η εφαπτομένη του κύκλου έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ' αυτόν.



Έστω ένας κύκλος (Ο , R), ένα σημείο του **Α**, και η ευθεία **ε** εφαπτομένη του κύκλου στο Α (σχήμα 2) .
Έστω ένα σημείο Μ το οποίο κινείται πάνω στον κύκλο, πλησιάζοντας το **Α** όπως φαίνεται και στο σχήμα.



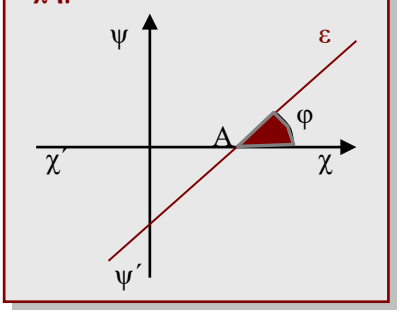
Καθώς το Μ πλησιάζει το Α η ευθεία ε_1 = ΑΜ , η οποία ονομάζεται τέμνουσα του κύκλου, πλησιάζει την ευθεία **ε** η οποία είναι εφαπτομένη.
Με αυτήν την έννοια θα μπορούσαμε να πούμε ότι :
«Η **εφαπτομένη** του κύκλου **(Ο , R)** στο **Α** είναι η **τέμνουσα ΑΜ** όταν το **Μ** βρεθεί στην **οριακή θέση Α**»

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

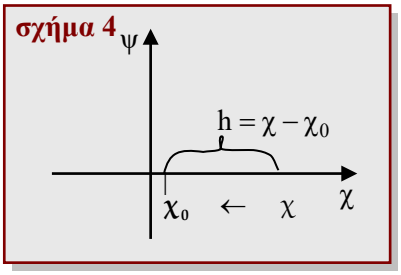
Έστω ένα σύστημα αξόνων και μια ευθεία **ε** η οποία τέμνει τον άξονα χ΄ χ στο Α και σχηματίζει μ' αυτόν γωνία **φ** (σχήμα 3).
Η ευθεία **ε,** όταν δεν είναι κάθετη στον χ΄ χ, έχει εξίσωση **ψ = λχ + β** το **λ** λέγεται συντελεστής διεύθυνσης και είναι **λ = εφφ**

σχήμα 3



Το σύμβολο $|\chi - \chi_0|$, ως είναι γνωστό συμβολίζει την απόσταση του χ από το χ_0.
Όταν οι τιμές του **χ πλησιάζουν** το χ_0 $(\chi \to \chi_0)$ τότε η απόσταση $|\chi - \chi_0|$ πλησιάζει το 0.

σχήμα 4

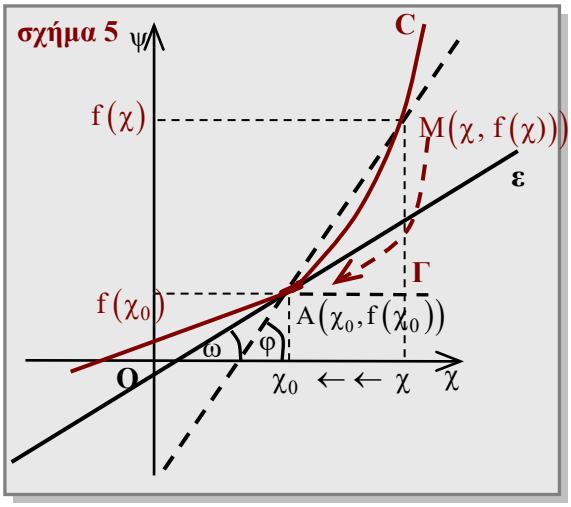


Αν θέσεις $\chi - \chi_0 = h \Leftrightarrow \chi = \chi_0 + h$, δηλαδή όταν το $\chi \to \chi_0$ τότε το $h \to 0$

Εφαπτομένη Καμπύλης

Έστω **f μια συνάρτηση και** $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης **C,** σχήμα 5.
Πάρε άλλο ένα σημείο $M(\chi\ ,\ f(\chi))$ πάνω στην **C** .
Παρατήρησε ότι καθώς το Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση C πλησιάζοντας το Α, όταν δηλαδή $\chi \to \chi_0$, τότε η ευθεία **ΑΜ** φαίνεται να παίρνει μια **οριακή θέση ε** η οποία λέγεται εφαπτομένη της **C** στο **Α**.

σχήμα 5



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η γωνία **φ**, αντίστοιχα φαίνεται να παίρνει την οριακή θέση **ω** .
Αν **λ** είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας **ΑΜ,** τότε αυτός θα είναι ίσος με τον συντελεστή του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ **.**

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ έχει συντεταγμένες : $(\chi-\chi_0, f(\chi)-f(\chi_o))$ άρα θα είναι

τελικά : $\lambda=\lambda_{\overrightarrow{AM}}=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$.

Οπότε καθώς το **Μ** πλησιάζει το **Α** , η τέμνουσα **ΑΜ** τείνει να πάρει τη θέση της εφαπτομένης και :

- **Ο συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης στο $\chi_0 \in A$ θα είναι $\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$,

  Με την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. **Οπότε :**

- **Η εφαπτομένη στο** $\chi_0 \in A$ **ορίζεται ως η ευθεία με εξίσωση** $\psi-f(\chi_0)=\lambda(\chi-\chi_0)$.

Παράγωγος της f στο $\chi=\chi_0$

Ορισμός

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο **Α** και $\chi_0 \in A$.

Έστω ο λόγος : $\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ με $\chi\neq\chi_0$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ **και είναι πραγματικός αριθμός,** τότε

και μόνον τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A$, το

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δε όριο $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ λέγεται παράγωγος της f στο $\chi_0 \in A$ και

συμβολίζεται με $f'(\chi_0)$ που διαβάζεται « f τόνος του χ_0 » .

- Δηλαδή : $\boxed{f'(\chi_0)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}}$ **(1)**

- **Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$

  είναι $\lambda = f'(\chi_0)$ και **η εξίσωση της εφαπτομένης στο** $\chi_0 \in A$ **γίνεται :**

  $\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi-\chi_0)$

Προσοχή Παρατηρήσεις S O S για τις ασκήσεις :

- Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in A$, όταν το

  $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, άρα με

  βάση και τη θεωρία των ορίων θα ισχύει ισοδύναμα ότι :

Μια συνάρτηση θα λέγεται **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0 \in A$,αν και μόνον αν :

$$\lim_{\chi\to\chi_0^+}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{\chi\to\chi_0^-}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}\in \mathbf{R}.$$

- Αν στην σχέση $f'(\chi_0)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, θέσεις $\chi-\chi_0=h$ τότε

  $\chi = h+\chi_0$, που σημαίνει ότι όταν $\chi\to\chi_0$ το $h\to 0$, και ο τύπος **(1)**

  γίνεται : $f'(\chi_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$

- Ο παράγωγος αριθμός μιας συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$ λέγεται ***ρυθμός μεταβολής***, είναι **πραγματικός αριθμός** και εκφράζει την «ταχύτητα» με την οποία «τείνουν» να μεταβληθούν οι τιμές της f στο χ_0 .

- **Ο παράγωγος αριθμός** μιας συνάρτησης **f στο χ_0** συμβολίζεται επίσης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

με $\dfrac{\mathbf{df}(\chi_0)}{\mathbf{d}\chi}$ ή ισοδύναμα $\left.\dfrac{\mathbf{df}(\chi)}{\mathbf{d}\chi}\right|_{\chi=\chi_0}$ συμβολισμός του Leibnitz.

Παρατηρήσεις

- Αν πρόκειται για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

  $\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0)$.

- Αν πρόκειται για κίνηση ενός κινητού που η θέση του στο καρτεσιανό επίπεδο εκφράζεται από τη συνάρτηση $\psi = f(t)$ (συνάρτηση θέσης), τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο t_0 $\left(f'(t_0)\right)$, εκφράζει την (***στιγμιαία***) ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$.

- Αν πρόκειται για την ταχύτητα ενός κινητού $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{t})$, τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης $\boldsymbol{\upsilon}$ στο t_0 $\left(\boldsymbol{\upsilon}'(\mathbf{t}_0)\right)$, εκφράζει την (***στιγμιαία***) επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_0) = \boldsymbol{\upsilon}'(\mathbf{t}_0)$.

- Αν η συνάρτηση εκφράζει άλλο μέγεθος, π. χ. οικονομικό μέγεθος όπως είναι το κόστος παραγωγής ή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους, όταν η παραγωγή γίνει χ_0 μονάδες και ονομάζεται αντίστοιχα : **Οριακό κόστος** , **Οριακό κέρδος** .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγωγος αριθμός και συνέχεια μιας συνάρτησης στο $\chi = \chi_0$

Θεώρημα :

Όταν μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο χ_0 , τότε θα είναι και **συνεχής** στο χ_0 .

Απόδειξη :

Έστω η συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 του πεδίο ορισμού της,

αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το $f'(\chi_0)$ και είναι $f'(\chi_0) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$.

Αν θέσεις $\lambda(\chi) = \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$, $\chi \neq \chi_0$, τότε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \lambda(\chi) = f'(\chi_0)$ και

$$\lambda(\chi) = \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \Leftrightarrow f(\chi) - f(\chi_0) = \lambda(\chi)(\chi - \chi_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \left[f(\chi) - f(\chi_0) \right] = \lim_{\chi \to \chi_0} \left[\lambda(\chi)(\chi - \chi_0) \right] = \lim_{\chi \to \chi_0} \lambda(\chi) \lim_{\chi \to \chi_0} (\chi - \chi_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \left[f(\chi) - f(\chi_0) \right] = f'(\chi_0) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{\chi \to \chi_0} f(\chi) - \lim_{\chi \to \chi_0} f(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi_0) = f(\chi_0)$ άρα η **f είναι και συνεχής στο** χ_0 .

Παρατηρήσεις

- Μια συνάρτηση συνεχής στο $\chi_0 \in A$ ***δεν είναι σίγουρο*** πως είναι και παραγωγίσιμη στο χ_0 .
- Όταν μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής** τότε σίγουρα **δεν είναι και παραγωγίσιμη**, γιατί αν ήταν παραγωγίσιμη θα έπρεπε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, να είναι και συνεχής.

✓ Όταν στον τύπο μιας συνάρτησης υπάρχει **ρίζα** , τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της **εκτός** από τα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, δηλαδή **εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τη ρίζα.**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- Όταν προσπαθείς να υπολογίσεις τα πλευρικά όρια του πηλίκου μεταβολών και το ένα από αυτά είναι $\pm\infty$, τότε δεν χρειάζεται να υπολογίσεις το άλλο, γιατί είναι προφανές ότι αποκλείεται το όριο του $\lambda(\chi)$ στο χ_0 να είναι πραγματικός αριθμός, έτσι **η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη** .
- Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο χ_0 (δηλαδή η **f** είναι «διπλού» τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής, γιατί αν η **f δεν είναι συνεχής τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη**.
- Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η τιμή $f(\chi_0)$ δίνεται ξεχωριστά (δηλαδή η f είναι «διπλού» τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο χ_0, γιατί αν η f δεν είναι συνεχής στο χ_0 τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη στο χ_0 .
- Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης ***υπάρχει απόλυτο***, επειδή δεν είναι πάντα εύκολο να ξέρεις πότε παραγωγίζεται και πότε όχι μια συνάρτηση, σε συμφέρει, αφού βρεις το πεδίο ορισμού και πριν κάνεις οτιδήποτε άλλο , να απαλλάσσεις την συνάρτηση από τα απόλυτα, μετατρέποντας την έτσι σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου και να αναζητάς, αν χρειάζεται, τα πλευρικά όρια στο σημείο που αλλάζει τύπο.
- Όταν δίνεται ο $f'(\chi_0)$ (ή όταν ζητάει να τον υπολογίσεις) και στη συνέχεια ζητάει να βρεις το όριο μιας παράστασης $P(\chi)=\cdots$ μέσα στην οποία υπάρχει η f, τότε σε συμφέρει να ξεκινάς από το : $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ (1)

  με $\chi\neq\chi_0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\lambda(\chi)=f'(\chi_0)$, οπότε λύνοντας την (1) θα έχεις $f(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-\chi_0)+f(\chi_0)$.

  Την τελευταία σχέση την αντικαθιστάς στο $P(\chi)$ και υπολογίζεις το όριο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης υπάρχουν παράμετροι τις οποίες πρέπει να βρεις για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο που πιθανόν αλλάζει ο τύπος της, τότε είναι σκόπιμο να απαιτείς πρώτα η συνάρτηση να είναι συνεχής, βρίσκοντας έτσι μια επί πλέον συνθήκη για τις παραμέτρους.

- Όταν δίνεται το $\mathbf{f(\chi+\psi)}$ και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$

  τότε χρησιμοποιείς τον τύπο : $\lambda(\chi_0)=\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$ και αν το

  $\lim\limits_{h\to 0}\lambda(\chi_0)\in R$, τότε υπάρχει ο παράγωγος αριθμός και μόνον τότε

  χρησιμοποιείς το σύμβολο : $f'(\chi_0)$

- Όταν δίνεται το f(χ + ψ) = . . . και δίνει και κάποια f (α) = … , f(β) = ….
  και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$ τότε χρησιμοποιείς τον τύπο :

  $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$ και για να βρεις με τι πρέπει να αντικαταστήσεις τα

  χ, ψ στον τύπο f(χ + ψ) = . . . μπορείς να βάζεις : $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi\ \ =\beta\end{cases}$ οπότε

  $\begin{cases}\psi=\alpha-\beta\\ \chi=\beta\end{cases}$ ή $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \psi\ \ =\beta\end{cases}$ οπότε $\begin{cases}\chi=\alpha-\beta\\ \psi=\beta\end{cases}$ ή απλά

  χ = α , ψ = β την μια φορά ,και ξανά δεύτερη φορά χ = β και ψ = α
  και λύνεις το σύστημα.

- Όταν ο τύπος της συνάρτησης f «εμπλέκεται» μέσα σε διπλή ανισότητα … ≤ f(χ) ≤ … ή κάτι παρόμοιο θα ξεκινάς από το

  $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, θα βλέπεις ότι σου λείπει το $f(\chi_0)$, το οποίο ή θα

  δίνεται ή θα υπολογίζεται από την αρχική παράσταση αν θέσεις $\chi=\chi_0$ ή αν η συνάρτηση αναφέρεται ως συνεχής (ειδικά τότε) θα υπολογίζεται από τη σχέση $f(\chi_0)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα για την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου

1. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης σε κάθε μια από τις περιπτώσεις :

α. $f(\chi)=2\chi^2-3\chi+1$ στο $\chi_0=2$.

β. $\varphi(\chi)=\eta\mu\chi$ στο $\chi_0=0$.

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=2\chi^2-3\chi+1$ και $\chi_0=2$. Πεδίο Ορισμού το **A = R**.

Όταν $\chi_0=2$, με $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(2)}{\chi-2}$ και $f(2)=2\cdot 2^2-3\cdot 2+1=3$

άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{2\chi^2-3\chi+1-3}{\chi-2}=\dfrac{2\chi^2-3\chi-2}{\chi-2}$.

Το τριώνυμο $2\chi^2-3\chi+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\ldots=25$, ρίζες

$\chi_1=2$ και $\chi_2=-\dfrac{1}{2}$, άρα παραγοντοποιείται και γράφεται

$2\chi^2-3\chi+1-3=2\left(\chi+\dfrac{1}{2}\right)(\chi-2)=(2\chi+1)(\chi-2)$.

Άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{(2\chi+1)(\chi-2)}{\chi-2}=2\chi+1$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}(2\chi+1)=5$,

επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και $\mathbf{f'(2)=\lim\limits_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=5}$

β. Έστω $\varphi(\chi)=\eta\mu\chi$ και $\chi_0=0$. Πεδίο Ορισμού το A = **R**.

Όταν $\chi_0=0$, με $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(0)}{\chi-0}$, $\varphi(0)=\eta\mu 0=0$ άρα

$\lambda(\chi)=\dfrac{\eta\mu\chi-0}{\chi-0}=\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=1$. Επομένως

η f είναι παραγωγίσιμη και είναι $\mathbf{f'(0)=\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=1}$.

2. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός της :

α. $f(\chi)=\sqrt{\chi-1}+2\chi$ στο $\chi_0=2$ **β.** $g(\chi)=\sqrt{\chi-1}$ στο $\chi_0=1$

γ. $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-9}$ στο $\chi_0=3$ **δ.** $h(\chi)=\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}$, **ν > μ** στο $\chi_0=0$

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=\sqrt{\chi-1}+2\chi$ και $\chi_0=2$. Πεδίο Ορισμού το **A = [1 , + ∞)**.

Όταν $\chi_0=2$, με $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(2)}{\chi-2}$ και

$f(2)=\sqrt{2-1}+2\cdot 2=5$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi-1}+2\chi-5}{\chi-2}=$

$$\frac{\left(\sqrt{\chi-1}+(2\chi-5)\right)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=\frac{\left(\sqrt{\chi-1}\right)^2-(2\chi-5)^2}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=$$

$$\frac{\chi-1-\left(4\chi^2-20\chi+25\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=\frac{\chi-1-4\chi^2+20\chi-25}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=$$

$$\frac{-\left(4\chi^2-21\chi+26\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=\frac{-\left(4\chi^2-21\chi+26\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}.$$

Το $4\chi^2-21\chi+26$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\ldots=25$, ρίζες $\chi_1=2$ και $\chi_2=\dfrac{13}{4}$

άρα παραγοντοποιείται : $4\chi^2-21\chi+26=4\left(\chi-\dfrac{13}{4}\right)(\chi-2)=(4\chi-13)(\chi-2)$.

Άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{-(4\chi-13)(\chi-2)}{(\chi-2)\left(\sqrt{\chi-1}-(2\chi-5)\right)}=\dfrac{-(4\chi-13)}{\sqrt{\chi-1}-2\chi+5}$ άρα

$$\lim_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 2}\frac{-(4\chi-13)}{\sqrt{\chi-1}-2\chi+5}=\frac{-(4\cdot 2-13)}{\sqrt{2-1}-2\cdot 2+5}=\frac{5}{2}$$

επομένως η **f είναι παραγωγίσιμη και** $\mathbf{f'(2)=\lim_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\frac{5}{2}}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Έστω $g(\chi)=\sqrt{\chi-1}$ και $\chi_0=1$. Πεδίο Ορισμού το Α = **[1 , + ∞)**.

Όταν $\chi_0=1$, με $\chi\neq 1$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1}$ και $g(1)=\sqrt{1-1}=0$ άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\sqrt{\chi-1}-0}{\chi-1}=\frac{\sqrt{\chi-1}}{\chi-1}=\frac{\sqrt{\chi-1}\cdot\sqrt{\chi-1}}{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi-1}\right)}=\frac{(\chi-1)}{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi-1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\chi-1}}\ .$$

Άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{\chi-1}}$. Αν θέσεις $u=\chi-1$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}u=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)=0$ άρα

όταν $\begin{cases}\chi\to 1\\ \chi>1\end{cases}$ τότε $\begin{cases}u\to 0\\ u>0\end{cases}$.

Επομένως $\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{\chi-1}}=\begin{cases}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{u}}=+\infty\\ u>0\end{cases}$.

Άρα **η g δεν είναι παραγωγίσιμη $\chi_0=1$**.

γ. Έστω $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-9}$ και $\chi_0=3$.

Πεδίο Ορισμού : πρέπει $\chi^2-9\geq 0$, το χ^2-9 έχει ρίζες $\chi_1=-3$ και $\chi_2=3$.

Άρα πίνακας προσήμου για το χ^2-9 είναι

$-\infty$		-3		3		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

Άρα Π Ο είναι το **A** $=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

Αν $\chi_0=3$ και $\chi\neq 3$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(3)}{\chi-3}$ και $\varphi(3)=\sqrt{3^2-3}=0$,

$$\lambda(\chi)=\frac{\sqrt{\chi^2-9}-0}{\chi-3}=\frac{\sqrt{\chi^2-9}}{\chi-3}=\frac{\sqrt{(\chi+3)(\chi-3)}}{\sqrt{(\chi-3)^2}}=\sqrt{\frac{(\chi+3)(\chi-3)}{(\chi-3)^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{\chi+3}{\chi-3}}\ .$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή σ' αυτό το σημείο γιατί η παράσταση $\frac{\chi+3}{\chi-3}$ είναι πάντοτε θετική στο $\mathbf{A}=(-\infty,-\mathbf{3}]\cup[\mathbf{3},+\infty)$, ενώ οι $\chi+3$ και $\chi-3$ όταν $\chi\in(-\infty,-\mathbf{3}]$ είναι αρνητικοί αριθμοί και η παράσταση $\frac{\sqrt{\chi+3}}{\sqrt{\chi-3}}$ δεν έχει νόημα .

Άρα $\lambda(\chi)=\sqrt{\frac{\chi+3}{\chi-3}} \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 3}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 3}\sqrt{\frac{\chi+3}{\chi-3}}=\sqrt{\lim\limits_{\chi\to 3}\frac{\chi+3}{\chi-3}}=$

$\sqrt{\lim\limits_{\chi\to 3}(\chi+3)\lim\limits_{\chi\to 3}\frac{1}{\chi-3}}=\sqrt{6\cdot\lim\limits_{\chi\to 3}\frac{1}{\chi-3}}$, Αν θέσεις $u=\chi-3$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 3}u=\lim\limits_{\chi\to 3}(\chi-3)=0$, άρα όταν $\begin{cases}\chi\to 3\\ \chi\in[3,+\infty)\end{cases}$ τότε $\begin{cases}u\to 0\\ u\geq 0\end{cases}$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 3}\lambda(\chi)=\sqrt{6(+\infty)}=+\infty$.

Επομένως η **φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=3$**.

δ. Έστω $h(\chi)=\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}$ και $\chi_0=0$. Πεδίο Ορισμού το $A=[0,+\infty)$.

✓ Όταν $\chi_0=0$, με $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\frac{h(\chi)-h(0)}{\chi-0}$ και $h(0)=\sqrt[\nu]{0^{\mu}}=0$

άρα $\lambda(\chi)=\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}-0}{\chi-0}=\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}{\chi}=\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}{\chi\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}=\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\nu}}}{\chi\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}=\frac{\chi}{\chi\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}$

ή αλλιώς $\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}{\chi}=\frac{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\chi^{\nu}}}=\sqrt[\nu]{\frac{\chi^{\mu}}{\chi^{\nu}}}=\sqrt[\nu]{\chi^{\mu-\nu}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}$.

Αν θέσεις $u=\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}$ είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}u=\lim\limits_{\chi\to 0}\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}=0$

✓ Όταν $\begin{cases}\chi\to 0\\ \chi>0\end{cases}$ τότε $\begin{cases}u\to 0\\ u>0\end{cases}$, άρα

$\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\mu}}}=\begin{cases}\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}=+\infty\\ u>0\end{cases}$.

Επομένως η **h δεν είναι παραγωγίσιμη $\chi_0=0$**.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Όταν στον τύπο μιας συνάρτησης υπάρχει ρίζα , τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της **εκτός** από τα άκρα των διαστημάτων από τα οποία αποτελείται το πεδίου ορισμού της, δηλαδή ***εκτός από τα σημεία που μηδενίζουν τη ρίζα.***

3. Να βρεθεί (*όπου υπάρχει*) ο παράγωγος αριθμός :

α. της $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+3 & \text{όταν } \chi<1\\ 2\chi+3 & \text{όταν } \chi\geq 1\end{cases}$ στο $\chi_0=1$

β. της $g(\chi)=\begin{cases}3\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi^2+3 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$ στο $\chi_0=2$

γ. της $\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi^2+2\chi & \text{όταν } \chi<0\\ \chi+\eta\mu\chi & \text{όταν } \chi\geq 0\end{cases}$ στο $\chi_0=0$

δ. της $h(\chi)=\begin{cases}3\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi+6 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$ στο $\chi_0=2$

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+3 & \text{όταν } \chi<1\\ 2\chi+3 & \text{όταν } \chi\geq 1\end{cases}$ και $\chi_0=1$. Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

✓ ***1ος τρόπος*** Αν $\chi<1$ είναι και $\chi\neq 1$ οπότε $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}$ και

$f(1)=2\cdot 1+3=5$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi^2+3-5}{\chi-1}=\dfrac{\chi^2-2}{\chi-1}=(\chi^2-2)\dfrac{1}{\chi-1}$,

επομένως $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}\left[(\chi^2-2)\dfrac{1}{\chi-1}\right]=\lim\limits_{\chi\to 1^-}(\chi^2-2)\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1}=$

$-1\cdot\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1}=-\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1}$. Αν θέσεις $u=\chi-1$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}u=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)=0$ επομένως $\begin{cases}\chi\to 1\\ \text{και } \chi<1\end{cases}$ τότε $\begin{cases}u\to 0\\ \text{και } u<0\end{cases}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}\lambda(\chi)=-\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1}=-\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-(-\infty)=+\infty$, άρα κι' αν ακόμα υπάρχει το όριο του $\lambda(\chi)$ στο $\chi_0=1$ αποκλείεται να είναι πραγματικός αριθμός, έτσι **η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη** .

Παρατήρηση :

Όταν προσπαθείς να υπολογίσεις τα πλευρικά όρια του πηλίκου μεταβολών και το ένα από αυτά είναι $\pm\infty$, τότε ***δεν χρειάζεται να υπολογίσεις το άλλο***, γιατί είναι προφανές ότι κι' αν ακόμα υπάρχει το όριο του $\lambda(\chi)$ στο χ_0 αποκλείεται να είναι πραγματικός αριθμός, έτσι **η συνάρτηση f αποκλείεται να είναι παραγωγίσιμη.**

2ος τρόπος Αν $\chi<1$ είναι και $\chi\neq 1$ οπότε $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}$.

Παρατήρησε ότι συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής στο $\chi_0=1$!!

Πράγματι :

- ✓ $\lim\limits_{\chi\to 1^+}(2\chi+3)=2\cdot 1+3=5$ ενώ
- ✓ $\lim\limits_{\chi\to 1^-}(\chi^2+3)=1^2+3=4$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)$.

Επομένως η **f δεν είναι συνεχής άρα δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη.**

Παρατήρηση :

Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η συνάρτηση αλλάζει τύπο στο χ_0 (δηλαδή η **f** είναι «διπλού», «τριπλού» κλπ τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής, γιατί ***αν η f δεν είναι συνεχής τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη***.

Δες και το επόμενο παράδειγμα :

β. Η άσκηση ζητά να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός της

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$g(\chi)=\begin{cases}3\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi^2+3 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$$ στο $\chi_0=2$ αλλά η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 . Πράγματι : Πεδίο Ορισμού το **A = R** και

✓ $\lim\limits_{\chi\to 2^+}\left(\chi^2+3\right)=4+3=7$ ενώ

✓ $\lim\limits_{\chi\to 2^-}(3\chi+2)=6+2=8$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 2^-}g(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 2^+}g(\chi)$. Άρα η

f δεν είναι συνεχής άρα δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$.

γ. Έστω η $\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi^2+2\chi & \text{όταν } \chi<0\\ \chi+\eta\mu\chi & \text{όταν } \chi\geq 0\end{cases}$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R**

Εύκολα, με μια απλή αντικατάσταση στο πρόχειρο, διαπιστώνεις ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο 0 άρα θα βρεις το πηλίκο μεταβολών $\lambda(\chi)$.

Αν $\chi\neq 0$ θα είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(0)}{\chi-0}$ και $\varphi(0)=0+\eta\mu 0=0$ άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\varphi(\chi)-0}{\chi-0}\Rightarrow \lambda(\chi)=\frac{\varphi(\chi)}{\chi}.$$

✓ Αν $\chi<0$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi^2+2\chi}{\chi}=\dfrac{\chi(\chi+2)}{\chi}=\chi+2\Rightarrow$

$$\lim_{\chi\to 0^-}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 0^-}(\chi+2)=2$$

✓ Αν $\chi>0$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi+\eta\mu\chi}{\chi}=1+\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ άρα

$$\lim_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 0^+}\left(1+\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)=1+\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}=1+1=2$$

Επομένως η **φ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$** και είναι $\varphi'(0)=2$.

δ. Έστω η $h(\chi)=\begin{cases}3\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi+6 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R.**

Εύκολα, με μια απλή αντικατάσταση στο πρόχειρο, διαπιστώνεις ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο 2 άρα θα βρεις το πηλίκο μεταβολών $\lambda(\chi)$.

Αν $\chi \neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{h(\chi)-h(2)}{\chi-2}$, $h(2)=2+6=8$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{h(\chi)-8}{\chi-2}$.

✓ Αν $\chi<2$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{3\chi+2-8}{\chi-2}=\dfrac{3\chi-6}{\chi-2}=\dfrac{3(\chi-2)}{\chi-2}=3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 2^-}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2^-}3=3$

✓ Αν $\chi>2$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi+6-8}{\chi-2}=\dfrac{\chi-2}{\chi-2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 2^+}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2^+}1=1$ και

επειδή $\lim\limits_{\chi\to 2^+}\lambda(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 2^-}\lambda(\chi)$ η **h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$**.

4. Να βρεθεί (όπου υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός:

α. της $f(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2+3\eta\mu^2\chi}{\chi^2} & \text{όταν } \chi\neq 0\\ 2 & \text{όταν } \chi=0\end{cases}$ στο $\chi_0=0$,

β. της $g(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2-3\chi+2}{\chi-2} & \text{όταν } \chi\neq 2\\ 1 & \text{όταν } \chi=2\end{cases}$ στο $\chi_0=2$

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2+3\eta\mu^2\chi}{\chi^2} & \text{όταν } \chi\neq 0\\ 2 & \text{όταν } \chi=0\end{cases}$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Παρατήρησε ότι συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής στο $\chi_0=0$!! Πράγματι :

✓ $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2+3\eta\mu^2\chi}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(1+3\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\chi^2}\right)=1+3\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)^2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2+3\eta\mu^2\chi}{\chi^2}=4$ ενώ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ $f(0) = 2$ άρα $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) \neq f(0)$. Επομένως

η f δεν είναι συνεχής άρα δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$.

β. Έστω $g(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 2} & \text{όταν } \chi \neq 2 \\ 1 & \text{όταν } \chi = 2 \end{cases}$ και $\chi_0 = 2$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R**

Εύκολα, με μια απλή αντικατάσταση στο πρόχειρο, διαπιστώνεις ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 2 άρα θα βρεις το πηλίκο μεταβολών $\lambda(\chi)$.

Αν $\chi \neq 2$ είναι $\lambda(\chi) = \dfrac{g(\chi) - g(2)}{\chi - 2}$ και $g(2) = 1$ άρα $\lambda(\chi) = \dfrac{\dfrac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi - 2} - 1}{\chi - 2}$

$\Rightarrow \lambda(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 3\chi + 2 - \chi + 2}{(\chi - 2)^2} \Rightarrow \lambda(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 4\chi + 4}{(\chi - 2)^2} = \dfrac{(\chi - 2)^2}{(\chi - 2)^2} \Rightarrow \lambda(\chi) = 1$.

Άρα $\lim\limits_{\chi \to 2} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 2} 1 = 1$

Επομένως η **g είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$** και είναι $\mathbf{g'(2) = 1}$.

Παρατήρηση :

Όταν θες να υπολογίσεις τον παράγωγο αριθμό μιας συνάρτησης στο χ_0 και η τιμή $f(\chi_0)$ δίνεται ξεχωριστά (δηλαδή η **f** είναι «διπλού» τύπου), τότε είναι σκόπιμο πριν απ' όλα να «ψάχνεις» αν η συνάρτηση είναι συνεχής, γιατί αν η **f δεν είναι συνεχής τότε δεν μπορεί να είναι ούτε παραγωγίσιμη**.

Συμβουλή :

Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει απόλυτο, επειδή δεν είναι πάντα εύκολο να ξέρεις πότε παραγωγίζεται και πότε όχι μια συνάρτηση, σε συμφέρει, αφού βρεις το πεδίο ορισμού και πριν κάνεις οτιδήποτε άλλο , να απαλλάσσεις την συνάρτηση από τα απόλυτα, μετατρέποντας την έτσι σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου και να αναζητάς, ***αν χρειάζεται***, τα πλευρικά όρια.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός :

α. της $f(\chi)=|\chi-2|$ στο $\chi_0=-3$

β. της $g(\chi)=|\chi-2|$ στο $\chi_0=2$

γ. της $\varphi(\chi)=|\chi^2-5\chi+6|$ στο $\chi_0=2$

δ. της $h(\chi)=\eta\mu\left|\chi-\frac{\pi}{6}\right|$ στο $\chi_0=\frac{\pi}{6}$.

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=|\chi-2|$ και $\chi_0=-3$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν είναι $\chi-2\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq 2$, τότε $|\chi-2|=\chi-2$, ενώ $\chi<2 \Leftrightarrow$

$|\chi-2|=-\chi+2$, άρα η f γίνεται : $f(\chi)=\begin{cases}-\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi-2 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$.

Επειδή $-3<2$ θα είναι $f(-3)=-(-3)+2=5$, άρα

$\lambda(\chi)=\frac{-\chi+2-5}{\chi+3}=\frac{-(\chi+3)}{\chi+3}=-1$. Επομένως $\lim\limits_{\chi\to-3}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-3}(-1)=-1$.

Άρα η **f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=-3$** και είναι $\mathbf{f'(-3)=-1}$.

β. Έστω $g(\chi)=|\chi-2|$ και $\chi_0=2$

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Είναι $g(\chi)=\begin{cases}-\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\\ \chi-2 & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$ (δες το προηγούμενο παράδειγμα).

Αν $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\frac{g(\chi)-g(2)}{\chi-2}$ και $g(2)=2-2=0$,

άρα $\lambda(\chi)=\frac{g(\chi)-0}{\chi-2}=\frac{g(\chi)}{\chi-2}$. Επειδή στο $\chi_0=2$ η συνάρτηση αλλάζει

τύπο θα βρεις τα πλευρικά όρια του $\lambda(\chi)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν $\chi < 2$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{-\chi+2}{\chi-2} = \dfrac{-(\chi-2)}{\chi-2} = -1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 2^-} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2^-} (-1) = -1$

✓ Αν $\chi > 2$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{\chi-2}{\chi-2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 2^+} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2^+} 1 = 1$ και επειδή

$\lim\limits_{\chi\to 2^+} \lambda(\chi) \neq \lim\limits_{\chi\to 2^-} \lambda(\chi)$

Επομένως η **g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$**.

γ. Έστω $\varphi(\chi) = \left|\chi^2 - 5\chi + 6\right|$ και $\chi_0 = 2$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Το $\chi^2 - 5\chi + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \ldots = 1$ και ρίζες $\chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$.

Άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 5\chi + 6$ είναι

$-\infty$		2		3		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

✓ Όταν $\chi < 2$ τότε $\left|\chi^2 - 5\chi + 6\right| = \chi^2 - 5\chi + 6$

✓ Όταν $2 \le \chi < 3$ τότε $\left|\chi^2 - 5\chi + 6\right| = -\chi^2 + 5\chi - 6$

✓ Όταν $\chi \ge 3$ τότε $\left|\chi^2 - 5\chi + 6\right| = \chi^2 - 5\chi + 6$

Άρα η φ είναι τριπλού τύπου : $\varphi(\chi) = \begin{cases} \chi^2 - 5\chi + 6 & \text{όταν } \chi < 2 \\ -\chi^2 + 5\chi - 6 & \text{όταν } 2 \le \chi < 3 \\ \chi^2 - 5\chi + 6 & \text{όταν } \chi \ge 3 \end{cases}$

Αν $\chi \neq 2$ είναι $\lambda(\chi) = \dfrac{\varphi(\chi) - \varphi(2)}{\chi - 2}$ και $\varphi(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$,

άρα $\lambda(\chi) = \dfrac{\varphi(\chi) - 0}{\chi - 2} = \dfrac{\varphi(\chi)}{\chi - 2}$.

Επειδή στο $\chi_0 = 2$ η συνάρτηση αλλάζει τύπο, θα βρεις τα πλευρικά όρια του $\lambda(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν $\chi < 2$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 5\chi + 6}{\chi - 2} = \dfrac{(\chi-2)(\chi-3)}{\chi-2} = \chi - 3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi \to 2^-} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 2^-} (\chi - 3) = -1$

✓ Αν $\chi > 2$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{-\chi^2 + 5\chi - 6}{\chi - 2} = \dfrac{-(\chi-2)(\chi-3)}{\chi-2} = -\chi + 3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi \to 2^+} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 2^+} (-\chi + 3) = 1$ και επειδή $\lim\limits_{\chi \to 2^+} \lambda(\chi) \neq \lim\limits_{\chi \to 2^-} \lambda(\chi)$

επομένως η **φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$**.

δ. Έστω $h(\chi) = \eta\mu\left|\chi - \dfrac{\pi}{6}\right|$ και $\chi_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

✓ Αν $\chi - \dfrac{\pi}{6} \geq 0 \Rightarrow \chi \geq \dfrac{\pi}{6}$, τότε $\left|\chi - \dfrac{\pi}{6}\right| = \chi - \dfrac{\pi}{6}$ άρα $\eta\mu\left|\chi - \dfrac{\pi}{6}\right| = \eta\mu\left(\chi - \dfrac{\pi}{6}\right)$,

✓ ενώ $\chi < \dfrac{\pi}{6}$, τότε $\left|\chi - \dfrac{\pi}{6}\right| = -\chi + \dfrac{\pi}{6}$ άρα

$\eta\mu\left|\chi - \dfrac{\pi}{6}\right| = \eta\mu\left[-\left(\chi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right] = -\eta\mu\left(\chi - \dfrac{\pi}{6}\right)$,

άρα η h γίνεται : $h(\chi) = \begin{cases} -\eta\mu\left(\chi - \dfrac{\pi}{6}\right) & \text{όταν } \chi < \dfrac{\pi}{6} \\ \eta\mu\left(\chi - \dfrac{\pi}{6}\right) & \text{όταν } \chi \geq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

Αν $\chi \neq \dfrac{\pi}{6}$ είναι $\lambda(\chi) = \dfrac{h(\chi) - h\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{\chi - \dfrac{\pi}{6}}$ και $h\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \eta\mu 0 = 0$,

άρα $\lambda(\chi) = \dfrac{h(\chi) - 0}{\chi - \dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{h(\chi)}{\chi - \dfrac{\pi}{6}}$.

Επειδή στο $\chi_0 = \dfrac{\pi}{6}$ η συνάρτηση αλλάζει τύπο θα βρεις τα πλευρικά όρια του $\lambda(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν $\chi < \frac{\pi}{6}$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{-\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)}{\chi - \frac{\pi}{6}} = -\dfrac{\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)}{\chi - \frac{\pi}{6}}$.

Αν θέσεις $u = \chi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}} u = \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}} \left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi \to \frac{\pi}{6} \\ \chi < \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \to 0 \\ u < 0 \end{cases}$

άρα $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^-} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^-} \left(-\dfrac{\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)}{\chi - \frac{\pi}{6}} \right) = -\lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{\eta\mu u}{u} = -1$

✓ Αν $\chi > \frac{\pi}{6}$ τότε $\lambda(\chi) = \dfrac{\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)}{\chi - \frac{\pi}{6}}$.

Αν θέσεις $u = \chi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}} u = \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}} \left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ άρα $\begin{cases} \chi \to \frac{\pi}{6} \\ \chi > \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u \to 0 \\ u > 0 \end{cases}$ άρα $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^+} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^+} \dfrac{\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)}{\chi - \frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ και

επειδή $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^+} \lambda(\chi) \neq \lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{6}^-} \lambda(\chi)$, επομένως

η **h δεν είναι παραγωγίσιμη στο** $\chi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Παρατήρηση :

Όταν στον τύπο μιας συνάρτησης υπάρχουν απόλυτα της μορφής $|\chi - \chi_0|$ (που **δεν** είναι <u>πολλαπλασιασμένα</u> με $(\chi - \chi_0)$, τότε <u>πιθανόν</u> η συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ***εκτός από το*** χ_0 ***που μηδενίζει το απόλυτο***.

Ο πιο πάνω κανόνας ισχύει γενικά, υπάρχουν όμως και εξαιρέσεις .

Δες το επόμενο παράδειγμα και θα καταλάβεις γιατί λέω πιθανόν :

6. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός της $f(\chi)=\text{συν}|\chi-2|$ στο $\chi_0=2$.

Απάντηση :

Έστω $f(\chi)=\text{συν}|\chi-2|$ και $\chi_0=2$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν είναι $\chi-2\ \geq 0 \Rightarrow \chi\geq 2$, τότε $|\chi-2|=\chi-2$, ενώ $\chi<2 \Rightarrow$

$|\chi-2|=-\chi+2$, άρα η f γίνεται :

$$f(\chi)=\begin{cases}\text{συν}(-\chi+2) & \text{όταν } \chi<2\\ \text{συν}(\chi-2) & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases} \quad \text{άρα} \quad f(\chi)=\begin{cases}\text{συν}(\chi-2) & \text{όταν } \chi<2\\ \text{συν}(\chi-2) & \text{όταν } \chi\geq 2\end{cases}$$

γιατί οι αντίθετες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα άρα η $f(\chi)=\text{συν}(\chi-2)$.

Αν $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(2)}{\chi-2}$ και $f(2)=\text{συν}(2-2)=\text{συν}0=1$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\text{συν}(\chi-2)-1}{\chi-2}$$

Αν θέσεις $u=\chi-2$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 2} u=\lim\limits_{\chi\to 2}(\chi-2)=0$ άρα

$$\lim_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 2}\frac{\text{συν}(\chi-2)-1}{\chi-2}=\lim_{u\to 0}\frac{\text{συν}u-1}{u}=0 \text{, άρα}$$

η **f είναι παραγωγίσιμη** στο $\chi_0=2$, που μηδενίζει το απόλυτο $|\chi-2|$ και είναι $f'(2)=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άσκηση – Θεώρημα, σημαντικό για τις ασκήσεις

Αν η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο χ_0 τότε η συνάρτηση :

$g(\chi)=(\chi-\chi_0)\varphi(\chi)$ ***είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και ισχύει*** $g'(\chi_0)=\varphi(\chi_0)$

Απάντηση :

Έστω ότι η συνάρτηση **φ** είναι συνεχής στο χ_0 τότε και η $g(\chi)=(\chi-\chi_0)\varphi(\chi)$ θα είναι συνεχής στο χ_0 ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, άρα $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}(\chi-\chi_0)\cdot\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)\Rightarrow$

$g(\chi_0)=(\chi_0-\chi_0)\varphi(\chi_0)=0\cdot\varphi(\chi_0)=0$.

Αν $\chi\neq\chi_0$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\dfrac{(\chi-\chi_0)\varphi(\chi)-0}{\chi-\chi_0}=$

$=\dfrac{(\chi-\chi_0)\varphi(\chi)}{\chi-\chi_0}=\varphi(\chi)$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\varphi(\chi_0)$

άρα $g'(\chi_0)=\varphi(\chi_0)$.

Προσοχή :

Όταν η συνάρτηση έχει τη μορφή :

- ✓ $f(\chi)=\varphi(\chi)\cdot|\varphi(\chi)|$ $\left(\text{πχ } f(\chi)=(\chi-2)|\chi-2|\right)$ ή
- ✓ $f(\chi)=\varphi(\chi)\cdot g(|\chi|)$ $\left(\text{πχ } f(\chi)=\left(\chi-\frac{\pi}{6}\right)\text{ημ}\left|\chi-\frac{\pi}{6}\right|\right)$, και επειδή το απόλυτο $|\varphi(\chi)|$ είναι συνεχής συνάρτηση στο R, τότε η συνάρτηση **f** θα είναι ***πιθανόν*** **παραγωγίσιμη και στα σημεία χ_0 που μηδενίζουν το απόλυτο** και θα ισχύει :

Αν $\varphi(\chi_0)=0$ τότε $\begin{cases} f(\chi)=\varphi(\chi)\cdot|\varphi(\chi)| & \Rightarrow f'(\chi_0)=0 \\ f(\chi)=\varphi(\chi)\cdot g|\varphi(\chi)| & \Rightarrow f'(\chi_0)=g(0) \end{cases}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δες προσεκτικά τα επόμενα παραδείγματα :

7. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός :

α. της $f(\chi)=(\chi-2)|\chi-2|$ στο $\chi_0=2$

β. της $g(\chi)=(\chi-3)|\chi^2-5\chi+6|$ στο $\chi_0=3$

γ. της $\varphi(\chi)=\chi\cdot\eta\mu|\chi|$ στο $\chi_0=0$

δ. της $h(\chi)=\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right|$ στο $\chi_0=\frac{\pi}{4}$

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=(\chi-2)|\chi-2|$ και $\chi_0=2$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(2)}{\chi-2}$ και $f(2)=(2-2)|2-2|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{(\chi-2)|\chi-2|-0}{\chi-2}=|\chi-2| .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}|\chi-2|=0$ επομένως

η **f** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\boldsymbol{\chi_0=2}$ με $\mathbf{f'(2)=0}$.

β. Έστω $g(\chi)=(\chi-3)|\chi^2-5\chi+6|$ και $\chi_0=3$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq 3$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(3)}{\chi-3}$ και $g(3)=(3-3)|3^2-5\cdot 3+6|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{(\chi-3)|\chi^2-5\chi+6|-0}{\chi-3}=|\chi^2-5\chi+6| .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}|\chi^2-5\chi+6|=0$ επομένως

η **g** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\boldsymbol{\chi_0=3}$ με $\mathbf{g'(3)=0}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Έστω $\varphi(\chi)=\chi\cdot\eta\mu|\chi|$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(0)}{\chi-0}$ και $\varphi(0)=0\cdot\eta\mu|0|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\chi\cdot\eta\mu|\chi|-0}{\chi-0}=\frac{\chi\cdot\eta\mu|\chi|}{\chi}=\eta\mu|\chi| .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu|\chi|=\eta\mu 0=0$ επομένως

η **φ** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0=0$ με $\varphi'(0)=0$.

δ. Έστω $h(\chi)=\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right|$ και $\chi_0=\frac{\pi}{4}$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq\frac{\pi}{4}$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{h(\chi)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\chi-\frac{\pi}{4}}$ και $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\cdot\sigma\upsilon\nu|0|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right|-0}{\chi-\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right|}{\chi-\frac{\pi}{4}}=\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right| .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{4}}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu\left|\chi-\frac{\pi}{4}\right|=\sigma\upsilon\nu 0=1$ επομένως

η **h** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0=\frac{\pi}{4}$ με $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός :

α. της $f(\chi)=\eta\mu^2|\chi|$ στο $\chi_0=0$

β. της $g(\chi)=\chi^2\eta\mu|\chi|$ στο $\chi_0=0$

γ. της $\varphi(\chi)=\chi^2+\eta\mu|\chi|$ στο $\chi_0=0$

δ. της $h(\chi)=\chi^\kappa\eta\mu^\lambda|\chi|$ στο $\chi_0=0$

Απάντηση :

α. Έστω $f(\chi)=\eta\mu^2|\chi|$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0}$ και $f(0)=\eta\mu^2|0|=0$,

άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{\eta\mu^2|\chi|-0}{\chi-0}=\dfrac{\eta\mu^2|\chi|}{\chi}$.

Αν είναι $\chi\geq 0$, τότε $|\chi|=\chi$, άρα $f(\chi)=\eta\mu^2|\chi|=\eta\mu^2\chi$, ενώ $\chi<0$ τότε

$|\chi|=-\chi$, άρα $f(\chi)=\eta\mu^2|\chi|=\eta\mu^2(-\chi)=(\eta\mu(-\chi))^2=(-\eta\mu\chi)^2=\eta\mu^2\chi$.

Άρα σε κάθε περίπτωση $f(\chi)=\eta\mu^2\chi$

Άρα όταν $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\eta\mu^2|\chi|}{\chi}=\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\chi}=\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\eta\mu\chi$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\eta\mu\chi\right]=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu\chi=1\cdot\eta\mu 0=1.0=0$

Επομένως η **f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$**, που μηδενίζει το $|\chi|$

και είναι $f'(0)=0$.

β. Έστω $g(\chi)=\chi^2\eta\mu|\chi|$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν $\chi \neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(0)}{\chi-0}$ και $g(0)=0^2\eta\mu|0|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\chi^2\cdot\eta\mu|\chi|-0}{\chi-0}=\frac{\chi^2\cdot\eta\mu|\chi|}{\chi}=\chi\cdot\eta\mu|\chi|\ .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}(\chi\cdot\eta\mu|\chi|)=0\cdot 0=0$ επομένως

η **g** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0=0$ με $g'(0)=0$.

γ. Έστω $\varphi(\chi)=\chi^2+\eta\mu|\chi|$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν είναι $\chi\geq 0$ τότε $|\chi|=\chi$ άρα $\eta\mu|\chi|=\eta\mu\chi$, ενώ $\chi<0$, τότε

$|\chi|=-\chi$ άρα $\eta\mu|\chi|=\eta\mu(-\chi)=-\eta\mu\chi$, άρα η φ γίνεται :

$$\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi^2-\eta\mu\chi & \text{όταν } \chi<0\\ \chi^2+\eta\mu\chi & \text{όταν } \chi\geq 0\end{cases}.$$

Αν $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(0)}{\chi-0}$ και $\varphi(0)=0^2+\eta\mu|0|=0$.

Στο $\chi_0=0$ η συνάρτηση αλλάζει τύπο θα βρεις τα πλευρικά όρια του $\lambda(\chi)$.

- Αν $\chi<0$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi^2-\eta\mu\chi-0}{\chi-0}=\dfrac{\chi^2-\eta\mu\chi}{\chi}=\chi-\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ άρα

$$\lim_{\chi\to 0^-}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 0^-}\left(\chi-\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)=0-1=-1\ .$$

- Αν $\chi>0$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{\chi^2+\eta\mu\chi-0}{\chi-0}=\dfrac{\chi^2+\eta\mu\chi}{\chi}=\chi+\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ άρα

$$\lim_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 0^+}\left(\chi+\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)=0+1=1\ .$$

Και επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 0^-}\lambda(\chi)$, επομένως

η **φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο** $\chi_0=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ. Έστω $h(\chi)=\chi^{\kappa}\eta\mu^{\lambda}|\chi|$ και $\chi_0=0$.

Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Αν $\chi\neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{h(\chi)-h(0)}{\chi-0}$ και $h(0)=0^{\kappa}\cdot\eta\mu^{\lambda}|0|=0$, άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\chi^{\kappa}\eta\mu^{\lambda}|\chi|-0}{\chi-0}=\frac{\chi^{\kappa}\eta\mu^{\lambda}|\chi|}{\chi}=\chi^{\kappa-1}\cdot\eta\mu^{\lambda}|\chi| .$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^{\kappa-1}\cdot\eta\mu^{\lambda}|\chi|\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\chi^{\kappa-1}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu^{\lambda}|\chi|=$

$0\cdot\left(\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu|\chi|\right)^{\lambda}=0\cdot 0=0$ επομένως

η **h** είναι **παραγωγίσιμη** στο $\chi_0=0$ με $h'(0)=0$.

Συμβουλή :

Όταν δίνεται ο $f'(\chi_0)$ (ή όταν ζητάει να τον υπολογίσεις) και στη συνέχεια ζητάει να βρεις το όριο μιας παράστασης P(χ) μέσα στην οποία συμμετέχει η f , τότε σε συμφέρει να ξεκινάς από το $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, με $\chi\neq\chi_0$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\lambda(\chi)=f'(\chi_0)$ και αν λύσεις θα είναι $f(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-\chi_0)+f(\chi_0)$.

Την τελευταία σχέση την αντικαθιστάς στο P(χ) και υπολογίζεις το όριο.

9. Αν για κάθε $\chi\in R$, η φ είναι μια ***συνεχής συνάρτηση*** και

$\lim\limits_{\chi\to\beta}\dfrac{\varphi(\chi)-\alpha}{\chi-\beta}=\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq\beta$, να δείξετε ότι :

α. $\varphi(\beta)=\alpha$ **β.** $\varphi'(\beta)=\gamma$ **γ.** Να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to\beta}\dfrac{2\varphi(\chi)-\chi+\beta-2\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$.

Απάντηση :

α. Πεδίο Ορισμού το **A = R** .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή **φ** συνεχής, το $\varphi(\beta)$ θα το βρεις από τη σχέση $\lim\limits_{\chi\to\beta}\varphi(\chi)=\varphi(\beta)$.

Αν $\chi\neq\beta$ θέτεις $\lambda(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-\alpha}{\chi-\beta}$, οπότε $\lim\limits_{\chi\to\beta}\lambda(\chi)=\gamma$ και

$\varphi(\chi)-\alpha=\lambda(\chi)(\chi-\beta)$ άρα $\varphi(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-\beta)+\alpha$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to\beta}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\beta}\lambda(\chi)\lim\limits_{\chi\to\beta}(\chi-\beta)+\lim\limits_{\chi\to\beta}\alpha$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\beta}\varphi(\chi)=\gamma\cdot 0+\alpha=\alpha$.

Άρα **$\varphi(\beta)=\alpha$**.

β. Είναι $\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(\beta)}{\chi-\beta}=\dfrac{\varphi(\chi)-\alpha}{\chi-\beta}=\lambda(\chi)$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\beta}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\beta}\dfrac{\varphi(\chi)-\alpha}{\chi-\beta}=\gamma$.

Άρα **$\varphi'(\beta)=\gamma$**

γ. Έστω $h(\chi)=\dfrac{2\varphi(\chi)-\chi+\beta-2\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$ τότε

$$h(\chi)=\frac{2\left[\lambda(\chi)(\chi-\beta)+\alpha\right]-\chi+\beta-2\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}=\frac{2\lambda(\chi)(\chi-\beta)+2\alpha-\chi+\beta-2\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}$$

$$=\frac{2\lambda(\chi)(\chi-\beta)-(\chi-\beta)}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}=\frac{(\chi-\beta)(2\lambda(\chi)-1)}{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}=\frac{2\lambda(\chi)-1}{\chi-\alpha}$$ άρα

$$\lim_{\chi\to\beta}h(\chi)=\lim_{\chi\to\beta}\frac{2\lambda(\chi)-1}{\chi-\alpha}=\frac{2\lim\limits_{\chi\to\beta}\lambda(\chi)-\lim\limits_{\chi\to\beta}1}{\lim\limits_{\chi\to\beta}(\chi-\alpha)}\Rightarrow$$

$$\lim_{\chi\to\beta}h(\chi)=\frac{2\gamma-1}{\beta-\alpha}$$ άρα $$\boldsymbol{\lim_{\chi\to\beta}\frac{2\varphi(\chi)-\chi+\beta-2\alpha}{\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta}=\frac{2\gamma-1}{\beta-\alpha}}.$$

10. Αν για κάθε $\chi\in R$ η f είναι μια συνεχής συνάρτηση και

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}=5$, να βρείτε τα :

α. $f(1)$ **β.** το $f'(1)$ **γ.** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)-6}{\chi^2-4\chi+3}$.

Απάντηση :

α. Πεδίο Ορισμού το **A = R .**

Επειδή f συνεχής , το $\varphi(1)$ θα το βρεις από τη σχέση $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=f(1)$.

Αν $\chi\neq 1$ θέτεις $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$, οπότε $\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=5$ και

$f(\chi)-3=\lambda(\chi)(\chi-1)\Rightarrow f(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-1)+3$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)+\lim\limits_{\chi\to 1}3$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=5\cdot 0+3=3$.

Άρα $\boldsymbol{\varphi(1)=3}$.

β. Αν $\chi\neq 1$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}=5$. Άρα $f'(1)=5$.

γ. Θέσε $h(\chi)=\dfrac{2f(\chi)-6}{\chi^2-4\chi+3}\Rightarrow h(\chi)=\dfrac{2(f(\chi)-3)}{(\chi-1)(\chi-3)}=\dfrac{2}{\chi-3}\cdot\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left[\dfrac{2}{\chi-3}\cdot\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}\right]=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2}{\chi-3}\cdot\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)-6}{\chi^2-4\chi+3}=\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=\dfrac{2}{-2}\cdot 5=-5$

άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)-6}{\chi^2-4\chi+3}=-5$.

11. Αν για κάθε $\chi\in R$ η f είναι μια συνεχής συνάρτηση και

$\chi+1\leq\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}\leq\chi^2+\chi$, να βρείτε τα :

α. $f(1)$ **β.** $f'(1)$ **γ.** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-4\chi+1}{\chi^2-4\chi+3}$.

Απάντηση :

α. Αν θέσεις $h(\chi)=\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$ τότε $\chi+1\leq h(\chi)\leq\chi^2+\chi$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi+1)=1+1=2$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\chi^2+\chi\right)=1^2+1=2$

Λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=2$.

Από την $h(\chi)=\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1} \Rightarrow f(\chi)-3=h(\chi)(\chi-1) \Rightarrow$

$f(\chi)=h(\chi)(\chi-1)+3 \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left[h(\chi)(\chi-1)\right]+\lim\limits_{\chi\to 1} 3 =$

$\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)\cdot\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)+3$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=2\cdot 0+3=3$ και επειδή η f

είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι $f(1)=\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=3$.

β. Αν $\chi\neq 1$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-3}{\chi-1}=\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi) \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=2$ δες

και πιο πάνω. Άρα $f'(1)=2$.

γ. Έστω $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)-4\chi+1}{\chi^2-4\chi+3}$ τότε $g(\chi)=\dfrac{h(\chi)(\chi-1)+3-4\chi+1}{(\chi-1)(\chi-3)} \Rightarrow$

$g(\chi)=\dfrac{h(\chi)(\chi-1)-4\chi+4}{(\chi-1)(\chi-3)}$ άρα $g(\chi)=\dfrac{h(\chi)(\chi-1)-4(\chi-1)}{(\chi-1)(\chi-3)}$ άρα

$g(\chi)=\dfrac{(\chi-1)\left[h(\chi)-4\right]}{(\chi-1)(\chi-3)}=\dfrac{h(\chi)-4}{\chi-3} \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{h(\chi)-4}{\chi-3}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)=\dfrac{\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)-\lim\limits_{\chi\to 1} 4}{\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-3)}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)=\dfrac{2-4}{1-3}=\dfrac{-2}{-2}=1$

άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-4\chi+1}{\chi^2-4\chi+3}=1$.

12. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο R και $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{f(\chi)-1}{\chi-2}=3$,

να δείξετε ότι η η συνάρτηση $g(\chi)=\left(2\chi^2+1\right)f(\chi)$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$ και ισχύει $g'(2)=35\cdot f(2)$

Απάντηση :

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το R.

Αν $\chi\neq 2$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(2)}{\chi-2}$, $g(2)=\left(2\cdot 2^2+1\right)f(2)$ άρα

$g(2)=9\cdot f(2)$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{\left(2\chi^2+1\right)f(\chi)-9f(2)}{\chi-2}$ και αν θέσεις

$h(\chi)=\dfrac{f(\chi)-1}{\chi-2}$ τότε $\lim\limits_{\chi\to 2}h(\chi)=3$ και $f(\chi)-1=h(\chi)(\chi-2)$ άρα

$f(\chi)=h(\chi)(\chi-2)+1$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}\left[h(\chi)(\chi-2)+1\right]=\lim\limits_{\chi\to 2}h(\chi)\cdot\lim\limits_{\chi\to 2}(\chi-2)+\lim\limits_{\chi\to 2}1$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)=3\cdot 0+1=1$ και επειδή η f συνεχής, $\mathbf{f(2)=1}$

Άρα μετά απ' όλα αυτά είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{\left(2\chi^2+1\right)\left[h(\chi)(\chi-2)+1\right]-9\cdot 1}{\chi-2}$ άρα

$$\lambda(\chi)=\frac{\left(2\chi^2+1\right)h(\chi)(\chi-2)+2\chi^2+1-9}{\chi-2}=\frac{\left(2\chi^2+1\right)h(\chi)(\chi-2)+2\chi^2-8}{\chi-2}=$$

$$\frac{\left(2\chi^2+1\right)h(\chi)(\chi-2)+2\left(\chi^2-4\right)}{\chi-2}=\frac{\left(2\chi^2+1\right)h(\chi)(\chi-2)+2(\chi-2)(\chi+2)}{\chi-2}$$

$\Rightarrow\ \lambda(\chi)=\left(2\chi^2+1\right)h(\chi)+2(\chi+2)$ άρα

$$\lim_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=\lim_{\chi\to 2}\left(2\chi^2+1\right)\lim_{\chi\to 2}h(\chi)+2\lim_{\chi\to 2}(\chi+2)=9\cdot 3+8=35.$$

Και επειδή **f(2) = 1** άρα $g'(2)=\lim\limits_{\chi\to 2}\lambda(\chi)=35\cdot 1=35\cdot f(2)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Αν για την πραγματική συνάρτηση g ισχύουν $g'(1)=2$ και $g(1)=-2$, να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g^2(\chi)+3g(\chi)+2}{\chi^2-4\chi+3}$ **β.** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2 g(\chi)+2}{\chi^2-\chi}$ **γ.** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{3g(\chi)+2\chi+4}{\chi^2-\chi}$.

Απάντηση :

α. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το R.

Αν $\chi\neq 1$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1}$, $g(1)=-2$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-1}$,

$g'(1)=2$ άρα $g'(1)=\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-1}=2$.

Αν θέσεις $h(\chi)=\dfrac{g^2(\chi)+3g(\chi)+2}{\chi^2-4\chi+3}$, το $g^2(\chi)+3g(\chi)+2$ είναι τριώνυμο 2ου βαθμού με μεταβλητή το g(χ) και έχει διακρίνουσα Δ = 9 – 8 = 1, ρίζες τους αριθμούς – 1 και – 2 , άρα παραγοντοποιείται και γράφεται

$g^2(\chi)+3g(\chi)+2=(g(\chi)+1)(g(\chi)+2)$.

Επίσης το $\chi^2-4\chi+3$ έχει διακρίνουσα Δ = 14 – 12 = 4, ρίζες τους αριθμούς 1 και 3, άρα παραγοντοποιείται και γράφεται

$\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$.

Άρα $h(\chi)=\dfrac{g^2(\chi)+3g(\chi)+2}{\chi^2-4\chi+3}=\dfrac{(g(\chi)+1)(g(\chi)+2)}{(\chi-1)(\chi-3)}\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{(g(\chi)+1)(g(\chi)+2)}{(\chi-1)(\chi-3)}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g(\chi)+1}{\chi-1}\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-3}=$

$2\cdot\dfrac{-2+1}{2-3}=2\dfrac{-1}{-1}$ άρα $\boxed{\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g^2(\chi)+3g(\chi)+2}{\chi^2-4\chi+3}=2}$.

β. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το R.

1ος τρόπος : Αν $\chi\neq 1$ και $\chi\neq 0$, είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1}$, $g(1)=-2$ άρα

$\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-1}$, $g'(1)=2$ άρα $g'(1)=\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-1}=2$

από $\lambda(\chi)=\dfrac{g(\chi)+2}{\chi-1}\Rightarrow g(\chi)+2=\lambda(\chi)(\chi-1)\Rightarrow g(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-1)-2$

άρα $g(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-1)-2$ **(1)**

Αν θέσεις $h(\chi)=\dfrac{\chi^2 g(\chi)+2}{\chi^2-\chi}\underset{(1)}{\Leftrightarrow} h(\chi)=\dfrac{\chi^2\left[\lambda(\chi)(\chi-1)-2\right]+2}{\chi^2-\chi}=$

$\dfrac{\chi^2\lambda(\chi)(\chi-1)-2\chi^2+2}{\chi^2-\chi}=\dfrac{\chi^2\lambda(\chi)(\chi-1)}{\chi(\chi-1)}-2\dfrac{\chi^2-1}{\chi(\chi-1)}=$

$\dfrac{\chi^2\lambda(\chi)(\chi-1)}{\chi(\chi-1)}-2\dfrac{(\chi-1)(\chi+1)}{\chi(\chi-1)}\Rightarrow h(\chi)=\chi\cdot\lambda(\chi)-2\dfrac{\chi+1}{\chi}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\chi\cdot\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)-2\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi+1}{\chi}\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=1\cdot 2-2\cdot 2$

άρα $\boxed{\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2 g(\chi)+2}{\chi^2-\chi}=-2}$.

2ος τρόπος : Αν θέσεις $h(\chi)=\dfrac{\chi^2 g(\chi)+2}{\chi^2-\chi}\Rightarrow\chi^2 g(\chi)+2=h(\chi)\left(\chi^2-\chi\right)$

άρα $\chi^2 g(\chi)=h(\chi)\left(\chi^2-\chi\right)-2\Rightarrow g(\chi)=\dfrac{h(\chi)\left(\chi^2-\chi\right)-2}{\chi^2}$ άρα

$\lambda(\chi)=\dfrac{\dfrac{h(\chi)\chi(\chi-1)-2}{\chi^2}+2}{\chi-1}=\dfrac{h(\chi)\chi(\chi-1)-2+2\chi^2}{\chi^2(\chi-1)}=$

$\dfrac{h(\chi)\chi(\chi-1)+2(\chi+1)(\chi-1)}{\chi^2(\chi-1)}=\dfrac{(\chi-1)\left(\chi\cdot h(\chi)+2(\chi+1)\right)}{\chi^2(\chi-1)}\Rightarrow$

$\lambda(\chi)=\dfrac{\chi\cdot h(\chi)+2(\chi+1)}{\chi^2}$ άρα $\chi\cdot h(\chi)+2(\chi+1)=\chi^2\cdot\lambda(\chi)\Rightarrow$

$h(\chi)=\dfrac{\chi^2\cdot\lambda(\chi)-2(\chi+1)}{\chi}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2\cdot\lambda(\chi)-2(\chi+1)}{\chi}=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\frac{2\cdot 1^2-2\cdot 2}{1}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\chi^2 g(\chi)+2}{\chi^2-\chi}=\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=-2$.

γ. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το R.

Αν $\chi\neq 1$ και $\chi\neq 0$, είναι $\lambda(\chi)=\frac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1}$, $g(1)=-2$ άρα

$\lambda(\chi)=\frac{g(\chi)+2}{\chi-1}$, $g'(1)=2$ άρα $g'(1)=\lim\limits_{\chi\to 1}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{g(\chi)+2}{\chi-1}=2$

από $\lambda(\chi)=\frac{g(\chi)+2}{\chi-1}\Rightarrow g(\chi)+2=\lambda(\chi)(\chi-1)\Rightarrow g(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-1)-2$

άρα $g(\chi)=\lambda(\chi)(\chi-1)-2$ **(1)**

Αν θέσεις $h(\chi)=\frac{3g(\chi)+2\chi+4}{\chi^2-\chi}\underset{(1)}{\Leftrightarrow} h(\chi)=\frac{3\left[\lambda(\chi)(\chi-1)-2\right]+2\chi+4}{\chi^2-\chi}=$

$=\frac{3\lambda(\chi)(\chi-1)-6+2\chi+4}{\chi^2-\chi}=\frac{3\lambda(\chi)(\chi-1)+2\chi-2}{\chi^2-\chi}=$

$\frac{3\lambda(\chi)(\chi-1)+2(\chi-1)}{\chi^2-\chi}=\frac{(\chi-1)\left[3\lambda(\chi)+2\right]}{\chi(\chi-1)}\Rightarrow h(\chi)=\frac{3\lambda(\chi)+2}{\chi}\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{3\lambda(\chi)+2}{\chi}\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=\frac{3\cdot 2+2}{1}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{3g(\chi)+2\chi+4}{\chi^2-\chi}=8$.

Συμβουλή :

Όταν μέσα στον τύπο της συνάρτησης υπάρχουν παράμετροι τις οποίες πρέπει να βρεις για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο που πιθανόν αλλάζει ο τύπος της τότε είναι σκόπιμο να <u>απαιτείς πρώτα</u> η συνάρτηση να είναι συνεχής, βρίσκοντας έτσι μια επί πλέον συνθήκη για τις παραμέτρους.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(\chi)=\begin{cases}3\chi^2-\alpha^2\chi & \text{αν } \chi<1\\ 5\chi+\beta-4 & \text{αν } \chi\geq 1\end{cases}$

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R.

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $\chi_0=1$ πρέπει να είναι **και συνεχής**.

Άρα πρέπει $\lim\limits_{\chi\to 1^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-} f(\chi) \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1^+}(5\chi+\beta-4)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}\left(3\chi^2-\alpha^2\chi\right)$

$\Rightarrow 5\cdot 1+\beta-4=3\cdot 1^2-\alpha^2\cdot 1 \Rightarrow \beta+1=3-\alpha^2 \Rightarrow \beta=3-\alpha^2-1$ άρα

$\beta=2-\alpha^2$ **(1)**

Είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(1)}{\chi-1}$, $f(1)=5\cdot 1+\beta-4=\beta+1$ άρα $f(1)=3-\alpha^2$ άρα

$\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-3+\alpha^2}{\chi-1}$

✓ Αν $\chi<1$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{3\chi^2-\alpha^2\chi-3+\alpha^2}{\chi-1}=\dfrac{3\left(\chi^2-1\right)-\alpha^2(\chi-1)}{\chi-1}=$

$\dfrac{3(\chi-1)(\chi+1)-\alpha^2(\chi-1)}{\chi-1}$ άρα $\lambda(\chi)=3(\chi+1)-\alpha^2$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}\left[3(\chi+1)-\alpha^2\right]=6-\alpha^2$

✓ Αν $\chi>1$ τότε $\lambda(\chi)=\dfrac{5\chi+\beta-4-3+\alpha^2}{\chi-1}=\dfrac{5\chi+2-\alpha^2-4-3+\alpha^2}{\chi-1}=$

$\dfrac{5\chi-5}{\chi-1}$ άρα $\lambda(\chi)=5$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}5=5$.

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $\chi=1$ πρέπει $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}\lambda(\chi)$

άρα $5=6-\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=1 \Leftrightarrow \alpha=\pm 1$, $\beta=2-\alpha^2 \Rightarrow \beta=2-(\pm 1)^2$ άρα **β = 1.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή :

Όταν δίνεται το $\mathbf{f(\chi+\psi)}$ και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$ τότε χρησιμοποιείς τον τύπο : $\lambda(\chi_0)=\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$ και αν το $\lim\limits_{h\to 0}\lambda(\chi_0)\in R$ τότε υπάρχει ο παράγωγος αριθμός ***και μόνον τότε*** χρησιμοποιείς το σύμβολο : $f'(\chi_0)$

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f, με $f(\chi+\psi)=f(\chi)+\psi\cdot f(\psi)+\eta\mu\psi$ **(1)** για κάθε $\chi\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi_0\in R$.

Απάντηση :

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R.

Έχοντας κατά νου την προηγούμενη συμβουλή αντικαθιστάς στον τύπο **(1)** όπου $\chi=\chi_0$ και όπου $\psi=h$.

Οπότε ο τύπος **(1)** γίνεται $f(\chi_0+h)=f(\chi_0)+h\cdot f(h)+\eta\mu h$, από τη σχέση αυτή «προσπαθείς» να σχηματίσεις το $\lambda(\chi)$..

$$f(\chi_0+h)=f(\chi_0)+h\cdot f(h)+\eta\mu h \Rightarrow f(\chi_0+h)-f(\chi_0)=h\cdot f(h)+\eta\mu h$$

Αν $h\neq 0$ είναι $\lambda(\chi_0)=\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\dfrac{h\cdot f(h)+\eta\mu h}{h}=\dfrac{h\cdot f(h)}{h}+\dfrac{\eta\mu h}{h}$

άρα $\lambda(\chi_0)=f(h)+\dfrac{\eta\mu h}{h}$ επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\lambda(\chi_0)=\lim\limits_{h\to 0}f(h)+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu h}{h}$

άρα $\lim\limits_{h\to 0}\lambda(\chi_0)=f(0)+1$ και επειδή $f(0)\in R$ άρα και το $f(0)+1\in R$, άρα υπάρχει το $f'(\chi_0)$ και είναι $f'(\chi_0)=f(0)+1$.

Συμβουλή :

Όταν δίνεται το $\mathbf{f(\chi+\psi)}$ και δίνει και κάποια $\mathbf{f(\alpha)=\cdots}$, $\mathbf{f(\beta)=\cdots}$ και ζητάει τον παράγωγο αριθμό $f'(\chi_0)$ τότε χρησιμοποιείς τον τύπο :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\lambda(\chi_0)=\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}$, οπότε $f'(\chi_0)=\lim\limits_{h\to 0}\lambda(\chi_0)$ και για να βρεις κάποιες κατάλληλες τιμές που θα αντικαταστήσουν τα χ, ψ μπορείς να βάζεις : $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \chi=\beta\end{cases}$ οπότε $\begin{cases}\psi=\alpha-\beta\\ \chi=\beta\end{cases}$ ή $\begin{cases}\chi+\psi=\alpha\\ \psi=\beta\end{cases}$ οπότε $\begin{cases}\chi=\alpha-\beta\\ \psi=\beta\end{cases}$

ή απλά βάζεις χ = α , ψ = β την μια φορά και ξανά δεύτερη φορά χ = β και ψ = α και λύνεις το σύστημα.

16. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f, με

$f(\chi+\psi)=f(\chi)+\dfrac{\alpha\cdot f(\psi)}{4}+\chi\cdot\psi$ **(1)** , για κάθε $\chi\in R$ και

f(0) = 1 , f(3) = 2 . Να βρείτε το α και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=3$ και ισχύει $\mathbf{f'(3)=\dfrac{5}{4}}$.

Απάντηση :

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R. Οπότε (δες προηγ. Συμβουλή)

✓ στον τύπο **(1)** αντικαθιστάς όπου χ = 0 και όπου ψ = 3.

Τότε ο τύπος **(1)** γίνεται $f(3)=f(0)+\dfrac{\alpha\cdot f(3)}{4}+0\cdot 3$ άρα $f(3)=1+\dfrac{2\alpha}{4}$

άρα $f(3)=\dfrac{\alpha}{2}+1$ **(2)**

✓ στον τύπο **(1)** αντικαθιστάς όπου χ = 3 και όπου ψ = 0.

Τότε ο τύπος **(1)** γίνεται $f(3)=f(3)+\dfrac{\alpha\cdot f(0)}{4}+3\cdot 0$ άρα $f(3)=\dfrac{\alpha}{4}+2$ **(3)**

Από **(2)** και **(3)** και επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα άρα $\dfrac{\alpha}{2}+1=\dfrac{\alpha}{4}+2$ άρα

$\dfrac{\alpha}{2}=-1$ άρα **α = – 2**. Επομένως ο τύπος **(1)** γίνεται :

$$\mathbf{f(\chi+\psi)=f(\chi)+\frac{-2\cdot f(\psi)}{4}+\chi\cdot\psi}\quad \textbf{(4)}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Στο $\chi_0 = 3$ αν $h \neq 0$ είναι $\lambda(3) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$, από τον τύπο **(4)** για

$\chi = 3$, $\psi = h$ έχεις $f(3+h) = f(3) + \dfrac{-3 \cdot f(h)}{4} + 3 \cdot h$ άρα

$f(3+h) - f(3) = \dfrac{-2 \cdot f(h)}{4} + 3 \cdot h$ άρα $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{-2 \cdot f(h)}{4} + 3$

άρα $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = -3 \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{4} + \lim\limits_{h \to 0} 2 \Rightarrow$

$f'(3) = -3\dfrac{f(0)}{4} + 2 = -3\dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{5}{4}$.

Συμβουλή :

Όταν ο τύπος της συνάρτησης f «εμπλέκεται» μέσα σε διπλή ανισότητα :

$\cdots \leq f(\chi) \leq \cdots$ ή κάτι παρόμοιο θα ξεκινάς από το $\lambda(\chi) = \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$,

θα βλέπεις ότι σου λείπει το $f(\chi_0)$, το οποίο ή θα δίνεται ή θα υπολογίζεται από την αρχική παράσταση αν θέσεις $\chi = 0$ ή αν ***η συνάρτηση αναφέρεται ως συνεχής*** (ειδικά τότε) θα υπολογίζεται από τη σχέση :

$f(\chi_0) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f, με $3\eta\mu\chi \leq f(\chi) - 2 \leq \chi^2 + 3\chi$ για κάθε $\chi \in R$.

Να δείξετε ότι $f'(0) = 3$.

Απάντηση :

Αν $\chi \neq 0$ είναι $\lambda(\chi) = \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$ άρα $\lambda(\chi) = \dfrac{f(\chi) - f(0)}{\chi}$, οπότε

προφανώς σου λείπει το f(0) το οποίο θα υπολογίσεις από την ανισοτική σχέση $3\eta\mu\chi \leq f(\chi) - 2 \leq \chi^2 + 3\chi$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πράγματι αν στην $3\eta\mu\chi \le f(\chi)-2 \le \chi^2+3\chi$ βάλεις όπου $\chi=0$ έχεις

$3\eta\mu 0 \le f(0)-2 \le 0^2+3\cdot 0 \Rightarrow 0 \le f(0)-2 \le 0 \Rightarrow f(0)-2=0$

άρα **f(0) = 2** . Άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}$, οπότε από την σχέση

$3\eta\mu\chi \le f(\chi)-2 \le \chi^2+3\chi$ δημιουργήσεις το $\lambda(\chi)$:

✓ $\chi<0$ τότε $3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \ge \dfrac{f(\chi)-2}{\chi} \ge \dfrac{\chi^2+3\chi}{\chi} \Rightarrow 3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \ge \dfrac{f(\chi)-2}{\chi} \ge \chi+3$

είναι $3\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=3$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}(\chi+3)=3$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=3$ (Κριτήριο παρεμβολής).

✓ $\chi>0$ τότε $3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \le \dfrac{f(\chi)-2}{\chi} \le \dfrac{\chi^2+3\chi}{\chi} \Rightarrow 3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \le \dfrac{f(\chi)-2}{\chi} \le \chi+3$

είναι $3\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=3$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}(\chi+3)=3$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=3$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=3$ άρα $f'(0)=3$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f, με $|f(\chi)-2| \le 3\chi^4+4\chi^2$ για κάθε $\chi \in R$.

Να δείξετε ότι $f(0)=2$ και $f'(0)=0$.

Απάντηση :

$|f(\chi)-2| \le 3\chi^4+4\chi^2$ άρα $-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$

Αν $\chi \ne 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi}$, οπότε

προφανώς σου λείπει το f(0) το οποίο θα υπολογίσεις από την ανισοτική

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

σχέση $-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$.

Πράγματι αν στην $-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$ βάλεις όπου $\chi=0$

έχεις $-3\cdot 0^4-4\cdot 0^2 \le f(0)-2 \le 3\cdot 0^4+4\cdot 0^2 \Rightarrow 0 \le f(0)-2 \le 0 \Rightarrow$

f(0) – 2 = 0 άρα **f(0) = 2** . Άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}$, οπότε από την σχέση

$-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$ δημιουργήσεις το $\lambda(\chi)$:

✓ $\chi < 0$ τότε $-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$ άρα

$$\frac{-3\chi^4-4\chi^2}{\chi} \ge \frac{f(\chi)-2}{\chi} \ge \frac{3\chi^4+4\chi^2}{\chi} \Rightarrow -3\chi^3-4\chi^2 \ge \frac{f(\chi)-2}{\chi} \ge 3\chi^3+4\chi^2 .$$

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(-3\chi^3-4\chi\right)=-3\cdot 0^3-4\cdot 0=0$, $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(3\chi^3+4\chi\right)=3\cdot 0^3+4\cdot 0=0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=0$ (Κριτήριο παρεμβολής).

✓ $\chi > 0$ τότε $-3\chi^4-4\chi^2 \le f(\chi)-2 \le 3\chi^4+4\chi^2$ άρα

$$\frac{-3\chi^4-4\chi^2}{\chi} \le \frac{f(\chi)-2}{\chi} \le \frac{3\chi^4+4\chi^2}{\chi} \Rightarrow -3\chi^3-4\chi^3 \le \frac{f(\chi)-2}{\chi} \le 3\chi^3+4\chi^3 .$$

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(-3\chi^3-4\chi\right)=-3\cdot 0^3-4\cdot 0=0$, $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(3\chi^3+4\chi\right)=3\cdot 0^3+4\cdot 0=0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=0$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi}=0$ άρα $f'(0)=0$.

19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f, με $3\cdot\chi\cdot ημχ \le \chi\cdot f(\chi)+\chi^2 \le 5\chi^4+3\chi^2$ για κάθε $\chi \in R$. Να βρείτε το $f'(0)$.

Απάντηση :

Αν $\chi \neq 0$ είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ άρα $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi}$, οπότε

προφανώς σου λείπει το f(0) το οποίο θα υπολογίσεις από την ανισοτική

σχέση $3\cdot\chi\cdot\eta\mu\chi \le \chi\cdot f(\chi)+\chi^2 \le 5\chi^4+3\chi^2$.

Πράγματι από $3\cdot\chi\cdot\eta\mu\chi \le \chi\cdot f(\chi)+\chi^2 \le 5\chi^4+3\chi^2 \Rightarrow$

$3\cdot\chi\cdot\eta\mu\chi-\chi^2 \le \chi\cdot f(\chi) \le 5\chi^4+3\chi^2-\chi^2$ οπότε :

✓ $\chi < 0$ τότε $\dfrac{3\cdot\chi\cdot\eta\mu\chi-\chi^2}{\chi} \ge f(\chi) \ge \dfrac{5\chi^4+2\chi^2}{\chi}$ άρα

$3\eta\mu\chi-\chi \ge f(\chi) \ge 5\chi^3+2\chi$ **(1)** ,

είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}(3\eta\mu\chi-\chi)=3\cdot 0-0=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(5\chi^3+2\chi\right)=5\cdot 0^3+2\cdot 0=0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=0$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=0$ και επειδή η f συνεχής άρα

$f(0)=\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=0$.

Άρα το $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-0}{\chi} \Rightarrow \lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi}$. Από την **(1)** είναι

$3\eta\mu\chi-\chi \ge f(\chi) \ge 5\chi^3+2\chi$ και $\chi<0 \Rightarrow \dfrac{3\eta\mu\chi-\chi}{\chi} \le \dfrac{f(\chi)}{\chi} \le \dfrac{5\chi^3+2\chi}{\chi}$ άρα

$3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}-1 \le \dfrac{f(\chi)}{\chi} \le 5\chi^2+2$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}-1\right)=3-1=2$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(5\chi^2+2\right)=5\cdot 0^2+2=2$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=2$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ $\chi > 0$ τότε $\dfrac{3\cdot\chi\cdot\eta\mu\chi-\chi^2}{\chi}\le f(\chi)\le\dfrac{5\chi^4+2\chi^2}{\chi}$ άρα

$3\eta\mu\chi-\chi\le f(\chi)\le 5\chi^3+2\chi$ **(2)** ,

είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^+}(3\eta\mu\chi-\chi)=3\cdot 0-0=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(5\chi^3+2\chi\right)=5\cdot 0^3+2\cdot 0=0$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=0$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=0$ και επειδή η f συνεχής άρα

$f(0)=\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=0$.

Άρα το $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-0}{\chi}\Rightarrow\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi}$. Από την **(2)** είναι

$3\eta\mu\chi-\chi\le f(\chi)\le 5\chi^3+2\chi$ και $\chi>0\Rightarrow\dfrac{3\eta\mu\chi-\chi}{\chi}\le\dfrac{f(\chi)}{\chi}\le\dfrac{5\chi^3+2\chi}{\chi}$ άρα

$3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}-1\le\dfrac{f(\chi)}{\chi}\le 5\chi^2+2$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(3\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}-1\right)=3-1=2$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(5\chi^2+2\right)=5\cdot 0^2+2=2$

άρα θα είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=2$ (Κριτήριο παρεμβολής).

Δηλαδή $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=2$

Αν λοιπόν είναι $\chi\ne 0$ θα είναι και $f'(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Οι έξυπνοι οδηγούν την γνώμη τους .

Οι «ξύπνιοι» οδηγούν μηχανάκι.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

Σ **Λ**

1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Αν ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\pm\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in R$, τότε ισχύει : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}$

4. Αν ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}\neq\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0

5. Η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{\chi}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\chi_0, f(\chi_0))$

7. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\chi_0, f(\chi_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f.

8. Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και για κάθε $\chi \in \Delta$ είναι $f'(\chi) \neq 0$, τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

10. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

11. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε θα είναι συνεχής στο χ_0.

12. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο χ_0.

13. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο χ_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0.

14. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε δεν είναι συνεχής στο χ_0.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **α.** Να δείξετε ότι αν τα όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$

είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι συνεχής στο χ_0.

β. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(\chi)=\begin{cases}-\chi+1 & \text{αν } \chi<1\\ (\chi-1)^2 & \text{αν } \chi\geq 1\end{cases}$

στο σημείο $\chi_0=1$ εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα.

2. Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο

$\chi_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\chi_0)=g'(\chi_0)$ και $f(\chi_0)=g(\chi_0)$.

Αν ισχύει $f(\chi)\leq h(\chi)\leq g(\chi)$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι και

η h είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 και μάλιστα ισχύει $h'(\chi_0)=f'(\chi_0)$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\chi_0=0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\chi\cdot f(\chi)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(\chi)=2-\chi+\chi\cdot\eta\mu|\chi|$ να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης g στο σημείο $\chi_0=0$.

5. Δίνεται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $g'(0)=g(0)=0$ και

$f^2(\chi)\leq g^2(\chi)$ κάθε $\chi\in R$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$

β. $f'(0)=0$ $\left[\text{Υποδ. είναι } f^2(\chi)=|f(\chi)|^2\ \cdots\right]$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\chi_0=3$ και

$\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{f(\chi)}{\chi-3}=9$, $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{g(\chi)}{\chi-3}=3$.

Να βρείτε

α. τα $f(3)$, $g(3)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. τα $f'(3)$, $g'(3)$.

γ. το $\lim\limits_{\chi \to 3} \dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}$.

$$\left[\text{Υποδ. Θέσε } h(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi-3}, \text{ όμοια για την } g \cdots\right]$$

7. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(\chi)=|\chi-1|\cdot g(\chi)$, όταν $\chi \in R$. Να βρεθεί η τιμή g(1).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=|\chi-3|+\chi+2$.

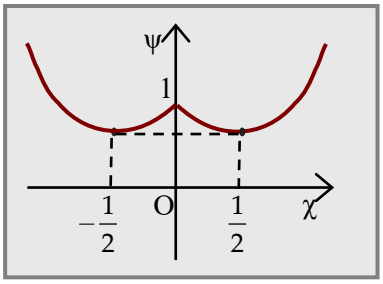
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη :

α. Στο σημείο $\chi_0=3$ και

β. Στο σημείο $\chi_0=4$.

9. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

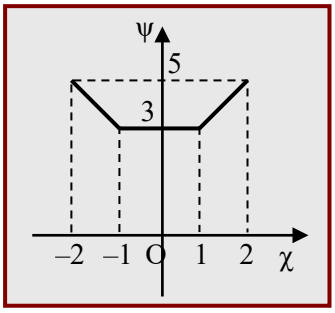
$f(\chi)=\chi^2-|\chi|+1$.



α. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=1$.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.

10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.



α. Από το σχήμα να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να βρείτε τον τύπο της f.

γ. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες $\chi_1=-1$, $\chi_2=1$, $\chi_3=\frac{3}{2}$.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, τότε

Να αποδείξετε ότι :

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(\chi_0-h)-g(\chi_0)}{h}=-g'(\chi_0)$

[Υποδ. Αντικατέστησε το h με $-h$]

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(\chi_0+h)-g(\chi_0-h)}{h}=2g'(\chi_0)$.

[Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $g(\chi_0)$]

12. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία για κάθε $\chi\in R$ ισχύει :

$$g(\chi)=\begin{cases}3\chi^2-\alpha^2\chi & \text{αν } \chi<1\\ 5\chi+\beta & \text{αν } \chi\geq 1\end{cases},\quad \alpha,\beta\in R.$$

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=1$

13. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(\chi)=\begin{cases}-\alpha\chi+2\beta & \chi<1\\ 5\chi^2 & \chi\geq 1\end{cases}$.

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$

14. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $|f(\chi)|\leq 3\chi^3+\eta\mu^4\chi$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$ και

β. $f'(0)=0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει :

$\eta\mu 3\chi-2\chi^2\leq g(\chi)\leq \eta\mu 2\chi+3\chi^2+\chi$ για κάθε $\chi\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$

β. Να βρεθεί η $g'(0)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση φ για την οποία ισχύει

$$\eta\mu 3\chi - 2\chi^2 - 5\chi + 2 \le \varphi(\chi) \le 3\eta\mu\chi + 2\chi^2 - 5\chi + 2 \text{ για κάθε } \chi \in R.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $\varphi(0) = 2$

β. $\varphi'(0) = -2$

17. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία για κάθε $\chi \in R$ ισχύει :

$$-\chi^2 + 5\chi \cdot \chi_0 - 4\chi \cdot \chi_0^2 + \alpha \le g(\chi) \le \alpha + \chi^2 - 2\chi_0^2 + \chi \cdot \chi_0 \text{ για κάθε}$$

$\alpha,\ \chi_0 \in R.$

Να αποδείξετε ότι :

α. $g(\chi_0) = \alpha$

β. $g'(\chi_0) = 3\chi_0$

18. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει

$$-3\chi^3 + 3\chi^2 + \eta\mu\chi \le g(\chi) \le 3\chi^2 + 6\chi - 5\eta\mu\chi \text{ για κάθε } \chi \in R.$$

Να αποδείξετε ότι :

α. $g(0) = 0$ και

β. $g'(0) = 1$.

19. Δίνεται η συνάρτηση h για την οποία ισχύει $|h(\chi) - 1| \le |\chi \cdot \eta\mu\chi|$ για κάθε $\chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι

α. $h(0) = 1$ και

β. $h'(0) = 0$.

[Υποδ. Χρησιμοποίησε την $|\chi| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le \chi \le \theta$]

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\left|f(\chi)\right| \le \chi^2 + 3\chi^3$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0) = 0$ και

β. $f'(0) = 0$.

21. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$ και για κάθε $\chi \in R$ ισχύει $ημ^2\chi - \chi^4 \le \chi \cdot f(\chi) \le ημ^2\chi + \chi^4$ να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi \in R$.

α. $f(0) = 0$ και

β. $f'(0) = 1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $-3\chi^2 + \chi \le g(\chi) \le \chi + 2\chi^2$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. η g είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ και

β. Να βρεθεί η $g'(0)$.

23. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R με

$-\chi^2 + 2\chi + 2ημχ \le f(\chi) \le \chi^2 + 3\chi + ημχ$ για κάθε $\chi \in R$.

Να βρείτε

α. Το $f(0)$.

β. Το $f'(\chi_0)$

24. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη για κάθε $\chi \in R$, για την οποία ισχύει $g(h+1) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$ για κάθε $h \in R$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $g(0) = 0$ και

β. $g'(0) = 0$.

25. Δίνεται η συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 0$ για την οποία ισχύει

$h^2(\chi) - 2\chi \cdot h(\chi) + \eta\mu^2\chi = 0$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδείξετε ότι $h'(0) = 1$

26. Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει $|g(\chi) - g(\psi)| \le 11(\chi - \psi)^2$

για κάθε $\chi, \psi \in R$. Να αποδείξετε ότι $g'(\chi_0) = 0$.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες στο R, έτσι ώστε να ισχύει :

α. Η είναι f συνεχής στο $\chi_0 = 1$.

β. Το $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{3f(\chi) - 6}{\chi - 1} = 2$.

γ. Το $g(\chi) = (2\chi - 1) \lim\limits_{\chi \to 1} f(\chi)$.

Να δείξετε ότι

α. Το $f(1) = 2$.

β. Το $g'(1) = 4$

$$\left[\text{Υποδ. Θέσε } h(\chi) = \frac{3f(\chi) - 6}{\chi - 1} \ \cdots \right]$$

28. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$ με $f(\chi + \psi) = f(\chi)f(\psi)$

και $f(\chi) \ne 0$ για κάθε $\chi \in R$.

Να δείξετε ότι

α. $f(2) = 1$.

β. $f'(\chi_0) = f(\chi_0)f(2)$ για κάθε $\chi_0 \in R$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη.

$$\left[\text{Υποδ. } \textbf{α.} \text{θέσε } \psi = \chi = 0, \text{ και } \textbf{β.} \ f'(\chi_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h} \right]$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

29. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R. Αν ισχύει :

$f(\chi)-f(\psi)\geq(\chi-\psi)^3$ για κάθε $\chi\in R$, να δείξετε ότι $f'(\chi)=0$

για κάθε $\chi\in R$.

30. Δίνεται η συνάρτηση h με $h(\chi)=\begin{cases}2\chi^2-3\chi+\beta & \chi<0\\ -3\chi^2+\alpha\chi+1 & \chi\geq 0\end{cases}$.

Αν η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$, να βρείτε τα α, $\beta\in R$

31. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0=1$, με $f(1)=1$ και

$f'(1)=1$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi\cdot f(1)-f(\chi)}{\chi-1}=0$. [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(\chi)$]

β. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-f(1)}{\chi-1}=2$. [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(1)$]

32. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0=2$, με $f(2)=2$ και

$f'(2)=3$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi\cdot f(2)-2f(\chi)}{\chi-2}=-4$ [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(\chi)$]

β. $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-2f(2)}{\chi-2}=8$ [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(2)$]

33. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0=\alpha$, με $f(\alpha)=\kappa$ και

$f'(\alpha)=\lambda$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\lim\limits_{\chi\to\alpha}\dfrac{\chi\cdot f(\alpha)-\alpha\cdot f(\chi)}{\chi-\alpha}=-\alpha\cdot\lambda+\kappa$ [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(\chi)$]

β. $\lim\limits_{\chi\to\alpha}\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-\alpha\cdot f(\alpha)}{\chi-2}=\alpha\cdot\lambda+\kappa$ [Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi\cdot f(\alpha)$]

34. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = \alpha$, με $f(\alpha) = \kappa$ και $f'(\alpha) = \lambda$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\lim\limits_{\chi \to \alpha} \dfrac{\chi^2 \cdot f(\alpha) - \alpha^2 \cdot f(\chi)}{\chi - \alpha} = -\alpha^2 \cdot \lambda + 2\alpha \cdot \kappa$

[Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\alpha^2 \cdot f(\alpha)$]

β. $\lim\limits_{\chi \to \alpha} \dfrac{\chi^2 \cdot f(\chi) - \alpha^2 \cdot f(\alpha)}{\chi - 2} = \alpha^2 \cdot \lambda + 2\alpha \cdot \kappa$

[Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi^2 \cdot f(\alpha)$].

35. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[2, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$, με $f(2) = 2$ και $f'(2) = 3$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f^2(\chi) - 4}{\chi^2 - 3\chi + 2}$.

[Υποδ. Παραγ/σε αριθμητή και παρα/στη $\cdots$]

36. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$ με $f'(2) = 4$ και $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f(\chi) - 5}{\chi - 2} = -1$. Να βρείτε

α. Το $f(2)$.

β. Το $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f^2(\chi) - 6f(\chi) + 5}{\chi^2 - 3\chi + 2}$.

γ. Το $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{\chi f(\chi) - 10}{\chi^2 - 4}$

37. Αν μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $\chi_0 = 0$ και $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{g(\chi)}{\chi} = 4$

Να αποδείξετε ότι :

α. $g(0) = 0$ και

β. $g'(0) = 4$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

38. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 2$ και $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f(\chi)}{\chi^2 - 5\chi + 6} = 7$.

Να δείξετε ότι

α. $f(2) = 0$.

β. $f'(2) = 7$.

β. το $\lim\limits_{\chi \to 3} \dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}$.

$\left[\text{Υποδ. Θέσε } h(\chi) = \dfrac{f(\chi)}{\chi^2 - 5\chi + 6} \cdots \right]$

39. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$ τέτοια ώστε $f(2) = 2$ και $f'(2) = 3$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f^2(\chi) - 5f(\chi) + 6}{\chi^2 - 3\chi + 2}$.

[Υποδ. Παραγ/σε αριθμητή και παρα/στη $\cdots$]

40. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 5$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 5} \dfrac{5 \cdot f(\chi) - \chi \cdot f(5)}{\chi^2 - 4\chi - 5}$.

[Υποδ. Παραγ/σε αριθμητή και παρα/στη $\cdots$]

41. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = -2$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to -2} \dfrac{-2 \cdot f(\chi) - \chi \cdot f(-2)}{\chi^2 - 4}$.

[Υποδ. Παραγ/σε αριθμητή και παρα/στη $\cdots$]

42. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$, με $f(2) = 2$ και $f'(2) = 3$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{\chi \cdot f(\chi) - 4}{\chi^2 - 4}$.

[Υποδ. Προσθαφαίρεσε το $\chi \cdot f(2)$ και Παραγ/σε παρα/στη]

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

43. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$, με $\lim\limits_{\chi \to 2} \dfrac{f(\chi)-2}{\chi-2} = 3$

και $f'(2) = 3$.

Να δείξετε ότι $f'(2) = 3$. $\left[\text{Υποδ. είναι } f(2) = \lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi) = 2 \cdots\right]$

44. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 2$ και $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{f(2+h)}{h} = 3$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$.

$$\left[\text{Υποδ. Αν θέσεις } h = \chi - 2, \text{ είναι } \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)}{h} = \lim_{\chi \to 2} \frac{f(\chi)}{\chi - 2}\right]$$

45. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 1$ και $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{f(1+h)}{h} = 3$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 1$.

$$\left[\text{Υποδ. Αν θέσεις } h = \chi - 1, \text{ είναι } \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{\chi \to 1} \frac{f(\chi)}{\chi - 1}\right]$$

46. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο χ_0 και $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{f(\chi_0+h)}{h} = \kappa$.

Να δείξετε ότι

α. $f(\chi_0) = 0$.

β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, με $f'(\chi_0) = \kappa$.

$$\left[\text{Υποδ. Αν θέσεις } h = \chi - \chi_0, \text{ είναι } \lim_{h \to 0} \frac{f(\chi_0+h)}{h} = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}\right]$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

47. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 1$ και $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{f(\chi)-4}{\chi-1} = 3$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 1$ με

$f'(1) = 3$. $\left[\text{Υποδ. Θέσε } h(\chi) = \dfrac{f(\chi)-4}{\chi-1} \ \cdots \right]$

48. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\chi_0 = 3$ και $\lim\limits_{\chi \to 3} \dfrac{f(\chi)-4+\chi^2}{\chi-3} = 7$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 3$ με

$f'(3) = 1$. $\left[\text{Υποδ. Θέσε } h(\chi) = \dfrac{f(\chi)-4+\chi^2}{\chi-3} \ \cdots \right]$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τι θα γίνει ρε μεγάλε ….
έχει κι’ άλλα;
Εσύ, μου φαίνεται θες να μας
καταντήσεις σαν και σένα

Άντε τελείωνε πάμε καμιά βόλτα

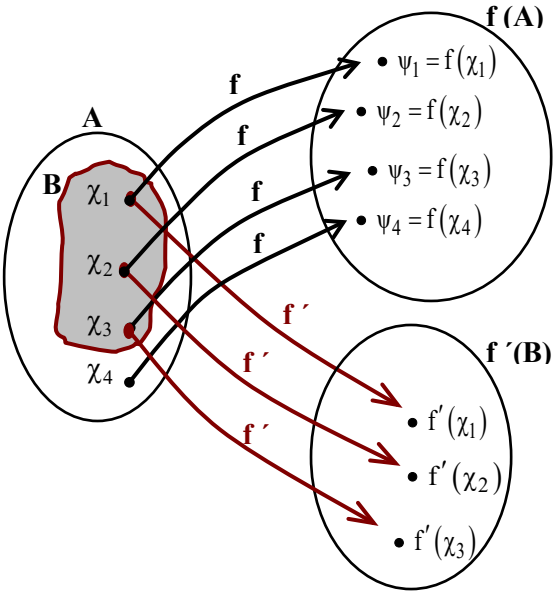
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγωγος συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α.

Μέσω της συνάρτησης **f** σε κάθε χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 κ λ π αντιστοιχίζουμε τα $f(\chi_1)$, $f(\chi_2)$, $f(\chi_3)$, $f(\chi_4)$ κ λ π, όπως φαίνεται και από το πιο κάτω σχήμα.

Έστω Β το σύνολο που περιέχει εκείνα τα στοιχεία του Α στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή υπάρχει το $f'(\chi_0)$.



Μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, που την συμβολίζουμε με **f΄**, με την οποία «κάθε $\chi \in B$, θα αντιστοιχίζεται στο $f'(\chi)$», δηλαδή στα χ_1, χ_2, χ_3 κ λ π για τα οποία υπάρχει η παράγωγος (χ_1, χ_2, $\chi_3 \in B$), μέσω της **νέας συνάρτησης f΄** αντιστοιχίζουμε τα $f'(\chi_1)$, $f'(\chi_2)$, $f'(\chi_3)$ όπως φαίνεται και από το πιο πάνω σχήμα.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος της f.**

- ✓ Ο **παράγωγος αριθμός** μιας συνάρτησης **f** στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$ είναι ίσος με την τιμή της συνάρτησης f' στο σημείο αυτό.
- ✓ Η **παράγωγος συνάρτηση** της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της **f** και συμβολίζεται με f''.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. Η **παράγωγος** της **σταθερής** συνάρτησης $f(\chi)=\kappa$ είναι: $f'(\chi)=\kappa'=0$.

2. Η **παράγωγος** της **ταυτοτικής** συνάρτησης $f(\chi)=\chi$ είναι: $f'(\chi)=\chi'=1$.

3. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^{\nu}$ είναι: $f'(\chi)=\left(\chi^{\nu}\right)'=\nu\cdot\chi^{\nu-1}$

αλλά και αν $f(\chi)=\chi^{\alpha}$, όπου $\alpha\in R$, πάλι είναι : $f'(\chi)=\left(\chi^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot\chi^{\alpha-1}$.

4. Η **παράγωγος** της συνάρτησης **f(χ) = ημχ** είναι: $f'(\chi)=(\eta\mu\chi)'=\sigma\upsilon\nu\chi$.

5. Η **παράγωγος** της συνάρτησης **f(χ) = συνχ** είναι: $f'(\chi)=(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-\eta\mu\chi$.

6. Η **παράγωγος** της **f(χ) = εφχ** είναι : $f'(\chi)=(\varepsilon\varphi\chi)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$.

7. Η **παράγωγος** της **f(χ) = σφχ** είναι : $f'(\chi)=(\sigma\varphi\chi)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}$.

8. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi)=e^{\chi}$ είναι: $f'(\chi)=\left(e^{\chi}\right)'=e^{\chi}$.

9. Η **παράγωγος** της συνάρτησης $f(\chi)=\ln\chi$ είναι: $f'(\chi)=(\ln\chi)'=\dfrac{1}{\chi}$.

Προσοχή Παρατήρηση S O S για τις ασκήσεις :

Από την Β Λυκείου, είναι εξ' ορισμού, $\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}=\chi^{\frac{\mu}{\nu}}=\chi^{\rho}$ όπου $\rho=\dfrac{\mu}{\nu}$.

Πρακτικά για να βρεις την παράγωγο μιας συνάρτησης f με τύπο :

1. $f(\chi)=\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}$ θα γράφεις τη συνάρτηση : $f(\chi)=\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}=\chi^{\frac{\mu}{\nu}}$, οπότε η

παράγωγος της συνάρτησης είναι : $f'(\chi)=\left(\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}\right)'=\left(\chi^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=\dfrac{\mu}{\nu}\cdot\chi^{\frac{\mu}{\nu}-1}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ **Εφαρμογή :** Αν $f(\chi)=\sqrt{\chi}$, Π Ο είναι το **A = [0 , + ∞),** και

$f(\chi)=\sqrt{\chi}=\chi^{\frac{1}{2}}$ άρα με **χ ≠ 0 είναι** :

$$\left(\sqrt{\chi}\right)'=\left(\chi^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\chi^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \boxed{\left(\sqrt{\chi}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}}.$$

2. $f(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}$ θα γράφεις τη συνάρτηση : $f(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}=\dfrac{1}{\chi^{\frac{\mu}{\nu}}}=\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}$,

οπότε η παράγωγος είναι: $f'(\chi)=\left(\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}\right)'=\left(\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)'=-\dfrac{\mu}{\nu}\cdot\chi^{-\frac{\mu}{\nu}-1}$.

Κανόνες Παραγώγισης

1. $(\kappa\cdot f(\chi))'=\kappa\cdot f'(\chi)$ (**παράγωγος** της συνάρτησης $\kappa\cdot f(\chi)$).
2. $(f(\chi)+g(\chi))'=f'(\chi)+g'(\chi)$ (**παράγωγος αθροίσματος**).
3. $(f(\chi)\cdot g(\chi))'=f'(\chi)\cdot g(\chi)+f(\chi)\cdot g'(\chi)$ (**παράγωγος** του **γινομένου**).
4. $\left(\dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}\right)'=\dfrac{f'(\chi)\cdot g(\chi)-f(\chi)\cdot g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}$ (**παράγωγος** του **πηλίκου**).

Εφαρμογή :

$$\left(\frac{1}{g(\chi)}\right)'=\frac{1'\cdot g(\chi)-1\cdot g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}=\frac{0\cdot g(\chi)-g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{1}{g(\chi)}\right)'=-\frac{g'(\chi)}{[g(\chi)]^2}}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αποδεικνύεται ότι για την **παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης** ισχύει :

$$\left[f\left(g(\chi)\right)\right]' = f'\left(g(\chi)\right)\cdot g'(\chi).$$

Δηλαδή για να παραγωγίσεις τη συνάρτηση $f(g(\chi))$, σε πρώτη φάση παραγωγίζεις την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την $g(\chi)$ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζεις με την παράγωγο της g.

Τύποι παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης

Απλή συνάρτηση	Σύνθετη συνάρτηση
$\left(\chi^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot\chi^{\alpha-1}$ $\chi \in (0,+\infty),\ \alpha \in R$	$\left(\left[f(\chi)\right]^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot\left[f(\chi)\right]^{\alpha-1}\cdot f'(\chi)$ Με $f(\chi) > 0$ και $\alpha \in R$
$\left(\sqrt{\chi}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\chi}}$ Π Ο το $A = [0,+\infty)$ Δεν παραγωγίζεται στο $\chi_0 = 0$	$\left(\sqrt{f(\chi)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(\chi)}}f'(\chi)$ με $f(\chi) \geq 0$ Δεν παραγωγίζεται στο χ_0 : $f(\chi_0) = 0$
$\left(\alpha^{\chi}\right)' = \alpha^{\chi}\cdot\ln\alpha, \alpha > 0$	$\left(\alpha^{[f(\chi)]}\right)' = \alpha^{[f(\chi)]}\cdot\ln\alpha\cdot\left[f(\chi)\right]'$, με $\alpha > 0$
$(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$	**i)** $\left[\eta\mu\left(f(\chi)\right)\right]' = \sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$ **ii)** $\left[f(\eta\mu\chi)\right]' = f'(\eta\mu\chi)\cdot(\eta\mu\chi)' = f'(\eta\mu\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$
$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$	**i)** $\left[\sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\right]' = -\eta\mu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$ **ii)** $\left[f(\sigma\upsilon\nu\chi)\right]' = f'(\sigma\upsilon\nu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -f'(\sigma\upsilon\nu\chi)\eta\mu\chi$
$(\varepsilon\varphi\chi)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	**i)** $\left[\varepsilon\varphi\left(f(\chi)\right)\right]' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(f(\chi)\right)}\cdot f'(\chi) = \dfrac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\left(f(\chi)\right)}$ **ii)** $\left[f(\varepsilon\varphi\chi)\right]' = f'(\varepsilon\varphi\chi)\cdot(\varepsilon\varphi\chi)' = \dfrac{f'(\varepsilon\varphi\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{1}{\eta\mu^2\chi}$	**i)** $\left[\sigma\varphi(f(\chi))\right]' = -\frac{1}{\eta\mu^2(f(\chi))}\cdot f'(\chi) = -\frac{f'(\chi)}{\eta\mu^2(f(\chi))}$ **ii)** $\left[f(\sigma\varphi\chi)\right]' = f'(\sigma\varphi\chi)\cdot(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{f'(\sigma\varphi\chi)}{\eta\mu^2\chi}$
$(e^{\chi})' = e^{\chi}$	**i)** $\left(e^{f(\chi)}\right)' = e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)$ **ii)** $\left[f(e^{\chi})\right]' = f'(e^{\chi})\cdot(e^{\chi})' = f'(e^{\chi})\cdot e^{\chi}$
$(\ln\chi)' = \frac{1}{\chi}$	**i)** $\left[\ln(f(\chi))\right]' = \frac{1}{f(\chi)}f'(\chi)$ **ii)** $\left[f(\ln\chi)\right]' = f'(\ln\chi)\cdot(\ln\chi)' = f'(\ln\chi)\cdot\frac{1}{\chi}$

Προσοχή Παρατήρηση S O S για τις ασκήσεις :

✓ Από την Β Λυκείου, είναι γνωστό ότι : $\alpha^{\chi} = e^{\chi\cdot\ln\alpha}$ και γενικότερα $\alpha^{\beta} = e^{\beta\cdot\ln\alpha}$, μια δύναμη της μορφής α^{β} με βάση **α** και εκθέτη **β** γράφεται ως $e^{\text{εκθέτης}\cdot\ln(\text{της βάσης})}$.

Αυτή η μετατροπή είναι <u>απολύτως απαραίτητη</u> **για την απόδειξη** των τύπων παραγώγισης των συναρτήσεων της μορφής $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ και $f(\chi) = \chi^{\alpha}$ καθώς και για τις συναρτήσεις της μορφής : $f(\chi) = P(\chi)^{Q(\chi)}$.

Όταν λοιπόν θα έχεις να παραγωγίσεις συνάρτηση η οποία έχει τη «**μορφή**» δύναμης, με «βάση» και «εκθέτη» να εξαρτώνται από το **χ,** τότε θα ακολουθείς την εξής διαδικασία :

$$f(\chi) = P(\chi)^{Q(\chi)} \Rightarrow f'(\chi) = \left(P(\chi)^{Q(\chi)}\right)' = \left(e^{Q(\chi)\cdot\ell n P(\chi)}\right)' =$$

$$e^{Q(\chi)\cdot\ln P(\chi)}\left(Q(\chi)\cdot\ln P(\chi)\right)' = P(\chi)^{Q(\chi)}\left(Q'(\chi)\cdot\ln P(\chi) + Q(\chi)\cdot\left(\ell n P(\chi)\right)'\right)$$

$$= P(\chi)^{Q(\chi)}\left(Q'(\chi)\cdot\ln P(\chi) + \frac{Q(\chi)}{P(\chi)}\cdot P'(\chi)\right).$$

Υπ' όψη ότι σ' όλες αυτές τις συναρτήσεις Πεδίο Ορισμού είναι το

$\mathbf{A=\{\chi\in R/P(\chi)>0\}}$.

Παράδειγμα : Να βρεις την παράγωγο της συνάρτησης $f(\chi)=(2\chi-1)^{\chi+1}$.

$2\chi-1>0 \Leftrightarrow \chi>\frac{1}{2}$ άρα Πεδίο ορισμού το $A=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Είναι $f(\chi)=(2\chi-1)^{\chi+1} \Leftrightarrow f'(\chi)=\left((2\chi-1)^{\chi+1}\right)' = \left(e^{(\chi+1)\cdot\ln(2\chi-1)}\right)' =$

$e^{(\chi+1)\cdot\ln(2\chi-1)}\left((\chi+1)\cdot\ln(2\chi-1)\right)' =$

$(2\chi-1)^{\chi+1}\left((\chi+1)'\cdot\ln(2\chi-1)+(\chi+1)\cdot\left(\ln(2\chi-1)\right)'\right) =$

$(2\chi-1)^{\chi+1}\left(\ln(2\chi-1)+\frac{(\chi+1)}{2\chi-1}\cdot(2\chi-1)'\right) \Leftrightarrow$

$f'(\chi)=(2\chi-1)^{\chi+1}\left(\ln(2\chi-1)+2\cdot\frac{(\chi+1)}{2\chi-1}\right)$

Παραδείγματα :

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=-105$ **ii)** $\varphi(\chi)=3\chi^5$

Τύπος παραγώγισης :

σταθερή , $\left(\chi^{\rho}\right)'=\rho\cdot\chi^{\rho-1}$

Απάντηση :

i) $\varphi(\chi)=-105 \Rightarrow \varphi'(\chi)=0$ (παράγωγος σταθερής)

ii) Π Ο το A = R . Είναι $\varphi(\chi)=3\chi^5 \Rightarrow \varphi'(\chi)=3\cdot5\cdot\chi^{5-1}=15\cdot\chi^4$

(παράγωγος της χ^{ν}).

2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\chi^{\frac{3}{5}}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\chi^{-2,3}$

Απάντηση :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Π Ο το $A = R^{+} = [0, +\infty)$.

Είναι $\varphi(\chi) = \chi^{\frac{3}{5}} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\chi^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}\chi^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\chi^{-\frac{2}{5}}$

✓ Εννοείται πως πάντα πρέπει να βρίσκεις Π Ο .

Προσοχή λοιπόν στη συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^{\frac{3}{5}}$ η οποία φαίνεται ως δύναμη αλλά στην πραγματικότητα είναι ρίζα γιατί όπως είδαμε και πιο πάνω η

$\varphi(\chi) = \chi^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\chi^3}$, άρα πρέπει $\chi^3 \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\chi \geq 0}$, άρα Π Ο το $A = [0, +\infty)$

ii) Π Ο το $A = (0, +\infty)$ γιατί το $\chi^{-2,3}$ παριστάνει ρίζα και επειδή ο εκθέτης είναι αρνητικός παριστάνει και κλάσμα : $\left(\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}\right)$.

Είναι $\varphi(\chi) = \chi^{-2,3} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\chi^{-2,3}\right)' = -2,3 \cdot \chi^{-2,3-1} = -2,3 \cdot \chi^{-3,3}$.

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = \sqrt{\chi^3}$ **ii)** $\varphi(\chi) = -3 \cdot \sqrt[5]{\chi^2}$

$\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$

Τύπος παραγώγισης :

$(\chi^{\rho})' = \rho \cdot \chi^{\rho-1}$ εφαρμογή

$\left(\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}\right)' = \left(\chi^{\frac{\mu}{\nu}}\right)' = \frac{\mu}{\nu} \cdot \chi^{\frac{\mu}{\nu}-1}$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A = R^{+} = [0, +\infty)$.

Αν $\chi \neq 0$ είναι $\varphi(\chi) = \sqrt{\chi^3} = \chi^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \sqrt{\chi^3} = \left(\chi^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\chi^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\chi^{\frac{1}{2}}$.

ii) Π Ο το $A = R$. Αν $\boldsymbol{\chi \neq 0}$ είναι $\varphi(\chi) = -3 \cdot \sqrt[5]{\chi^2} \Rightarrow \varphi(\chi) = -3 \cdot \chi^{\frac{2}{5}} \Rightarrow$

$\varphi'(\chi) = -3 \cdot \left(\chi^{\frac{2}{5}}\right)' = -3 \cdot \frac{2}{5}\chi^{\frac{2}{5}-1} = -\frac{6}{5} \cdot \chi^{-\frac{3}{5}}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}=\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}$$

4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\dfrac{-2}{\sqrt{\chi^5}}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\chi^4}}$

Τύπος παραγώγισης :

$(\chi^{\rho})'=\rho\cdot\chi^{\rho-1}$ εφαρμογή

$$\left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}\right)'=\left(\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}\right)'=-\frac{\mu}{\nu}\cdot\chi^{-\frac{\mu}{\nu}-1}$$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A=(0,+\infty)$

(ρίζα σε παρονομαστή) .

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{-2}{\sqrt{\chi^5}}\Rightarrow\varphi(\chi)=\dfrac{-2}{\chi^{\frac{5}{2}}}\Rightarrow$

$$\varphi(\chi)=-2\chi^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow\varphi'(\chi)=-2\cdot\left(\chi^{-\frac{5}{2}}\right)'=-2\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\chi^{-\frac{5}{2}-1}=5\chi^{-\frac{7}{2}}.$$

ii) Π Ο το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (ρίζα σε παρονομαστή αλλά και $\chi^4\geq 0$) .

$$\varphi(\chi)=\frac{1}{\sqrt[3]{\chi^4}}\Rightarrow\varphi(\chi)=\frac{1}{\chi^{\frac{4}{3}}}=\chi^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left(\chi^{-\frac{4}{3}}\right)'=-\frac{4}{3}\cdot\chi^{-\frac{4}{3}-1}=-\frac{4}{3}\cdot\chi^{-\frac{7}{3}}.$$

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=3\chi^4-2\chi^3+\chi-1$

ii) $\varphi(\chi)=\left(3\chi^4-2\chi^3+\chi-1\right)^4$

iii) $\varphi(\chi)=\left(\chi^4+\chi^2+1\right)^{\frac{3}{5}}$

Τύπος πολυωνυμική ,

$$\left([f(\chi)]^{\rho}\right)'=\rho\cdot[f(\chi)]^{\rho-1}\cdot f'(\chi)$$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A=R$. Είναι $\varphi(\chi)=3\chi^4-2\chi^3+\chi-1\Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\left(3\chi^4-2\chi^3+\chi-1\right)'=\left(3\chi^4\right)'-\left(2\chi^3\right)'+(\chi)'-1'\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=3\cdot4\cdot\chi^{4-1}-2\cdot3\cdot\chi^{3-1}+1\Rightarrow\varphi'(\chi)=12\cdot\chi^3-6\cdot\chi^2+1.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Π Ο το $A = R$. Είναι $\varphi(\chi) = \left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^4 \Rightarrow$

$$\varphi'(\chi) = \left[\left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^4\right]' = 4\left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^3 \cdot \left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)'$$

$$= 4\left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^3 \cdot \left[\left(3\chi^4\right)' - \left(2\chi^3\right)' + (\chi)' - 1'\right] =$$

$$4\left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^3 \cdot \left[3 \cdot 4 \cdot \chi^{4-1} - 2 \cdot 3 \cdot \chi^{3-1} + 1\right] \Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = 4\left(3\chi^4 - 2\chi^3 + \chi - 1\right)^3 \cdot \left(12\chi^3 - 6\chi^2 + 1\right).$$

iii) Π Ο το $A = R$ γιατί $\chi^4, \chi^2 \geq 0,\ 1 > 0$. Είναι $\varphi(\chi) = \left(\chi^4 + \chi^2 + 1\right)^{\frac{3}{5}} \Rightarrow$

$$\varphi'(\chi) = \left[\left(\chi^4 + \chi^2 + 1\right)^{\frac{3}{5}}\right]' = \frac{3}{5}\left(\chi^4 + \chi^2 + 1\right)^{\frac{3}{5}-1} \cdot \left(\chi^4 + \chi^2 + 1\right)' \Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = \frac{3}{5}\left(\chi^4 + \chi^2 + 1\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(4\chi^3 + 2\chi\right).$$

6. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = 3\left(\chi^2 - 1\right)^5$

ii) $\varphi(\chi) = 3\left(\chi^3 - 1\right)^3 - 2\left(\chi^2 + 1\right)^2$

iii) $\varphi(\chi) = \frac{5}{2}\left(\chi^3 + \chi^2 + 1\right)^{\frac{2}{5}}$ με $\chi \in [0, +\infty)$ $\quad \varphi'(\chi)$

Τύπος πολυωνυμική ,
$\left([f(\chi)]^\rho\right)' = \rho \cdot [f(\chi)]^{\rho-1} \cdot f'(\chi)$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A = R$. Είναι $\varphi(\chi) = 3\left(\chi^2 - 1\right)^5 \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[3\left(\chi^2 - 1\right)^5\right]' =$

$$3 \cdot 5\left(\chi^2 - 1\right)^{5-1}\left(\chi^2 - 1\right)' = 15\left(\chi^2 - 1\right)^4\left[\left(\chi^2\right)' - 1'\right] = 15\left(\chi^2 - 1\right)^4 \cdot 2\chi$$

$$\Rightarrow \varphi'(\chi) = 30\chi\left(\chi^2 - 1\right)^4.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ii) Π Ο το Α = R . Είναι $\varphi(\chi)=3\left(\chi^3-1\right)^3-2\left(\chi^2+1\right)^2 \Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\left[3\left(\chi^3-1\right)^3-2\left(\chi^2+1\right)^2\right]'=\left[3\left(\chi^3-1\right)^3\right]'-\left[2\left(\chi^2+1\right)^2\right]'=$$

$$3\cdot 3\left(\chi^3-1\right)^{3-1}\left(\chi^3-1\right)'-2\cdot 2\left(\chi^2+1\right)^{2-1}\left(\chi^2+1\right)'=$$

$$9\left(\chi^3-1\right)^2\cdot 3\chi^2-4\left(\chi^2+1\right)\cdot 2\chi \Rightarrow \boxed{\varphi'(\chi)=27\chi^2\left(\chi^3-1\right)^2-8\chi\left(\chi^2+1\right)}.$$

iii) Η f έχει Π Ο το Α = [0 , +∞) και παραγωγίζεται στο (0 , +∞) .

Είναι $\varphi(\chi)=\frac{5}{2}\left(\chi^3+\chi^2-1\right)^{\frac{2}{5}} \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left[\frac{5}{2}\left(\chi^3+\chi^2-1\right)^{\frac{2}{5}}\right]'=$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\chi^3+\chi^2-1\right)^{\frac{2}{5}-1}\cdot\left(\chi^3+\chi^2-1\right)' \Rightarrow \boxed{\varphi'(\chi)=\left(\chi^3+\chi^2-1\right)^{-\frac{3}{5}}\cdot\left(3\chi^2+2\chi\right)}.$$

7. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\frac{3\chi-1}{\chi+1}$

ii) $\varphi(\chi)=\frac{-3}{\chi^2-1}$

iii) $\varphi(\chi)=\frac{-3\eta\mu\chi+1}{\sigma\upsilon\nu\chi+2}$

Τύπος ρητή $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

Απάντηση :

i) Π Ο το Α = R – { – 1 } .

Είναι $\varphi(\chi)=\frac{3\chi-1}{\chi+1} \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left(\frac{3\chi-1}{\chi+1}\right)'=\frac{(3\chi-1)'(\chi+1)-(3\chi-1)(\chi+1)'}{(\chi+1)^2}$

$$=\frac{3(\chi+1)-(3\chi-1)\cdot 1}{(\chi+1)^2}=\frac{3\chi+3-3\chi+1}{(\chi+1)^2} \Rightarrow \boxed{\varphi'(\chi)=\frac{4}{(\chi+1)^2}}.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Π Ο το $A = R - \{-1, +1\}$.

Είναι $\varphi(\chi) = \dfrac{-3}{\chi^2 - 1} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\dfrac{-3}{\chi^2 - 1}\right)' = \dfrac{(-3)'(\chi^2 - 1) - (-3)(\chi^2 - 1)'}{(\chi^2 - 1)^2} =$

$$\frac{0 \cdot (\chi^2 - 1) + 3(2\chi - 0)}{(\chi^2 - 1)^2} \Rightarrow \boxed{\varphi'(\chi) = \frac{6\chi}{(\chi^2 - 1)^2}}.$$

iii) Π Ο το $A = R$ γιατί $-1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \ne 2$.

Είναι $\varphi(\chi) = \dfrac{-3\eta\mu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi + 2} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\dfrac{-3\eta\mu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi + 2}\right)' =$

$$\frac{(-3\eta\mu\chi + 1)'(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) - (-3\eta\mu\chi + 1)(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)'}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2} =$$

$$\frac{-3\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) - (-3\eta\mu\chi + 1)\left[(\sigma\upsilon\nu\chi)' + 2'\right]}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2} =$$

$$\frac{-3\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) - (-3\eta\mu\chi + 1)(-\eta\mu\chi)}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2} =$$

$$\frac{-3\sigma\upsilon\nu^2\chi - 6\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2} = \frac{-3(\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi) - 6\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi'(\chi) = \frac{-3 - 6\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)^2}}.$$

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right)}$ **ii)** $\varphi(\chi) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi + 1}{(\chi + 2)^2 + 1}$

Τύπος ρητή

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A=\left\{\chi\in R,\ \text{και}\ \chi+\frac{\pi}{4}\neq\kappa\pi\right\}\Rightarrow A=R-\left\{\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\right\}$

για να είναι ο παρονομαστής $\neq 0$.

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\right)'\Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)'\,\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-(\sigma\upsilon\nu\chi)\left(\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)'}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\eta\mu\chi\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-(\sigma\upsilon\nu\chi)\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)'}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\eta\mu\chi\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\left(\eta\mu\chi\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\left[\chi-\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\left[-\frac{\pi}{4}\right]}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\eta\mu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\boxed{\varphi'(\chi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu^{-2}\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right).}$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Π Ο το Α = R γιατί $(\chi+2)^2+1\neq 0$.

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi+1}{(\chi+2)^2+1} \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi+1}{(\chi+2)^2+1}\right)'=$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi+1)'\left((\chi+2)^2+1\right)-(\sigma\upsilon\nu\chi+1)\left((\chi+2)^2+1\right)'}{\left((\chi+2)^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{-\eta\mu\chi\left((\chi+2)^2+1\right)-(\sigma\upsilon\nu\chi+1)\left((\chi+2)^2\right)'}{\left((\chi+2)^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{-\eta\mu\chi\left((\chi+2)^2+1\right)-(\sigma\upsilon\nu\chi+1)2(\chi+2)(\chi+2)'}{\left((\chi+2)^2+1\right)^2}\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\frac{-\eta\mu\chi\left((\chi+2)^2+1\right)-2(\sigma\upsilon\nu\chi+1)(\chi+2)}{\left((\chi+2)^2+1\right)^2}.$$

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\eta\mu\left(2\chi^2-\dfrac{3\pi}{4}\right)$

ii) $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\left(\chi^3+3\right)^5$

iii) $\varphi(\chi)=2\eta\mu(\chi^2-1)+3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\dfrac{\pi}{7}\right)$

Τύπος παραγώγισης :

$\left[\eta\mu\left(f(\chi)\right)\right]'=\sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$,

$\left[\sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\right]'=-\eta\mu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$

Απάντηση :

i) Π Ο το Α = R. Είναι $\varphi(\chi)=\eta\mu\left(2\chi^2-\dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left[\eta\mu\left(2\chi^2-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]'=$

$$\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\chi^2-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\cdot\left(2\chi^2-\frac{3\pi}{4}\right)'=\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\chi^2-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\cdot 4\chi\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=4\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\chi^2-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Δαμιανός Μωραΐτης

ii) Π Ο το Α = R. Είναι $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\left(\chi^3+3\right)^5 \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left[2\sigma\upsilon\nu\left(\chi^3+3\right)^5\right]'=$

$$\left[-2\eta\mu\left(\chi^3+3\right)^5\right]\cdot\left(\left(\chi^3+3\right)^5\right)'=\left[-2\eta\mu\left(\chi^3+3\right)^5\right]\cdot\left(5\left(\chi^3+3\right)^{5-1}\cdot\left(\chi^3+3\right)'\right)$$

$$=-2\eta\mu\left(\chi^3+3\right)^5\cdot\left(5\left(\chi^3+3\right)^4\cdot\left(3\chi^2+0\right)\right)=-2\cdot15\chi^2\left(\chi^3+3\right)^4\eta\mu\left(\chi^3+3\right)^5$$

$$=\varphi'(\chi)=-30\chi^2\left(\chi^3+3\right)^4\eta\mu\left(\chi^3+3\right)^5.$$

iii) Π Ο το Α = R. Είναι $\varphi(\chi)=2\eta\mu(\chi^2-1)+3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right)\Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\left[2\eta\mu(\chi^2-1)+3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right)\right]'=\left[2\eta\mu(\chi^2-1)\right]'+\left[3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right)\right]'=$$

$$2\sigma\upsilon\nu(\chi^2-1)\left(\chi^2-1\right)'+\left[-3\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right)\right]\cdot\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right)'\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=4\chi\cdot\sigma\upsilon\nu(\chi^2-1)-3\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{7}\right).$$

10. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\eta\mu^2\chi$

ii) $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu^5\chi$

iii) $\varphi(\chi)=3\eta\mu^2\chi+2\sigma\upsilon\nu^3\chi$

iv) $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Τύπος παραγώγισης :

$[f(\eta\mu\chi)]'=f'(\eta\mu\chi)\cdot(\eta\mu\chi)'=f'(\eta\mu\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$,

$[f(\sigma\upsilon\nu\chi)]'=f'(\sigma\upsilon\nu\chi)\cdot(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-f'(\eta\mu\chi)\cdot\eta\mu\chi$

Απάντηση :

i) Π Ο το Α = R . Είναι $\varphi(\chi)=\eta\mu^2\chi\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[\eta\mu^2\chi\right]'=2\eta\mu\chi(\eta\mu\chi)'=$

$2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\Rightarrow\varphi'(\chi)=\eta\mu2\chi.$

ii) Π Ο το Α = R . Είναι $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu^5\chi\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[2\sigma\upsilon\nu^5\chi\right]'=$

$2\cdot5\sigma\upsilon\nu^4\chi[\sigma\upsilon\nu\chi]'\Rightarrow\varphi'(\chi)=-10\sigma\upsilon\nu^4\chi\cdot\eta\mu\chi.$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Π Ο το $A = R$. Είναι $\varphi(\chi) = 3\eta\mu^2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^3\chi \Rightarrow$

$$\varphi'(\chi) = \left[3\eta\mu^2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^3\chi\right]' = \left[3\eta\mu^2\chi\right]' + \left[2\sigma\upsilon\nu^3\chi\right]' =$$

$$6\eta\mu\chi(\eta\mu\chi)' + 6\sigma\upsilon\nu^2\chi(\sigma\upsilon\nu\chi)' = 6\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 6\sigma\upsilon\nu^2\chi\eta\mu\chi =$$

$$3\eta\mu 2\chi - 6\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = 3\eta\mu 2\chi - 3\eta\mu 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = 3\eta\mu 2\chi(1 - \sigma\upsilon\nu\chi).$$

iv) Π Ο το $A = R - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ για να έχει νόημα το κλάσμα.

Είναι $\varphi(\chi) = \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right]' = \frac{(\eta\mu^2\chi)'\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu^2\chi(\sigma\upsilon\nu\chi)'}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2} =$

$$\frac{2\eta\mu\chi(\eta\mu\chi)'\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu^2\chi(-\eta\mu\chi)}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2} = \frac{2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^3\chi}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2} \Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = \frac{2\eta\mu 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^3\chi}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2}.$$

11. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = 3\chi^2 \cdot \eta\mu^3\chi$.

ii) $\varphi(\chi) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1}$

iii) $\varphi(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\eta\mu^2\chi + 1}}$

Τύπος παραγώγισης :

$$[f(\eta\mu\chi)]' = f'(\eta\mu\chi) \cdot (\eta\mu\chi)' = f'(\eta\mu\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu\chi,$$

$$[f(\sigma\upsilon\nu\chi)]' = f'(\sigma\upsilon\nu\chi) \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi)' = -f'(\eta\mu\chi) \cdot \eta\mu\chi$$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A = R$. Είναι $\varphi(\chi) = 3\chi^2 \cdot \eta\mu^3\chi \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[3\chi^2 \cdot \eta\mu^3\chi\right]' =$

$$(3\chi^2)' \cdot \eta\mu^3\chi + 3\chi^2 \cdot (\eta\mu^3\chi)' = 6\chi \cdot \eta\mu^3\chi + 3\chi^2 \cdot 3\eta\mu^2\chi(\eta\mu\chi)' \Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi) = 6\chi \cdot \eta\mu^3\chi + 9\chi^2 \cdot \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi.$$

ii) Π Ο το Α = R γιατί $\sigma\upsilon\nu\chi \geq -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^5\chi + 1 \geq 0$.

Είναι $\varphi(\chi) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[\sqrt{\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1}\right]' = \left[\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)' = \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5\sigma\upsilon\nu^4\chi\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)' =$$

$$\frac{5}{2}\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu^4\chi\left(-\eta\mu\chi\right) \Rightarrow \varphi'(\chi) = -\frac{5}{2}\left(\sigma\upsilon\nu^5\chi + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sigma\upsilon\nu^4\chi \cdot \eta\mu\chi .$$

iii) Π Ο το Α = R γιατί $\eta\mu^2\chi + 1 \geq 0$.

Είναι $\varphi(\chi) = \dfrac{1}{\sqrt{\eta\mu^2\chi + 1}} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\eta\mu^2\chi + 1}}\right]' = \left[\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$

$$-\frac{1}{2}\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)^{-\frac{1}{2}-1}\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)' = -\frac{1}{2}\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\eta\mu\chi\left(\eta\mu\chi\right)' \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \varphi'(\chi) = -\left(\eta\mu^2\chi + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi .$$

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = \chi \cdot \varepsilon\varphi\left(\chi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

ii) $\varphi(\chi) = \sqrt{\varepsilon\varphi^2\chi + \chi^4}$

Τύπος παραγώγισης :

$$\left[\varepsilon\varphi\left(f(\chi)\right)\right]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(f(\chi)\right)} \cdot f'(\chi) ,$$

$$\left[f\left(\varepsilon\varphi\chi\right)\right]' = f'\left(\varepsilon\varphi\chi\right) \cdot \left(\varepsilon\varphi\chi\right)' = \frac{f'\left(\varepsilon\varphi\chi\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

Απάντηση :

i) Π Ο το $A = \left\{\chi \in R,\ \chi + \dfrac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\} = \left\{\chi \in R,\ \chi \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{4}\right\} = R - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4}\right\}$

Είναι $\varphi(\chi) = \chi \cdot \varepsilon\varphi\left(\chi + \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[\chi \cdot \varepsilon\varphi\left(\chi + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]' =$

$$(\chi)'\,\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right) + \chi\left(\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right) + \chi\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right)}\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right)' \Rightarrow$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\varphi'(\chi)=\varepsilon\varphi\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

ii) Π Ο το Α = R γιατί $\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\geq 0$.

Είναι $\varphi(\chi)=\sqrt{\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[\sqrt{\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4}\right]'=\left[\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)'=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(\varepsilon\varphi^2\chi\right)'+\left(\chi^4\right)'\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2\varepsilon\varphi\chi\left(\varepsilon\varphi\chi\right)'+4\chi^3\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot\left[\varepsilon\varphi\chi\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}+2\chi^3\right]\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=\left(\varepsilon\varphi^2\chi+\chi^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\varepsilon\varphi\chi\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}+2\chi^3\right).$$

13. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=e^{2\chi^2+5}$ **ii)** $\varphi(\chi)=-\frac{2}{e^{3\chi-1}}$

iii) $\varphi(\chi)=2e^{\chi+1}-\chi^2\cdot e^{\chi^2}+1$ **iv)** $\varphi(\chi)=\frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}$

Απάντηση :

Τύπος παραγώγισης :

$\left(e^{f(\chi)}\right)'=e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)$,

$\left[f\left(e^{\chi}\right)\right]'=f'\left(e^{\chi}\right)\cdot\left(e^{\chi}\right)'=f'\left(e^{\chi}\right)\cdot e^{\chi}$

i) Π Ο το Α = R . Είναι $\varphi(\chi)=e^{2\chi^2+5}\Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\left[e^{2\chi^2+5}\right]'=e^{2\chi^2+5}\left[2\chi^2+5\right]'\Rightarrow$$

$$\varphi'(\chi)=4\chi e^{2\chi^2+5}.$$

ii) Π Ο το $A = R$.

Είναι $\varphi(\chi) = -\dfrac{2}{e^{3\chi-1}} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[-\dfrac{2}{e^{3\chi-1}}\right]' = -2\left[\dfrac{1}{e^{3\chi-1}}\right]' = -2\left[e^{-(3\chi-1)}\right]' =$

$-2e^{-(3\chi-1)}\left[-(3\chi-1)\right]' \Rightarrow \varphi'(\chi) = 6e^{-(3\chi-1)} = \dfrac{6}{e^{3\chi-1}}.$

iii) Π Ο το $A = R$.

Είναι $\varphi(\chi) = 2e^{\chi+1} - \chi^2 \cdot e^{\chi^2} + 1 \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[2e^{\chi+1} - \chi^2 \cdot e^{\chi^2} + 1\right]' =$

$\left(2e^{\chi+1}\right)' - \left(\chi^2 \cdot e^{\chi^2}\right)' + 1' = 2e^{\chi+1}(\chi+1)' - \left[\left(\chi^2\right)' \cdot e^{\chi^2} + \chi^2 \cdot \left(e^{\chi^2}\right)'\right] =$

$2e^{\chi+1} - \left[2\chi \cdot e^{\chi^2} + \chi^2 \cdot e^{\chi^2}\left(\chi^2\right)'\right] = 2e^{\chi+1} - \left[2\chi \cdot e^{\chi^2} + \chi^2 \cdot e^{\chi^2} \cdot 2\chi\right] \Rightarrow$

$\varphi'(\chi) = 2e^{\chi+1} - 2\chi \cdot e^{\chi^2}\left(1+\chi^2\right).$

iv) Π Ο το $A = R$. Είναι $\varphi(\chi) = \dfrac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{e^{\chi} + e^{-\chi}} \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left[\dfrac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{e^{\chi} + e^{-\chi}}\right]' =$

$$\frac{\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)'\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) - \left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)'}{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2} =$$

$$\frac{\left[\left(e^{\chi}\right)' - \left(e^{-\chi}\right)'\right]\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) - \left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)\left[\left(e^{\chi}\right)' + \left(e^{-\chi}\right)\right]}{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2} =$$

$$\frac{\left[e^{\chi} - e^{-\chi}(-\chi)'\right]\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) - \left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)\left[e^{\chi} + e^{-\chi}(-\chi)'\right]}{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) - \left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)}{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2} = \frac{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2 - \left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)^2}{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)^2} \quad \textbf{(1)}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρόσεξε κάτι : η **(1)** μπορεί από δω και κάτω να γραφτεί με τρεις τρόπους :

✓ Η **(1)** μπορεί να γραφεί : $\varphi'(\chi)=\dfrac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}-\dfrac{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)^2}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\varphi'(\chi)=1-\left(\frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}\right)^2}.$$

✓ Η **(1)** μπορεί να γραφεί :

$$\varphi'(\chi)=\frac{\left[\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)+\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)\right]\left[\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)-\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)\right]}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}=$$

$$\frac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}+e^{\chi}-e^{-\chi}\right)\left(e^{\chi}+e^{-\chi}-e^{\chi}+e^{-\chi}\right)}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}=\frac{2e^{\chi}\cdot 2e^{-\chi}}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}\Rightarrow\frac{4e^{0}}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\varphi'(\chi)=\frac{4}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}}.$$

✓ Η **(1)** μπορεί να γραφεί : $\varphi'(\chi)=\dfrac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}-\dfrac{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)^2}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)^2}=$

$$1-\left(\frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\varphi'(\chi)=1-\varphi^2(\chi)}.$$

Οπότε η άσκηση θα μπορούσε να δοθεί και ως εξής :

Δίνεται η $\varphi(\chi)=\dfrac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}$, να δειχθεί ότι $\boldsymbol{\varphi'(\chi)=1-\varphi^2(\chi)}$

14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\ln\left(\chi^2-1\right),\ \chi<-1$

ii) $\varphi(\chi)=\ln\sqrt[3]{\chi^2-1},\ \chi>1$

iii) $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi},\ \chi>0$

iv) $\varphi(\chi)=e^{\chi}\ln\chi,\ \chi>0$

Τύπος παραγώγισης :

$$\left[\ln\left(f(\chi)\right)\right]'=\frac{1}{f(\chi)}f'(\chi)\ ,$$

$$\left[f\left(\ln\chi\right)\right]'=f'\left(\ln\chi\right)\cdot\left(\ln\chi\right)'=f'\left(\ln\chi\right)\cdot\frac{1}{\chi}$$

Απάντηση :

i) Π Ο : το **A = (– ∞ , – 1),** από την εκφώνηση .

Είναι $\varphi(\chi)=\ln\left(\chi^2-1\right)\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[\ln\left(\chi^2-1\right)\right]'=$

$$\frac{1}{\chi^2-1}\left(\chi^2-1\right)'=\frac{1}{\chi^2-1}2\chi\Rightarrow\boxed{\varphi'(\chi)=\frac{2\chi}{\chi^2-1}}.$$

ii) Π Ο : το **A = (1 , –∞),** από την εκφώνηση.

Είναι $\varphi(\chi)=\ln\sqrt[3]{\chi^2-1}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[\ln\sqrt[3]{\chi^2-1}\right]'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\chi^2-1}}\left(\sqrt[3]{\chi^2-1}\right)'$.

Οπότε για να διευκολυνθείς μπορείς να υπολογίσεις ξεχωριστά την παράγωγο $\left(\sqrt[3]{\chi^2-1}\right)'$. Αν $f(\chi)=\sqrt[3]{\chi^2-1}\Rightarrow f'(\chi)=\left(\sqrt[3]{\chi^2-1}\right)'=$

$$\left[\left(\chi^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}\left(\chi^2-1\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(\chi^2-1\right)'\Rightarrow\boxed{f'(\chi)=\frac{2\chi}{3}\left(\chi^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}}.$$

Άρα $\varphi'(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\chi^2-1}}\left(\sqrt[3]{\chi^2-1}\right)'\Rightarrow\varphi'(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\chi^2-1}}\cdot\dfrac{2\chi}{3}\left(\chi^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi'(\chi)=\frac{2\chi\left(\chi^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}}{3\cdot\sqrt[3]{\chi^2-1}}}.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Πρέπει $\chi\in(0\,,+\infty)$ για να έχει νόημα ο $\ln\chi$ οπότε έχει νόημα και το κλάσμα, άρα Π Ο το **A = (0 , + ∞)** .

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi}\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[\dfrac{\ln\chi}{\chi}\right]'=\dfrac{(\ln\chi)'\chi-\ln\chi(\chi)'}{\chi^2}=\dfrac{\frac{1}{\chi}\chi-\ln\chi\cdot 1}{\chi^2}$

$\Rightarrow\ \boxed{\varphi'(\chi)=\dfrac{1-\ln\chi}{\chi^2}}$.

iv) Πρέπει $\chi\in(0\,,+\infty)$ για να έχει νόημα ο $\ln\chi$ οπότε Π Ο το **A = (0 , + ∞)** .

Είναι $\varphi(\chi)=e^{\chi}\ln\chi\Rightarrow\varphi'(\chi)=\left[e^{\chi}\ln\chi\right]'=\left(e^{\chi}\right)'\ln\chi+e^{\chi}(\ln\chi)'=$

$e^{\chi}\cdot\ln\chi+e^{\chi}\dfrac{1}{\chi}\ \Rightarrow\ \boxed{\varphi'(\chi)=e^{\chi}\cdot\left(\ln\chi+\dfrac{1}{\chi}\right)}$.

15. Να δείξετε ότι :

i) $\left(\ln(\alpha\chi)\right)'=(\ln\chi)',\ \chi>0,\ \alpha>0$ **ii)** $\left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)'=\dfrac{1}{\nu\cdot\chi},\ \chi>0$

iii) $\left(\ln(\ln\chi)\right)'=\dfrac{1}{\chi\cdot\ln\chi}\quad\chi>0$ **iv)** $\left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)'=\dfrac{\left(\ln\chi^{\nu}\right)'}{\nu^2}$

Απάντηση :

i) Είναι $\left(\ln(\alpha\chi)\right)'=\dfrac{1}{\alpha\chi}(\alpha\chi)'=\dfrac{1}{\alpha\chi}\alpha=\dfrac{1}{\chi}=(\ln\chi)'$.

ii) Είναι $\left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)'=\left(\ln\chi^{\frac{1}{\nu}}\right)'=\left(\dfrac{1}{\nu}\ln\chi\right)'=\dfrac{1}{\nu}(\ln\chi)'=\dfrac{1}{\nu}\cdot\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\nu\cdot\chi}$.

iii) $\left(\ln(\ln\chi)\right)'=\dfrac{1}{\ln\chi}(\ln\chi)'=\dfrac{1}{\ln\chi}\cdot\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\chi\cdot\ln\chi}$

iv) Είναι $\left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)'=\left(\ln\chi^{\frac{1}{\nu}}\right)'=\left(\dfrac{1}{\nu}\ln\chi\right)'=\dfrac{1}{\nu}(\ln\chi)'=\dfrac{1}{\nu}\cdot\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\nu\cdot\chi}$ και

$$\left(\ln\chi^{\nu}\right)' = \left(\nu\ln\chi\right)' = \frac{\nu}{\chi} \quad \text{άρα} \quad \frac{\left(\ln\chi^{\nu}\right)'}{\nu^2} = \frac{\frac{\nu}{\chi}}{\nu^2} = \frac{\nu}{\nu^2\cdot\chi} = \frac{1}{\nu\cdot\chi} = \left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)' .$$

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Η παράγωγος $f'(\chi_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός.	☐	☐
2.	Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$, είναι η $f'(\chi_0)$.	☐	☐
3.	Η συνάρτηση f' με $f'(\chi) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}$, $h \neq 0$, όπου χ τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f.	☐	☐
4.	Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄ λέγεται πρώτη παράγωγος της g.	☐	☐
5.	Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g΄ λέγεται δεύτερη παράγωγος της g.	☐	☐
6.	Η παράγωγος της συνάρτησης $f(\chi) = -4$ είναι $f'(\chi) = -4\chi$.	☐	☐
7.	Η παράγωγος της συνάρτησης $s(t) = t$ είναι $s'(t) = 1$.	☐	☐

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. Η παράγωγος $f'(\chi_0)$ (αν υπάρχει) μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\chi_0) - f(\chi_0 - h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$.

9. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\chi_0 + h) - f(\chi_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$.

10. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(\chi) = \sqrt{\chi}$ είναι $f'(\chi) = \dfrac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

11. Η παράγωγος της συνάρτησης $g(\lambda) = \kappa^{\lambda}$, όπου $\lambda \in Q$, είναι $g'(\lambda) = \lambda \cdot \kappa^{\lambda - 1}$.

12. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $E(\chi) = e^{\chi}$ και $L(\chi) = \ln\chi$ είναι $E'(\chi) = \left(e^{\chi}\right)' = e^{\chi}$ και $L'(\chi) = (\ln\chi)' = \dfrac{1}{\chi}$.

13. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(\chi) = \eta\mu\chi$ και $g(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ είναι $f'(\chi) = (\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$ και $g'(\chi) = (\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$.

14. Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $\psi = f(\chi)$, ως προς χ, όταν $\chi = \chi_0$.

15. Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης g είναι η σταθερή συνάρτηση $1\left(g'(\chi)=1\right)$, τότε η g είναι της μορφής $g(\chi)=\chi$.

16. Αν η πρώτη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι 4ου βαθμού, τότε η g είναι 5ου βαθμού.

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=33.003.030$ **ii)** $\varphi(\chi)=-27\chi^3$

iii) $\varphi(\chi)=\frac{7}{3}\chi^3$

Τύπος παραγώγισης :
σταθερή , $\left(\chi^{\rho}\right)'=\rho\cdot\chi^{\rho-1}$
Παράδειγμα **1, 2**

2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\chi^{-\frac{3}{7}}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\chi^{-8,1}$ **iii)** $\varphi(\chi)=-2,1\chi^{3,5}$

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^7}$ **ii)** $\varphi(\chi)=5\sqrt[3]{\chi^4}$

iii) $\varphi(\chi)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[5]{\chi^2}$

Τύπος παραγώγισης :
$\left(\chi^{\rho}\right)'=\rho\cdot\chi^{\rho-1}$
Παράδειγμα **3, 4**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\dfrac{3}{\sqrt{\chi^9}}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[5]{\chi^2}}$

iii) $\varphi(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\chi^4}}$.

5. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

Τύπος : πολυωνυμική ,
$\left([f(\chi)]^{\rho}\right)'=\rho\cdot[f(\chi)]^{\rho-1}\cdot f'(\chi)$
Παράδειγμα **5, 6**

i) $\varphi(\chi)=\chi^7-\chi^4-\chi+2005$

ii) $\varphi(\chi)=\left(-2\chi^3-\chi^2-\chi+3\right)^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

iii) $\varphi(\chi)=\left(-\chi^2+\chi-2\right)^{-\frac{2}{3}}$

iv) $\varphi(\chi)=\dfrac{-3}{\left(-2\chi^3-\chi^2-\chi+3\right)^3}$

6. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=-\dfrac{2}{3}\left(\chi^3-1\right)^3$ **ii)** $\varphi(\chi)=-\left(\chi^2-1\right)^2+2\left(\chi^2+1\right)^3$

iii) $\varphi(\chi)=-2\left(\chi^3+\chi^2-1\right)^{-2}$ **iv)** $\varphi(\chi)=-2\chi^3+\dfrac{3}{\left(\chi^2-1\right)^3}$

7. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

Τύπος : ρητή ,
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
Παράδειγμα **7, 8**

i) $f(\chi)=\dfrac{\eta\mu\left(\chi+\frac{2\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\dfrac{5\chi}{\chi^3-\chi}$

iii) $f(\chi)=\dfrac{1-\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}$ **iv)** $\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-1}{\chi+1}$

v) $\varphi(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\sigma\upsilon\nu\chi-5}$ **vi)** $f(\chi)=\dfrac{\eta\mu\chi-1}{3-\eta\mu\chi}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu\left(\chi-\frac{5\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{2}\right)}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\dfrac{(\chi-1)^2+1}{\sigma\upsilon\nu\chi-2}$ **iii)** $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{\eta\mu\chi}$

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\eta\mu\left(2\chi^2+3\chi-\frac{4\pi}{3}\right)$

ii) $\varphi(\chi)=-5\sigma\upsilon\nu\left(2\chi^2+3\chi\right)^5$

iii) $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu(\chi^2-1)-2\sigma\upsilon\nu\left(\chi-\frac{\pi}{11}\right)$

iv) $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu(2\chi-1)-2\eta\mu\left(\pi-3\chi-\frac{\pi}{3}\right)$

Τύπος παραγώγισης :

$\left[\eta\mu\left(f(\chi)\right)\right]'=\sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$,

$\left[\sigma\upsilon\nu\left(f(\chi)\right)\right]'=-\eta\mu\left(f(\chi)\right)\cdot f'(\chi)$

Παράδειγμα **9**

10. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\eta\mu^3\chi$ **ii)** $\varphi(\chi)=-5\sigma\upsilon\nu^{-3}\chi$

iii) $\varphi(\chi)=\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}\chi+\lambda\cdot\eta\mu^{\kappa}\chi$ **iv)** $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu^3\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

11. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^3\chi$

ii) $\varphi(\chi)=\sqrt{1-\eta\mu^2\chi}$

iii) $\varphi(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{-\sigma\upsilon\nu^2\chi+1}}$

iv) $\varphi(\chi)=\sqrt{-\sigma\upsilon\nu^2\chi+e^2}$.

Τύπος παραγώγισης :

$\left[f\left(\eta\mu\chi\right)\right]'=f'\left(\eta\mu\chi\right)\cdot(\eta\mu\chi)'=f'\left(\eta\mu\chi\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$,

$\left[f\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)\right]'=f'\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)\cdot(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-f'\left(\eta\mu\chi\right)\cdot\eta\mu\chi$

Παράδειγμα **10, 11**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\varepsilon\varphi\left(3\chi-\frac{2\pi}{3}\right)$

ii) $\varphi(\chi)=\sqrt{\varepsilon\varphi^3\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)}$

iii) $\varphi(\chi)=\chi^2\cdot\varepsilon\varphi\left(\chi-\frac{\pi}{6}\right)$

iv) $\varphi(\chi)=\varepsilon\varphi^2\left(2\chi+\frac{5\pi}{6}\right)+\left(\chi^2-1\right)^3$

Τύπος παραγώγισης :

$$\left[\varepsilon\varphi\left(f(\chi)\right)\right]'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(f(\chi)\right)}\cdot f'(\chi)\ ,$$

$$\left[f\left(\varepsilon\varphi\chi\right)\right]'=f'\left(\varepsilon\varphi\chi\right)\cdot(\varepsilon\varphi\chi)'=\frac{f'\left(\varepsilon\varphi\chi\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

Παράδειγμα **12**

13. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i) $g(\chi)=e^{\chi^2-5\chi+6}$

ii) $\theta(\chi)=-\frac{2e^{\chi-1}}{e^{\chi^2-1}}$

iii) $f(\chi)=\frac{e^{\chi}-1}{e^{\chi}+1}$

iv) $f(\chi)=\frac{\chi}{e^{\chi}+1}$

v) $f(\chi)=2e^{\chi^2}-\chi^2\cdot e^{\chi}+\chi$

vi) $\varphi(\chi)=\frac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{e^{\chi}-e^{-\chi}}$

vii) $h(\chi)=e^{e^{e\chi}}$

vii) $f(\chi)=e^{\sqrt{-\sigma\upsilon\nu^2\chi+1}}$

viii) $f(\chi)=\sqrt{e^{2\chi}-1}$

Τύπος παραγώγισης :

$$\left(e^{f(\chi)}\right)'=e^{f(\chi)}\cdot f'(\chi)\ ,$$

$$\left[f\left(e^{\chi}\right)\right]'=f'\left(e^{\chi}\right)\cdot(e^{\chi})'=f'\left(e^{\chi}\right)\cdot e^{\chi}$$

Παράδειγμα **13**

14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

Τύπος παραγώγισης :

$$[\ln(f(\chi))]' = \frac{1}{f(\chi)} f'(\chi) \ ,$$

$$[f(\ln\chi)]' = f'(\ln\chi)\cdot(\ln\chi)' = f'(\ln\chi)\cdot\frac{1}{\chi}$$

Παράδειγμα **14**

i) $\varphi(\chi) = \ln(\alpha\chi)^{\nu}$, αν $(\alpha\chi)^{\nu} > 0$

ii) $\varphi(\chi) = \ln\frac{1}{(\alpha\chi)^{\nu}}$, αν $(\alpha\chi)^{\nu} > 0$

iii) $\varphi(\chi) = \ln\left(\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma\right)$ αν $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0$

iv) $\varphi(\chi) = \ln\sqrt[\nu]{(\alpha\chi)^{\mu}}$,όπου $\chi > 1, \alpha > 0$

v) $f(\chi) = \frac{\ln\chi^{e}}{e^{\chi}}$, όπου $\chi > 0$

vi) $\varphi(\chi) = e^{\chi}\ln\chi$

vii) $f(\chi) = \ln\sqrt{\alpha\chi + \beta}$ αν $\alpha\chi + \beta > 0$

viii) $g(\chi) = \ln\sqrt{\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma}$ αν $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0$

iχ) $g(\chi) = \ln e^{\chi}$

15. Να δείξετε ότι :

Παράδειγμα **15**

i) $\left(\ln\chi^{\nu}\right)' = \frac{\nu}{\chi}$, αν $\chi > 0$

ii) $\left(\ln\left(\alpha\chi^{\nu}\right)\right)' = \frac{\nu}{\chi} = \left(\ln\chi^{\nu}\right)'$, αν $\chi > 0$, $\alpha > 0$

iii) $\left(e^{\ln\chi}\right)' = \frac{e^{\ln\chi}}{\chi}$, αν $\chi > 0$

iv) $\nu\cdot\left(\ln\sqrt[\nu]{\chi}\right)' = (\ln\chi)'$, αν $\chi > 0$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ν) $\left(\ln e^{\chi}\right)' = 1$

νi) $\left(\ln \chi^{e}\right)' = \dfrac{e}{\chi}$, αν $\chi > 0$

Εφειδή «αρχία μήτηρ πάσης κακίας αλλά και . . . βλακείας» να «μερικά» προβλήματα για να έχετε τι να κάνετε το Σαββατοκύριακο.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(\chi)=\dfrac{\chi^3}{e^{\chi}}$, $g(\chi) = e^{\chi} \cdot \chi^2$.

Να βρείτε :

α) Την πρώτη παράγωγο της f και της g.

β) Τις παραγώγους $f'(1)$ και $g'(1)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(\chi)=\dfrac{\chi^3}{e^{\chi}}$, $g(\chi) = \dfrac{e^{\chi}}{2\chi^2}$.

Να βρείτε :

α) Την πρώτη παράγωγο της f και της g.

β) Τις παραγώγους $f'(1)$ και $g'(1)$.

γ) Να δείξετε ότι $f'(1) \cdot g'(1) = -1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = e^{2\chi}$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$ και την $f''(\chi)$.

β) Να αποδείξετε ότι : $2f'(\chi) - f''(\chi) = 0$, για κάθε $\chi \in R$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{\alpha\chi}$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$ και την $f''(\chi)$.

β) Τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση :

$f''(\chi)+2f'(\chi)-3f(\chi)=0$, για κάθε $\chi \in R$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{-\chi}$.

α) Να βρείτε την $f'(\chi)$.

β) Να δείξετε ότι : $f'(\chi)+f(\chi)=0$, για κάθε $\chi \in R$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=2\chi-\chi^2$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$ και την $f''(\chi)$.

β) Να αποδείξετε ότι : $(1-\chi)f''(\chi)+f'(\chi)=0$, για κάθε $\chi \in R$.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

Να δείξετε ότι :

α. Η $f'(\chi)$ είναι άρτια και η $f''(\chi)$ περιττή

β. Ισχύει $f(0)=0$.

γ. Το $O(0,0)$ είναι πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράσταση της f $\left(\text{Υπ. δείξε ότι είναι } f''(0)=0\right)$.

8. Μια συνάρτηση f είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

Να δείξετε ότι :

α. Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $O(0,0)$.

β. $f''(0)=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι :

α. $f'(\chi)$ είναι περιττή και η $f''(\chi)$ άρτια

β. Το $O(0,0)$ είναι πιθανό ακρότατο της f (ή η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$) $\left(\text{είναι } f'(0)=0\right)$.

γ. Η γραφική παράσταση της f΄ διέρχεται από το $O(0,0)$.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι :

α. Η $f'(\chi)$ είναι άρτια

β. Η παράγωγος $g'(\chi)$, της συνάρτηση $g(\chi)=\chi\cdot f(\chi)$ είναι περιττή .

γ. Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το $O(0,0)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g στο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$ $\left(\text{είναι } g(0) \text{ και } g'(0)=0\right)$.

11. Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει :

$f(\chi+\psi)=e^{\chi}f(\psi)+e^{\psi}f(\chi)+\chi\psi$, για κάθε $\chi, \psi \in R$.

α. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

β. Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ. Να δείξετε ότι $f'(\chi_0)=f(\chi_0)+f'(0)\cdot e^{\chi_0}+\chi_0$, για κάθε $\chi_0 \in R$.

12. Γνωρίζουμε ότι για $\chi \neq 1$ ισχύει : $\dfrac{\chi^{\nu+1}-1}{\chi-1}=1+\chi+\chi^2+\cdots+\chi^{\nu}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $1+2\chi+3\chi^2+\cdots+\nu\chi^{\nu-1}$, $\chi \neq 1$.

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}+\cdots+\dfrac{20}{2^{19}}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R, αν επί πλέον ισχύει $f^2(\chi)+g^2(\chi)=\chi^2+2\chi+4$ για κάθε $\chi \in R$ να αποδείξετε ότι $f'(\chi)f(\chi)+g'(\chi)g(\chi)=\chi+1$. (Υπ. παραγώγισε)

14. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R, αν επί πλέον ισχύει $f(\chi)\cdot g(\chi)=\chi$ για κάθε $\chi \in R$, μπορεί οι γραφικές τους παραστάσεις να διέρχονται από το $O(0,0)$; $\left(\text{Υπ. } \left(f(\chi)\cdot g(\chi)\right)'=1\cdots\right)$

15. Βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία παραγώγισης :

Έστω $\alpha>0$ και $\nu\geq 2$ τότε

$$\alpha^{\nu}=\alpha\cdot\alpha^{\nu-1}=\underbrace{\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\ldots+\alpha^{\nu-1}}_{\alpha\text{ προσθετέοι}},\ \text{άρα}$$

$$\left(\alpha^{\nu}\right)'=\left(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\ldots+\alpha^{\nu-1}\right)'\ \text{άρα}$$

$$\nu\alpha^{\nu-1}=\underbrace{(\nu-1)\alpha^{\nu-2}+(\nu-1)\alpha^{\nu-2}+(\nu-1)\alpha^{\nu-2}+\ldots+(\nu-1)\alpha^{\nu-2}}_{\alpha\text{ προσθετέοι}}$$

άρα $\nu\alpha^{\nu-1}=\alpha\cdot(\nu-1)\alpha^{\nu-2}$

άρα $\nu\alpha^{\nu-1}=(\nu-1)\alpha^{\nu-1}$, επομένως $\nu=\nu-1$!!!

16. Βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία παραγώγισης :

Έστω $\chi\neq 0$ $\chi^4=\chi\cdot\chi^3=\underbrace{\chi^3+\chi^3+\chi^3+\ldots+\chi^3}_{\chi\text{ προσθετέοι}}$, άρα

$$\left(\chi^4\right)'=\left(\chi^3+\chi^3+\chi^3+\ldots+\chi^3\right)'$$

$$4\chi^3=\underbrace{3\chi^2+3\chi^2+3\chi^2+\ldots+3\chi^2}_{\chi\text{ προσθετέοι}},\ \text{άρα}\ 4\chi^3=\chi\cdot 3\chi^2=3\chi^3,$$

επομένως $4=3$!!!

17. Να βρείτε πολυώνυμο P (χ) τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε $P(0)=-1$, $P'(1)=5$, $P'(0)=2$, $P''(1)=2$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εξίσωση εφαπτομένης

στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

Ένα **φαινομενικά** δύσκολο πρόβλημα

Αν $\psi = \varphi(\chi)$ είναι ο τύπος μιας συνάρτησης και $\mathbf{A}(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ ένα σημείο στην γραφική της παράσταση, η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ είναι $\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0)\cdot(\chi - \chi_0)$, όπου $\varphi'(\chi_0)$ ο παράγωγος αριθμός στο χ_0, δηλαδή «εξ' ορισμού» **ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι** $\varphi'(\chi_0)$.

<u>Άρα για να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης :</u>

1ον Καταγράφεις τον τύπο της εφαπτομένης $\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0)\cdot(\chi - \chi_0)$ **(1)**.

2ον Βρίσκεις το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ ή το χ_0, και τα αντικαθιστάς στον τύπο **(1)** .

* αν η άσκηση δεν δίνει το $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ ή το χ_0 τότε το χ_0 θα είναι το πρώτο πράγμα που θα υπολογίζεις .

3ον Βρίσκεις την $\varphi'(\chi)$, για να υπολογίσεις στη συνέχεια τον $\varphi'(\chi_0)$.

4ον Αντικαθιστάς το $\varphi'(\chi_0)$ στην $\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0)\cdot(\chi - \chi_0)$ **(1)** και στη συνέχεια την μετασχηματίζεις σε μια πιο «βολική» μορφή .

Έτσι το πρόβλημα εμφανίζεται με **τρεις** μορφές :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi=\varphi(\chi)$ και το $A(\chi_0,\varphi(\chi_0))$, ένα σημείο στην γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α».

2η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi=\varphi(\chi)$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ».

3η μορφή : «Δίνεται η συνάρτηση $\psi=\varphi(\chi)$ και ένα σημείο $P(\chi_1,\psi_1)$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης που περνάει από το σημείο Ρ.

Τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν μέθοδο.

Παραδείγματα :

1. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1$ και το σημείο $A(-2,-1)$ στη γραφική της παράσταση, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α.

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0,\varphi(\chi_0))$ είναι :

$$\psi-\varphi(\chi_0)=\varphi'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0).$$

Βήμα 1ο : Είναι $A(-2,-1)$ άρα από την εκφώνηση είναι $\chi_0=-2$, $\varphi(-2)=-1$ επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\psi+1=\varphi'(-2)(\chi+2) \quad \textbf{(1)}.$$

Βήμα 2ο : Βρίσκεις την παράγωγο της συνάρτησης : $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1\Rightarrow$

$$\varphi'(\chi)=\left(\chi^2+3\chi+1\right)' \Rightarrow \varphi'(\chi)=2\chi+3 \quad \text{άρα}$$

$$\varphi'(-2)=2(-2)+3 \Rightarrow \varphi'(-2)=-1.$$

Λιβαδειά

Βήμα 3ο : Αντικαθιστάς το : $\varphi'(-2)=-1$ στην εξίσωση **(1)**

$\psi+1=\varphi'(-2)(\chi+2)$ οπότε αυτή γίνεται

$\psi+1=-1(\chi+2) \Rightarrow \psi=-1-\chi-2 \Rightarrow \boldsymbol{\psi=-\chi-3}$.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης, μόνο που δίνεται μέσα από μια « ιδιότητά » της, πχ η εφαπτομένη είναι παράλληλη ή κάθετη σε κάποια άλλη ευθεία κ λ π.

- ✓ Σε πρώτη «φάση» μέσα από την « ιδιότητα » της εφαπτομένης βρίσκεις τον συντελεστή διεύθυνσης **λ** .
- ✓ Σε δεύτερη «φάση» προσπαθείς να βρεις το χ_0 από την σχέση $\boldsymbol{\varphi'(\chi_0)=\lambda}$ και στη συνέχεια βρίσκεις το $\mathbf{A}(\boldsymbol{\chi_0},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\chi_0}))$ οπότε μπορείς πια να βρεις την εξίσωση.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\chi+\psi-5=0$.

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0,\varphi(\chi_0))$ είναι :

$$\psi-\varphi(\chi_0)=\varphi'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0).$$

Βήμα 1ο : Η ευθεία $\chi+\psi-5=0$ γράφεται $\psi=-\chi+5$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-1$ και αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\chi+\psi-5=0$ θα έχει και αυτή συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-1$.

Βήμα 2ο : Στις περιπτώσεις όπως αυτή, που δεν ξέρεις τις συντεταγμένες του $A(\chi_0,\varphi(\chi_0))$, ξεκινάς να βρεις κατ' αρχή το $\boldsymbol{\chi_0}$ ως εξής:

Έστω $\boldsymbol{\chi_0}$ η τετμημένη του **σημείου επαφής Α** .

Είναι $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1 \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left(\chi^2+3\chi+1\right)'=2\chi+3$ άρα

$\varphi'(\chi_0)=2\chi_0+3$.

Αφού $\lambda=-1$ και $\varphi'(\chi_0)=\lambda$ άρα $\varphi'(\chi_0)=-1 \Rightarrow 2\chi_0+3=-1 \Rightarrow$

$2\chi_0=-4$ άρα $\boldsymbol{\chi_0=-2}$ και επειδή το Α σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι :

$\psi=\varphi(-2)=(-2)^2+3(-2)+1=4-6+1=-1$ άρα $A(-2,-1)$ επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\psi+1=\varphi'(-2)(\chi+2)$ **(1)** .

Βήμα 3ο : Αντικαθιστάς το : $\lambda=\varphi'(-2)=-1$ στην εξίσωση **(1)**

$\psi+1=\varphi'(-2)(\chi+2)$ οπότε αυτή γίνεται $\psi+1=-1(\chi+2)$

$\Rightarrow \psi=-1-\chi-2 \Rightarrow \boldsymbol{\psi=-\chi-3}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση : $\psi=\chi+2$.

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0,\varphi(\chi_0))$ είναι :

$$\psi-\varphi(\chi_0)=\varphi'(\chi_0)\cdot(\chi-\chi_0).$$

Βήμα 1ο : Η ευθεία $\psi=\chi+2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και αφού η εφαπτομένη είναι κάθετη στην $\psi=\chi+2$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\boldsymbol{\lambda}$: $\lambda\cdot\lambda_1=-1 \Rightarrow$

$\lambda\cdot 1=-1 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda=-1}$.

Βήμα 2ο : Έστω $\boldsymbol{\chi_0}$ η τετμημένη του **σημείου επαφής Α** .

Είναι $\varphi(\chi)=\chi^2+3\chi+1 \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left(\chi^2+3\chi+1\right)'=2\chi+3$ άρα

$\varphi'(\chi_0)=2\chi_0+3$.

Αφού $\lambda=-1$ και $\varphi'(\chi_0)=\lambda$ άρα $\varphi'(\chi_0)=-1 \Rightarrow 2\chi_0+3=-1 \Rightarrow$

$2\chi_0=-4$ άρα $\boldsymbol{\chi_0=-2}$ και επειδή το Α είναι σημείο στη γραφική

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

παράσταση της συνάρτησης θα είναι :

$\psi = \varphi(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$ άρα $A(-2,-1)$ επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\psi + 1 = \varphi'(-2)(\chi + 2)$ **(1)** .

Βήμα 3ο : Αντικαθιστάς το : $\lambda = \varphi'(-2) = -1$ στην εξίσωση **(1)**

$\psi + 1 = \varphi'(-2)(\chi + 2)$ οπότε αυτή γίνεται $\psi + 1 = -1(\chi + 2)$

$\Rightarrow \psi = -1 - \chi - 2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\psi = -\chi - 3}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\boldsymbol{\omega = \frac{3\pi}{4}}$.

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ είναι :

$$\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0) \cdot (\chi - \chi_0).$$

Βήμα 1ο : Αφού η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\boldsymbol{\omega = \frac{3\pi}{4}}$, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ $\boldsymbol{\lambda = -1}$.

Βήμα 2ο : Έστω $\boldsymbol{\chi_0}$ η τετμημένη του **σημείου επαφής Α** .

Είναι $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1 \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\chi^2 + 3\chi + 1\right)' = 2\chi + 3$ άρα $\varphi'(\chi_0) = 2\chi_0 + 3$.

Αφού $\lambda = -1$ και $\varphi'(\chi_0) = \lambda$ άρα $\varphi'(\chi_0) = -1 \Rightarrow 2\chi_0 + 3 = -1 \Rightarrow$ $2\chi_0 = -4$ άρα $\boldsymbol{\chi_0 = -2}$ και επειδή το Α σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι :

$\psi = \varphi(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$ άρα $A(-2,-1)$ επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\psi + 1 = \varphi'(-2)(\chi + 2)$ **(1)** .

Βήμα 3ο : Αντικαθιστάς το : $\lambda = \varphi'(-2) = -1$ στην εξίσωση **(1)**

$\psi + 1 = \varphi'(-2)(\chi + 2)$ οπότε αυτή γίνεται $\psi + 1 = -1(\chi + 2)$

$\Rightarrow \psi = -1 - \chi - 2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\psi = -\chi - 3}$.

Επίτηδες άφησα τελευταία αυτή την περίπτωση, φαίνεται η πιο δύσκολη αλλά δεν είναι, απλώς έχει λίγες πράξεις παραπάνω.

5. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική της παράσταση, η οποία περνάει από το σημείο $P(1,-4)$.

Απάντηση : Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$ είναι :

$$\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0) \cdot (\chi - \chi_0).$$

Βήμα 1ο : Έστω χ_0 η τετμημένη του **σημείου επαφής** $A(\chi_0, \varphi(\chi_0))$.

τότε $\varphi(\chi_0) = \chi_0^2 + 3\chi_0 + 1$ και η εξίσωση

$\psi - \varphi(\chi_0) = \varphi'(\chi_0) \cdot (\chi - \chi_0)$ παίρνει την μορφή :

$$\psi - \left(\chi_0^2 + 3\chi_0 + 1\right) = \varphi'(\chi_0) \cdot (\chi - \chi_0)$$

Βήμα 2ο : $\varphi(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 1 \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\chi^2 + 3\chi + 1\right)' = 2\chi + 3$ άρα

$\varphi'(\chi_0) = 2\chi_0 + 3$. Το αντικαθιστάς στην εξίσωση

$\psi - \left(\chi_0^2 + 3\chi_0 + 1\right) = \varphi'(\chi_0) \cdot (\chi - \chi_0)$ οπότε αυτή

γίνεται $\psi - \left(\chi_0^2 + 3\chi_0 + 1\right) = (2\chi_0 + 3) \cdot (\chi - \chi_0) \Rightarrow$

$$\psi - \chi_0^2 - 3\chi_0 - 1 = 2\chi_0 \cdot \chi - 2\chi_0^2 + 3\chi - 3\chi_0 \Rightarrow$$

$$\psi = 3\chi - \chi_0^2 + 2\chi \cdot \chi_0 + 1.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Βήμα 3ο : Αφού η εφαπτομένη περνάει από το $P(1,-4)$ πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωσή $\psi = 3\chi - \chi_0^2 + 2\chi \cdot \chi_0 + 1$, άρα $-4 = 3\cdot 1 - \chi_0^2 + 2\cdot 1\cdot \chi_0 + 1$

$\Rightarrow \quad 0 = 4 + 3\cdot 1 - \chi_0^2 + 2\chi_0 + 1 \Rightarrow \chi_0^2 - 2\chi_0 - 8 = 0$.

Διακρίνουσα $\Delta = \ldots 36$ άρα $\begin{cases} \chi_1 = -2 \\ \chi_2 = 4 \end{cases}$ οι λύσεις, άρα δυο εφαπτόμενες ικανοποιούν τις προϋποθέσεις :

✓ Η μια εφάπτεται στο $A(-2, \varphi(-2)) = A(-2,-1)$, περνάει από το $P(1,-4)$ και για την εξίσωσή της έχεις : $\varepsilon_1 : \psi = 3\chi - \chi_0^2 + 2\chi \cdot \chi_0 + 1$

$\Rightarrow \varepsilon_1 : \psi = 3\chi - (-2)^2 + 2\chi\cdot(-2) + 1$ άρα είναι $\varepsilon_1 : \psi = -\chi - 3$ ή

✓ Η άλλη εφάπτεται στο $A(4, \varphi(4)) = A(4, 29)$, περνάει από το $P(1,-4)$ και για την εξίσωσή της έχεις : $\varepsilon_2 : \psi = 3\chi - \chi_0^2 + 2\chi \cdot \chi_0 + 1$

$\Rightarrow \varepsilon_1 : \psi = 3\chi - 4^2 + 2\chi\cdot 4 + 1$ άρα είναι $\varepsilon_2 : \psi = 11\chi - 3$.

Προσοχή Παρατηρήσεις S O S για τις ασκήσεις :

✓ Αν δίνεται το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ (σημείο επαφής) και θες να δείξεις ότι μια ευθεία $\varepsilon : \psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f στο **A**, τότε ή δείχνεις $f'(\chi_0) = \lambda$ και $A \in \varepsilon$ ή βρίσκεις την εφαπτομένη στο A και διαπιστώνεις ότι ταυτίζεται με την $\varepsilon : \psi = \lambda\chi + \beta$.

✓ Αν δεν δίνεται το σημείο επαφής **A** και θες να δείξεις ότι μια ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ εφάπτεται της C_f , τότε υποθέτεις ότι χ_0 είναι η τετμημένη του σημείου επαφής της $\psi = \lambda\chi + \beta$ και της C_f οπότε βρίσκεις την $f'(\chi)$ και απαιτείς $f'(\chi_0) = \lambda$.

Η τελευταία εξίσωση σου δίνει το χ_0, βρίσκεις το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και η συνέχεια . . . είναι γνωστή.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στο σημείο αυτό να ξεκαθαρίσεις το εξής : Για να εφάπτεται μια ευθεία $\varepsilon : \psi = \lambda\chi + \beta$ στη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f *θα πρέπει οι δυο γραμμές να έχουν κοινό σημείο και* $\lambda = f'(\chi_0)$.

Η μέθοδος που ξέρεις από τη Β Λυκείου, όπου απαιτούσες οι δυο γραμμές να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο αφορά μόνο την συνάρτηση f που έχει ως γραφική παράσταση ένα ημικύκλιο και δεν εφαρμόζεται εδώ.

✓ Αν έχεις δυο συναρτήσεις f και g και θες να βρεις την **κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων** C_f και C_g αντίστοιχα, τότε υποθέτεις ότι χ_0 είναι η τετμημένη του κοινού τους σημείου των C_f και C_g , που είναι και το σημείο επαφής τους με την κοινή εφαπτομένη και λύνεις το σύστημα :

$$\begin{cases} f(\chi_0) = g(\chi_0) & \text{για να έχουν κοινό σημείο} \\ f'(\chi_0) = g'(\chi_0) & \text{για να έχουν κοινή εφαπτομένη} \end{cases}.$$

Εννοείται πως αν δίνεται το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ή έστω μόνο το χ_0 τότε χρησιμοποιείς μόνο την δεύτερη σχέση $f'(\chi_0) = g'(\chi_0)$.

✓ Αν έχεις δυο συναρτήσεις f και g και σου ζητά να δείξεις ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ **είναι και εφαπτομένη** της C_g (εννοείται πως το $A \notin C_g$) τότε βρίσκεις την εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και ακολουθείς τα βήματα που περιγράφονται στην 2η περίπτωση των παρατηρήσεων της προηγούμενης σελίδας.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης

Ένα ακόμη **φαινομενικά** δύσκολο πρόβλημα

Παρατηρήσεις

- Ο παράγωγος αριθμός μιας συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$ λέγεται ***ρυθμός μεταβολής***, είναι **πραγματικός αριθμός** και εκφράζει την «ταχύτητα» με την οποία «τείνουν» να μεταβληθούν οι τιμές της f στο χ_0.

Έτσι λοιπόν **πρακτικά** :

- Αν πρόκειται για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ στο σημείο $A\left(\chi_0, f(\chi_0)\right)$ και τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

  $\psi - f(\chi_0) = f'(\chi_0)(\chi - \chi_0)$.

- Αν πρόκειται για κίνηση ενός κινητού που η θέση του στο καρτεσιανό επίπεδο εκφράζεται από τη συνάρτηση $\psi = f(t)$ (συνάρτηση θέσης), τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο t_0 $\left(f'(t_0)\right)$, εκφράζει την (στιγμιαία) ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$.
- Αν πρόκειται για την ταχύτητα ενός κινητού $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{t})$, τότε ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης $\boldsymbol{\upsilon}$ στο t_0 $\left(\boldsymbol{\upsilon}'(\mathbf{t}_0)\right)$, εκφράζει την (στιγμιαία) επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}_0) = \boldsymbol{\upsilon}'(\mathbf{t}_0)$.
- Αν η συνάρτηση εκφράζει άλλο μέγεθος, π. χ. οικονομικό μέγεθος όπως είναι το κόστος παραγωγής ή το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος, τότε ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο χ_0 $\left(f'(\chi_0)\right)$, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους, όταν η παραγωγή γίνει χ_0 μονάδες και ονομάζεται αντίστοιχα : **Οριακό κόστος , Οριακό κέρδος .**

Τα παρακάτω παραδείγματα αποτελούν μέθοδο.

Παραδείγματα :

Εσωτερικά 4ο Θέμα
Πανελλήνιες εξετάσεις 2004

1. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=\dfrac{2}{1+\chi^2}$, όπου $\chi \in R$

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς χ, όταν $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Ο ρυθμός μεταβολής στο $\chi_0=1$ είναι ο παράγωγος αριθμός στο $\chi_0=1$ δηλαδή ο $f'(\chi_0)$. Επομένως για να βρεις τον ρυθμό μεταβολής βρίσκεις την παράγωγο συνάρτηση της f : $f(\chi)=\dfrac{2}{1+\chi^2} \Rightarrow f'(\chi)=\left(\dfrac{2}{1+\chi^2}\right)'=$

$$\frac{2'\cdot\left(1+\chi^2\right)-2\left(1+\chi^2\right)'}{\left(1+\chi^2\right)^2}=\frac{-2\cdot 2\chi}{\left(1+\chi^2\right)^2} \Rightarrow f'(\chi)=-\frac{4\chi}{\left(1+\chi^2\right)^2}.$$

και στη συνέχεια βρίσκεις το $f'(1)=-\dfrac{4\cdot 1}{\left(1+1^2\right)^2} \Rightarrow$ $f'(1)=-\dfrac{4}{4}=-1$.

2. Δίνεται η ορθή γωνία χΟψ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m, του οποίου το άκρο Β «ολισθαίνειν» πάνω στην πλευρά Οχ με ταχύτητα υ = 2t.

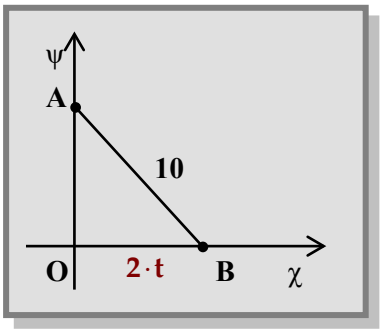
α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου t.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού **E(t)** τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6 m .

Απάντηση :

α) Επειδή υ = 2t άρα τη χρονική στιγμή t θα είναι ΟΒ = g(t) =2t, ΑΒ = 10 και αν εφαρμόσεις το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο **ΟΑΒ** θα έχεις



$$(OA)=\sqrt{(AB)^2-(OB)^2} \Rightarrow$$

$$(OA)=\sqrt{10^2-(2\cdot t)^2} \Rightarrow$$

$$(OA)=\sqrt{100-4\cdot t^2}=2\sqrt{25-t^2} \quad \textbf{(1)}$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΟΒ** είναι :

$$E(t)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}(2\cdot t)\cdot 2\sqrt{25-t^2} \Rightarrow \boxed{E(t)=2\cdot t\cdot\sqrt{25-t^2}}.$$

β) Για να βρεις το ρυθμό μεταβολής του E(t) βρίσκεις την παράγωγο του

$$E'(t)=\left(2\cdot t\cdot\sqrt{25-t^2}\right)' \Rightarrow E'(t)=(2\cdot t)'\sqrt{25-t^2}+2\cdot t\cdot\left(\sqrt{25-t^2}\right)' \Rightarrow$$

$$E'(t)=2\sqrt{25-t^2}+2\cdot t\frac{1}{2\sqrt{25-t^2}}\left(25-t^2\right)' \Rightarrow$$

$$E'(t)=2\sqrt{25-t^2}+\frac{t}{\sqrt{25-t^2}}(-2t) \Rightarrow E'(t)=\frac{2\left(\sqrt{25-t^2}\right)^2}{\sqrt{25-t^2}}-\frac{2t^2}{\sqrt{25-t^2}}=$$

$$\frac{2\left(25-t^2\right)}{\sqrt{25-t^2}}-\frac{2t^2}{\sqrt{25-t^2}} \Rightarrow \boxed{E'(t)=\frac{2\left(25-2t^2\right)}{\sqrt{25-t^2}}}.$$

Αν ΟΑ = 6 από τον τύπο **(1)** είναι $6=2\sqrt{25-t^2} \Leftrightarrow 3=\sqrt{25-t^2} \Leftrightarrow$

$25-t^2=9 \Leftrightarrow t^2=16 \Rightarrow$ **t = 4** άρα όταν ΟΑ = 6 είναι t = 4 και επομένως ο

ρυθμός μεταβ. του εμβαδού είναι $E'(4)=\dfrac{2\left(25-2\cdot 4^2\right)}{\sqrt{25-4^2}} \Rightarrow \boxed{E'(4)=-\dfrac{14}{3}}.$

Πανελλήνιες εξετάσεις 1996

3. Έστω **f(t)** είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά την χρονική στιγμή t, όπου $t \geq 0$ και

$f : [0, +\infty) \to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με : $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{501}}$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{e^4}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

Απάντηση :

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ με $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{501}}$.

Επειδή ζητάει το ρυθμό απορρόφησης θα βρεις την παράγωγο της συνάρτησης :

$$f'(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{501}}\right)' = -e^{-\frac{t}{501}} \cdot \left(-\frac{t}{501}\right)' = -e^{-\frac{t}{501}} \cdot \left(-\frac{1}{501}\right) \cdot t' \Rightarrow$$

$$f'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{501}}}{501}.$$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού είναι ίσος με το $\frac{1}{e^4}$ του ρυθμού απορρόφησης τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, τότε θα είναι : $f'(t_1) = \frac{1}{e^4} f'(t_0) \Rightarrow \frac{e^{-\frac{t_1}{501}}}{501} = \frac{1}{e^4} \cdot \frac{e^{-\frac{t_0}{501}}}{501} \Rightarrow$

$$e^{-\frac{t_1}{501}} = \frac{e^{-\frac{0}{501}}}{e^4} \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{501}} = \frac{1}{e^4} \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{501}} = e^{-4} \Rightarrow -\frac{t_1}{501} = -4 \Rightarrow$$

$\mathbf{t_1 = 2004}$.

Στο θέμα έγινε μια απαραίτητη προσαρμογή έτσι ώστε να είναι «εντός ύλης».

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Η θέση ενός κινητού το οποίο κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τον τύπο : $S(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+3t-7$ όπου t είναι min , $t \in [0\ ,\ 5]$ και S σε Km.

Να βρείτε :

α) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.

β) Πόσα min μετά την εκκίνηση του το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».

γ) Την επιτάχυνση όταν το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».

δ) Να βρείτε πότε το κινητό απομακρύνεται από το σημείο εκκίνησης

ε) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό σε 5 min από τη στιγμή εκκίνησης.

Απάντηση :

α) Η ταχύτητα του κινητού είναι $\upsilon(t)=S'(t)=\left(\frac{t^3}{3}-2t^2+3t-7\right)'=$

$\frac{3t^2}{3}-2\cdot 2t+3=t^2-4t+3 \Rightarrow \upsilon(t)=t^2-4t+3$ και η επιτάχυνσή του είναι

$\alpha(t)=\upsilon'(t)=\left(t^2-4t+3\right)'=2t-4=2(t-2)\Rightarrow \alpha(t)=2(t-2)$.

β) Το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» όταν η ταχύτητά του είναι μηδέν.

Όμως $\upsilon(t)=0 \Rightarrow t^2-4t+3=0 \Rightarrow$ . . . ρίζες $\rho_1=1$ και $\rho_2=3$ άρα το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» 1 min και 3 min μετά την εκκίνηση του.

γ) Η επιτάχυνση όταν το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο» είναι αντίστοιχα $\alpha(1)=2(1-2)=-2$ και $\alpha(3)=2(3-2)=2$.

δ) Για να βρεις πότε το κινητό απομακρύνεται και πότε επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης του, πρέπει να μελετήσεις το πρόσημο της ταχύτητας και επειδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού θα πρέπει αναγκαστικά να φτιάξεις πίνακα προσήμου.

Η $\upsilon(t)=t^2-4t+3$ έχει ρίζες $\rho_1=1$ και $\rho_2=3$

άρα πίνακας προσήμου :

0 min		1min		3min		5 min
	+	0	–	0	+	

Άρα στα διαστήματα που η $\upsilon(t) = t^2 - 4t + 3$ είναι θετική, δηλαδή στο $A = (0\,,1) \cup (3\,,5)$, το κινητό απομακρύνεται, ενώ στο διάστημα $B = (1\,,3)$ το κινητό επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης του.

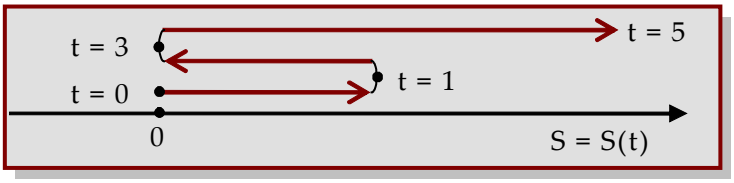
ε) Για να βρεις το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό σε 5 min από τη στιγμή εκκίνησης πρέπει να βρεις τα επί μέρους διαστήματα, δηλαδή τα διαστήματα που διανύει στις διάφορες φάσεις της κίνησής του.

1η φάση από ***0 έως 1 min***

2η φάση από ***1 έως 3 min***

3η φάση από ***3 έως 5 min***

Η κίνηση του κινητού στις διάφορες φάσεις είναι όπως στο σχήμα:



Η απόσταση που διανύθηκε από το κινητό είναι:

✓ ***Στην 1η φάση*** :

$$S_1 = |S(1) - S(0)| = \left|\left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 7\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 7\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{3} - 2 + 3 - 7\right) - (-7)\right| = \left|-\frac{17}{3} + 7\right| \Rightarrow S_1 = \frac{4}{3}\ \text{Km.}$$

✓ Στην 2η φάση

$$S_2 = |S(3) - S(1)| = \left|\left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 7\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 7\right)\right| =$$

$$\left|\left(\frac{27}{3} - 18 + 9 - 7\right) - \left(-\frac{17}{3}\right)\right| = \left|(-7) - \left(-\frac{17}{3}\right)\right| = \left|-7 + \frac{17}{3}\right| \Rightarrow S_2 = \frac{4}{3}\ \text{Km.}$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Στην 3η φάση

$$S_3 = |S(5) - S(3)| = \left| \left(\frac{5^3}{3} - 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5 - 7 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - 7 \right) \right| =$$

$$\left| \frac{29}{3} - (-7) \right| = \left| \frac{29}{3} + 7 \right| \Rightarrow S_3 = \frac{50}{3} \text{ Km.}$$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5 min είναι :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{50}{3} = \frac{58}{3} \text{ Km.}$$

6. Ένα ασανσέρ κινείται κατακόρυφα και η απομάκρυνση από το ισόγειο δίνεται από τον τύπο : $S(t) = 3\eta\mu 3t$ όπου t είναι sec και $t \in [0\ ,\ 10]$.

α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του.

β) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης .

γ) Να δείξετε ότι όταν η επιτάχυνση είναι 0 τότε η ταχύτητα του έχει τη μέγιστη τιμή .

Απάντηση :

α) Η ταχύτητα του ασανσέρ είναι : $\upsilon(t) = S'(t) = (3\eta\mu 3t)' =$

$3\sigma\upsilon\nu 3t \cdot (3t)' = 9\sigma\upsilon\nu 3t \Rightarrow$ **$\upsilon(t) = 9\sigma\upsilon\nu 3t$** και η επιτάχυνσή του είναι

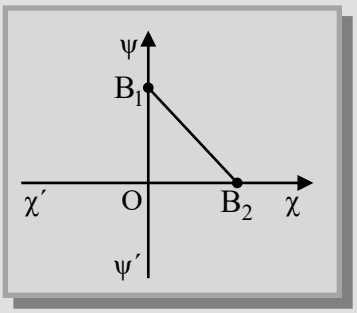
$\alpha(t) = \upsilon'(t) = (9\sigma\upsilon\nu 3t)' = -9\eta\mu 3t(3t)' = -27\eta\mu 3t \Rightarrow$ **$\alpha(t) = -27\eta\mu 3t$** .

β) Είναι $\alpha(t) = -27\eta\mu 3t \Rightarrow \alpha(t) = -9\cdot(3\eta\mu 3t) \Rightarrow$ **$\alpha(t) = -9\cdot s(t)$** άρα η επιτάχυνση ανάλογη της απομάκρυνσης.

γ) Όταν η επιτάχυνση είναι 0 τότε $-9\cdot(3\eta\mu 3t) = 0 \Rightarrow \eta\mu 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{\kappa\cdot\pi}{3}$.

Το μέτρο της ταχύτητας του είναι $|\upsilon(t)| = |9\sigma\upsilon\nu 3t| = 9|\sigma\upsilon\nu 3t|$ τότε το μέτρο της ταχύτητας είναι $\left|\upsilon\left(\frac{\kappa\cdot\pi}{3}\right)\right| = \left|9\sigma\upsilon\nu 3\frac{\kappa\cdot\pi}{3}\right| = 9|\sigma\upsilon\nu\kappa\pi| = 9$, που είναι η μέγιστη τιμή γιατί η $|\sigma\upsilon\nu\kappa\pi| = 1$ είναι η μέγιστη τιμή του $|\sigma\upsilon\nu\kappa\pi|$.

7. Δυο βάρκες $\mathbf{B_1}$ και $\mathbf{B_2}$ κινούνται κατά μήκος των αξόνων χ΄ χ και ψ΄ ψ, όπως στο σχήμα, και η απομάκρυνσή τους από το Ο(0 , 0) είναι αντίστοιχα για την $\mathbf{B_1}$ από τον τύπο : $S_1(t) = 2t + 1$ και για την $\mathbf{B_2}$ από τον τύπο : $S_2(t) = t + 7$.



α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\mathbf{B_1B_2}$ τη χρονική στιγμή t = 1 .

β) Αφού υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{OB_1B_2}$ ως συνάρτηση του t, κατόπιν να βρείτε ρυθμό μεταβολής του τη χρονική στιγμή t = 7.

Απάντηση :

α) Η απόσταση ανάμεσα στις βάρκες είναι το μήκος B_1B_2 και μπορεί να υπολογισθεί με δυο τρόπους :

1ος τρόπος : από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο OB_1B_2 :

$$(B_1B_2)^2 = (OB_1)^2 + (OB_2)^2 \Rightarrow (B_1B_2)^2 = (2t-1)^2 + (t+7)^2 =$$

$$4t^2 - 4t + 1 + t^2 + 14t + 49 \Rightarrow (B_1B_2)^2 = 5t^2 + 10t + 50 \Rightarrow$$

$$(B_1B_2)(t) = \sqrt{5t^2 + 10t + 50}\,.$$

2ος τρόπος : Το σημείο B_1 έχει συντεταγμένες $B_1(0\,,\,2t+1)$ και το σημείο B_2 έχει συντεταγμένες $B_2(t+7\,,0)$ οπότε :

$$(B_1B_2) = \sqrt{(t+7-0)^2 + (0-2t-1)^2} \Rightarrow \ldots (B_1B_2)(t) = \sqrt{5t^2 + 10t + 50}$$

Σε κάθε περίπτωση $\left((B_1B_2)(t)\right)' = \left(\sqrt{5t^2 + 10t + 50}\right)' = \left(\left(5t^2 + 10t + 50\right)^{\frac{1}{2}}\right)'$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$= \frac{1}{2}\left(5t^2+10t+50\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(5t^2+10t+50\right)' = \frac{1}{2}\left(5t^2+10t+50\right)^{-\frac{1}{2}}(10t+10) =$$

$$\frac{1}{2}10\left(5t^2+10t+50\right)^{-\frac{1}{2}}(t+1) \Rightarrow \left((B_1B_2)(t)\right)' = 5\left(5t^2+10t+50\right)^{-\frac{1}{2}}(t+1).$$

Άρα τη χρονική στιγμή t = 1, ο ρυθμός μεταβολής είναι :

$$\left((B_1B_2)(1)\right)' = 5\left(5\cdot 1+10\cdot 1+50\right)^{-\frac{1}{2}}(1+1) = 10(65)^{-\frac{1}{2}}.$$

β) Το εμβαδόν του τριγώνου OB_1B_2 είναι $(OB_1B_2)(t) = \frac{1}{2}(OB_1)\cdot(OB_2) =$

$$\frac{1}{2}(2t+1)(t+7) = \frac{2t^2+15t+7}{2}$$

Άρα $\left[(OB_1B_2)(t)\right]' = \left(\frac{2t^2+15t+7}{2}\right)' = \frac{4t+15}{2}$, άρα τη χρονική στιγμή

t = 7, ο ρυθμός μεταβολής είναι :

$$\left[(OB_1B_2)(7)\right]' = \frac{4\cdot 7+15}{2} \Rightarrow \left[(OB_1B_2)(7)\right]' = \frac{43}{2}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.	☐	☐
2.	Αν ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}=\pm\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0	☐	☐
3.	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 \in R$, τότε ισχύει : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0+h)-f(\chi_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi_0-h)-f(\chi_0)}{h}$	☐	☐
4.	Αν ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}\neq\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+}\dfrac{f(\chi)-f(\chi_0)}{\chi-\chi_0}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ_0	☐	☐
5.	Η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{\chi}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.	☐	☐
6.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\chi_0, f(\chi_0))$	☐	☐

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(\chi)=\dfrac{\chi^3}{e^{\chi}}$, $g(\chi)=\dfrac{e^{\chi}}{2\chi^2}$.

Να βρείτε :

α) Την πρώτη παράγωγο της f και της g.

β) Τις παραγώγους $f'(1)$ και $g'(1)$.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των f και g στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ αντίστοιχα, είναι ευθείες κάθετες.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{-\chi}$.

α) Να βρείτε την $f'(\chi)$.

β) Να δείξετε ότι : $f'(\chi)+f(\chi)=0$, για κάθε $\chi \in R$.

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία $\psi=e^{-1}(2-\chi)$ είναι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση στο σημείο $A(1, f(1))$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2-3\chi$.

Να βρείτε :

α) Την εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$.

β) Την εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση : $\chi+\psi+3=0$.

γ) Την εφαπτομένη που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση : $\chi-\psi-2=0$.

δ) Την εφαπτομένη που περνάει από το σημείο $B(-1, 0)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=(3\chi-2)\cdot\sqrt{(\chi+1)^3}$.

Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της f .

β) Την $f'(\chi)$.

γ) Την $f'(0)$.

δ) Την εφαπτομένη στο σημείο $A(0\,,\,f(0))$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=2\chi\cdot\sqrt{(\chi+1)^3}$.

Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της f .

β) Την $f'(\chi)$.

γ) Την $f'(0)$.

δ) Την εφαπτομένη στο σημείο $A(0\,,\,f(0))$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2\ln\chi$.

Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της f .

β) Την $f'(\chi)$.

γ) Την $f'(1)$.

δ) Την εφαπτομένη στο σημείο $A(1\,,\,f(1))$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi+\ln\chi$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε την $f'(\chi)$.

γ) Να δείξετε ότι $f'(e)=\dfrac{f(e)}{e}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ) Την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f, που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = \chi$ (διχοτόμος της $\chi O \psi$).

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi \ln \chi$.

Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού της f.

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f, που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = -\chi$ (διχοτόμος της $\chi' O \psi$).

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 + 2\chi^2 + 3\chi + 1$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα $\chi' \chi$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{\chi^2}{\chi - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f, η οποία να είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 2\chi$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 + \chi^2 - 2\chi + 1$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi = \chi + 3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\frac{\chi^2}{3}$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(3)$.

β) Το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο με $\chi = 3$.

γ) Την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\frac{2}{\chi^2}$, $\chi \in R$ και $\chi \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f'(\alpha)=-\frac{4}{\alpha^3}$, για κάθε $\alpha \in R$ με $\alpha \neq 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $A\left(\alpha, \frac{2}{\alpha^2}\right)$ της γραφικής παράστασης της f

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2+3\chi-5$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την τιμή $f(-1)$.

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης, της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $\chi^2+\chi-2=0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \alpha\chi^2$, $\chi \in R$, $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $A(2, f(2))$ να είναι 4.

γ) Την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης στο $A(2, f(2))$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=(\chi+1)^2$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Την $f'(4)$.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4\,,\,f(4))$.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\alpha(\chi+1)^2$, $\chi, \alpha \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Να προσδιορίσετε τον α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $A(1\,,\,f(1))$ να είναι 4.

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1\,,\,f(1))$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2+1$, $\chi \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $\chi = 0$.

γ) Την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης στο $A(0,f(0))$

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2-5\chi+6$, $\chi \in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^2-3\alpha\chi+2$, $\chi\in R$.

α) Να βρείτε την $f'(\chi)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$ να σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ γωνία 45°.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης στο $A(2,f(2))$

21. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=2\chi^2-\alpha\chi$, $\chi\in R$, $\alpha\in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2,f(2))$ να σχηματίζει με τον άξονα χ‘ χ γωνία 45°.

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης στο $A(2,f(2))$

22. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)\ f(\chi)=-\chi^2+3\chi-1$, $\chi\in R$.

Να βρείτε :

α) Την $f'(\chi)$.

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης στην καμπύλη της f, που σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ γωνία 135°.

23. Να βρεθεί η γωνία την οποία σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=-2\chi^2+\chi-3$ στο σημείο $A\left(\frac{1}{4},f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = 2\chi^2 + \alpha\chi + \beta$ και η ευθεία $\psi = 3\chi - 1$ όπου $\chi, \alpha, \beta \in R$.

Να βρείτε τα α, β ώστε η ευθεία $\psi = 3\chi - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $\chi = 2$.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 + 2\alpha\chi + \beta$ όπου $\chi, \alpha, \beta \in R$.

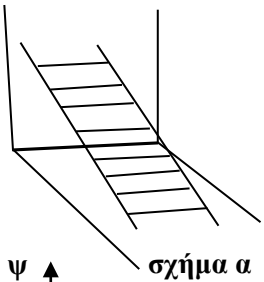
Να βρείτε τα α, β ώστε η ευθεία $\psi = \chi + 3$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $\chi = 1$.

26. Αφού επαληθεύσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f(\chi) = \chi^2$ και $g(\chi) = \chi^2 - 2\chi + 1$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο να δείξετε ότι οι εφαπτόμενές τους στο σημείο αυτό είναι κάθετες .

27. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 + \alpha\chi + \beta$ όπου $\chi, \alpha, \beta \in R$.

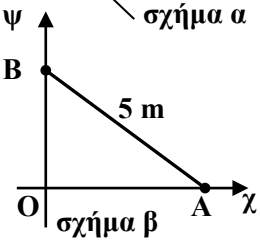
Να βρείτε τα α, β ώστε η γραφική παράσταση να περνάει από το σημείο (0 , 1) και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό να είναι παράλληλη ευθεία $\psi = 5\chi + 2$.

28. Σκάλα με μήκος 5 m στηρίζεται σε τοίχο όπως φαίνεται σε κάτοψη στο **σχήμα α** και σε τομή στο σχήμα β. Τα άκρα Α και Β της σκάλας «ολισθαίνουν» πάνω στις πλευρές Οψ και Οχ αντίστοιχα.



σχήμα α

Η θέση του σημείου **Β,** στον άξονα Οψ, δίνεται από την συνάρτηση : $\mathbf{S(t) = 3 \cdot t\ ,\ t \in [0\ ,\ 5]}$, όπου t ο χρόνος σε sec.



σχήμα β

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου t.

β) Ποιος είναι ο ρυθμός του εμβαδού $\mathbf{E(t)}$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 4 m .

Δαμιανός Μωραΐτης

29. Δίνεται η ορθή γωνία χΟψ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m, του οποίου τα άκρα Α και Β «ολισθαίνουν» πάνω στις πλευρές Οψ και Οχ αντίστοιχα.

Το σημείο **Β** κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon = 2\frac{m}{sec}}$ και η θέση του πάνω στον άξονα, Οχ δίνεται από την συνάρτηση : $\mathbf{g(t) = \upsilon \cdot t\ ,\ t \in [0\ ,\ 5]}$, όπου t ο χρόνος σε sec.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου t.

β) Να βρεθεί το μήκος (ΟΑ), τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του **Ε(t)** ως προς το t είναι $\frac{217}{6}$. $[\text{Απ. } OA = 6]$

30. Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο $S(t) = 2t + t^2$, όπου το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα. Να βρείτε :

α) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] sec.

β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 1 sec (1 sec μετά την εκκίνησή του).

31. Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $S(t) = 3t^2 - t$.

Να βρείτε :

α) Τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [2, 4] sec.

β) Τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 3 sec (3 sec μετά την εκκίνησή του).

32. Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t) = 3t^2 - 5$.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = t_0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν t = 10 sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

33. Η θέση ενός κινητού το οποίο κινείται πάνω σε άξονα, δίνεται από τον τύπο : $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$ όπου t είναι min , $t \in [0 , 10]$ και S σε Km.

Να βρείτε :

α) Την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.

β) Πόσα min μετά την εκκίνηση του το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».

γ) Την επιτάχυνση όταν το κινητό είναι «προς στιγμήν ακίνητο».

δ) Να βρείτε πότε το κινητό απομακρύνεται από το σημείο εκκίνησης του και πότε επιστρέφει προς αυτό.

ε) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που θα διανύσει το κινητό σε 8 min από τη στιγμή εκκίνησης.

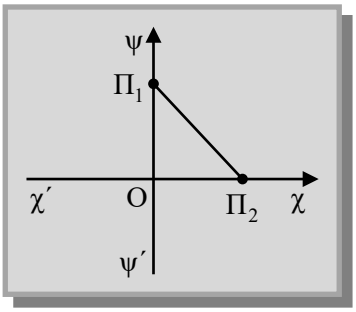
34. Ένα ασανσέρ κινείται κατακόρυφα και η απομάκρυνση από το ισόγειο δίνεται από τον τύπο : $S(t) = 5\sigma\upsilon\nu 3t$ όπου t είναι sec και $t \in [0 , 10]$.

α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του.

β) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης .

γ) Να δείξετε ότι όταν η επιτάχυνση είναι 0 τότε η ταχύτητα του ασανσέρ έχει τη μέγιστη τιμή .

35. Δυο πλοία Π_1 και Π_2 κινούνται κατά μήκος των αξόνων χ΄χ και ψ΄ψ όπως στο σχήμα, και η απομάκρυνσή τους από το $O(0, 0)$ είναι αντίστοιχα για την Π_1 από τον τύπο : $S_1(t) = 3t - 1$ και για την Π_2 από τον τύπο : $S_2(t) = 2t + 1$.



α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $\Pi_1\Pi_2$ τη χρονική στιγμή t = 2 .

β) Αφού υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $O\Pi_1\Pi_2$ ως συνάρτηση του t, κατόπιν να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του τη χρονική στιγμή t = 5.

36. Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+t)^{-1}$.

α) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων (t = 0).

β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν t = 9 ώρες.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν t = 9 ώρες.

δ) Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(9, P(9))$.

37. Ο πληθυσμός A μιας περιοχής δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη) από τον τύπο : $A(t) = 10 \cdot e^{0,04 \cdot t}$ (σε χιλιάδες).

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο, ύστερα από 25 έτη.

38. Έστω ότι $\mathbf{f(t)}$ είναι η ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού που έχει απορροφηθεί από το έδαφος και δεν είναι επικίνδυνο, κατά την χρονική στιγμή t σε έτη, όπου $t \geq 0$ και $f : [0\ ,\ +\infty) \to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με : $f(t) = 1 - e^{-\frac{t}{50}}$.

Να βρεθεί η σχέση του ρυθμού μεταβολής τη χρονική στιγμή t = 200 έτη και του ρυθμού που έχει η απορρόφηση κατά τη χρονικά στιγμή $t_0 = 0$.

39. Δίνεται η συνάρτηση με το τύπο : $P(t) = 2t + \mu$, t έτη , $t \geq 0$ και $\mu \in R$.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα (σε χιλιάδες ευρώ) που δίνονται από τον τύπο : $E(t) = (t-1) \cdot P(t)$.

Το κόστος λειτουργίας δίνεται από τον τύπο : $K(t) = P(t+4)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α) Να βρείτε την συνάρτηση του κέρδους F(t) αν είναι γνωστό ότι τον 1ο χρόνο η επιχείρηση είχε ζημιά 12.000 €.

β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που θα αρχίσει η επιχείρηση να έχει κέρδη.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής την συνάρτηση του κέρδους F(t), στο τέλος του 2ου έτους.

40. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2-\chi+1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 3.

β. Σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα χ΄χ

γ. Είναι παράλληλη στην ευθεία ψ = χ + 4.

δ. Είναι κάθετη στην ευθεία $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 3$.

ε. Είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

στ. Είναι παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ.

ζ. Περνάει από το σημείο Α(– 1, 0).

41. Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α. $f(\chi)=\ln\chi$ στο Α(1, 0) .

β. $f(\chi)=|2-\chi|$ στο Α(2, 0) .

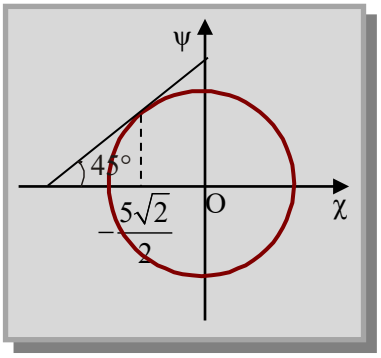
γ. $f(\chi)=\sqrt{\chi^3}$ στο Ο(0, 0) .

δ. $f(\chi)=\sqrt[3]{\chi^2}$ στο Ο(0, 0) .

ε. $f(\chi)=\sqrt{\chi}$ στο Ο(0, 0) .

στ. $f(\chi)=\frac{2\chi-1}{\chi-2}$ στο $A\left(-2,\frac{3}{4}\right)$.

42. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



Υπόδειξη : Αν ξεκινήσεις από την εξίσωση κύκλου $\chi^2+\psi^2=\rho^2$ θα δεις ότι το άνω ημικύκλιο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi)=\sqrt{\rho^2-\chi^2}$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$, $\alpha\neq 0$.

Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να έχουν τα α, β, γ ∈ R, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη στον χ΄χ) .

44. Δίνονται οι συναρτήσεις :

α. $f(\chi)=2\chi^3-3\chi^2+2\chi+3$

β. $g(\chi)=\chi^3-\chi^2+2\chi+5$

γ. $h(\chi)=2\chi^3+3\chi^2+5\chi-13$

Να δείξετε ότι σε καμία από τις γραφικές παραστάσεις : C_f , C_g , C_h δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη (παράλληλη στον χ΄χ) .

45. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ε_1 , ε_2 της C_f της παραβολής $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ στα σημεία τομής της C_f με τον άξονα χ΄χ τέμνονται σε σημείο που είναι πάνω στον άξονα συμμετρίας της παραβολής $\left(\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.

46. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ε_1 , ε_2 της C_f της παραβολής $f(\chi)=\chi^2-6\chi+8$ στα σημεία τομής της C_f με τον άξονα χ΄χ τέμνονται σε σημείο που είναι πάνω στην ευθεία χ = 3 (άξονα συμμετρίας της παραβολής)

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\ln(\alpha\chi)}{\chi}$ με $\alpha>0$ και $\chi>0$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$ για κάθε $\alpha>0$.

β. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(\chi_0, f(\chi_0))$, για τις διάφορες τιμές του α, «περνάνε» από το ίδιο σημείο.

<u>Υπόδειξη</u> : Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι μια παραμετρική οικογένεια ευθειών, άρα βρες δυο από αυτές και βρες την τομή τους

48. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

49. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-1)^2$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

50. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει η σχέση :
$f(\alpha+\chi)-f(\alpha-\chi)=\lambda\chi+\kappa$ για κάθε $\alpha, \chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $2\chi+\lambda\psi+\kappa=0$.

51. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει η σχέση :
$f(\alpha+\chi)-f(\alpha-\chi)=-2\chi+3$ για κάθε $\alpha, \chi \in R$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(\alpha, f(\alpha))$, είναι κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας του 1ου και 3ου τεταρτημόριου (ευθεία $\psi=\chi$).

52. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R.

Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f, και η C_g :

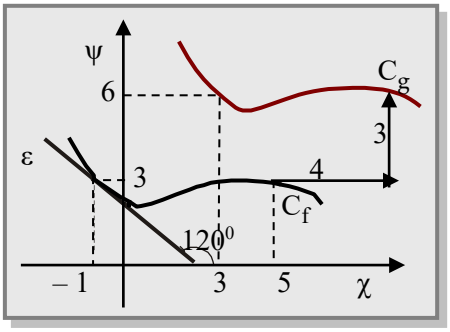
α. Να έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $\chi = \chi_0$ και

β. Στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $\chi = \chi_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

53. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \frac{1}{3}\chi^3 - \chi^2 + 1$ και $g(\chi) = \chi^2 - 3\chi + 1$.

Να αποδείξετε ότι η C_f, και η C_g, δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, το οποίο να βρείτε.

54. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο (0, f (0)), όπως στο διπλανό σχήμα . Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g.



Αν η σχέση, με βάση και το σχήμα, η οποία συνδέει τις συναρτήσεις f και g είναι g(χ) = f (χ – 4) + 3.

α. Να βρείτε την g΄(χ) για κάθε χ ∈ R.

β. Να βρείτε την g΄ (4).

55. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει :

f (lnχ) = χ·lnχ – χ, όπου χ > 0.

α. Να αποδείξετε ότι η C_f, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\chi_0 = 1$ και τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ

56. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi) = \sqrt{\chi}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α (0, 1).

57. Να δείξετε ότι :

α. Αν $f(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu\chi - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi$ τότε $f'(\chi) + f(\chi)\cdot\varepsilon\varphi\chi - \eta\mu\chi = 0$.

β. Αν $f(\chi) = \ln\dfrac{1}{\chi+1}$ τότε $\chi\cdot f'(\chi) + 1 = e^{f(\chi)}$.

58. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $f'(4) = 0$ και $\left(f'(\chi)\right)^2 = f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$ τότε ,

α. Να βρεθεί ο τύπος της f.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = -\chi + 1$.

<u>Υπόδειξη :</u> Αν ο βαθμός της f είναι ν τότε η f΄ έχει βαθμό ν – 1, άρα 2 (ν – 1) = ν …….

59. Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή Ο τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t+1)$, $t \geq 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α. Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β. Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

γ. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

60. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi$. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της καμπύλης στο χ_0 αν είναι γνωστό ότι $f(\chi_0) = 16$.

$$\left(\text{Υπ.} f(\chi_0) = 16 \Rightarrow \eta\mu\chi_0 = 16 \cdot \sigma\upsilon\nu\chi_0 \text{ και } \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1\right)$$

61. Δίνεται η $f(\chi) = \dfrac{\alpha}{\chi}$ και η ευθεία ε : ψ = β·χ , α, β ομόσημοι.

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της $f(\chi) = \dfrac{\alpha}{\chi}$, στα σημεία που αυτή τέμνεται με την ευθεία ε είναι παράλληλες.

62. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ψ = 2χ + 3 δεν μπορεί να είναι εφαπτομένη της $f(\chi) = \chi^3 + 2$.

63. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$f(\chi) = \ln\chi$ και $g(\chi) = \dfrac{\chi^2}{2e}$

α. έχουν κοινό σημείο το οποίο και να βρείτε.

β. έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο, την οποία και να βρείτε

64. Δίνετε η συνάρτηση $f(\chi) = 6\chi^5 - 20\chi^3$

Να αποδείξετε ότι

α. Τα σημεία στα οποία υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη είναι συνευθειακά.

β. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος είναι συνευθειακά.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Θεώρημα Rolle

***Αν μια συνάρτηση* f :**

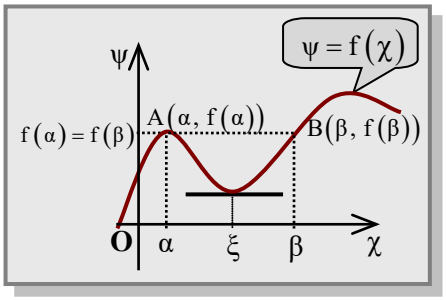
- ✓ Είναι ***συνεχής*** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$
- ✓ Είναι ***παραγωγίσιμη*** στο διάστημα (α, β)
- ✓ και επί πλέον ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$,

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε : $f'(\xi) = 0$.

Παρατήρηση :

Με τη βοήθεια του Θ. Rolle μπορείς να εξασφαλίσεις την ύπαρξη **μιας τουλάχιστον ρίζας** της εξίσωσης $f'(\chi) = 0$ **σε ένα** διάστημα Δ.

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Rolle



Αν για μια **συνάρτηση f** ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Rolle** στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον **ένα** $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η **εφαπτομένη της** C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι **παράλληλη στον άξονα χ'χ**.

Παραδείγματα :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6$.

α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[2, 3]$ και

β. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον χ΄χ.

Απάντηση :

α. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 3]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και $f(2) = 0 = f(3)$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[2, 3]$.

β. Για να βρεις το σημείο $(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$ θα βρεις την $f'(\chi)=\left(\chi^2-5\chi+6\right)'=2\chi-5$ και θα λύσεις την εξίσωση $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 2\xi-5=0 \Leftrightarrow \xi=\frac{5}{2}$.

Παρατήρηση :

Αν θες να εξασφαλίσεις πως υπάρχει λύση για την : $f'(\chi)=0$ σε κάποιο διάστημα (α,β), τότε μπορείς να «δουλέψεις» με τρεις τρόπους :

1ον Να λύσεις , αν είναι εύκολο, την $f'(\chi)=0$.

2ον Να προσπαθήσεις να εφαρμόσεις Θ. Rolle για την f στο $[\alpha,\beta]$ οπότε για την $f'(\chi_0)=0$ υπάρχει μια τουλάχιστον λύση που ανήκει στο (α,β), όπως στο πιο πάνω και στο πιο κάτω παράδειγμα .

3ον Να θεωρήσεις την $f'(\chi)$ ως μια νέα συνάρτηση **g** τέτοια ώστε : $g(\chi)=f'(\chi)$ και να προσπαθήσεις να εφαρμόσεις Bolzano για την **g.**

2. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=e(\chi-2)\cdot\ln(\chi+e-1)-e^{\chi-1}(\chi-1)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο με τετμημένη χ_0 να είναι παράλληλη του άξονα $\chi'\chi$.

Απάντηση :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε είναι και συνεχής στο $[1,2]$. Επί πλέον ισχύει $f(1)=\cdots=-e$, $f(2)=\cdots=-e$ άρα $f(1)=f(2)$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[1,2]$, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(1,2)$ έτσι ώστε $f'(\chi_0)=0$ δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(1,2)$ έτσι ώστε η **εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$.**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R, για τις οποίες ισχύει : $f'(\chi)=g(\chi)$, $g'(\chi)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$ **(1)** και $f(3)=-3$, $g(3)=1$.

Να αποδείξτε ότι :

α. $f^2(\chi)+g^2(\chi)=10$ για κάθε $\chi \in R$.

β. $f^4(\chi)+g^4(\chi)=100-2\cdot f^2(\chi)\cdot g^2(\chi)$

Απάντηση :

α. Για κάθε $\chi \in R$ είναι : $\left[f^2(\chi)+g^2(\chi)\right]'=2f(\chi)f'(\chi)+2g(\chi)g'(\chi) \overset{(1)}{=}$

$2f(\chi)g(\chi)+2g(\chi)\left[-f(\chi)\right]=0$. Άρα $f^2(\chi)+g^2(\chi)=c$, $c\in R$, οπότε

για $\chi=3$ έχουμε : $f^2(3)+g^2(3)=c \Rightarrow (-3)^2+(1)^2=c \Rightarrow$ **c = 10.**

β. $f^4(\chi)+g^4(\chi)=\left(f^2(\chi)\right)^2+\left(g^2(\chi)\right)^2=$

$\left(f^2(\chi)+g^2(\chi)\right)^2-2f^2(\chi)\cdot g^2(\chi)=100-2f^2(\chi)\cdot g^2(\chi)$.

2. Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού (Θ. Μ. Τ.)

Αν μια συνάρτηση f :

- ✓ Είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$
- ✓ Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε : $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Παρατήρηση :

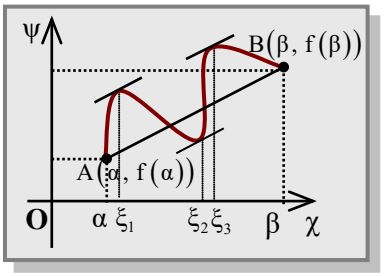
Με τη βοήθεια του Θ. Μ. Τ. μπορείς να εξασφαλίσεις την ύπαρξη **μιας τουλάχιστον ρίζας** της εξίσωσης $f'(\chi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ **σε ένα** διάστημα Δ.

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Μ. Τ.

Έστω **συνάρτηση f,** για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Μ. Τ**. στο $[\alpha, \beta]$. Έστω η ευθεία **ΑΒ** με $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Ο συντελεστής της ΑΒ είναι :

$$\lambda_{AB} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$



Από το Θ. Μ. Τ. έχεις ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ άρα $f'(\xi) = \lambda_{AB}$ και επειδή ο $f'(\xi)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης άρα **υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε **η εφαπτομένη της** C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι **παράλληλη στην ευθεία ΑΒ**.

Παραδείγματα :

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi + 1$.

α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Μ. Τ** στο διάστημα $[1, 2]$ και

β. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία **ΑΒ** με $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$.

Απάντηση :

α. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως πολυωνυμική, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Μ. Τ** στο $[1, 2]$.

β. Για να βρεις την τετμημένη ξ του σημείου $(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία **ΑΒ,** θα βρεις αρχικά την

$f'(\chi)=\left(\chi^3-3\chi+1\right)'=3\chi^2-3$ και στη συνέχεια θα λύσεις την εξίσωση

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\Rightarrow 3\xi^2-3=\frac{3-(-1)}{2-1}=4\Rightarrow 3\xi^2=7\Rightarrow \xi=\pm\sqrt{\frac{7}{3}},$$

επειδή $\xi\in[1,2]$ άρα $\xi=\sqrt{\frac{7}{3}}$, άρα είναι το σημείο $\Gamma\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right)$.

5. Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου (στιγμιαία ταχύτητα) ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.

Απάντηση :

Έστω $\chi=S(t)$, $t\in[0,2,5]$ η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξεις ότι υπάρχει $t_0\in(0,2,5)$, τέτοιο ώστε $\upsilon(t_0)=S'(t_0)=80$.

Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο $[0,2,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2,5)$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_0\in(0,2,5)$ τέτοιο ώστε $\upsilon(t_0)=S'(t_0)=\frac{S(2,5)-S(0)}{2,5-0}=\frac{200-0}{2,5}=80$ χιλ. την ώρα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha\neq 0$ $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

α. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[\chi_1,\chi_2]$ και

β. ο αριθμός $\chi_0\in(\chi_1,\chi_2)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ., είναι ο $\chi_0=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$, δηλαδή το κέντρο του διαστήματος $[\chi_1,\chi_2]$.

***Απάντηση* :**

Η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ είναι συνεχής στο $[\chi_1,\chi_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (χ_1,χ_2), με

$f'(\chi)=\left(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma\right)'=2\alpha\chi+\beta$, επομένως, σύμφωνα με το Θ. Μ. Τ.

υπάρχει $\chi_0\in(\chi_1,\chi_2)$, τέτοιο, ώστε $f'(\chi_0)=\dfrac{f(\chi_2)-f(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}$. **(1)**

Όμως $\dfrac{f(\chi_2)-f(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}=\dfrac{\alpha\chi_2^2+\beta\chi_2+\gamma-\alpha\chi_1^2-\beta\chi_1-\gamma}{\chi_2-\chi_1}=$

$\dfrac{\alpha(\chi_2-\chi_1)(\chi_2+\chi_1)+\beta(\chi_2-\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}=\dfrac{(\chi_2-\chi_1)\left(\alpha(\chi_2+\chi_1)+\beta\right)}{\chi_2-\chi_1}=$

$\alpha(\chi_2+\chi_1)+\beta$, επομένως, η σχέση **(1)** γίνεται: $2\alpha\chi_0+\beta=\alpha(\chi_2+\chi_1)+\beta \Leftrightarrow$

$2\chi_0=\chi_2+\chi_1 \Leftrightarrow \chi_0=\dfrac{\chi_2+\chi_1}{2}$

7. Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,5]$ ισχύει: $f'(-1)=3$ και $f(5)=8$. Αν $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi+2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,5)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=-\dfrac{13}{42}$

Απάντηση :

Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,5]$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως είναι και συνεχής στο διάστημα $[-1,5]$, βάση γνωστού θεωρήματος :

«Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα Δ.

Από το Θ. Μ. Τ. έχεις ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,5)$ τέτοιο, ώστε :

$$g'(\xi)=\frac{g(5)-g(-1)}{5-(-1)}=\frac{\frac{f(5)}{7}-\frac{f(-1)}{1}}{6}=\frac{\frac{8}{7}-3}{6}=\frac{8-21}{42}\Rightarrow g'(\xi)=-\frac{13}{42}.$$

Παρατήρηση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όταν θέλεις να εφαρμόσεις το Θ. Μ. Τ. για μια συνάρτηση f, σ' ένα διάστημα [α , β].

- ✓ Αν δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό [α, β], τότε έχεις εξασφαλίσει ότι είναι και συνεχής στο [α, β] με βάση το γνωστό θεώρημα.
- ✓ Αν δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α, β), τότε έχεις εξασφαλίσει ότι είναι και συνεχής στο ανοικτό (α, β), με βάση το γνωστό θεώρημα και θα πρέπει να εξασφαλίσεις ότι η **f *είναι συνεχής*** και στα άκρα **α** και **β**.

8. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξτε ότι :

α. Για τη συνάρτηση $g(\chi)=\ln(f(\chi))$ εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ. στο $[\alpha,\beta]$.

β. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε : $\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

Απάντηση :

α. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων lnχ και $f(\chi)$.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), με : $g'(\chi)=[\ln f(\chi)]'=\dfrac{f'(\chi)}{f(\chi)}$,

άρα εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ. για τη g στο $[\alpha,\beta]$.

β. Από το **α.** έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε :

$$g'(\xi)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Rightarrow$$

$$\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \Rightarrow \ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\ln e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}} \Rightarrow$$

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}.$$

9. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ και ισχύει $0 \le f'(\chi) \le 2$ για κάθε $\chi \in (-1, 3)$.

Αν $f(3)=-1$, να αποδείξετε ότι $-9 \le f(-1) \le -1$.

Απάντηση :

Αφού ισχύει $0 \le f'(\chi) \le 2$ για κάθε $\chi \in (-1, 3)$ σημαίνει ότι είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το $(-1, 3)$, η f είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ άρα από το Θ. Μ. Τ. θα έχεις ότι : Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 3)$, ώστε :

$f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{-1-f(-1)}{4}$, επειδή $0 \le f'(\chi) \le 2$ άρα θα είναι

$$0 \le \frac{-1-f(-1)}{4} \le 2 \Rightarrow 0 \le -1-f(-1) \le 8 \Rightarrow 1 \le -f(-1) \le 9 \Rightarrow$$

$$-1 \ge f(-1) \ge -9 \Rightarrow -9 \le f(-1) \le -1.$$

10. Να αποδείξετε ότι ***δεν υπάρχει*** συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με : $\mathbf{1 \le f(0) \le 2}$, $\mathbf{2 \le f(2) \le 9}$ και $\mathbf{5 \le f'(\chi) \le 8}$ **για κάθε** $\boldsymbol{\chi \in (0, 2)}$.

Απάντηση :

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ άρα από το Θ. Μ. Τ. έχουμε ότι : Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \Rightarrow 5\le\frac{f(2)-f(0)}{2-0}\le 8 \ .$$

Όμως από τις ανισωτικές σχέσεις που δίνει έχεις :

✓ $2\le f(2)\le 9$ **(1)**

✓ $1\le f(0)\le 2 \Rightarrow -1\ge -f(0)\ge -2 \Rightarrow -2\le -f(0)\le -1$ **(2)**

Και αν προσθέσεις κατά μέλη θα έχεις : $0\le f(2)-f(0)\le 8 \Rightarrow$

$0\le\frac{f(2)-f(0)}{2}\le 4$ άτοπο γιατί όπως υπέδειξες πιο πάνω είναι

$5\le\frac{f(2)-f(0)}{2-0}\le 8$.

11. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=\begin{cases}\alpha\chi^2+\beta\chi+1 & \text{αν } \chi<1\\ 2\chi^3+\beta\chi+\gamma & \text{αν } \chi\ge 1\end{cases}$.

Να βρεθούν τα α , β, γ ∈ R, ώστε για την f να εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ. στο $[-1, 2]$.

Απάντηση :

Πρέπει : $\begin{cases}\text{Η f να είναι συνεχής στο } [-1, 2] & (1)\\ \text{Η f να είναι παραγωγίσιμη στο } (-1, 2) & (2)\end{cases}$

Το διάστημα $[-1, 2]$ λόγω του τύπου της f θα το χωρίσεις σε δυο διαστήματα : $[-1, 1)$ και $(1, 2]$.

✓ Αν $\chi\in[-1, 1)$, τότε η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

✓ Όμοια αν $\chi\in(1, 2]$.

Για να είναι η f συνεχής στο $[-1, 2]$, πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0=1$, δηλαδή πρέπει: $\lim\limits_{\chi\to -1^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1^+} f(\chi)=f(1)$

Όμως $\lim\limits_{\chi\to -1^-} f(\chi)=\alpha+\beta+1$, $\lim\limits_{\chi\to -1^+} f(\chi)=2+\beta+\gamma$ και $f(1)=2+\beta+\gamma$

Οπότε : $\alpha+\beta+1=2+\beta+\gamma \Rightarrow \alpha-\gamma=1$ **(3)**

Αν $\chi\in(-1, 1)$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=2\alpha\chi+\beta$.

Αν $\chi \in (1, 2)$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi) = 6\chi^2 + \beta$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη

και στο $\chi_0 = 1$, δηλαδή πρέπει : $\lim\limits_{\chi \to 1^-} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim\limits_{\chi \to 1^+} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1}$

και ταυτόχρονα πρέπει τα όρια αυτά να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Όταν $\boldsymbol{\chi < 1}$ θα είναι : $\dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \dfrac{\alpha\chi^2 + \beta\chi + 1 - 2 - \beta - \gamma}{\chi - 1} =$

$$\frac{\alpha\chi^2 + \beta\chi - \beta - \gamma - 1}{\chi - 1} \overset{(3)}{=} \frac{\alpha\chi^2 + \beta\chi - \beta - \alpha}{\chi - 1} = \frac{\alpha(\chi - 1)(\chi + 1) + \beta(\chi - 1)}{\chi - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \alpha(\chi + 1) + \beta.$$

Άρα $\lim\limits_{\chi \to 1^-} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim\limits_{\chi \to 1^-} \left[\alpha(\chi + 1) + \beta\right] = 2 \cdot \alpha + \beta$

Όταν $\boldsymbol{\chi > 1}$ έχεις : $\dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \dfrac{2\chi^3 + \beta\chi + \gamma - 2 - \beta - \gamma}{\chi - 1} =$

$$\frac{2(\chi - 1)(\chi^2 + \chi + 1 + \beta(\chi - 1)}{\chi - 1} = \frac{(\chi - 1)\left[2\left(\chi^2 + \chi + 1\right) + \beta\right]}{\chi - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = 2\left(\chi^2 + \chi + 1\right) + \beta.$$

Άρα $\lim\limits_{\chi \to 1^+} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim\limits_{\chi \to 1^+} \left[2\left(\chi^2 + \chi + 1\right) + \beta\right] = 6 + \beta$

Άρα $\lim\limits_{\chi \to 1^-} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} = \lim\limits_{\chi \to 1^+} \dfrac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} \Rightarrow 2\alpha + \beta = 6 + \beta \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 3}$

και λόγω της **(3)** είναι $\boldsymbol{\gamma = 2}$.

Συνεπώς όταν : $\boldsymbol{\alpha = 3}$, $\boldsymbol{\gamma = 2}$ και $\beta \in R$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο διάστημα $[\boldsymbol{-1, 2}]$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Αν στην προηγούμενη άσκηση ζητούσε τις τιμές των α, β, γ, ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$, τότε εκτός από τις συνθήκες για να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη η f, θα απαιτούσες επί πλέον και $f(-1) = f(2)$ και θα «έβγαινε» **α = 3** , **γ = 2** και **β = – 2 .**

3. Συνέπειες του Θ. Μ. Τ.

Θεώρημα Ι

Αν μια συνάρτηση f :

- ✓ Είναι **συνεχής σε ένα διάστημα Δ**.
- ✓ Και $f'(\chi) = 0$, **για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ**

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξεις ότι για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ ισχύει $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

Πράγματι :

Έστω δυο **τυχαία** στοιχειά χ_1 και $\chi_2 \in \Delta$ τότε :

- ✓ Αν $\chi_1 = \chi_2$ προφανώς είναι και $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ αφού η f είναι συνάρτηση.
- ✓ Αν $\chi_1 < \chi_2$, τότε στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής (η f είναι συνεχής στο Δ άρα και στο $[\chi_1, \chi_2]$ και είναι παραγωγίσιμη σε κάθε χ ∈ Δ, αφού $f'(\chi) = 0$, επομένως παραγωγίσιμη και στο (χ_1, χ_2)). Άρα από Θ. Μ. Τ. θα υπάρχει

$$\xi \in (\chi_1, \chi_2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή το $\xi \in (\chi_1, \chi_2)$ άρα είναι εσωτερικό σημείο του Δ οπότε θα είναι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$f'(\xi)=0$ άρα, λόγω της **(1)** θα είναι $\dfrac{f(\chi_2)-f(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}=0 \Rightarrow f(\chi_1)=f(\chi_2)$.

✓ Αν $\chi_1>\chi_2 \Leftrightarrow \chi_2<\chi_1$, τότε το διάστημα είναι το $[\chi_2,\chi_1]$ και η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής (η f είναι συνεχής στο Δ άρα και στο $[\chi_2,\chi_1]$ και είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\chi\in\Delta$, αφού $f'(\chi)=0$, επομένως παραγωγίσιμη και στο (χ_2,χ_1)). Άρα από Θ. Μ. Τ. θα υπάρχει $\xi\in(\chi_2,\chi_1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\chi_1)-f(\chi_2)}{\chi_1-\chi_2}$ **(2)**

Επειδή το $\xi\in(\chi_2,\chi_1)$ άρα είναι εσωτερικό σημείο του Δ οπότε θα είναι

$f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της **(2)** θα είναι $\dfrac{f(\chi_1)-f(\chi_2)}{\chi_1-\chi_2}=0 \Rightarrow f(\chi_1)=f(\chi_2)$.

**** Προσοχή στη 2η περίπτωση $(\chi_1>\chi_2)$ γιατί κάποτε στις πανελλήνιες είχε ερωτηθεί μόνο αυτό το ερώτημα.**

Παρατήρηση :

Επειδή όπως ξέρεις, όταν μια συνάρτηση f είναι σταθερή $(f(\chi)=c)$ τότε $\mathbf{f'(\chi)=0}$ **τελικά ισχύει η ισοδυναμία** : Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $\left\{\begin{array}{c}\textbf{f συνεχής και } f'(\chi)=0\\ \textbf{για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta\end{array}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{f(\chi)=c}$.

Θεώρημα ΙΙ

Αν δύο συναρτήσεις f, g :

✓ Είναι **συνεχείς σε ένα διάστημα Δ**.

✓ Και $\mathbf{f'(\chi)=g'(\chi)}$, **για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ**

τότε η $f(\chi)=g(\chi)+c$ με $c\in R$, για κάθε $\chi\in\Delta$.

Απόδειξη :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η συνάρτηση $h = f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta$ ισχύει $h'(\chi) = (f-g)'(\chi) = f'(\chi) - g'(\chi) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $\chi \in \Delta$ να ισχύει $f(\chi) - g(\chi) = c \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi) + c$.

Παρατήρηση :

Όταν δυο συνεχείς συναρτήσεις **f**, **g** είναι ίσες $(f(\chi) = g(\chi))$ τότε $\mathbf{f'(\chi) = g'(\chi)}$ οπότε **τελικά ισχύει η ισοδυναμία** :

Αν για δυο συναρτήσεις **f**, **g** ισχύει :

$$\left.\begin{cases} \mathbf{f, g\ συνεχείς\ και\ f(\chi) = g(\chi) + c} \\ \mathbf{για\ κάθε\ εσωτερικό\ σημείο\ του\ \Delta} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{f'(\chi) = g'(\chi)}.$$

Προσοχή :

*Οι παραπάνω **συνέπειες** του **Θ. Μ. Τ**. ισχύουν **σε διάστημα και όχι σε ένωση** διαστημάτων. Αν έχεις **ένωση διαστημάτων** και χρειάζεται να εφαρμόσεις κάποιο από τα παραπάνω θεωρήματα τότε δουλεύεις **σε κάθε ένα από τα διαστήματα χωριστά**.*

Παράδειγμα :

12. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} 2 & \text{αν } \chi < 0 \\ -7 & \text{αν } \chi > 0 \end{cases}$, να εξετάσετε αν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Απάντηση

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι $f'(\chi) = 0$, άρα η f σταθερή στο $(-\infty, 0)$.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $f'(\chi) = 0$, άρα η f σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Παρ' όλα αυτά η f **δεν είναι σταθερή** στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Παρατήρηση :

Αν θες να δείξεις πως μια συνάρτηση **f είναι σταθερή σε ένα διάστημα Δ** και να βρεις τον τύπο της τότε

- ✓ αρχικά δείχνεις ότι $f'(\chi)=0$ για κάθε $\chi \in \Delta$.
- ✓ Αφού η f είναι σταθερή συνάρτηση θα είναι της μορφής : $f(\chi)=c$, οπότε αρκεί να βρεις μια οποιαδήποτε τιμή της. Αν η άσκηση σου δίνει κάποια τιμή $f(\chi_0)=\alpha$ τότε η συνάρτηση θα έχει τύπο $f(\chi)=\alpha$, αλλιώς (αν δεν δίνει κάποια τιμή) περιμένει από εσένα να «μαντέψεις» μια, βάζοντας στη σχέση που αρχικά σου δίνει μια πολύ συγκεκριμένη τιμή του χ όπως π.χ. $\chi=0$ ή $\chi=1$ ή $\chi=-1$ κλπ, ή στην περίπτωση που υπάρχουν τριγωνομετρικοί αριθμοί βάζεις $\chi=0$, $\chi=\frac{\pi}{2}$, κλπ

13. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f'(\chi)=\frac{1}{g(\chi)}$, $g'(\chi)=-\frac{1}{f(\chi)}$ και $f(\chi), g(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi \in R$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι σταθερή.

Απάντηση :

Η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\left[f(\chi)\cdot g(\chi)\right]'=f'(\chi)\cdot g(\chi)+f(\chi)\cdot g'(\chi)=$

$$\frac{1}{g(\chi)}\cdot g(\chi)+f(\chi)\cdot\left(-\frac{1}{f(\chi)}\right)\Rightarrow\left[f(\chi)\cdot g(\chi)\right]'=0 .$$

Άρα η $f\cdot g$ είναι σταθερή στο R .

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Αν η άσκηση ζητάει να αποδείξεις μια ανισότητα της μορφής :

$\kappa < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$, θεωρείς την συνάρτηση f όπως εμφανίζεται μέσα στην σχέση $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και διαπιστώνεις ότι για αυτήν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Αρκεί στη συνέχεια να δείξεις ότι $\kappa < f'(\xi) < \lambda$, πράγμα που συνήθως επιτυγχάνεται με απλό τρόπο , τις πιο πολλές φορές μάλιστα ξεκινάς από την σχέση $\xi \in (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ και

- ✓ Αν η ανισοτική σχέση δεν είναι στην μορφή $\kappa < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \lambda$ αυτονόητο είναι πως κάνεις τους απαραίτητους μετασχηματισμούς για να την φέρεις σ' αυτή τη μορφή.
- ✓ Προσοχή όταν χρειάζεται να διαιρέσεις με μια παράσταση, να εξασφαλίζεσαι ότι αυτή είναι θετική, για να μην επηρεάσει την ανισότητα, αλλιώς εξετάζεις περιπτώσεις
- ✓ Αν υπάρχει απόλυτο διαιρείς πρώτα με το απόλυτο.
- ✓ Πολύ χρήσιμο είναι να θυμάσαι το κριτήριο παρεμβολής, θα σου χρειαστεί.

Παραδείγματα :

14. Αν $\beta > \alpha > 0$ να δείξετε ότι : $\frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\alpha}$.

Απάντηση :

Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\chi$. Η συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι παραγωγίσιμη άρα βάση του γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής σ' αυτό,

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. .

Θα υπάρχει επομένως ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ **(1)**.

Επειδή $f(\chi) = \ln\chi \Rightarrow f'(\chi) = \dfrac{1}{\chi}$ άρα $f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi}$ **(2)**. Από **(1)** και **(2)** θα

είναι $\dfrac{1}{\xi} = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και επειδή $\xi \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha < \xi < \beta \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\xi} > \dfrac{1}{\beta}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \dfrac{1}{\alpha}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$. Να δείξετε ότι για κάθε α, β ∈ R είναι : $|f(\beta) - f(\alpha)| \le |\beta - \alpha|$.

Απάντηση :

✓ Έστω α = β τότε επειδή η f είναι συνάρτηση θα είναι και $f(\beta) = f(\alpha)$ οπότε η $|f(\beta) - f(\alpha)| \le |\beta - \alpha| \Rightarrow |f(\beta) - f(\beta)| \le |\beta - \beta| \Rightarrow |0| \le |0|$ που είναι προφανής.

✓ Έστω α < β, τότε $|f(\beta) - f(\alpha)| \le |\beta - \alpha| \Leftrightarrow \dfrac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \le 1$, οπότε αρκεί να δείξεις ότι $\left|\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right| \le 1$

Η $f(\chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το R, άρα και στο διάστημα (α, β) άρα για την f θα ισχύει το Θ. Μ. Τ. στο (α, β) άρα θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Όμως $f(\chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow f'(\chi) = \eta\mu\chi$ άρα $|f'(\chi)| \le 1$ επομένως $\left|\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right| \le 1$. Με όμοιο τρόπο αν α > β.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

	Σ	**Λ**
1. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι μηδέν σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.	☐	☐
2. Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα της μέσης τιμής, στο ίδιο διάστημα.	☐	☐
3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, α, β ∈ R, α < β, τότε ισχύει $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$.	☐	☐
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $\chi_0 \in R$, τότε για κάθε $\chi \in R$ υπάρχει $\xi \in R$ ώστε $f(\chi) - f(\chi_0) = f'(\xi)(\chi - \chi_0)$.	☐	☐
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta)$. διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.	☐	☐
6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο χ_0 εσωτερικό του διαστήματος [α, β], στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της f είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.	☐	☐

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$.

8. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση και έχει δυο ρίζες, τότε μεταξύ των δύο ριζών της f, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f'.

9. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f', υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, με $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

11. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f.

12. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν (όλες) οι υποθέσεις του θεωρήματος.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β], τότε θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\xi, f(\xi))$:

α. να είναι παράλληλη με τον άξονα ψ΄ψ.

β. να έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 0.

γ. να έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 1.

δ. να είναι παράλληλη με την ευθεία ψ = χ.

ε. να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.

2. Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Το θεώρημα μέσης τιμής ισχύει για την f, όταν :

α. η f είναι συνεχής στο [α, β].

β. η f έχει ίσες τιμές στα σημεία α και β $(f(\alpha) = f(\beta))$.

γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

δ. η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και συνεχής στα α και β.

ε. η f είναι συνεχής στο (α, β).

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = c$, με πεδίο ορισμού το [α, β].

Το πλήθος των σημείων $\xi \in (\alpha, \beta)$ που προκύπτουν από το θεώρημα του Rolle είναι:

α. 1

β. 2.

γ. το πολύ 2.

δ. κανένα.

ε. άπειρο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2-4\chi$ $f(\chi)=\chi^2-4\chi$ με $\chi\in[-1,2]$, το πλήθος των αριθμών $\xi\in(-1,2)$ που προκύπτουν από το θεώρημα της μέσης τιμής είναι :

α. τουλάχιστον τρεις

β. ακριβώς ένας.

γ. τουλάχιστον δύο.

δ. κανένα.

ε. ακριβώς δύο.

5. Αν για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει $f'(\chi)=g'(\chi)$, Για κάθε $\chi\in R$, τότε ισχύει και

α. $f(\chi)=g(-\chi)+c$.

β. $f(\chi)=-g(\chi)+c$.

γ. $f(\chi)=g(\chi)-c$.

δ. $f(\chi)+g(\chi)=c$.

ε. $f(\chi)+g(-\chi)=c$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2-4\chi+5$, $\chi\in[1,3]$.

Δες παρ. 1 σελ 125

Να εξετάσετε αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και να βρείτε το κατάλληλο $\xi\in(1,3)$ που προκύπτει από το θεώρημα αυτό.

2. Έστω μια συνάρτηση f με $f'(\chi)=3\chi^2+\chi+1$, $\chi\in R$. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f μπορεί να έχει οριζόντια εφαπτομένη

3. Για την συνάρτηση $f(\chi)=|\chi-2|$ να εξετάσετε αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα :

i) $[1,3]$. **ii)** $[1,2]$.

4. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεώρημα Rolle στο διάστημα που αναφέρεται,

i) $f(\chi)=\ln(\eta\mu\chi)$ στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ **ii)** $f(\chi)=1-\sqrt{\chi^2}$ στο $[-1,1]$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2-5\chi+10$, $\chi\in[1,3]$.

Να εξετάσετε αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και να βρείτε το κατάλληλο $\xi\in(1,3)$ που προκύπτει από το θεώρημα αυτό.

6. Για την συνάρτηση $f(\chi)=1-|\chi|$ να εξετάσετε αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα :

i) $[0,1]$. **ii)** $[-2,2]$.

7. Για την συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-2)^2+(\chi+3)^2$ να εξετάσετε αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,0]$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi\in(0,3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. Για την συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-1)^3(\chi-2)^4$ να εξετάσετε αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi\in(1, 2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

9. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

i) $f(\chi)=\chi^2-2\chi+1$ στο $[0, 2]$ **ii)** $f(\chi)=\eta\mu 3\chi$ στο $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu 2\chi+1$ στο $[0, \pi]$ **iv)** $f(\chi)=|\chi|$ στο $[-1, 1]$.

10. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f ΄.

11. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, αν η f ΄ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f ΄ περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\alpha\chi+1, & \chi\le 0\\ \beta\chi^3+\chi+\gamma, & \chi>0\end{cases}$.

Δες παρ. 11 σελ 133 και 135 παρατηρήσεις

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β , γ ∈ R, για τις οποίες ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$. Στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi\in(-1, 1)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases}\chi^3+\alpha\chi^2+\beta, & \chi\le 0\\ \gamma\chi^2-\alpha\chi, & \chi>0\end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β , γ ∈ R, για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$ και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases}\alpha\chi+\eta\mu\chi+\beta\ , & \chi\le 0\\ \gamma\chi^2+\delta\ , & \chi>0\end{cases}$.

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β , γ, δ ∈ R, για τις οποίες ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[-\pi,1]$ αν επί πλέον είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f **διέρχεται από το σημείο** $A(1,-\pi)$**.**

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\sqrt{-\chi^2+3\chi-2}+\alpha\chi^2+3\chi+2\alpha$.

Να βρείτε τις τιμές του α ∈ R, για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα Rolle στο πεδίο ορισμού της f.

16. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ με $f(4)=f(1)+2$.

Να βρείτε την τιμή του λ ∈ R, ώστε η συνάρτηση $g(\chi)=3f(\chi)+\lambda\chi$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[1,4]$.

17. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1)=f(0)+1$.

i) Να βρείτε την τιμή του λ ∈ R, ώστε η συνάρτηση $g(\chi)=f(\chi)-\lambda\chi^2$ να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Για την τιμή του λ που βρέθηκε, δείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$, ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

18. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[1,2]$.

Αν ισχύει $f(\chi)g(\chi)\ne 0$ για κάθε $\chi\in(1,2)$ και $f(0)=0=g(0)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f'(\chi)}{f(\chi)}=\dfrac{g'(\chi)}{g(\chi)}$ έχει ρίζα στο $(1,2)$

$\left[\text{Υποδ. Να εφαρμόσεις Θ. Rolle στην } h(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{g(\chi)}\right]$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$.

Αν ισχύει $f(\alpha)g(\alpha) = f(\beta)g(\beta)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi) = 0$ έχει ρίζα στο (α, β)

$\left[\text{Υποδ. Να εφαρμόσεις Θ. Rolle στην } h(\chi) = f(\chi)g(\chi)\right]$

20. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi) \neq 0$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδείξετε ότι η $f(\chi) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο σύνολο R.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \chi^2 - (\alpha+1)\chi$, $\alpha \in R$.

Να αποδειχτεί ότι:

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 1]$.

ii) Η εξίσωση $3\alpha\chi^2 + 2\chi - \alpha - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. $\left[\textbf{ii)}\ \text{Υπ. βρές } f'(\chi)\right]$.

22. Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(\chi) \neq 1$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = \chi$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Εφαρμογή:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu\frac{\chi}{2} = \chi$ αληθεύει μόνο για $\chi = 0$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^4 - 20\chi^3 - 25\chi^2 - \chi + 1$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4\chi^3 - 60\chi^2 - 50\chi - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

$\left[\text{Υπ. } \textbf{i)}\ \text{Bolzanno } \textbf{ii)}\ \text{βρές } f'(\chi)\right]$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=(\chi-1)\eta\mu\chi$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(\chi)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Εφαρμογή:

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi\chi=1-\chi$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

25. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α , β] και οι αριθμοί $f(\alpha)$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $f(\beta)$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί :

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \quad \text{και} \quad \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta} \quad \text{είναι ίσοι.}$$

β. Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

26. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=2^{\chi}$ και $g(\chi)=-\chi^2+2\chi+1$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,2)$.

27. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)-f(\beta)=g(\alpha)-g(\beta)$, να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και g' έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $\chi_0\in(\alpha,\beta)$.

$\left[\text{Υποδ. Να εφαρμόσεις Θ. Rolle στην } h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)\right]$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

28. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi\cdot\text{συν}\chi$, $\chi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Δες σελ 133 Παρ 11

Να δείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{\chi}$, $\chi\in[0,4]$.

Δες παρ 2 σελ 126

Να εξετάσετε αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. και να βρείτε τα κατάλληλα $\xi\in(0,4)$ που προκύπτουν από το θεώρημα αυτό.

30. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{\chi-1}$, $\chi\in[1,5]$.

Να εξετάσετε αν για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ. και να βρείτε τα κατάλληλα $\xi\in(1,5)$ που προκύπτουν από το θεώρημα αυτό.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\chi$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi=1+e$.

32. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο διάστημα που αναφέρεται,

i) $f(\chi)=\begin{cases}\eta\mu^2\chi\cdot\text{συν}\frac{1}{\chi}, & \chi\neq 0\\ 0, & \chi=0\end{cases}$ στο $[-1,2]$.

ii) $f(\chi)=\begin{cases}3\chi^2-5\chi+6, & \chi\leq 1\\ 2\sqrt{\chi^2+3}, & \chi>1\end{cases}$ στο $[0,2]$.

33. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ. στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi\in(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

34. **i)** $f(\chi)=\chi^2+2\chi$ στο $[0,4]$ **ii)** $f(\chi)=3\eta\mu 2\chi$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(\chi)=\begin{cases}2\chi+2 & , \quad \chi\le -1\\ \chi^3-\chi & , \quad \chi>-1\end{cases}$ στο $[-3,2]$.

35. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\ln\chi(\sigma\upsilon\nu\chi)$, $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξτε ότι $f'(\chi)=-\varepsilon\varphi\chi$, για κάθε $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δες παρ 2 σελ 126

ii) Να αποδείξτε ότι για κάθε α , $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha<\beta$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, για τον οποίο ισχύει: $\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=e^{(\alpha-\beta)\cdot\varepsilon\varphi\xi}$

$\left[\text{Υποδ. Θ.Μ.Τ. στην } f(\chi) \text{ και λογαρίθμησε τη σχέση} \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=e^{(\alpha-\beta)\cdot\varepsilon\varphi\xi}\right]$

36. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi)=\frac{\chi}{1+\chi^2}$

Να αποδείξετε ότι

Δες παρατηρήσεις σελ139 και παρ 15 σελ 140

i) $\left|\frac{\chi}{1+\chi^2}\right|\le\frac{1}{2}$, για κάθε $\chi\in R$.

ii) Για όλα τα $\alpha,\beta\in R$ με ισχύει: $|f(\beta)-f(\alpha)|\le\frac{1}{2}|\beta-\alpha|$.

37. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi)=\frac{\chi}{\chi^2+9}$.

Να αποδείξετε ότι

i) $\left|\frac{\chi}{\chi^2+9}\right|\le\frac{1}{6}$, για κάθε $\chi\in R$.

ii) Για όλα τα $\alpha,\beta\in R$ με ισχύει: $|f(\beta)-f(\alpha)|\le\frac{1}{6}|\beta-\alpha|$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

38. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R, με $f'(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2+\kappa^2}$, $\kappa>0$

Να αποδείξετε ότι

i) $\left|\dfrac{\chi}{\chi^2+\kappa^2}\right|\le\dfrac{1}{2\cdot\kappa}$, για κάθε $\chi\in R$.

ii) Για όλα τα $\alpha,\beta\in R$ με ισχύει: $|f(\beta)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{2\cdot\kappa}|\beta-\alpha|$.

39. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi)=\eta\mu\chi$.

Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu\chi_1-\eta\mu\chi_2|\le|\chi_1-\chi_2|$, για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R$.

[Υποδ. Να εξετάσεις 3 περιπτώσεις $\chi_1<\chi_2$, $\chi_1>\chi_2$, $\chi_1=\chi_2$].

40. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi)=\eta\mu\chi$

Να αποδείξετε ότι $|\eta\mu\chi^2\beta-\eta\mu^2\alpha|\le|\beta-\alpha|$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$.

[Υποδ. Να εξετάσεις 3 περιπτώσεις $\alpha<\beta,\alpha>\beta,\ \alpha=\beta$]

41. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(\chi)=\eta\mu\chi$ για κάθε $\chi\in R$ και $\alpha<\beta\in R$. Να δείξτε ότι $|f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$.

42. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[-1,1]$ για την οποία ισχύει $f'(\chi)\le1$ για κάθε $\chi\in(-1,1)$. Αν $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$, να αποδείξετε ότι $f(0)=0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

Δες σελ 131 Παρ 8 και 9

43. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[4,5]$ με $f(4)=3$ και $-5\le f'(\chi)\le-1$ για κάθε $\chi\in(4,5)$. Να δείξτε ότι $|f(5)|\le2$.

44. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $f(1)=3$ και $1\le f'(\chi)\le3$ για κάθε $\chi\in(1,3)$.

Να δείξτε ότι $5\le f(3)\le11$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

45. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει

$2 \le f'(\chi) \le 5$ για κάθε $\chi \in (0, 4)$.

Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \le f(4) \le 21$.

46. Έστω συνάρτηση f με $f'(\chi) = \sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi - 1$.

Δες σελ 129 Παράδειγμα 6

i) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή

ii) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(\chi) = -1$.

47. Έστω συνάρτηση f με $f'(\chi) = \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

$$\left(\text{Υπ. } f'(\chi) = \frac{1}{3}\left(\sigma\upsilon\nu^3\chi\right)' + \frac{1}{3}\left(\eta\mu^3\chi\right)'\right)$$

48. Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:

$\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$, για κάθε $\chi \in R$.

49. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει

$$\left|f(\chi) - f(\chi_0)\right| \le \frac{3}{5}\left|\chi - \chi_0\right|^3.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

$$\left[\text{Υποδ.είναι } f'(\chi) = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}\right]$$

50. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η f΄ μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, \chi_0)$, $(\chi_0, +\infty)$. Μπορούμε να πούμε ότι η f σε κάθε περίπτωση είναι σταθερή στο R; Δώστε ένα παράδειγμα.

51. Αν για τις συναρτήσεις f, g : $R \to (0, +\infty)$ ισχύουν οι σχέσεις

$f'(\chi) = \dfrac{1}{g(\chi)}$, $g'(\chi) = \dfrac{1}{f(\chi)}$ να δείξετε ότι η συνάρτηση

$h(\chi) = f(\chi) \cdot g(\chi)$ είναι σταθερή.

Δαμιανός Μωραΐτης

52. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν: $f'(\chi)=g(\chi)$ και $g'(\chi)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

$\varphi(\chi)=[f(\chi)]^2+[f(\chi)]^2$ είναι σταθερή.

53. Έστω οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R, για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύουν $f'(\chi)=-2g(\chi)$ και $g'(\chi)=-2f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$.

i) Να αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις h και φ με :

$h(\chi)=e^{2\chi}[f(\chi)+g(\chi)]$ και $\varphi(\chi)=e^{-2\chi}[f(\chi)-g(\chi)]$ είναι σταθερές συναρτήσεις και

ii) Να βρείτε τον τύπο των h και φ αν είναι $f(0)=g(0)=2$.

54. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το R ισχύει :

$|f(\chi)-f(\psi)|\le(\chi-\psi)^2$ για όλα τα $\chi, \psi \in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

55. Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την Αθήνα στις 8 π.μ. και έφτασε κοντά στο Βόλο περίπου στις 11 π.μ. . Η απόσταση που διήνυσε ήταν 270 χιλιόμετρα.

Δες σελ 126 Παράδειγμα 2

i) Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου (στιγμιαία ταχύτητα) ήταν 90 χιλιόμετρα την ώρα.

ii) Να δικαιολογήσετε γιατί κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του θα είναι 75 χιλιόμετρα την ώρα.

56. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{\chi}$.

Δες σελ 131 Παράδειγμα 8

Να αποδείξετε ότι $1\le\dfrac{e^{\chi}-1}{\chi}\le e^{\chi}$, για κάθε $\chi \in R$.

Αν $0<\alpha<\beta$ να δείξετε ότι : $e^{\alpha}<\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εφαρμογές των Παραγώγων

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού **Α** και **Δ** ένα διάστημα, υποσύνολο του Α $(\Delta \subseteq A)$.

Ορισμοί :

- ✓ Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ όταν :

  Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

  (Συμβολικά $\uparrow$)

- ✓ Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ όταν :

  Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

  (Συμβολικά $\downarrow$)

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως μονότονη συνάρτηση** στο διάστημα Δ όταν **είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' αυτό**.

- ✓ Αν το διάστημα Δ = Α, δηλαδή αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της Α, τότε την αναφέρουμε ως **γνησίως μονότονη συνάρτηση**, χωρίς δηλαδή αναφορά σε διάστημα.

- ✓ Μπορεί μια συνάρτηση **να μην είναι γνησίως μονότονη** σ' ολόκληρο το Πεδίο Ορισμού της **,** αλλά να είναι γνησίως μονότονη **σε κάθε ένα** από τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται το Πεδίο Ορισμού της, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.**

Από παρατηρήσεις έχει διαπιστωθεί πως υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα στην μονοτονία μιας συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της .

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το εξής :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση **f** ***συνεχής σε ένα διάστημα Δ*** τότε :

- Αν $f'(\chi) > 0$, για κάθε ***εσωτερικό*** σημείο $\chi \in \Delta$, τότε η f είναι ***γνησίως αύξουσα*** στο ***Δ***.
- Αν $f'(\chi) < 0$, για κάθε ***εσωτερικό*** σημείο $\chi \in \Delta$, τότε η f είναι ***γνησίως φθίνουσα*** στο ***Δ***.

Απόδειξη :

Έστω $f'(\chi) > 0$, και χ_1 , χ_2 $\in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$. Θα δείξουμε ότι $f(\chi_1) < f(\chi_2)$.

Στο διάστημα $[\chi_1 , \chi_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Μ. Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (\chi_1 , \chi_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1}$ άρα

$f(\chi_2) - f(\chi_1) = f'(\xi)(\chi_2 - \chi_1)$. Επειδή $f'(\chi) > 0$ άρα και $f'(\xi) > 0$, είναι και

$\chi_2 - \chi_1 > 0$ επομένως $f(\chi_2) - f(\chi_1) > 0 \Leftrightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$.

Με όμοιο τρόπο αν είναι $f'(\chi) < 0$.

Παρατηρήσεις :

✓ Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα.

Δηλαδή αν f γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ***δεν είναι υποχρεωτικά*** $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$, και αυτό γιατί μπορεί να υπάρχουν και σημεία του Δ, που η f΄ να μηδενίζεται. Πάντως αν f γνησίως αύξουσα αποκλείεται η $f'(\chi) < 0$, θα είναι σίγουρα $f'(\chi) \geq 0$.

Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα στο Δ θα είναι σίγουρα $f'(\chi) \leq 0$.

✓ **Το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί και για την f'** και **συγκεκριμένα :**

Αν $f''(\chi) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $\chi \in \Delta$, τότε είναι $f' \uparrow$ σ' όλο το Δ. Αντίστοιχα αν $f''(\chi) < 0$ θα είναι $f' \downarrow$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για να μελετήσεις τη μονοτονία μιας συνάρτησης f μελετάς το πρόσημο της f΄ και

Αν η παράγωγος της συνάρτησης είναι :

- ✓ Πολυωνυμική 1ου βαθμού τότε λύνεις την ανίσωση $f'(\chi) \geq 0$.
- ✓ Πολυωνυμική 2ου βαθμού τότε φτιάχνεις πίνακα προσήμου για την $f'(\chi)$.
- ✓ Πολυωνυμική βαθμού μεγαλύτερου του 2 παραγοντοποιείς την $f'(\chi)$ και στη συνέχεια φτιάχνεις πίνακα προσήμου.
- ✓ Αν η συνάρτηση f' δεν είναι πολυωνυμική, τότε ανάλογα με την περίπτωση, λύνεις την ανίσωση : $f'(\chi) \geq 0$.

Εντάξει «αρχία μήτηρ πάσης κακίας» αλλά της βλακείας πολα είναι η «μήτηρ»;

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Έστω συνάρτηση **f** ***συνεχής*** στο διάστημα Δ. Το σύνολο τιμών **f(Δ)** με τη βοήθεια της μονοτονίας της f στο Δ βρίσκεται ως εξής :

Διάστημα Δ που ορίζεται η f	**Είδος μονοτονίας της f**	**Σύνολο τιμών f(Α)**
$[\alpha,\beta]$	↑	$[f(\alpha),f(\beta)]$
$[\alpha,\beta)$	↑	$\left[f(\alpha),\lim\limits_{\chi\to\beta^-}(\chi)\right)$
$(\alpha,\beta]$	↑	$\left(\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}f(\chi),f(\beta)\right]$
(α,β)	↑	$\left(\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}f(\chi),\lim\limits_{\chi\to\beta^-}f(\chi)\right)$
$[\alpha,\beta]$	↓	$[f(\beta),f(\alpha)]$
$[\alpha,\beta)$	↓	$\left(\lim\limits_{\chi\to\beta^-}f(\chi),f(\alpha)\right]$
$(\alpha,\beta]$	↓	$\left[f(\beta),\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}f(\chi)\right)$
(α,β)	↓	$\left(\lim\limits_{\chi\to\beta^-}f(\chi),\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}f(\chi)\right)$

** Το Σύνολο τιμών μπορεί, μερικές φορές, εκτός από διαστήματα ή ένωση διαστημάτων, να περιέχει και μεμονωμένα στοιχεία, πχ αν η f είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα του Πεδίο ορισμού της ή αν είναι πολλαπλού τύπου.

Οι περιπτώσεις αυτές θα εξεταστούν στη μελέτη μια συνάρτησης.

Μονοτονία βασικών συναρτήσεων :

✓ **f(χ) = α** (σταθερή) **καμία, f(χ) = χ γνησίως αύξουσα**

✓ **f(χ) = αχ³** → **Με α > 0 γνησίως αύξουσα**
→ **Με α < 0 γνησίως φθίνουσα**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ **με** $\alpha > 0$

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
ψ	↘		↗

Ελάχιστο $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$

$\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ **με** $\alpha < 0$

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
ψ	↗		↘

Μέγιστο $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$

✓ $f(\chi) = \dfrac{\alpha}{\chi}$

όπου $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0$

Αν $\alpha > 0$ → γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ / γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Αν $\alpha < 0$ → γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ / γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

✓ $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ → Αν $\alpha > 1$ η **f** είναι **γνησίως αύξουσα στο R** / Αν $0 < \alpha < 1$ η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα στο R**

Η $f(\chi) = e^{\chi}$ είναι **γνησίως αύξουσα στο R**

✓

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(\chi) = \text{συν}\chi$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	-1

✓

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(\chi) = \text{ημ}\chi$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

Λήμμα S O S για τις ασκήσεις .

Έστω μια συνάρτηση **f** γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα χ'χ, **το πολύ σ' ένα σημείο**.

Απόδειξη :

Έστω ότι f ↑ στο Δ και έστω ότι υπήρχαν σημεία $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$,

ώστε $f(\chi_1) = 0 = f(\chi_2)$ αυτό είναι άτοπο γιατί $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$

αν f ↑ ή $f(\chi_1) > f(\chi_2)$ αν f ↓ .

Δαμιανός Μωραΐτης

Άνθρωπος άσχετος με την ελληνική πραγματικότητα, ο οποίος απορεί γιατί η πιο πάνω πρόταση ενώ χρησιμοποιείται άπειρες φορές από το σχολικό βιβλίο εντούτοις δεν αποδεικνύεται πουθενά μέσα σ' αυτό.

Παραδείγματα :

1. Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = \alpha\chi + \beta$ **ii)** $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Απάντηση :

i) **Π Ο =R,** $\varphi(\chi) = \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\alpha\chi + \beta)' = \alpha$

1ον **α > 0** τότε ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ. Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η φ΄ είναι παντού θετική και επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

χ	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$+$
$\varphi(\chi)$	$\nearrow$

2ον **α < 0** τότε ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ. Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η φ΄ είναι παντού αρνητική άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

χ	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$-$
$\varphi(\chi)$	$\searrow$

ii) **Π Ο =R,** $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma)' = 2\alpha\chi + \beta$

1ον **α > 0** τότε $2\alpha\chi + \beta \geq 0 \Leftrightarrow$ $\chi \geq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	$-\dfrac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$-$	0	$+$
$\varphi(\chi)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η φ΄ :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- **μηδενίζεται** όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$,
- είναι **αρνητική** όταν $\chi < -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty\,,\,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.
- είναι **θετική** όταν $\chi > -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\,,\,+\infty\right)$.

2ον **α < 0** τότε $2\alpha\chi + \beta \le 0 \Leftrightarrow$

$\chi \le -\frac{\beta}{2\alpha}$ και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	+	0	−
$\varphi(\chi)$	↗		↘

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η φ' :

- **μηδενίζεται** όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$,
- είναι **θετική** όταν $\chi < -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty\,,\,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$.
- είναι **αρνητική** όταν $\chi > -\frac{\beta}{2\alpha}$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο. $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\,,\,+\infty\right)$

Παραδείγματα :

2. Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = -3\chi + 2$ **ii) $\varphi(\chi) = \chi^2 + 4\chi + 3$** **iii) $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 6\chi + 1$.**

Απάντηση :

i) $\varphi(\chi) = -3\chi + 2 \Leftrightarrow \varphi'(\chi) = (-3\chi + 2)' = -3$

Τότε ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ. Και όπως φαίνεται η **φ΄** είναι παντού αρνητική και επομένως η συνάρτηση **φ είναι γνησίως φθίνουσα στο R.**

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$-$	
$\varphi(\chi)$	↘	

ii) $\varphi(\chi)=\chi^2+4\chi+3 \Leftrightarrow \varphi'(\chi)=\left(\chi^2+4\chi+3\right)'=2\chi+4$

$\varphi'(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow 2\chi+4\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq -2$ και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ . Άρα όπως φαίνεται από τον πιο πάνω πίνακα η φ΄:

χ	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$-$	0	$+$
$\varphi(\chi)$	↘		↗

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi=-2$,
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi<-2$, άρα η φ είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty\,,-2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi>-2$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-2\,,+\infty)$

iii) $\varphi(\chi)=-\chi^2+6\chi+1 \Rightarrow \varphi'(\chi)=\left(-\chi^2+6\chi+1\right)'=-2\chi+6$.

$\varphi'(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow -2\chi+6\geq 0 \Leftrightarrow \chi\leq 3$ και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της φ . Όπως φαίνεται από τον πίνακα η φ΄:

χ	$-\infty$	3	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$+$	0	$-$
$\varphi(\chi)$	↗		↘

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi=3$,
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi<3$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty\,,3)$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi>3$, άρα η φ είναι γν. φθίνουσα στο $(3\,,+\infty)$.

3. Να βρείτε μονοτονία της συνάρτησης : $\varphi(\chi)=\ln(\chi-1)+2$ όταν $\chi\in\left[2\,,e^2+1\right]$.

Απάντηση

$\varphi(\chi)=\ln(\chi-1)+2 \Leftrightarrow \varphi'(\chi)=\left(\ln(\chi-1)+2\right)'=\dfrac{1}{\chi-1}(\chi-1)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi)=\dfrac{1}{\chi-1}$.

Λιβαδειά

Επειδή $\chi \geq 2$ άρα $\chi - 1 \geq 1 > 0$ άρα $\varphi'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \left[2\,,\, e^2+1\right]$.

Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Και όπως φαίνεται η φ' είναι **θετική** για κάθε $\chi \in \left[2\,,\, e^2+1\right]$,

χ	2	e^2+1
$\varphi'(\chi)$	$+$	
$\varphi(\chi)$	$\nearrow$	

άρα η **φ** είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[2\,,\, e^2+1\right]$.

4. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης : $\varphi(\chi) = \chi^4 - \dfrac{8\chi^3}{3} - 2\chi^2 + 8\chi + 11$.

Απάντηση

$$\varphi'(\chi) = \left(\chi^4 - \frac{8\chi^3}{3} - 2\chi^2 + 8\chi + 11\right)' = 4\chi^3 - 8\chi^2 - 4\chi + 8 \Leftrightarrow$$

$\varphi'(\chi) = 4\left(\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2\right)$. Το $\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2$ παραγοντοποιείται με Horner και $\rho = 1$ ως εξής : $\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2 = (\chi - 1)\left(\chi^2 - \chi - 2\right)$ και αν συνεχίσεις την παραγοντοποίηση είναι :

$$\varphi'(\chi) = 4\left(\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2\right) = 4(\chi - 1)\left(\chi^2 - \chi - 2\right) = 4(\chi - 1)(\chi + 1)(\chi - 2).$$

$\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -1$

$\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$

$\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η φ' :

χ	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$\chi+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\chi-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\chi-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(\chi)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(\chi)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -1$, $\chi = 1$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < -1$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,,\, -1)$

- ✓ είναι **θετική** όταν $-1 < \chi < 1$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < \chi < 2$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν **οι εφαρμογές** *οι οποίες παρουσιάζονται πιο κάτω και οι οποίες ξεφεύγουν από το κλασικό :*
«Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης»

A. Μονοτονία και σύνολο (πεδίο) τιμών

Για να βρεις το ***σύνολο τιμών*** $\mathbf{f(A)}$ μιας συνάρτησης **f** με Πεδίο Ορισμού ένα διάστημα Α, βρίσκεις τα διαστήματα μονοτονίας της f και μετά βρίσκεις το ***αντίστοιχο σύνολο τιμών*** της σε κάθε ένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται από την μονοτονία, όπως ακριβώς έμαθες στο προηγούμενο κεφάλαιο με το ***Θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών*** δες και αντίστοιχες παρατηρήσεις.
Η ένωση των επιμέρους συνόλων τιμών, σου δίνει το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το $f(A)$.

Για να βρεις το ***πρόσημο*** μιας συνάρτησης f με Πεδίο Ορισμού ένα διάστημα $A = (\alpha, \beta)$, δουλεύεις με τον ίδιο τρόπο όπως και με το πεδίο τιμών και αν η $f(\chi)$ **δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο, ενώ αν μηδενίζεται πρέπει να βρεις την μοναδική ρίζα χ_0 και να συνδυάσεις την ανίσωση $\alpha \le \chi_0 \le \beta$ με την μονοτονία.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

$$f(\chi)=\frac{\chi^3}{3}-3\chi^2+5\chi+1.$$

Απάντηση

$$f(\chi)=\frac{\chi^3}{3}-3\chi^2+5\chi+1 \Leftrightarrow f'(\chi)=\left(\frac{\chi^3}{3}-3\chi^2+5\chi+1\right)'=\chi^2-6\chi+5.$$

Το $\chi^2-6\chi+5$ έχει διακρίνουσα $\Delta=16$ και ρίζες $\rho_1=1$ και $\rho_2=5$ άρα έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$		1		5		$+\infty$
	+	|	−	|	+	

και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της f .
Άρα όπως φαίνεται από τον διπλανό πίνακα η f΄:
μηδενίζεται όταν $\chi=1$ και $\chi=5$.

χ	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(\chi)$		+	0	−	0	+	
$f(\chi)$		↗	|	↘	|	↗	

✓ είναι **θετική** όταν $\chi<1$, άρα η **f** είναι ***γνησίως αύξουσα*** στο $(-\infty,1]$

επομένως το αντίστοιχο σύνολο τιμών θα είναι το $A_1=\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi),f(1)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\frac{\chi^3}{3}-3\chi^2+5\chi+1\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^3}{3}=-\infty$ και

$f(1)=\frac{1^3}{3}-3\cdot1^2+5\cdot1+1=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$, άρα $A_1=\left(-\infty,\frac{10}{3}\right]$.

✓ είναι **αρνητική** όταν $1<\chi<5$, άρα η **f** είναι ***γνησίως φθίνουσα*** στο $[1,5]$

επομένως το αντίστοιχο σύνολο τιμών θα είναι το $A_2=[f(5),f(1)]$.

$f(1)=\frac{10}{3}$, $f(5)=\frac{5^3}{3}-3\cdot5^2+5\cdot5+1=\frac{125}{3}-75+25+1=$

$\frac{125}{3}-49=\frac{125}{3}-\frac{147}{3}\Rightarrow f(5)=-\frac{22}{3}$, άρα $A_2=\left[-\frac{22}{3},\frac{10}{3}\right]$.

✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 5$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $[5\,,+\infty)$.

οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών θα είναι το $A_3=\left[f(5)\,,\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)\right)$.

Είναι $f(5)=-\dfrac{22}{3}$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{\chi^3}{3}-3\chi^2+5\chi+1\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^3}{3}=+\infty$

άρα $A_3=\left[-\dfrac{22}{3}\,,+\infty\right)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το

$$f(R)=A_1\cup A_2\cup A_3=\left(-\infty\,,\frac{10}{3}\right]\cup\left[-\frac{22}{3}\,,\frac{10}{3}\right]\cup\left(-\frac{22}{3}\,,+\infty\right]=R$$

6. Δίνετε η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\ln(\chi-1)+2$, $\chi\in\left[2\,,e^2+1\right]$.

Να βρείτε σύνολο τιμών της συνάρτησης

Απάντηση

Μελετάς την μονοτονία της φ (όπως στο παράδειγμα 3 πιο πριν) και προκύπτει ότι η **φ** είναι ***γνησίως αύξουσα*** στο $\left[2\,,e^2+1\right]$.

Άρα το πεδίο τιμών της συνάρτηση είναι το :

$\varphi\left(\left[2\,,e^2+1\right]\right)=\left[\varphi(2)\,,\varphi\left(e^2+1\right)\right]$.

Είναι $\varphi(2)=\ln(2-1)+2=\ln 1+2=0+2=2$ και

$\varphi\left(e^2+1\right)=\ln\left(e^2+1-1\right)+2=\ln e^2+2=2\ln e+2=4$ άρα πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι το $\varphi\left(\left[2\,,e^2+1\right]\right)=[2\,,4]$.

Παρατήρησε ότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο τιμών της φ άρα η εξίσωση :

$\varphi(\chi)=0$ δεν έχει λύση.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

B. Μονοτονία και σύγκριση

Αν η άσκηση «λέει» ***Δίνεται η συνάρτηση* f*, να συγκριθούν οι παραστάσεις*** $f(g(\chi)), f(h(\chi))$, τότε ***μελετάς τη μονοτονία της*** και με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης αποδεικνύεις ότι ισχύει $f(g(\chi)) \underset{<,\le}{>,\ge} f(h(\chi))$.

Παράδειγμα:

7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R να συγκρίνετε τις παραστάσεις

i) $f(\sqrt{5})$ και $f(\sqrt{2})$

ii) $f\left(\frac{\chi^2+1}{\chi^2}\right)$ και $f(1)$

iii) $f(\ln 2)$ και $f(\ln\sqrt{5})$

iv) $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$ και $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

Απάντηση : Είναι

i) $2<5 \Leftrightarrow \sqrt{5}>\sqrt{2}$ και ***f γνησίως αύξουσα*** άρα $f(\sqrt{5}) > f(\sqrt{2})$

ii) $\chi^2<\chi^2+1 \Leftrightarrow 1<\frac{\chi^2+1}{\chi^2}$ και ***f γνησίως αύξουσα*** άρα $f(1)<f\left(\frac{\chi^2+1}{\chi^2}\right)$

iii) $2<\sqrt{5}$ και ***ln γνησίως αύξουσα*** $\Leftrightarrow \ln 2<\ln\sqrt{5}$, επειδή είναι και η f γνησίως αύξουσα άρα $f(\ln 2)<f(\ln\sqrt{5})$.

iv) $2<3 \Rightarrow \frac{2}{3}<1$ άρα $\left(\frac{2}{3}\right)^\chi$ ***γνησίως φθίνουσα,*** άρα $\left(\frac{2}{3}\right)^2>\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

επειδή είναι και **f** ***γνησίως αύξουσα*** άρα $f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)>f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$.

Παρατήρηση: όπως είδες μπορεί και να μη χρειαστεί να μελετήσεις τη μονοτονία, είτε γιατί σου τη δίνει η άσκηση είτε γιατί μπορεί να την έχεις «έτοιμη» από προηγούμενο ερώτημα.

Γ. Επίλυση ανίσωσης και μονοτονία

Αν η άσκηση «λέει» ***Να λύθεί η ανίσωση :……..*** τότε

Φέρνεις τα «πάντα» στο πρώτο μέλος φέρνοντας την ανίσωση στη μορφή

$\ldots \begin{matrix} >,\geq \\ <,\leq \end{matrix} 0$, ονομάζεις το πρώτο μέλος $f(\chi)$ και ***μελετάς τη μονοτονία της*** f.

Με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης λύνεις την ανίσωση $f(\chi) \begin{matrix} >,\geq \\ <,\leq \end{matrix} 0$.

Παράδειγμα:

8. Να λύθεί η ανίσωση : $\ln\chi \leq \chi^2 - \chi$.

Απάντηση :

$\ln\chi \leq \chi^2 - \chi \Leftrightarrow \chi^2 - \chi - \ln\chi \geq 0$. Έστω η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 - \chi - \ln\chi$,

Πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$, οπότε για την f έχεις :

Στο $(0, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων άρα βάση γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα και είναι :

$f'(\chi) = 2\chi - 1 - \frac{1}{\chi}$. Επομένως $f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi - 1 - \frac{1}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi^2 - \chi - 1}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow$

$2\chi^2 - \chi - 1 \geq 0$, γιατί είναι $\chi > 0$.

Το $2\chi^2 - \chi - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \ldots 9$ και ρίζες $\rho_1 = -\frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 1$ άρα πίνακας μεταβολών για τις : f΄, f στο $(0, +\infty)$ είναι

χ	$-\infty$	$-1/2$	0	1	$+\infty$
$f'(\chi)$	+	−	−	+	
$f(\chi)$			↘	↗	

Παρατήρησε πως $f(1) = 1^2 - 1 - \ln 1 = 0$ και στο $[1, +\infty)$ η $f'(\chi) > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα άρα $\chi \geq 1 \Leftrightarrow f(\chi) \geq f(1) \Rightarrow f(\chi) \geq 0$ άρα $\chi^2 - \chi - \ln\chi \geq 0$

Όμοια στο $(0, 1]$ αποδεικνύεται ότι $\chi^2 - \chi - \ln\chi \geq 0$. Άρα γενικά $\ln\chi \leq \chi^2 - \chi$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δ. Απόδειξη ανισότητας και μονοτονία

1η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Αν για το χ ισχύει …*** π.χ. $\chi > 2$ ***να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα ……***	«Φέρνεις» την ανίσωση στη μορφή $f(\chi) \begin{matrix} >,\geq \\ <,\leq \end{matrix} 0$ και μελετάς τη μονοτονία της f. Με τη βοήθεια της μονοτονίας και του ορισμού της γνησίως αύξουσας ή της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης αποδεικνύεις το ζητούμενο.
2η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Στο διάστημα Δ να δείξετε ότι ισχύει ……..,***	«Φέρνεις» την ανίσωση στη μορφή $f(\chi) \begin{matrix} >,\geq \\ <,\leq \end{matrix} 0$, οπότε αρκεί να δείξεις ότι οι **τιμές της f …..** Μελετάς τη μονοτονία της f, με τη βοήθεια της μονοτονίας βρίσκεις το ***Πεδίο Τιμών***, ελπίζοντας ότι αυτό θα περιέχει μόνο θετικές τιμές ή μόνο αρνητικές τιμές (δηλαδή μόνο τιμές που βολεύουν) .

Παραδείγματα :

9. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi > 2$ ισχύει : $4\ln\frac{\chi}{2} \leq \chi^2 - 2\chi$.

Απάντηση

Πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$.

$4\ln\frac{\chi}{2} \leq \chi^2 - 2\chi \Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi - 4\ln\frac{\chi}{2} \geq 0$. Έστω τη συνάρτηση f με

$f(\chi) = \chi^2 - 2\chi - 4\ln\frac{\chi}{2}$, γι' αυτήν έχεις :

Η f στο $(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων άρα βάση γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα με :

$$f'(\chi)=2\chi-2-\frac{4}{\frac{\chi}{2}}\left(\frac{\chi}{2}\right)' \Leftrightarrow f'(\chi)=2\chi-2-\frac{2\cdot 4}{\chi}\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\chi)=2\chi-2-\frac{4}{\chi}.$$

Επομένως $f'(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow 2\chi-2-\frac{4}{\chi}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\chi^2-\chi-2}{\chi}\geq 0 \Leftrightarrow \chi^2-\chi-2\geq 0$,

γιατί $\chi>0$. Το $\chi^2-\chi-2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\ldots 9$ και ρίζες $\rho_1=-1$ και $\rho_2=2$ άρα πίνακας μεταβολών για τις : f΄, f στο (0 , +∞) είναι :

χ	$-\infty$	-1	0		2		$+\infty$
$f'(\chi)$	+	−		−	0	+	
$f(\chi)$				↘	↓	↗	

Παρατήρησε πως στο διάστημα $[2,+\infty)$ η f΄ είναι θετική άρα η f είναι γνησίως αύξουσα επομένως $\chi\geq 2 \Leftrightarrow f(\chi)\geq f(2) \Leftrightarrow$

$$\chi^2-2\chi-4\ln\frac{\chi}{2}\geq 2^2-2\cdot 2+4\ln\frac{2}{2}=0 \Leftrightarrow \chi^2-2\chi-4\ln\frac{\chi}{2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4\ln\frac{\chi}{2}\leq \chi^2-2\chi.$$

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi\in R$ ισχύει : $e^{\chi-1}\geq\chi$.

Απάντηση

Πεδίο ορισμού είναι το **R.** Είναι $e^{\chi-1}\geq\chi \Leftrightarrow e^{\chi-1}-\chi\geq 0$.

Έστω τη συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{\chi-1}-\chi$, γι' αυτήν έχεις : Η f στο R είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων άρα βάση γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής στο R και είναι :

$$f'(\chi)=\left(e^{\chi-1}-\chi\right)=e^{\chi-1}(\chi-1)'-1=e^{\chi-1}-1.$$

Επομένως $f'(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi-1}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi-1}\geq 1 \Leftrightarrow \ln e^{\chi-1}\geq \ln 1 \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$, άρα πίνακας μεταβολών για τις : f', f στο R είναι

χ	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(\chi)$		$-$	0	$+$	
$f(\chi)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Παρατήρησε πως στο διάστημα $[1, +\infty)$ η f' είναι θετική άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $\chi \geq 1 \Rightarrow f(\chi) \geq f(1) \Rightarrow e^{\chi-1} - \chi \geq e^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $e^{\chi-1} - \chi \geq 0$. Όμοια αν $\chi \leq 1$ τότε f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $\chi \leq 1 \Rightarrow$ $f(\chi) \geq f(1) \Rightarrow e^{\chi-1} - \chi \geq e^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\chi-1} - \chi \geq 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $e^{\chi-1} - \chi \geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi-1} \geq \chi$.

11. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης : $f(\chi) = \dfrac{\ln\chi}{\chi}$ και

α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς e^3 και 3^e.

β. Να αποδείξεται ότι για κάθε $\chi > 0$ ισχύει : $\ln\chi < \chi$.

Απάντηση

Πεδίο ορισμού είναι το $(0, +\infty)$.

Η f στο R είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων, άρα βάση γνωστού θεωρήματος είναι και συνεχής στο R και είναι :

$$f'(\chi) = \left(\frac{\ln\chi}{\chi}\right)' = \frac{\frac{1}{\chi}\cdot\chi - \ln\chi}{\chi^2} = \frac{1-\ln\chi}{\chi^2} \quad . \quad f'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln\chi}{\chi^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$1 - \ln\chi \geq 0 \Leftrightarrow \ln\chi \leq \ln e \Leftrightarrow \chi \leq e$, άρα πίνακας μεταβολών

για τις : f', f στο $(0, +\infty)$.

χ		0		e		$+\infty$
$f'(\chi)$			$+$	0	$-$	
$f(\chi)$			$\searrow$	$\downarrow$	$\nearrow$	

α. Παρατήρησε πως στο διάστημα $(e, +\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

είναι γνησίως φθίνουσα άρα $e<3 \Rightarrow \quad f(e)>f(3) \Rightarrow \dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln 3}{3} \Rightarrow$

$3\cdot \ln e > e\cdot \ln 3 \Rightarrow \ln e^3 > \ln 3^e$, γνησίως αύξουσα άρα $e^3>3^e$.

β. **i)** Παρατήρησε πως στο διάστημα $(0,e)$ η f' είναι θετική άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $\chi<e \Leftrightarrow f(\chi)<f(e) \Rightarrow \dfrac{\ln\chi}{\chi}<\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e} \Rightarrow$

$\dfrac{\ln\chi}{\chi}<\dfrac{1}{e}$.

ii) Παρατήρησε πως στο διάστημα $(e,+\infty)$ η f' είναι αρνητική άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $\chi>e \Leftrightarrow f(\chi)<f(e) \Rightarrow$

$\dfrac{\ln\chi}{\chi}<\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow \dfrac{\ln\chi}{\chi}<\dfrac{1}{e}$.

Άρα για κάθε $\boldsymbol{\chi>0}$ ισχύει $\dfrac{\ln\chi}{\chi}<\dfrac{1}{e}$ και επειδή $\dfrac{1}{e}<1$ άρα $\dfrac{\ln\chi}{\chi}<1 \Leftrightarrow$

$\ln\chi<\chi$.

E. Ρίζες μιας εξίσωσης

Για την ύπαρξη και το πλήθος των ριζών μια εξίσωσης $\mathbf{f(\chi)=0}$ ακολουθείς (κατά περίπτωση) τα βήματα που παρουσιάζονται στον πίνακα των επόμενων σελίδων.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Δείξτε ότι η εξίσωση*** $f(\chi)=0$ ***έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα Δ.***	**1η επιλογή :** ***Δείχνεις ότι η f είναι μονότονη, άρα αν έχει ρίζα θα είναι μόνο μία*** ***Προσοχή :*** Δεν σου ζητάει να εξασφαλίσεις την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας, απλά ζητάει να εξασφαλίσεις ότι **αν υπάρχει** ρίζα ***θα είναι μόνο μία***, δηλαδή να αποκλείσεις ότι υπάρχουν περισσότερες από μία . **2η επιλογή :** ***Υποθέτεις ότι υπάρχουν δύο ρίζες*** $\rho_1<\rho_2$, ***στο Δ***, οπότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ θα εφαρμόζεται το Θ. Rolle και επομένως η εξίσωση $f'(\chi)=0$ θα πρέπει να έχει μια τουλάχιστον λύση **στο Δ**, πράγμα που θα αποδεικνύεται **ΑΤΟΠΟ** είτε γιατί δεν θα υπάρχει λύση για την $f'(\chi)=0$ είτε γιατί ***αν υπάρχει δεν θα ανήκει στο Δ.***
2η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Δείξτε ότι η εξίσωση*** $f(\chi)=0$ ***έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα Δ.***	**1η επιλογή :** ***Προσπαθείς να εφαρμόσεις το Θεώρημα Bolzano*** (αν εφαρμόζεται) ***στο διάστημα Δ.*** **2η επιλογή :** Δείχνεις ότι η f είναι συνεχής και μονότονη και $0\in f(\Delta)$, **οπότε με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα** $\chi_0\in\Delta$ έτσι ώστε : $f(\chi_0)=0$. **3η επιλογή :** Αν στην εξίσωση υπάρχει και η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f τότε τα φέρνεις όλα στο πρώτο μέλος φέρνοντας την εξίσωση στη μορφή $E(\chi)=0$ και προσπαθείς να βρεις μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $g'(\chi)=E(\chi)$ και ταυτόχρονα για την $g(\chi)$ να εφαρμόζεται το Θ. Rolle.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Δείξτε ότι η εξίσωση*** $f(\chi)=0$ ***έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.***	**1η επιλογή :** ***Δείχνεις ότι η f είναι μονότονη, άρα και συνεχής και βρίσκεις το*** $f(\Delta)$, ***με στόχο:*** αν το $0 \in f(\Delta)$ τότε με βάση τη συνέχεια και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in \Delta$ έτσι ώστε : $f(\chi_0)=0$, οπότε λόγω μονοτονίας δεν θα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια ρίζες.
	2η επιλογή : ***Εξασφαλίζεις, με οποιοδήποτε τρόπο, την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης*** $f(\chi)=0$ ***στο διάστημα Δ*** και κατόπιν υποθέτεις ότι υπάρχουν $\rho_1<\rho_2$ της **f** στο **Δ**, οπότε στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]\subseteq\Delta$ θα εφαρμόζεται το Θ. Rolle και επομένως …. δες πιο πάνω ***1η περίπτωση, 2η επιλογή.***
4η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης στο διάστημα Δ.***	Μελετάς τη **συνέχεια**, τη **μονοτονία** της **f** και σε κάθε διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι μονότονη βρίσκεις το Σύνολο Τιμών για το διάστημα αυτό. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά, του πεδίου τιμών που περιέχει το 0 η συνάρτηση θα έχει μια ακριβώς ρίζα (λόγω και της μονοτονίας).
5η Περίπτωση : Όταν η άσκηση «λέει» ***Δείξτε ότι η εξίσωση*** $f(\chi)=0$ ***δεν έχει ρίζα στο διάστημα Δ.***	***Μελετάς τη συνέχεια, τη μονοτονία της f και βρίσκεις το*** $f(\Delta)$ ***με στόχο*** : ***να διαπιστώσεις πως το*** $0 \notin f(\Delta)$***) άρα η εξίσωση*** $f(\chi)=0$ ***δεν έχει ρίζες.***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

✓ **Στην 1η Περίπτωση :**

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{\chi^5}{5}+\frac{\chi^3}{3}+\kappa=0$, $\kappa \in R$ έχει **το πολύ** μια **θετική** ρίζα .

1ος τρόπος Έστω η συνάρτηση : $f(\chi)=\frac{\chi^5}{5}+\frac{\chi^3}{3}+\kappa$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει δύο θετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0<\rho_1<\rho_2$.

Στο διάστημα $[\rho_1 , \rho_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, ως πολυωνυμική και $f(\rho_1)=0=f(\rho_2)$, άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\rho_1 , \rho_2)$ δηλαδή

$0<\rho_1<\chi_0<\rho_2$ έτσι ώστε $f'(\chi_0)=0$.

Όμως $f'(\chi)=5\frac{\chi^4}{5}+3\frac{\chi^2}{3}=\chi^4+\chi^2$ και $f'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^4+\chi^2=0$,

ΑΤΟΠΟ γιατί όταν $\chi>0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi^4+\chi^2>0}$

Άρα η $\frac{\chi^5}{5}+\frac{\chi^3}{3}+\kappa=0$ έχει το πολύ μια θετική ρίζα.

2ος τρόπος Είναι $f(\chi)=\frac{\chi^5}{5}+\frac{\chi^3}{3}+\kappa \Leftrightarrow f'(\chi)=5\frac{\chi^4}{5}+3\frac{\chi^2}{3}=$ $\chi^4+\chi^2$, προφανώς είναι $f'(\chi)>0$ όταν $\chi>0$ άρα η **f γνησίως αύξουσα** επομένως **αν η $f(\chi)=0$ έχει ρίζα (θετική) τότε αυτή θα είναι μοναδική.**

✓ **Στην 2η και 3η Περίπτωση :**

13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}+3\cdot 4^{\chi}-4=0$, **έχει ακριβώς μια ρίζα** την **$\chi=0$**.

Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}+3\cdot 4^{\chi}-4$, η f είναι συνεχής στο R .

Παρατήρησε πως $\left(\frac{3}{2}\right)^{0}+3\cdot 4^{0}-4=1+3\cdot 1-4=0$ άρα το 0 είναι

μία ρίζα τη $f(\chi)=0$.

Επίσης είναι $f(\chi)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}+3\cdot 4^{\chi}-4 \Leftrightarrow f'(\chi)=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}+3\cdot 4^{\chi}-4\right)'=$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}\cdot\ln\frac{3}{2}+3\cdot 4^{\chi}\ln 4>0$ για κάθε $\chi\in R$ γιατί $\left(\frac{3}{2}\right)^{\chi}>0$, $\ln\frac{3}{2}>0$,

$4^{\chi}>0$, $\ln 4>0$. Άρα $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in R$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η $f(\chi)=0$ έχει στο R μοναδική ρίζα την $\chi=0$.

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi\ln\chi=\chi-\ln\chi$ **(1)**, έχει στο διάστημα **(1 , e) ακριβώς μια ρίζα**.

Απάντηση

Η εξίσωση : $\chi\ln\chi=\chi-\ln\chi \Leftrightarrow \chi\ln\chi-\chi+\ln\chi=0$, οπότε θεωρείς τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi\ln\chi-\chi+\ln\chi$.

1ος τρόπος :

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=[1\ ,e]$ και είναι ***συνεχής*** στο διάστημα $\Delta=[1\ ,e]$, ως παραγωγίσιμη, είναι $f(1)=1\cdot\ln 1-1+\ln 1=-1<0$ και $f(e)=e\ln e-e+\ln e=e\cdot 1-e+1=1>0$ άρα **f(1)f(e)** <0 .

Από το Θ. Bolzano προκύπτει ότι θα υπάρχει **μια τουλάχιστον λύση** για την $\mathbf{f(\chi)=0}$ στο **(1 , e).**

Έστω ότι η $f(\chi)=0$, δηλαδή η (1), έχει 2 λύσεις, τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$.

Στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]\subseteq(1,e)$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και επί πλέον $f(\rho_1)=0=f(\rho_2)$, επομένως ισχύει το Θ. Rolle άρα θα υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=0$.

Όμως $f(\chi)=\chi\ln\chi-\chi+\ln\chi \Leftrightarrow f'(\chi)=(\chi\ln\chi-\chi+\ln\chi)'=$

$\chi'\ln\chi+\chi(\ln\chi)'-\chi'+(\ln\chi)'=\ln\chi+\chi\frac{1}{\chi}-1+\frac{1}{\chi} \Rightarrow f'(\chi)=\ln\chi+\frac{1}{\chi}$.

Λιβαδειά

Όταν $\chi \in [\rho_1, \rho_2] \subseteq (1, e)$ τότε $\ln\chi > \ln 1 \Leftrightarrow \ln\chi > 0$ και $\frac{1}{\chi} > 0$.

Άρα $f'(\chi) > 0$ δηλαδή η $f'(\chi)$ δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του $\chi \in [\rho_1, \rho_2] \subseteq (1, e)$, επομένως $\mathbf{f'(\chi) = 0}$ δεν έχει λύση στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (1, e)$.

2ος τρόπος :

$f(\chi) = \chi\ln\chi - \chi + \ln\chi \Rightarrow f'(\chi) = (\chi\ln\chi - \chi + \ln\chi)' =$

$\chi'\ln\chi + \chi(\ln\chi)' - \chi' + (\ln\chi)' = \ln\chi + \chi\frac{1}{\chi} - 1 + \frac{1}{\chi} \Rightarrow f'(\chi) = \ln\chi + \frac{1}{\chi}$.

Όταν $\chi \in (1, e)$ τότε $\ln\chi > \ln 1 \Leftrightarrow \ln\chi > 0$ ($\ln\chi$ γνησίως αύξουσα) και $\frac{1}{\chi} > 0$.

Άρα $f'(\chi) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν $\chi \in \Delta = [1, e]$ τότε η f έχει Σύνολο Τιμών : $f(\Delta) = [f(1), f(e)]$, $f(1) = 1\cdot\ln 1 - 1 + \ln 1 = -1$ και $f(e) = e\ln e - e + \ln e = e\cdot 1 - e + 1 = 1 > 0$ άρα $f(\Delta) = [-1, 1]$.

Είναι $0 \in [-1, 1]$ άρα από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα **η** τέτοιο ώστε $\mathbf{f(\eta) = 0}$ άρα η $\mathbf{f(\chi) = 0}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα άρα θα έχει μοναδική λύση.

✓ **Στην 4η Περίπτωση :**

15. Να βρείτε ***το πλήθος των πραγματικών ριζών*** της εξίσωσης : $\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 2 = 0$.

Απάντηση

Π Ο = R. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi + 2$ μελετάς τη μονοτονία :

$\varphi'(\chi)=\left(\chi^3-6\chi^2+9\chi+2\right)'=3\chi^2-12\chi+9=3\left(\chi^2-4\chi+3\right)$.

Το $\chi^2-4\chi+3$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=4$ και ρίζες $\rho_1=1$ και $\rho_2=3$

άρα έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$		1		3		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η φ' :

χ	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\varphi'(\chi)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(\chi)$		↗		↘		↗	

μηδενίζεται όταν $\chi=1$ και $\chi=3$

είναι **θετική** όταν $\chi<1$, άρα η **φ** είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty\,,1)$

είναι **αρνητική** όταν $1<\chi<3$, άρα η **φ** είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\,,3)$

είναι **θετική** όταν $\chi>3$, άρα η **φ** είναι γνησίως αύξουσα στο $(3\,,+\infty)$

- ✓ Στο διάστημα $(-\infty\,,1]$ είναι γνησίως αύξουσα άρα σύνολο τιμών το

  $\Delta_1=\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi),\varphi(1)\right]$, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^3=-\infty$,

  $\varphi(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1+2=12-6=6$ άρα $\Delta_1=\left(-\infty\,,\,6\right]$ και επειδή $0\in\Delta_1$

  άρα από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών … υπάρχει τουλάχιστον μια λύση, οπότε λόγω μονοτονίας μια ακριβώς λύση.

- ✓ Στο διάστημα $[1\,,3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα σύνολο τιμών το

  $\Delta_2=\left[\varphi(3)\,,\,\varphi(1)\right]$, $\varphi(1)=6\,,\varphi(3)=3^3-6\cdot3^2+9\cdot3+2=2$ άρα $\Delta_2=\left[2\,,\,6\right]$

  και επειδή δεν περιέχεται το 0 στο σύνολο τιμών

  άρα δεν υπάρχει λύση στο διάστημα αυτό.

- ✓ Στο διάστημα $[3\,,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα σύνολο τιμών το

  $\Delta_3=\left[\varphi(3),\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\right)$, $\varphi(3)=2$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^3=+\infty$ άρα

  $\Delta_2=\left[2,+\infty\right)$ και επειδή δεν περιέχεται το 0 στο σύνολο τιμών

  άρα δεν υπάρχει λύση στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εξίσωση $\chi^3-2\chi^2-\chi+2=0$ ***έχει ακριβώς μια λύση.***

Λιβαδειά

✓ **Στην 5η Περίπτωση :**

16. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

$\varphi(\chi)=\ln(\chi-1)+2$, $\chi\in\left[2\,,\,e^2+1\right]$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $\varphi(\chi)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα αυτό.

Είναι $\varphi(\chi)=\ln(\chi-1)+2 \Leftrightarrow \varphi'(\chi)=\left(\ln(\chi-1)+2\right)' \Leftrightarrow \varphi'(\chi)=\frac{1}{\chi-1}(\chi-1)' \Leftrightarrow$

$\varphi'(\chi)=\frac{1}{\chi-1}$. Επειδή $\chi\geq 2$ άρα $\chi-1\geq 1>0$ άρα $\varphi'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in$ $\left[2\,,\,e^2+1\right]$.

Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών για την φ :

χ	2 $\qquad\qquad$ e^2+1
$\varphi'(\chi)$	$+$
$\varphi(\chi)$	$\nearrow$

Άρα η **φ** είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[2\,,\,e^2+1\right]$ και επομένως το σύνολο τιμών είναι το $\left[\varphi(2)\,,\,\varphi\left(e^2+1\right)\right]$. Το $\varphi(2)=\ln(2-1)+2 \Leftrightarrow \varphi(2)=\ln 1+2=2$ και $\varphi\left(e^2+1\right)=\ln\left(e^2+1-1\right)+2 \Leftrightarrow \varphi\left(e^2+1\right)=\ln e^2+2=2\ln e+2=4$.

Οπότε είναι προφανές ότι σύνολο τιμών το [2 , 4].

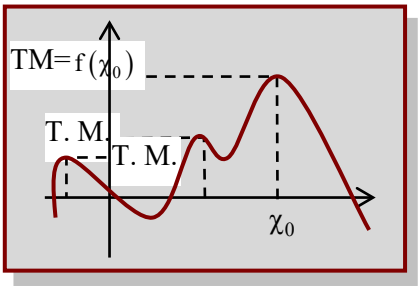
Επειδή το $0\notin[2\,,\,4]$ άρα η $\varphi(\chi)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[2\,,\,4]$.

Ακρότατα συνάρτησης – θεώρημα Fermat

Ακρότατα συνάρτησης

Α. τοπικό μέγιστο

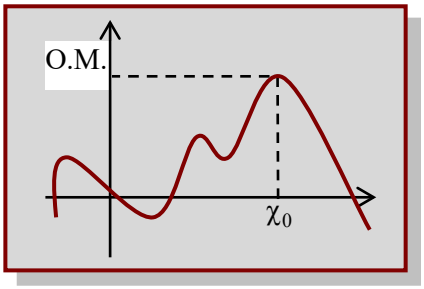
Μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού **A**, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_0\in A$ ***τοπικό μέγιστο***, αν και μόνο αν υπάρχει **δ > 0**, ώστε $f(\chi)\leq f(\chi_0)$



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

για κάθε $\chi \in A \cap (\chi_0 - \delta\,,\, \chi_0 + \delta)$. Το χ_0 λέγεται ***θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου***, ενώ το $f(\chi_0)$ λέγεται ***τοπικό μέγιστο της f***.

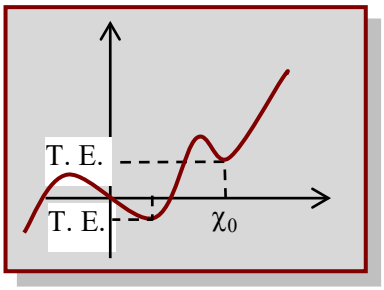
Β. ολικό μέγιστο



Μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού **A**, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_0 \in A$ ***ολικό μέγιστο***, αν και μόνο αν $f(\chi) \le f(\chi_0)$ για κάθε $\chi \in A$.

Το χ_0 λέγεται ***θέση ή σημείο ολικού μέγιστου***, ενώ το $f(\chi_0)$ λέγεται ***ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f***.

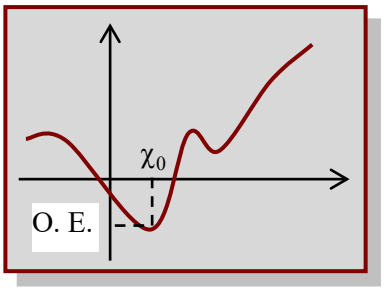
Γ. τοπικό ελάχιστο



Μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού **A**, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_0 \in A$ ***τοπικό ελάχιστο***, αν και μόνο αν υπάρχει **δ > 0**, ώστε : $f(\chi_0) \le f(\chi)$ για κάθε $\chi \in A \cap (\chi_0 - \delta\,,\, \chi_0 + \delta)$.

Το χ_0 λέγεται ***θέση ή σημείο τοπικού ελάχιστου***, ενώ το $f(\chi_0)$ λέγεται ***τοπικό ελάχιστο της f***.

Δ. ολικό ελάχιστο



Μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού **A**, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\chi_0 \in A$ ***ολικό ελάχιστο***, αν και μόνο αν $f(\chi_0) \le f(\chi)$ για κάθε $\chi \in A$.

Το χ_0 λέγεται ***θέση ή σημείο ολικού***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ελάχιστου, ενώ το $f(\chi_0)$ λέγεται

ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της f.

Προσοχή παρατηρήσεις

α. Έστω μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού Α, για την **f** δεν αρκεί να ισχύει $f(\chi) \le M$, για κάθε $\chi \in A$, για να μπορείς να πεις ότι το Μ είναι μέγιστο της συνάρτησης, πρέπει επιπλέον να υπάρχει $\chi_0 \in A$, τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = M$, **τότε μόνον το Μ είναι μέγιστο**.

Ανάλογα αν ισχύει $f(\chi) \ge m$ για κάθε $\chi \in A$.

β. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο (ολικό), τότε αυτό θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα τοπικά μέγιστα.

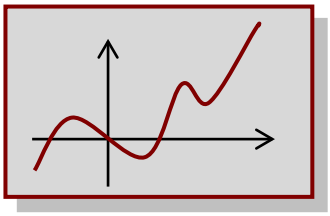
Ανάλογα ισχύουν για το ελάχιστο (ολικό).

γ. Το μεγαλύτερο από το τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης, δεν είναι πάντα μέγιστο της συνάρτησης.

Ανάλογα ισχύουν για τα τοπικά ελάχιστα.

δ. Ένα **τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο** από ένα **τοπικό ελάχιστο**.

ε. Μια συνάρτηση **f** με σύνολο ορισμού **Α**, όπως στο διπλανό σχήμα δεν έχει ακρότατα (ολικά)



Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση **f** ***ορισμένη*** σ' ένα διάστημα Δ

- ✓ Αν το χ_0 είναι ***εσωτερικό*** σημείο του Δ.
- ✓ Αν η **f** είναι ***παραγωγίσιμη*** στο χ_0
- ✓ Παρουσιάζει ***τοπικό ακρότατο*** στο χ_0, τότε :

$$f'(\chi_0) = 0.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο χ_0 τοπικό ελάχιστο.

Επειδή το χ_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό ελάχιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε : $(\chi_0 - \delta, \chi_0 + \delta) \subseteq \Delta$

και $f(\chi) \geq f(\chi_0)$, για κάθε $\chi \in (\chi_0 - \delta, \chi_0 + \delta)$. **(1)**

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0, άρα :

$$f'(\chi_0) = \lim_{\chi \to \chi_0^-} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} = \lim_{\chi \to \chi_0^+} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}.$$

Επομένως :

- Αν $\chi \in (\chi_0 - \delta, \chi_0) \Rightarrow \chi < \chi_0 \Leftrightarrow \chi - \chi_0 < 0$, λόγω της **(1)** θα είναι

  $f(\chi) - f(\chi_0) \geq 0$, άρα $\dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \leq 0$, οπότε και $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \leq 0$

  άρα $f'(\chi_0) \leq 0$ **(2)**

- Αν $\chi \in (\chi_0, \chi_0 + \delta) \Leftrightarrow \chi > \chi_0 \Leftrightarrow \chi - \chi_0 > 0$, λόγω της **(1)** θα είναι

  $f(\chi) - f(\chi_0) \leq 0$, άρα $\dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \geq 0$, οπότε και $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \dfrac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \geq 0$

  άρα $f'(\chi_0) \geq 0$ **(3)**

Έτσι, από **(2)** και **(3)** έχεις $f'(\chi_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό μέγιστο γίνεται με ανάλογο τρόπο.

Παρατήρηση :

Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat ***δεν ισχύει πάντα***.

Για την ακρίβεια τα σημεία στα οποία η **f΄ μηδενίζεται**, δεν είναι πάντα θέσεις τοπικών ακρότατων.

✓ Κρίσιμα σημεία.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τα ***εσωτερικά σημεία*** του Δ, στα οποία η **f΄ *μηδενίζεται ή η* f *δεν παραγωγίζεται***, λέγονται **κρίσιμα σημεία της f στο Δ**.

✓ Πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης.

Για τη συνεχή συνάρτηση f, που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων είναι :

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f΄ μηδενίζεται ή η f δεν παραγωγίζεται **(*κρίσιμα σημεία της* f)**,
- Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο σύνολο ορισμού της).

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Έστω μια συνάρτηση f ***παραγωγίσιμη*** σ' ένα διάστημα (α , β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $\chi_0 \in (\alpha , \beta)$, στο οποίο όμως η f είναι ***συνεχής*.**

α. Αν $f'(\chi) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) < 0$ στο (χ_0, β), τότε το $f(\chi_0)$ είναι ***τοπικό μέγιστο*** της f

β. Αν $f'(\chi) < 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) > 0$ στο (χ_0, β), τότε το $f(\chi_0)$ είναι ***τοπικό ελάχιστο*** της f

γ. Αν η $f'(\chi)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$, τότε το $f(\chi_0)$ ***δεν είναι τοπικό ακρότατο*** και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

✓ Πως βρίσκεις τα τοπικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f ;

Για να βρεις τα ***τοπικά*** ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f, βρίσκεις τη μονοτονία και φτιάχνεις τον πίνακα μεταβολών της f στον οποίον τοποθετείς τα άκρα (αν υπάρχουν) του πεδίου ορισμού, τις τιμές του χ που είναι θέσεις πιθανών ακρότατων και εφαρμόζεις το πιο πάνω Θεώρημα .

Είναι γνωστό ότι ***μια συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση, που είναι ορισμένη***

σε κλειστό διάστημα έχει ***μέγιστο*** και ***ελάχιστο.***

✓ Πως βρίσκεις τα ολικά ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α , β];

Για να βρεις τα ***ολικά*** ακρότατα μιας συνεχούς συνάρτηση f στο [α , β], ακολουθείς την εξής διαδικασία :

Βρίσκεις τα ***τοπικά ακρότατα*** της f στο (α , β) , καθώς και τις τιμές f(α) , f(β).

- ***Το μεγαλύτερο*** από τα τοπικά μέγιστα και τα f(α), f(β) είναι το ***μέγιστο (ολικό)*** της **f** στο [α , β].
- ***Το μικρότερο*** από τα τοπικά ελάχιστα και τα f(α), f(β) είναι ***το ελάχιστο (ολικό)*** της **f** στο [α , β].

Αν ο τύπος μιας συνάρτησης περιέχει παράμετρο ή παραμέτρους και θες να βρεις την τιμή των παραμέτρων έτσι ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατα, ξεκινάς από την εξίσωση $f'(\chi)=0$ και σε συνδυασμό και με άλλες συνθήκες που (ίσως) σου δίνει υπολογίζεις την ή τις παραμέτρους.

Προσοχή το τέλος να κάνεις πάντα επαλήθευση.

Παραδείγματα :

17. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=3\chi^4-8\chi^3+6\chi^2+1$, $\chi\in R$.

Να εξετάσετε αν η f έχει, στο $\chi_0=1$, τοπικό ακρότατο .

Απάντηση

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο R και είναι

$$f'(\chi)=\left(3\chi^4-8\chi^3+6\chi^2+1\right)' = 12\chi^3-24\chi^2+12\chi \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi)=12\chi\left(\chi^2-2\chi+1\right)=12\chi(\chi-1)^2.$$

Είναι $f'(1)=12\cdot1(1-1)^2=0$.

Όμως, όπως φαίνεται από τον τύπο της f΄ $\left(f'(\chi)=12\chi(\chi-1)^2\right)$

Λιβαδειά

στο $\chi_0 = 1$ δεν αλλάζει πρόσημο, αλλά απλώς μηδενίζεται, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\chi_0 = 1$.

18. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 4$, αν $\chi \in [-2\,,4]$ τότε

α. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

Απάντηση

Η f είναι συνεχής στο [– 2 , 4]. Επίσης είναι παραγωγίσιμη

με : $f'(\chi) = 6\chi^2 - 6\chi - 12 = 6\left(\chi^2 - \chi - 2\right)$. Το $6\left(\chi^2 - \chi - 2\right)$ έχει ρίζες $\rho_1 = -1$

και $\rho_2 = 2$ (δεκτές γιατί ανήκουν στο [– 2 , 4]).

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον πίνακα :

χ	**– 2**		**– 1**		**2**		**4**
$f'(\chi)$		+		–		+	
f(χ)		↗		↘		↗	
			τ.μ.		**τ. ε.**		
			το **f(– 1)**		το **f (2)**		

Για να βρεις το ***σύνολο τιμών*** **f(A)** μιας συνάρτησης **f** με σύνολο ορισμού Α, βρίσκεις τα διαστήματα μονοτονίας της f και μετά βρίσκεις το ***αντίστοιχο σύνολο τιμών*** της σε κάθε ένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται από την μονοτονία .

Η ένωση των επιμέρους συνόλων τιμών σου δίνει το f(A)σύνολο τιμών της f.

Άρα όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα η f' :

μηδενίζεται όταν $\chi = -1$ και $\chi = 2$ και

είναι **θετική** όταν $-2 < \chi < -1$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2\,,-1]$

άρα σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το $A_1 = \left[f(-2)\,, f(-1)\right] = [0\,,11]$.

είναι **αρνητική** όταν $-1 < \chi < 2$, άρα η **f** είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1\,,2]$

άρα σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το $A_2 = \left[f(2)\,, f(-1)\right] = [-16\,,11]$.

Δαμιανός Μωραΐτης

είναι **θετική** όταν $2 < \chi < 4$, άρα η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $[2\,,4]$ άρα σύνολο τιμών στο διάστημα αυτό το $A_3 = [f(2)\,, f(4)] = [-16\,, 36]$

άρα συνολικά η f έχει σύνολο τιμών το

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [0\,,11] \cup [-16\,,11] \cup [-16\,,36] = [-16\,,36]$$

Τοπικό μέγιστο το f(– 1) = 11, τοπικά ελάχιστα το f (2) = – 16 και f(– 2) = 0 , f(4) = 36 άρα

Ολικό ελάχιστο το f(2) = – 16 και **ολικό μέγιστο το f(4) = 36 .**

19. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\chi^2 - 2\chi + 1 = 0$ με $\chi > 0$ δεν έχει λύση (είναι αδύνατη).

Απάντηση :

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \ln\chi^2 - 2\chi + 1$. Βρίσκεις την μονοτονία της και τα ακρότατα, μελετώντας το πρόσημο της παραγώγου :

$$\varphi(\chi) = \ln\chi^2 - 2\chi + 1 \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(\ln\chi^2 - 2\chi + 1\right)' = \left(2\ln\chi - 2\chi + 1\right)' \Rightarrow$$

$\varphi'(\chi) = 2\dfrac{1}{\chi} - 2 = \dfrac{2-2\chi}{\chi}$. Οπότε $\varphi'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2\chi}{\chi} \geq 0 \Leftrightarrow \chi(2-2\chi) \geq 0$ και

επειδή $\chi > 0$ άρα $2 - 2\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 1$

άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	**0**	**1**	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	+	**0**	–
$\varphi(\chi)$	↗		↘

μέγιστο το **φ(1)**

Είναι $\varphi(1) = \ln 1^2 - 2\cdot 1 + 1 \Leftrightarrow \varphi(1) = 0 - 2 + 1 \Leftrightarrow \varphi(1) = -1$.

Αφού το φ(1) = – 1 είναι το μέγιστο, τότε για κάθε $\chi > 0$ θα είναι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\varphi(\chi) \le -1 \Leftrightarrow \ln\chi^2 - 2\chi + 1 \le -1 < 0$ άρα **δεν μπορεί** να είναι $\mathbf{\ln\chi^2 - 2\chi + 1 = 0}$.

20. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 0)$, για την οποία ισχύουν : $f(-1) = -2$ και $e^{\chi+1} \cdot f(\chi) \le -2$, για κάθε $\chi < 0$.

α. Να βρεθεί η $f'(-1)$.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(-1, -2)$.

Απάντηση

α. Για κάθε $\chi < 0$ έχεις : $e^{\chi+1} \cdot f(\chi) \le -2 \Leftrightarrow e^{\chi+1} \cdot f(\chi) + 2 \le 0$ (1)

Έστω η συνάρτηση : $g(\chi) = e^{\chi+1} \cdot f(\chi) + 2$.

Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, με

$$g'(\chi) = \left(e^{\chi+1} \cdot f(\chi) + 2\right)' = e^{\chi+1}(\chi+1)' \cdot f(\chi) + e^{\chi+1} \cdot f'(\chi) \Rightarrow$$

$$g'(\chi) = e^{\chi+1}\left(f(\chi) + f'(\chi)\right).$$

Παρατήρησε ότι : $g(-1) = e^0 f(-1) + 2 = -2 + 2 = 0$.

Λόγω της (1) έχεις ότι : $g(\chi) \le 0$, για κάθε $\chi < 0$.

Επομένως $g(\chi) \le g(-1)$, για κάθε $\chi < 0$, η g στο $\chi_0 = -1$ παρουσιάζει μέγιστο.

Το $\chi_0 = -1$ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-\infty, 0)$, άρα από το Θ. Fermat έχεις : $g'(-1) = 0 \Rightarrow e^{-1+1}\left(f(-1) + f'(-1)\right) = 0 \Rightarrow$

$$e^0\left(-2 + f'(-1)\right) = 0 \Leftrightarrow f'(-1) = 2 .$$

β. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, -2)$ έχει εξίσωση :

$\varepsilon : \psi - f(-1) = f'(-1)(\chi + 1) \Rightarrow \psi - 2 = 2(\chi + 1) \Leftrightarrow \psi = 2\chi$.

21. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων :

α. $f(\chi)=\frac{1}{2}e^{2\chi}-2e^{\chi}+\chi$ **β.** $g(\chi)=\begin{cases}\chi^3-6\chi^2+9\chi-2 & \text{αν } \chi\le 2\\ -\chi^2+6\chi-8 & \text{αν } \chi>2\end{cases}$

γ. $h(\chi)=\sqrt{|\chi|}$.

Απάντηση

α. $f(\chi)=\frac{1}{2}e^{2\chi}-2e^{\chi}+\chi$, Π Ο το R.

Η f είναι συνεχής στο R και για κάθε $\chi\in R$ είναι :

$$f'(\chi)=\left(\frac{1}{2}e^{2\chi}-2e^{\chi}+\chi\right)'=\frac{1}{2}e^{2\chi}(2\chi)'-2e^{\chi}+1=e^{2\chi}-2e^{\chi}+1\Rightarrow$$

$$f'(\chi)=\left(e^{\chi}-1\right)^2$$

Η f΄ στο $R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ***διατηρεί σταθερά θετικό πρόσημο***.

Άρα το $\chi_0=0$ δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου και η f είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το R.

β. $g(\chi)=\begin{cases}\chi^3-6\chi^2+9\chi-2 & \text{αν } \chi\le 2\\ -\chi^2+6\chi-8 & \text{αν } \chi>2\end{cases}$. Π Ο το R..

Η g είναι συνεχής στο R .

Αν $\chi\in(-\infty,2)$, τότε η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, όμοια στο $(2,+\infty)$.

Στο $\chi_0=2$ έχεις $\lim\limits_{\chi\to 2^-}g(\chi)=0=\lim\limits_{\chi\to 2^+}g(\chi)=g(2)$,

άρα η f είναι συνεχής στο 2. ***Επομένως η g είναι συνεχής στο R***.

✓ Αν $\chi<2$, τότε $g'(\chi)=3\chi^2-12\chi+9$, $g'(\chi)=0\Leftrightarrow 3\chi^2-12\chi+9=0\Leftrightarrow$ $\chi^2-4\chi+3=0\Rightarrow\chi=1$ δεκτή και $\chi=3$ απορρίπτεται γιατί $3>2$.

✓ Αν $\chi>2$, τότε $g'(\chi)=-2\chi+6$, $g'(\chi)=0\Leftrightarrow -2\chi+6=0\Leftrightarrow\chi=3$ δεκτή.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Στο $\chi_0 = 2$ έχεις :

- αν $\chi < 2$, τότε : $\lambda(\chi) = \dfrac{g(\chi) - g(2)}{\chi - 2} =$

$$\frac{\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 2 - \left(2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 2\right)}{\chi - 2} = \frac{\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 2 - 0}{\chi - 2} =$$

$$\frac{(\chi - 2)(\chi^2 - 4\chi + 1)}{\chi - 2} \Leftrightarrow \lambda(\chi) = \chi^2 - 4\chi + 1$$

άρα $\lim\limits_{\chi \to 2^-} \lambda(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 2^-} \left(\chi^2 - 4\chi + 1\right) = -3$.

- αν $\chi > 2$, τότε : $\lambda(\chi) = \dfrac{g(\chi) - g(2)}{\chi - 2} = \dfrac{-\chi^2 + 6\chi - 8 - 0}{\chi - 2} =$

$$\frac{-(\chi - 2)(\chi - 4)}{\chi - 2} \Leftrightarrow \lambda(\chi) = -(\chi - 4) \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi \to 2^+} \lambda(\chi) = \lim_{\chi \to 2^+} \left(\chi - 4\right) = 2$$

Επομένως η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = 2$.

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της g φαίνονται στον πίνακα :

χ	$-\infty$	**1**		**2**		**3**	$+\infty$
$g'(\chi)$	+		−	‖	+		−
$g(\chi)$	↗		↘		↗		↘
		τ.μ. το **g(1)**		**τ. ε.** το **g (2)**		**τ.μ.** **g (3)**	

Άρα η g' **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$, $\chi = 2$, $\chi = 3$ και

έχει : τοπικό μέγιστο το **g(1) = 2,**

τοπικό ελάχιστο το **g(2) = 0,**

τοπικό μέγιστο το **g(3) = 1.**

γ. $h(\chi)=\sqrt{|\chi|}$ Π Ο το R. Η f είναι συνεχής στο R .

- Αν $\chi<0$, τότε $h(\chi)=\sqrt{-\chi}$ άρα $h'(\chi)=\dfrac{1}{2\sqrt{-\chi}}(-\chi)' \Rightarrow$

  $f'(\chi)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-\chi}}$. Είναι $h'(\chi)<0$, για κάθε $\chi<0$.

- Αν $\chi>0$, τότε $h(\chi)=\sqrt{\chi}$ άρα $h'(\chi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

  Είναι $h'(\chi)>0$, για κάθε $\chi>0$.

✓ Στο $\chi_0=0$ έχεις :

- Αν $\chi>0$, τότε : $\lambda(\chi)=\dfrac{h(\chi)-f(0)}{\chi-0}=\dfrac{\sqrt{\chi}-0}{\chi}=\dfrac{\sqrt{\chi}}{\chi}=\dfrac{1}{\sqrt{\chi}} \Rightarrow$

  $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{\chi}}=+\infty$.

Επομένως η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$.

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της h φαίνονται στον πίνακα :

Στο $\chi_0=0$ η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το **h(0) = 0**

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(\chi)$	$-$	‖	$+$
$h(\chi)$	↘	‖	↗

22. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=\alpha\chi^3-3\beta\chi^2-4\gamma\chi+5$, $\alpha\neq 0$ και $3\beta^2-4\alpha\gamma\leq 0$, να εξετάσετε αν η συνάρτηση έχει ακρότατα για τις διάφορες τιμές των α, β, γ ∈ R .

Απάντηση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με $f'(\chi)=3\alpha\chi^2-6\beta\chi+4\gamma$.

Η εξίσωση $f'(\chi)=0$ με $\alpha\neq 0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει

$\Delta=36\beta^2-48\alpha\gamma=12(3\beta^2-4\alpha\gamma)<0$ από την υπόθεση.

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f'(\chi)=0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

(αν $3\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$) ή έχει μία διπλή ρίζα ρ (όταν $3\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$), οπότε η f΄ γίνεται $f'(\chi) = \alpha(\chi - \rho)^2 \geq 0$, άρα εκατέρωθεν της ρίζας ρ η f΄ δεν αλλάζει πρόσημο. Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi) = \frac{1}{2}3^{2\chi} + (2-\lambda)3^{\chi} - 2\lambda\chi\ln 3$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ ε R, ώστε η f να έχει κρίσιμα σημεία .

β. Για τις τιμές του λ που βρέθηκαν, να αποδείξετε ότι η f έχει ακρότατο και να βρεθεί το είδος του .

Απάντηση

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(\chi) = \left(\frac{1}{2}3^{2\chi} + (2-\lambda)3^{\chi} - 2\lambda\chi\ln 3\right)' =$$

$$\frac{1}{2}3^{2\chi}\cdot\ln 3\cdot(2\chi)' + (2-\lambda)\cdot 3^{\chi}\cdot\ln 3 - 2\lambda\cdot\ln 3 \Rightarrow$$

$$f'(\chi) = 3^{2\chi}\cdot\ln 3 + (2-\lambda)\cdot 3^{\chi}\cdot\ln 3 - 2\lambda\cdot\ln 3$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R άρα κρίσιμα σημεία μόνο στις ρίζες της εξίσωσης : $f'(\chi) = 0 \Rightarrow \ln 3\left(3^{2\chi} + (2-\lambda)\cdot 3^{\chi} - 2\lambda\right) = 0 \Rightarrow$

$3^{2\chi} + (2-\lambda)\cdot 3^{\chi} - 2\lambda = 0 \Rightarrow 3^{2\chi} + 2\cdot 3^{\chi} - \lambda\cdot 3^{\chi} - 2\lambda = 0 \Rightarrow$

$3^{\chi}\left(3^{\chi}+2\right) - \lambda\left(3^{\chi}+2\right) = 0 \Rightarrow \left(3^{\chi}+2\right)\left(3^{\chi}-\lambda\right) = 0$ και επειδή $3^{\chi}+2 \neq 0$ άρα

$3^{\chi} = \lambda$ **(1)** , οπότε

- Αν $\lambda < 0$, τότε η **(1)** είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > 0$, τότε η **(1)** $\Leftrightarrow \ln 3^{\chi} = \ln\lambda \Leftrightarrow \chi\ln 3 = \ln\lambda \Leftrightarrow \chi = \frac{\ln\lambda}{\ln 3}$.

  Συνεπώς με $\lambda > 0$ υπάρχουν κρίσιμα σημεία.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Με $\lambda > 0$ έχουμε : στο $\chi = \frac{\ln\lambda}{\ln 3}$ η f έχει τοπικό ελάχιστο

που είναι και ολικό ελάχιστο όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα.

χ	$-\infty$	$\frac{\ln\lambda}{\ln 3}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$		$+$
$f(\chi)$	↘		↗

✓ **Παρατήρηση**

Αν μιας συνάρτησης ο τύπος περιέχει παράμετρο ή παραμέτρους και θες να βρεις την τιμή των παραμέτρων έτσι ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατα, ξεκινάς από την εξίσωση $f'(\chi)=0$ και σε συνδυασμό και με άλλες συνθήκες που **ίσως** σου δίνει υπολογίζεις την ή τις παραμέτρους.

Προσοχή : πάντα στο τέλος κάνεις επαλήθευση.

24. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=3\chi^4-2\lambda\chi^3+6\chi^2+1$, $\chi\in R$.

Να βρεθούν οι τιμές του λ ε R, ώστε η f στο $\chi_0=1$ να έχει τοπικό ακρότατο .

Απάντηση

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο R και είναι $f'(\chi)=\left(3\chi^4-2\lambda\chi^3+6\chi^2+1\right)'$

$= 12\chi^3-6\lambda\chi^2+12\chi \Leftrightarrow f'(\chi)=6\chi\left(2\chi^2-\lambda\chi+2\right)$.

Αν στο $\chi_0=1$ η f παρουσιάζει ακρότατο θα πρέπει , από το Θεώρημα Fermat

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 6\cdot 1\left(2\cdot 1^2-\lambda\cdot 1+2\right)=0 \Leftrightarrow$ **$\lambda = 4$.**

Επαλήθευση : Αν $\lambda=4$ τότε $f(\chi)=3\chi^4-8\chi^3+6\chi^2+1$,

$f'(\chi)=6\chi\left(2\chi^2-4\chi+2\right)=12\chi\left(\chi^2-2\chi+1\right) \Leftrightarrow f'(\chi)=12\chi(\chi-1)^2$.

Στο $\chi_0=1$ όπως φαίνεται από τον τύπο της η f΄ δεν αλλάζει πρόσημο, αλλά απλώς μηδενίζεται, άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο $\chi_0=1$.

Λιβαδειά

25. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=3\chi^4-2\lambda\chi^3+6\chi^2+1$, $\chi\in R$.

Να βρείτε το λ ώστε η κλίση της f στο $\chi_1=3$ να είναι ίση με την κλίση στο $\chi_2=2$.

Απάντηση

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο R με $f'(\chi)=\left(3\chi^4-2\lambda\chi^3+6\chi^2+1\right)'=$

$12\chi^3-6\lambda\chi^2+12\chi \Rightarrow f'(\chi)=6\chi\left(2\chi^2-\lambda\chi+2\right)$.

Στο $\chi_1=3$ η κλίση της f είναι $f'(3)=6\cdot3\left(2\cdot3^2-\lambda\cdot3+2\right)=360-54\lambda$

Στο $\chi_2=2$ η κλίση της f είναι $f'(2)=6\cdot2\left(2\cdot2^2-\lambda\cdot2+2\right)=120-24\lambda$

Άρα $f'(3)=f'(2) \Leftrightarrow 360-54\lambda=120-24\lambda \Leftrightarrow 30\lambda=240 \Leftrightarrow$ **$\lambda=8$**

Επαλήθευση : Αν $\lambda=8$ τότε $f(\chi)=3\chi^4-16\chi^3+6\chi^2+1$,

$f'(\chi)=6\chi\left(2\chi^2-8\chi+2\right)$.

Στο $\chi_1=3$ η κλίση της f είναι $f'(3)=360-54\cdot8=-72$,

Στο $\chi_2=2$ η κλίση της f είναι $f'(2)=120-24\cdot8=-72$

Άρα για $\lambda=8$ η κλίση της f στο $\chi_1=3$ είναι ίση με την κλίση στο $\chi_2=2$.

26. Να βρείτε μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης :

$\varphi(\chi)=\chi^4-\dfrac{8\chi^3}{3}-2\chi^2+8\chi+11$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει (ολικά) ακρότατα.

Απάντηση :

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο R με $\varphi'(\chi)=\left(\chi^4-\dfrac{8\chi^3}{3}-2\chi^2+8\chi+11\right)'=$

$4\chi^3-8\chi^2-4\chi+8 \Rightarrow \varphi'(\chi)=4\left(\chi^3-2\chi^2-\chi+2\right)$.

Το $\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2$ παραγοντοποιείται με Horner και ρ = 1 ως εξής :

$\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2 = (\chi - 1)(\chi^2 - \chi - 2)$ και αν συνεχίσεις την παραγοντοποίηση

είναι : $\varphi'(\chi) = 4\left(\chi^3 - 2\chi^2 - \chi + 2\right) = 4(\chi - 1)(\chi^2 - \chi - 2) \Leftrightarrow$

$\varphi'(\chi) = 4(\chi - 1)(\chi + 1)(\chi - 2)$.

$\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -1$

$\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$

$\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

Άρα πίνακας μεταβολών για την $\varphi(\chi)$:

χ	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$\chi + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$\chi - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\chi - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\varphi'(\chi)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$\varphi(\chi)$	↘	↗	↘	↗	
		τοπ. ελ. το **φ(–1)**	**τ. μέγ.** το **φ(1)**	**τοπ. ελ.** το **φ(2)**	

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η φ' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = -1$, $\chi = 1$ και $\chi = 2$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < -1$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , -1)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $-1 < \chi < 1$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1 , 1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $1 < \chi < 2$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1 , 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2 , +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση φ έχει **τοπικό** ελάχιστο το :

$$\varphi(-1) = (-1)^4 - \frac{8(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 + 8(-1) + 11 = 1 + \frac{8}{3} - 2 - 8 + 11 = \frac{14}{3}$$

η συνάρτηση φ έχει **τοπικό** μέγιστο το

$$\varphi(1) = 1^4 - \frac{8 \cdot 1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 11 = 1 - \frac{8}{3} - 2 + 8 + 11 = \frac{46}{3} \text{ και}$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

και η συνάρτηση φ έχει **τοπικό** ελάχιστο το :

$$\varphi(2)=2^4-\frac{8\cdot 2^3}{3}-2\cdot 2^2+8\cdot 2+11=16-\frac{64}{3}-8+16+11=\frac{41}{3}.$$

Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το R, και επομένως δεν υπάρχουν άκρα που να ανήκουν στο Π Ο, άρα θα βρεις τα : $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^4=-\infty$ και

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^4=+\infty$ **άρα δεν υπάρχουν ολικά ακρότατα**.

27. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=e^{\chi}+1$ και $g(\chi)=\chi-2$ δεν τέμνονται .

Απάντηση :

Πεδίο Ορισμού το R και για τις δυο συναρτήσεις.

Αρκεί να αποδείξεις ότι η εξίσωση f(χ) = g(χ) ή ισοδύναμα η εξίσωση $e^{\chi}+1=\chi-2$ δεν έχει λύση .

Όμως $e^{\chi}+1=\chi-2 \Leftrightarrow e^{\chi}-\chi+3=0$.

Θεώρησε τη συνάρτηση h με : $h(\chi)=e^{\chi}-\chi+3$, $\chi\in R$.

Η h είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με $h'(\chi)=e^{\chi}-1$ οπότε και

$h'(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi}-1\geq 0 \Leftrightarrow$

$e^{\chi}\geq 1 \Leftrightarrow e^{\chi}\geq e^0 \Leftrightarrow \chi\geq 0$

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(\chi)$	−		+
h(χ)	↘		↗

Η h στο χ = 0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $h(0)=e^0-0+3=4$ και μάλιστα το h(0) = 4 είναι ολικό ελάχιστο, δες και στον πιο πάνω πίνακα.

Άρα για κάθε $\chi\in R$ ισχύει : $h(\chi)\geq 4 \Leftrightarrow e^{\chi}-\chi+3\geq 4>0$, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να αληθεύει η $e^{\chi}-\chi+3=0$ για κανένα $\chi\in R$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των* f, g *δεν τέμνονται.

Δαμιανός Μωραΐτης

28. Να βρεθούν δύο αριθμοί χ , ψ με σταθερό άθροισμα 14, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

Απάντηση :

Αν χ, ψ οι αριθμοί τότε $\chi + \psi = 14$ και έστω $\varphi(\chi) = \chi\,\psi$ το γινόμενο τους

Από $\chi + \psi = 14 \Leftrightarrow \psi = 14 - \chi$ και $\varphi(\chi) = \chi(14 - \chi) \Leftrightarrow \varphi(\chi) = -\chi^2 + 14\chi$

επομένως όταν η άσκηση ζητάει να βρούμε τους αριθμούς χ, ψ έτσι ώστε το γινόμενο τους να είναι μέγιστο στην πράξη ζητάει το μέγιστο της συνάρτησης φ(χ), άρα θα μελετήσεις την μονοτονία της και θα βρεις τα ακρότατα.

Είναι $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 14\chi \Rightarrow \varphi'(\chi) = \left(-\chi^2 + 14\chi\right)' \Rightarrow \varphi'(\chi) = -2\chi + 14$, επομένως

$\varphi'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -2\chi + 14 \geq 0 \Rightarrow 2\chi \leq 14 \Leftrightarrow \chi \leq 7$ άρα πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	7	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	+		–
$\varphi(\chi)$	↗		↘

μέγιστο το $\varphi(7)$

Επομένως το μεγαλύτερο γινόμενο είναι το $\varphi(7) = -7^2 + 14 \cdot 7 = -49 + 98$

$\varphi(7) = 49$, όταν **$\chi = \psi = 7$.**

29. Μια ταβέρνα προσφέρει μεταξύ άλλων και ψητό (αρνί) .

Η παρασκευή χ ψητών αρνιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου $\chi^2 - 6\chi + 24$ € το κιλό.

Αν η τιμή πώλησης του ψητού είναι 30 € το κιλό, πόσα ψητά αρνιά πρέπει να πουλήσει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος ανά κιλό ;

Απάντηση :

Αν Κ(χ) το κέρδος ανά κιλό ψητού, τότε θα είναι :

Κ(χ) = τιμή πώλησης – κόστος άρα :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$K(\chi) = 30 - \left(\chi^2 - 6\chi + 24\right) \Leftrightarrow K(\chi) = -\chi^2 + 6\chi + 6$ € το κέρδος ανά κιλό και θα μελετήσεις τη μονοτονία για να βρεις το μέγιστο κέρδος.

Είναι $K(\chi) = -\chi^2 + 6\chi + 6 \Rightarrow K'(\chi) = \left(-\chi^2 + 6\chi + 6\right)' \Rightarrow K'(\chi) = -2\chi + 6$ και επομένως $K'(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -2\chi + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi \leq 6 \Leftrightarrow$ **$\chi \leq 3$, *προσοχή $\chi > 0$***

Άρα πίνακας μεταβολών

Προσοχή $\chi > 0$

χ	$-\infty$	3	$+\infty$
$K'(\chi)$	+		–
K(χ)	↗		↘

μέγιστο το **K(3)**

Άρα το μέγιστο κέρδος είναι $K(\chi) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 6 \Leftrightarrow$ **$K(\chi) = 15$** € ***ανά κιλό*** και το έχει όταν πουλήσει 3 αρνιά την βδομάδα .

Πανελλήνιες εξετάσεις 1995

30. Η αξία μιας μηχανής που τυπώνει βιβλία, μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο : $\mathbf{f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}}$, $t \geq 0$ όπου **A** ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους **K(t)**, από την πώληση των βιβλίων που τυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση

$\mathbf{K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}}$, $\mathbf{t \geq 0}$. Υποθέτουμε ότι **K(0) = 0**.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος **P(t)** από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

Απάντηση :

Σε κάθε χρονική στιγμή το συνολικό κέρδος P(t) = f(t) + K(t) με $t \geq 0$.

Επειδή ζητάει το μέγιστο κέρδος , θα βρεις τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης P(t), μελετώντας το πρόσημο της P΄(t).

Είναι : P(t) = f(t) + K(t) ⇔ P΄(t) = f΄(t) + K΄(t).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$K'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$ από την εκφώνηση.

$$f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}} \Rightarrow f'(t)=\left(\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}\right)' \Rightarrow f'(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}\left(-\frac{t+28}{14}\right)'$$

$$\Rightarrow f'(t)=-\frac{1}{14}\cdot\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}} \Rightarrow f'(t)=-\frac{A}{4}e^{-\frac{t+28}{14}}.$$

Άρα $P'(t)=-\frac{A}{4}e^{-\frac{t+28}{14}}+\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}} \Leftrightarrow P'(t)=\frac{A}{4}\left(-e^{-\frac{t+28}{14}}+e^{-\frac{t}{7}}\right)$ και

επομένως $P'(t)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{A}{4}\left(-e^{-\frac{t+28}{14}}+e^{-\frac{t}{7}}\right)\geq 0$ και επειδή A θετικός άρα

$$-e^{-\frac{t+28}{14}}+e^{-\frac{t}{7}}\geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}\geq e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7}\geq -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow$$

$$\frac{t}{7}\leq\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow 14\frac{t}{7}\leq 14\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow 2t\leq t+28 \Leftrightarrow \mathbf{t\leq 28}.$$

Άρα για την P(t) ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

t	0 έτη		28 έτη		$+\infty$
$P'(t)$		+	0	−	
$P(t)$		↗		↘	

μέγιστο το $\mathbf{P(28)}$

Επομένως το συνολικό κέρδος P(t) γίνεται μέγιστο, αν πουλήσει τη μηχανή μετά από 28 χρόνια.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

Σ **Λ**

1. Αν $f'(\chi)=\chi^2-3\chi+2$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 2].

2. Αν για μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ισχύει $f'(\chi)=e^{\chi}\cdot \text{συν}\frac{\pi}{3}$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε πιθανά ακρότατα της f είναι :

α. Τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται

β. Τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται

γ. Τα άκρα του [α, β].

4. Αν $f'(\chi)=\chi^4+1$, τότε το $\chi_0=-1$ είναι θέση τοπικού ακρότατου.

5. Αν $f'(\chi)=(\chi-2)\chi^4$, τότε το $\chi_0=2$ είναι θέση τοπικού ελάχιστου.

6. Αν $f'(\chi)=(\chi+3)^2$, τότε το $\chi_0=-3$ είναι θέση τοπικού ακρότατου.

7. Για τη συνάρτηση $f(\chi)=3\chi^2$, $\chi\in[-3, 2]$, υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.

8. Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\eta\mu\chi$, $\chi\in R$, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f, με $f'(\chi) > 0$ για $2 < \chi < 7$. Αν f (3) = 5, τότε μπορεί να ισχύει f (5) = 4.

10. Η συνάρτηση $f(\chi) = \eta\mu\chi + 2e^{\chi}$, $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $\chi_0 = \frac{\pi}{3}$.

11. Αν $f'(\chi) = e^{-\chi^2+4}$, τότε η f δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Αν σ' ένα σημείο χ_0 παρουσιάζουν και οι δυο τοπικό μέγιστο, τότε και η συνάρτηση f + g, εφόσον ορίζεται, θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο χ_0.

13. Αν μια άρτια συνάρτηση έχει στο χ_0 τοπικό ελάχιστο, τότε στο $-\chi_0$ θα έχει τοπικό μέγιστο.

14. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(\chi) < 0$, $\chi \in R$, τότε $f(\chi) < 0$, $\chi \in R$.

15. Αν για τη συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει $f'(5) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 = 5$.

16. Μια περιοδική συνάρτηση f μπορεί να έχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο.

17. Για τη συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{\chi}$, $\chi \neq 0$, ισχύει $f'(\chi) = -\frac{1}{\chi^2} < 0$ για κάθε $\chi \neq 0$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*.

18. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε θα ισχύει $f'(\chi) \leq 0$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f, μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

20. Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει τοπικό ακρότατο και σε σημείο χ_0, στο οποίο δεν είναι συνεχής.

21. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο χ_0, τότε ισχύει $f'(\chi_0)=0$.

22. Αν στο εσωτερικό σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της f ισχύει ότι $f'(\chi_0)=0$, τότε το χ_0 είναι τοπικό ακρότατο της f.

23. Αν $f'(\chi)=|\chi-3|$, τότε η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

24. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$ και $f''(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$, τότε η εξίσωση $f'(\chi)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο (α,β).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γνησίως φθίνουσα, τότε :

α. $f'(\chi) > 0$, για κάθε $\chi \in R$.

β. $f'(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in R$.

γ. $f'(\chi) < 0$, για κάθε $\chi \in R$.

δ. $f'(\chi) \leq 0$, για κάθε $\chi \in R$.

ε. η $f'(\chi)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

2. Αν η παράγωγος f ΄ της συνάρτησης f είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού τότε η f έχει

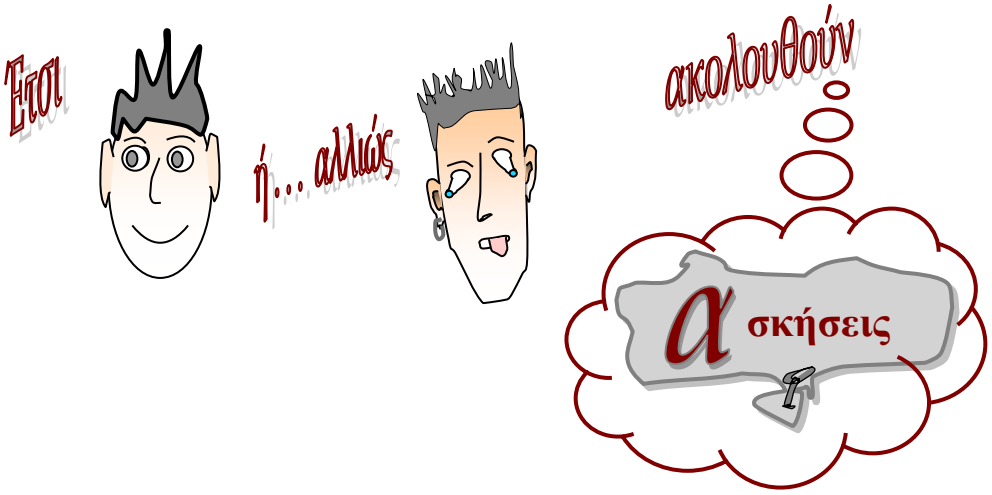
α. ένα μόνο τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

β. ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο

γ. τουλάχιστον τρία τοπικά ακρότατα

δ. τρία ακριβώς τοπικά ακρότατα

ε. τρία το πολύ τοπικά ακρότατα



Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(\chi)=2\chi^3-3\chi^2+5$.

Δες παρ. 1 – 6 σελ 160 – 166

2. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=2\chi^3-3\chi^2-12\chi+5$, να βρείτε τη μονοτονία της f.

3. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\chi^2(1-\chi)^2$, να βρείτε τη μονοτονία της f.

4. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^{\frac{1}{\chi}}$, $\chi>0$

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=(\chi+1)e^{3\chi}$ **β.** $g(\chi)=\chi\cdot\ln^2\chi$.

6. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\dfrac{e^{\chi}}{\ln e^{\chi}+1}$ **β.** $g(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\ln\chi+1}$.

7. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(\chi)=\chi^3+3\chi+4$ **ii)** $f(\chi)=2\chi^3-3\chi^2-12\chi$.

8. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(\chi)=\dfrac{\chi}{e^{\chi}}$ **ii)** $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2+1}$.

9. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(\chi)=\ln\chi-\chi$ **ii)** $f(\chi)=\eta\mu\chi-|\eta\mu\chi|$, $\chi\in[0,2\pi]$.

10. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2-5\chi & \text{αν } \chi<3\\ -\chi^2-4 & \text{αν } \chi>3\end{cases}$ είναι γνησίως μονότονη.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(\chi)=\begin{cases}4-\chi^2\ , & \chi\le 1\\ \chi+2\ , & \chi>1\end{cases}$ **ii)** $f(\chi)=\left|\chi^2-1\right|$.

12. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^3+3\chi^2+\chi+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

13. Έστω μία συνάρτηση $f: R\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}$, $\chi\neq 0$. Αν για κάθε $\chi\neq 0$ ισχύει $f'(\chi)<2\chi\cdot g(\chi)$ να μελετήσετε την μονοτονία της g.

14. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$f'(\chi)>-\dfrac{f(\chi)}{\chi}$ για κάθε $\chi>0$. Να δείξετε ότι $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi>0$.

(Υπ. Μελέτησε την $h(\chi)=\chi\cdot f(\chi)$)

15. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi}$, $\chi>0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι ισχύει $g'(\chi)=\dfrac{1}{\chi}\left(f'(\chi)-\dfrac{f(\chi)}{\chi}\right)$.

γ. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

16. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [0 , 6].

Αν η C_f περνά από το σημείο $A(0,1)$ και ισχύει: $f'(\chi)>\chi$ για κάθε $\chi\in[0\ ,6]$, να αποδείξετε ότι:

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α. η συνάρτηση $g(\chi)=f(\chi)-\frac{\chi^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0 , 6].

β. $g(\chi)>0$, $\chi\in[0\,,6]$.

γ. το σημείο $B(6,18)$ δεν ανήκει στη C_f .

17. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\chi)$, $\chi>0$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\frac{f(\chi)}{\chi}$.

β. Αν η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi}$, $\chi>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

18. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$.

Αν $f''(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ να δείξετε ότι η $g(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi}$, $\chi>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

19. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$ με $f''(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\frac{f(\chi)-f(\alpha)}{\chi-\alpha}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

20. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2\cdot e^{-\chi}$ όταν το Π. Ο. είναι το διάστημα $\Delta=[-1,3]$.

21. Δίνεται συνάρτηση f , $f(\chi)=\sqrt{9-\chi^2}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

22. Να αποδείξετε ότι ισχύει $-1\le\frac{2\chi}{\chi^2+1}\le1$ για κάθε $\chi\in R$.

$\left(\text{Υπ. βρες πεδίο τιμών για την } f(\chi)=\frac{2\chi}{\chi^2+1}\right)$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. Δίνεται συνάρτηση f , με $f(\chi)=\alpha^{\chi}+2\chi$, $\alpha>0$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει :

$$\alpha^{\lambda^2-9}-\alpha^{\lambda-3}>2(\lambda-3)-2(\lambda^2-9).$$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+2\lambda\chi+3$ να βρεθεί το λ ώστε η συνάρτηση να έχει πεδίο τιμών

α. το $A=[3,+\infty)$ **β.** το $B=[15,+\infty)$ **γ.** το $\Gamma=[1,+\infty)$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=2\chi^3-9\chi^2+12\chi+2$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της συνάρτησης φ.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ.

Σύγκριση

Δες παρ. 7 και 11 σελ 167 και 171

26. Δίνεται συνάρτηση f , $f(\chi)=\ln\chi-\chi$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

β. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\ln 3-3$ και $\ln 2-2$.

γ. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{1}{2}\left(2\ln\frac{1}{2}-1\right)$ και $\frac{1}{3}\left(3\ln\frac{1}{3}-1\right)$.

27. Δίνεται συνάρτηση f , $f(\chi)=\chi^2\cdot e^{-\chi}$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{9}{e^3}$ και $\frac{16}{e^4}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

28. Δίνεται συνάρτηση f , $f(\chi)=\chi^{\frac{1}{\chi}}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία της f .

β. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $3^{\frac{1}{3}}$ και $4^{\frac{1}{4}}$.

γ. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $\sqrt[5]{5}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Ανίσωση

Δες παρ. 8 – 11
σελ 168 – 171

29. Να λύσετε την ανίσωση $\chi^3 \geq \chi^2 + \ln\chi$ για κάθε $\chi > 0$.

30. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\frac{1}{\chi}+1<\sqrt{\chi}$. $\left(\text{Υπ. } \ln\frac{1}{\chi}=\ln 1-\ln\chi=-\ln\chi\right)$

31. Να αποδειχτεί η ανισότητα $\frac{1}{1+\chi}-1<\ln(1+\chi)$, για κάθε $\chi > 0$.

32. Να αποδειχτεί η ανισότητα $\ln(1+\chi)<\chi$, για κάθε $\chi > 0$.

33. Να αποδειχτεί η ανισότητα $e^{\chi} > e\cdot\chi$, για κάθε $\chi > 1$.

34. Να αποδειχτεί η ανισότητα $e^{\chi} > \chi+1$, για κάθε $\chi \neq 0$.

35. Να αποδειχτεί ότι ισχύει $e^{\chi-1} \geq \chi$, για κάθε $\chi \in R$.

36. Να αποδειχτεί ότι ισχύει $\chi^2-2\chi<4\ln\chi$, για κάθε $\chi \in \Delta=[2,+\infty)$.

37. Να αποδείξετε ότι $\chi\cdot\ln\chi \geq \chi-1$, για κάθε $\chi > 0$

38. Να αποδείξετε ότι $2\chi\cdot\ln\chi<\chi^2-1$, για κάθε $\chi > 0$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

39. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\chi - \chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi > 0$, για κάθε $\chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

40. Να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi \geq 3\chi$, για κάθε $\chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

41. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\ln(\chi+1) < \frac{\chi^3}{3} - \frac{\chi^2}{2} + \chi$ για κάθε $\chi > 0$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi - \eta\mu\chi$, $\chi \in R$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β. Να δείξετε την ανίσωση $\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta < \alpha - \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

(Υπ. $\eta\mu(-\chi) = -\eta\mu\chi$)

43. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = (\chi+1)^{\chi}$

α. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης φ.

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης φ.

γ. Να δείξετε ότι $(\chi+1)^{\chi} \geq 1$ για κάθε χ που ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης φ.

44. Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(\chi) < f(\chi)$ για κάθε $\chi \geq 0$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$g(\chi) = f(\chi)e^{-\chi}$, $\chi \geq 0$.

β. Αν $g(0) = 1$ να δείξετε ότι $f(\chi) < e^{\chi}$ για κάθε $\chi > 0$.

45. Έστω μία συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $f(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$.

46. Έστω μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ με $f(\pi) = 0$.

Αν για κάθε $\chi > 0$ ισχύει $\chi \cdot f'(\chi) < f(\chi) + \chi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ να δείξετε ότι

$f(\chi) < \chi \cdot \eta\mu\chi$ για κάθε $\chi > \pi$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

47. Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R για τις οποίες υποθέτουμε ότι: $g'(\chi)=f'(\chi)+\eta\mu^2\chi+e^{\chi}+1$ για κάθε $\chi\in R$

Να δείξετε ότι: $g(\chi)+f(0)>f(\chi)+g(0)$ για κάθε $\chi>0$.

48. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\chi e^{\chi}-2e^{\chi}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f και

β. Να δείξετε ότι για κάθε $\chi\in R$ ισχύει: $1+\chi e^{\chi-1}\geq 2e^{\chi-1}$.

49. Έστω ότι οι f, g είναι συναρτήσεις δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και επί πλέον ισχύει $f'(0)=g'(0)$, $f''(\chi)>g''(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$.

Να δείξετε ότι

α. στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι $f'(\chi)<g'(\chi)$

β. στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι $f'(\chi)>g'(\chi)$

(Υπ. Μελέτησε την $h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$)

Ρίζες εξίσωσης

Δες παρ. 12 – 16
σελ 175 – 179

50. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{\chi}=1-\ln(\chi+1)$ έχει ακριβώς μία λύση, την $\chi=0$.

51. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\chi=1-\chi$

(Υπ. προφανής λύση η $\chi=1$)

52. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\chi=\chi-1$

(Υπ. προφανής λύση η $\chi=1$)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

53. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\chi = 1 - \chi^3$

(Υπ. προφανής λύση η $\chi = 1$)

54. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\chi^2+1} = e - \ln\left(\chi^2 + 1\right)$

(Υπ. θέσε $\chi^2 + 1 = u$)

55. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^5 + 5\chi - 6$

α. Να βρείτε τη μονοτονία της

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

γ. Να δείξετε ότι η $\varphi(\chi) = 0$ έχει μοναδική λύση την $\chi = 1$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi + \alpha$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ για κάθε $\alpha \in R$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1, 1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

57. Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης : $\varphi(\chi) = 2\sqrt{\chi} + \chi - 3$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $\varphi(\chi) = 0$ έχει μοναδική λύση την $\chi = 1$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{\chi^3 - 9\chi}{\chi^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = \alpha$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in R$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

59. Ένα πολυώνυμο $P(\chi)$, $5^{ου}$ βαθμού ικανοποιεί τη σχέση $P(\chi)=P'(\chi)+\chi^5$

α. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(\chi)$.

β. Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

60. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\chi-2008)^{2008}=\chi^{2008}+2008^{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση.

61. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(\chi)$ και $Q(\chi)$ ώστε $P(\chi)\neq Q(\chi)$ και $P''(\chi)\neq Q''(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $S(\chi)=P'(\chi)-Q'(\chi)$ έχει ακριβώς μια λύση.

62. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει:

$f^3(\chi)+f(\chi)=e^{-\chi}-1$ για κάθε $\chi\in R$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(\ln\chi)=f(1-\chi)$

(Υπ. προφανής και μοναδική λύση η $\chi=1$)

63. Έστω f, g δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν $f(0)=g(0)$ και $f''(\chi)=g''(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει σταθερός αριθμός $\kappa\in R$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$f(\chi)-g(\chi)=\kappa\cdot\chi$ για κάθε $\chi\in R$.

β. Αν α, β ρίζες της g με $\alpha<0<\beta$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

64. Έστω μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ και $f''(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.

Να δείξετε ότι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α. η $f'(\chi)=0$ έχει μοναδική λύση.

β. $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)<0$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\chi-\dfrac{\alpha}{\chi}+\alpha$, $\chi>0$.

Αν $f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi>0$ τότε

α. Να δείξετε ότι $\alpha=-1$

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi=1$.

66. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{\chi^5}{5}+\dfrac{\chi^3}{3}+\kappa=0$, έχει το πολύ μια ρίζα.

67. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\chi}+3\cdot 4^{\chi}-4=0$ έχει μοναδική ρίζα

την $\chi=0$.

68. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi^3+3\chi+\sigma\upsilon\nu 3\chi=0$ έχει μοναδική ρίζα

69. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^{\frac{\chi}{e}}=\chi$ έχει μοναδική ρίζα

την $\chi=e$.

70. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της $f(\chi)=e^{-\chi+5}+4$ έχει

μοναδικό κοινό σημείο με την ευθεία $\psi=\chi$.

(Υπ. δείτε ότι η $f(\chi)=\chi$ έχει μοναδική λύση)

71. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\ A=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to R$ για την οποία

ισχύει: $f^3(\chi)+f(\chi)=\eta\mu\chi$ για κάθε $\chi\in A=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Η εξίσωση: $f(\chi)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο Α

(Υπ. προφανής και μοναδική λύση η $\chi=0$)

72. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to R$, με $f(\chi)=\chi^2+2^{\chi}$.

α. Να βρείτε το $f([0,2])$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)-1=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\alpha\in[-1,15]$

73. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^3-6\chi^2+9\chi+2$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της φ

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $\varphi(\chi)=0$.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=2\chi^3-3\chi^2-12\chi+5$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $2\chi^3+4=3\chi^2+12\chi-1$.

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\eta\mu\chi+\chi-1$, $\chi\in A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Α .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ. Να δείξετε ότι η $f(\chi)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

76. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2e^{\chi}+e^{3\chi}=3$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi=0$.

77. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\ln\chi=2-2\chi$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi=1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

78. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\chi = 1 - \text{συν}\chi$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi = 0$.

79. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(\chi+1)^{2\kappa} = \chi^{2\kappa} + 1$, $\kappa \in Z$ έχει μοναδική ρίζα την $\chi = 0$.

80. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^{\chi} = \chi$, $0 < \alpha < 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $A = (0, 1)$.

81. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της $f(\chi) = \chi^{2\kappa+1} + \chi^{2\kappa-1} + \chi + \kappa$ με $\kappa \in Z$, τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ σε ένα μόνο σημείο.

(Υπ. Μονοτονία της f και πεδίο τιμών)

82. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της $f(\chi) = \chi^7 + \chi^5 + 2\chi + 3$, τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ σε ένα μόνο σημείο.

(Υπ. Μονοτονία της f και πεδίο τιμών)

83. Να δείξετε ότι η εξίσωση $9^{\chi} + 3^{\chi} = 5^{\chi} + 7^{\chi}$ έχει ακριβώς δυο λύσεις.

(Υπ. προφανείς λύσεις οι $\chi = 0$, $\chi = 1$)

84. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^3 - 7\chi^2 + 14\chi - 7$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της φ

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $\varphi(\chi) = 0$.

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^4 + 4\chi + 1$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $f(\chi) = 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

86. Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi)=2\chi^5-5\chi^4+5$

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονία της g

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της $g(\chi)=0$.

87. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^4+6\chi=-2\chi^2-3$ έχει το πολύ δυο λύσεις.

(Υπ. έστω 3 λύσεις τότε Rolle η $f''(\chi)=0$, άτοπο)

Fermat – Ακρότατα

Δες παρ. 17 – 26
σελ 184 – 193

88. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία των πιο κάτω συναρτήσεων :

α. $f(\chi)=\chi^2-2\chi+3$ **β.** $g(\chi)=\chi^2-4\chi+2\ln\chi$.

γ. $h(\chi)=e^{2\chi}-5e^{\chi}+2\chi$ **δ.** $\varphi(\chi)=\ln(\chi+1)+\ln\chi-2\chi$.

89. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $A=[0,2]$. Αν $f(0)=f(2)$ να δείξετε ότι η f έχει ένα τουλάχιστο κρίσιμο σημείο.

90. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$f(\chi)=\dfrac{\chi}{8}+\dfrac{2}{\chi}$ όταν $\chi\in[1,6]$.

91. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\chi^3-3\chi+\ln 3$ **β.** $g(\chi)=(\chi-1)^2(\chi+2)^4$.

92. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\dfrac{3\chi}{\chi^2+2}$ **β.** $g(\chi)=\dfrac{\chi^2}{\chi^2+2}$.

93. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\chi^2\cdot e^{3\chi}$ **β.** $g(\chi)=\chi\cdot e^{\chi^2-1}$.

94. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\chi\cdot 2^{\chi}$ **β.** $g(\chi)=\chi\cdot 2^{-\chi}$.

95. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\chi^{-\chi}, \chi>0$ **β.** $g(\chi)=\chi^{\chi}\cdot e^{-\chi}, \chi>0$.

96. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^5-\chi^3+\chi+3$ όταν $\chi\in[-1,1]$.

97. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\chi\right)$ στο $A=[0,4]$ **β.** $g(\chi)=\eta\mu(\pi\chi)$ στο $A=[0,2]$.

98. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\frac{3\chi}{\chi^2+2}$ στο $A=[0,3]$ **β.** $g(\chi)=\frac{\chi^2}{\chi^2+2}$ στο $A=[-1,1]$.

99. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(\chi)=(1+\chi)^{\alpha}-\alpha\cdot\chi$, $\alpha>1$ στο διάστημα $\Delta=[-1,+\infty)$.

100. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(\chi)=e^{\chi}-\chi$.

101. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(\chi)=\chi^2+|\chi-1|, \chi>0$ **β.** $g(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\chi & \chi\le 0\\ \chi-\eta\mu\chi & \chi>0\end{cases}$.

102. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\chi^3+\alpha\chi^2-\beta\chi+1$.

α. Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει στη θέση $\chi=1$ τοπικό ακρότατο που ισούται με 4.

β. Για $\alpha=-5$ και $\beta=-7$ να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε και τα υπόλοιπα ακρότατα καθώς και το είδος του καθενός.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

103. Δίνεται συνάρτηση f , με $f(\chi)=\chi^2 e^{2\alpha-\chi}$, $\chi>0$ και $\alpha>0$.

Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η μέγιστη τιμή της f έχει ελάχιστο.

104. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $f''(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$ τότε η συνάρτηση f , δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ακρότατα .

105. Μια συνάρτηση f $R\to R$ είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο και δεν έχει ακρότατα.

Να δείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη.

106. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\left(2f'(\chi)-3\chi\right)f^2(\chi)=-3f'(\chi).$$

Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $\chi_0=0$.

107. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ∈ R, ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\chi\cdot\ln\chi+\lambda\chi^2+12\chi$ να έχει τοπικό ακρότατο τον αριθμό $f(1)=9$.

108. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ∈ R, ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+\kappa\chi+\lambda}{\chi+1}$

να έχει τοπικό ακρότατο τον αριθμό $f(0)=1$.

109. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\lambda\chi}-\chi$, $\lambda>0$. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η ελάχιστη τιμή της f γίνεται μέγιστη.

110. Δίνεται συνάρτηση f , με $f(\chi)=\chi^3+\alpha\chi^2+3\chi-5$.

Να βρείτε τις τιμές του α ∈ R για τις οποίες η f **δεν** έχει ακρότατα.

111. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f , με $f(\chi)=\begin{cases}\beta\chi^2-2\alpha\chi+3, & \chi<1\\ \alpha\chi^2+2\beta\chi+1, & \chi\geq 1\end{cases}$,

α, β ∈ R. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου $\alpha\cdot\beta$.

Δαμιανός Μωραΐτης

112. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4+6\chi^2+\alpha\chi+\beta$, δεν μπορεί να έχει περισσότερα από ένα ακρότατα για καμία τιμή των α, β ∈ R.

$\left(\text{Υπ. } f''(\chi)\neq 0 \text{ για κάθε } \chi\in R\right)$

113. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=(\kappa+1)\text{συν}2\chi+\kappa\cdot\text{συν}\chi$

α. Να βρείτε την τιμή του κ ∈ R, ώστε η συνάρτηση να έχει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0=\dfrac{2\pi}{3}$

β. Για την τιμή του κ που βρήκατε να βρείτε το είδος και πιο είναι το τοπικό ακρότατο.

114. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Να δείξετε ότι η f **δεν** παρουσιάζεις ακρότατο αν και μόνον εάν $\alpha\chi^2\leq 3\beta$.

115. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-\chi_1)^2+(\chi-\chi_2)^2+\cdots+(\chi-\chi_\nu)^2$, όπου $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_\nu\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο στο (α,β), τι είδους ακρότατο είναι;

116. Έστω ότι $\chi^\alpha\geq\alpha^\chi$, $\alpha>0$ για κάθε $\chi>0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι α = e.

117. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\left|f''(\chi)\right|\leq M$, για κάθε χ ∈ με $\alpha>0$ και η f παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της σε ένα $\chi_0\in(0,\alpha)$ (εσωτερικό σημείο του $[0,\alpha]$) να δείξετε ότι $\left|f'(0)\right|+\left|f'(\alpha)\right|\leq\alpha\cdot M$.

118. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(\chi)=\ln\chi-\chi$, $\chi>0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

119. Αν για την f ισχύουν $f(\chi) \le e^{-\chi}$ και $f(0)=1$, να δείξετε ότι είναι και $f'(0)=-1$

$\left(\text{Υπ. Θ. Fermat για την } h(\chi)=f(\chi)-e^{-\chi}\right)$

120. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi}$, $\chi>0$.

α. Να βρείτε τα ακρότατα της f και

β. Να δείξετε ότι για κάθε $\chi>0$ ισχύει: $\chi^{e} \le e^{\chi}$.

121. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+2}{e^{\chi}}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f και

β. Να δείξετε ότι για κάθε $\chi>0$ ισχύει: $\chi^2+2<2e^{\chi}$.

122. Δίνεται συνάρτηση f, με $f(\chi)=\chi e^{\chi}-2e^{\chi}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f και

β. Να δείξετε ότι για κάθε $\chi \in R$ ισχύει: $1+\chi e^{\chi-1} \ge 2e^{\chi-1}$.

Δες παρ. 27
σελ 193

123. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=e^{\chi}$, $\chi \in R$ και $g(\chi)=\ln\chi$, $\chi>0$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

β. Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $\psi=\chi$.

γ. Να βρείτε το σημείο της $\psi=e^{\chi}$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $\psi=\chi$.

Προβλήματα με μέγιστα – ελάχιστα

Δες παρ. 27 – 30
σελ 195 – 198

124. Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 2τ το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

125. Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό κ^2 το τετράγωνο έχει τη μικρότερη περίμετρο.

126. Το άθροισμα των τετραγώνων δυο θετικών αριθμών είναι 50. Πότε το άθροισμα τους γίνεται μέγιστο;

127. Η αξία μια μετοχής t μήνες μετά την είσοδό της στο Χρηματιστήριο δίνεται από την συνάρτηση $A(t)=t^2+\frac{t}{16}$ σε χιλιάδες δραχμές.

Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία η αξία της μετοχής γίνεται ελάχιστη και ποια είναι αυτή η ελάχιστη αξία.

128. Ένας παραγωγός αποθηκεύει την παραγωγή του, έτσι ώστε να την πουλήσει όταν θα έχει ανέβει η αξία της.

Η συνολική αξία της παραγωγής του μεταβάλλεται με ρυθμό

$A'(t)=-t^2+12t+3600$, t ο χρόνος σε ημέρες, $t\in[0,120]$.

Το κόστος αποθήκευσης δίνεται από τον τύπο $K(t)=6t^2$

Να βρείτε σε πόσες ημέρες πρέπει να πουλήσει την παραγωγή του για να πετύχει το μέγιστο δυνατό κέρδος;

129. Η απορρόφηση, ενός λιπάσματος σε κιλά, από ένα αγρό, σε σχέση με το χρόνο t (σε ημέρες), δίνεται από την συνάρτηση f με $f(\chi)=t\cdot e^{-\frac{t}{20}}$, $t\in[0,40]$. Σε πόσες μέρες έχουμε τη μέγιστη απορρόφηση λιπάσματος.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

131. Η αξία Α (σε €) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο $A = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}$.

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται (μικραίνει η αξία του) αλλά ποτέ δεν γίνεται μικρότερη από το μισό της αρχικής αξίας του.

$\left[\text{Υπ. μελέτησε την μονοτονία, δείξε την ανίσ. } A \geq \frac{A}{2}\right]$

132. Η ακροαματικότητα ενός ραδιοφωνικού σταθμού χ ώρες μετά την έναρξη του προγράμματος δίνεται από την συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = -2\chi^3 + 27\chi^2 + 60\chi$.

Να βρείτε :

α. Το πεδίο ορισμού της f.

β. $f(0)$.

γ. Να βρείτε την ακροαματικότητα του σταθμού στις 9 π.μ. και στις 10 π.μ.

δ. Να βρείτε πόσο αυξήθηκε η ακροαματικότητα του σταθμού από τις 9 π.μ. έως στις 11 π.μ.

ε. Να βρείτε ώρα της ημέρας ο σταθμός έχει την μεγαλύτερη ακροαματικότητα και πόση είναι.

133. Το κόστος ενός προϊόντος t μήνες μετά την εμφάνισή του στην αγορά, δίνεται από την συνάρτηση $K(t) = \ln(t+5)^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του συναρτήσει του χρόνου είναι: $A'(t) = \frac{1}{t}$.

Να βρείτε την χρονική στιγμή που πρέπει να πουληθεί ώστε να έχουμε οριακό (μέγιστο) κέρδος.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

134. Μια βιομηχανία όταν παράγει χ μονάδες προϊόντος έχει κόστος

$K(\chi) = -\frac{t^3}{3} - 50\chi^2 + 40\chi + 2$ σε ευρώ (€) και από την πώλησή τους

εισπράττει $E(\chi) = \frac{2\chi^3}{3} - 80\chi^2 - 60\chi + 1$ €.

Η μέγιστη δυνατότητα παραγωγής το μήνα είναι 70 μονάδες.

Να βρείτε πόσες πρέπει να παράγει τον μήνα έτσι ώστε να πετύχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

135. Ένα γραφείο ενοικίασης αυτοκινήτων έχει υπολογίσει ότι η αξία κάθε αυτοκινήτου, μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο :

$\mathbf{f(t) = 10 \cdot A \cdot e^{-\frac{t}{10}}}$, t ο χρόνος σε έτη και **A** ένας θετικός αριθμός.

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους **K(t)**, από την ενοικίαση ενός αυτοκινήτου δίνεται από τη συνάρτηση $\mathbf{K'(t) = A \cdot e^{-\frac{t-7}{5}}}$ **.**

Υποθέτουμε ότι **K(0) = 0**.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί ένα αυτοκίνητο έτσι, ώστε το συνολικό κέρδος **P(t)** από την ενοικίαση, συν την αξία πώλησης του αυτοκινήτου να γίνεται μέγιστο.

136. Το κόστος παραγωγής χ μονάδων το μήνα ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση: $K(\chi) = 50.000 + 3\chi$ σε δραχμές και κάθε μονάδα προϊόντος πωλείται $T(\chi) = 2003 - \frac{\chi}{2}$.

α. Να βρείτε την συνάρτηση του κέρδους P, από την πώληση των χ μονάδων του προϊόντος.

β. Να βρείτε την μηνιαία παραγωγή χ μονάδων του προϊόντος ώστε το εργοστάσιο να επιτύχει οριακό κέρδος (μέγιστο κέρδος), καθώς και το οριακό κέρδος.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

137. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο R, για την οποία ισχύει: $\chi \cdot e^{\chi} \cdot f''(\chi) + \chi \cdot e^{\chi} \cdot \left(f'(\chi)\right)^2 = e^{\chi} - 1$, για κάθε $\chi \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 \neq 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

β. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $\chi_0 = 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - \alpha\chi^2$, $\alpha \neq 0$.

α. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $\psi = -\frac{1}{2}\chi^3$.

139. Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση Π_0 χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση, σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:

$\Pi_1(t) = \Pi_0 + t \cdot e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_1 η πίεση

$\Pi_2(t) = \Pi_0 + t^2 \cdot e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_2 η πίεση

Να βρείτε:

α. Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.

β. Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.

140. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυλινδρικό δοχείο όγκου $V = 4$ λίτρων, ανοικτό από πάνω.

Το υλικό κατασκευής της βάσης κοστίζει $50\ \frac{€}{cm^2}$, ενώ το υλικό κατασκευής της παράπλευρης επιφάνειας κοστίζει $100\ \frac{€}{cm^2}$

Ποια πρέπει να είναι η ακτίνα της βάσης και ποιο το ύψος του κυλίνδρου ώστε να πετύχουμε το ελάχιστο κόστος κατασκευής.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

141. Το κόστος παραγωγής χ μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $K(\chi)=\frac{1}{3}\chi^3-14\chi^2+445\chi+1000$ €, $6\le\chi\le 50$.

Η Είσπραξη από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος είναι 420 – χ €.

α. Να βρείτε την συνάρτηση του κέρδους f, από την πώληση των χ μονάδων του προϊόντος.

β. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή χ μονάδων του προϊόντος ώστε το εργοστάσιο να επιτύχει οριακό κέρδος (μέγιστο κέρδος), καθώς και το οριακό κέρδος.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Κυρτότητα – σημεία καμπής μιας συνάρτησης

✓ Κοίλα – κυρτά συνάρτησης

Πολλές φορές οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης δεν επαρκούν για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Για να καταλάβεις τι ακριβώς εννοώ δες ένα παράδειγμα :

1. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2$, είναι γνωστό, από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου, πως για την μονοτονία της f ισχύουν τα εξής : $f(\chi)=\chi^2 \Leftrightarrow f'(\chi)=2\chi$, $f'(\chi)\geq 0$ $\Rightarrow \chi \geq 0$ και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της f.

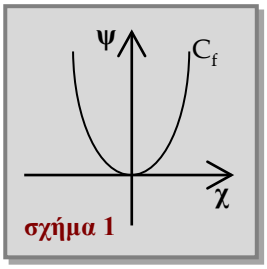
χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$		$+$
$f(\chi)$	↘		↗

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f' :

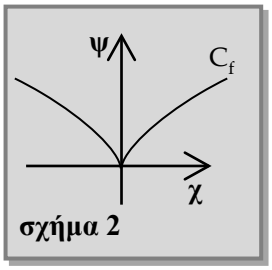
- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 0$,
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , 0)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$

Άρα η γραφική παράσταση της f

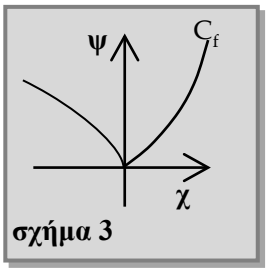
θα είναι όπως στο σχήμα 1; ή θα είναι όπως στο σχήμα 2; ή όπως στο σχήμα 3;



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

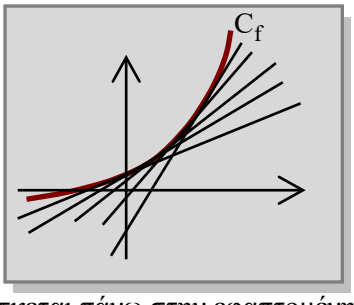
Και οι τρεις γραφικές παραστάσεις παριστάνουν μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty , 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$, παρ' όλα αυτά όμως «ανέρχονται» και «κατέρχονται» με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty , 0)$ και $(0 , +\infty)$. Με λίγη προσοχή θα διαπιστώσεις ότι η διαφορά βρίσκεται στο πως «καμπυλώνεται» η κάθε γραφική παράσταση. Για το ζήτημα αυτό καμιά από τις πληροφορίες που μας δίνει η πρώτη παράγωγος δεν μας διαφωτίζει.

Ορισμός :

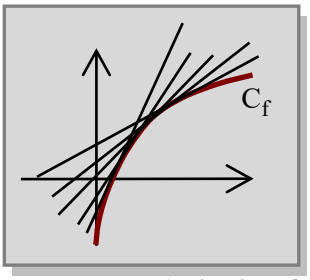
Έστω μία συνάρτηση **f**, ***συνεχής*** σε ένα διάστημα **Δ** και ***παραγωγίσιμη*** στο ***εσωτερικό*** του **Δ**. Θα λέμε ότι :

- ✓ Η συνάρτηση **f** είναι κυρτή στο **Δ** ή αλλιώς ότι η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο **Δ**, συμβολικά (συμβολικά ◡◝) αν η **f΄** είναι **γνησίως αύξουσα** στο ***εσωτερικό*** του **Δ**.
- ✓ Η συνάρτηση **f** είναι κοίλη στο **Δ** ή αλλιώς ότι η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο **Δ**, (συμβολικά ◠◜) αν η **f΄** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο ***εσωτερικό*** του **Δ**.

Προσοχή :



- ✓ Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται « κάτω » από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους που προφανώς βρίσκεται πάνω στην εφαπτομένη.



- ✓ Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται « πάνω » από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους, σχήμα δίπλα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(\chi)=\chi^4+3\chi^2+5$, σε οποιοδήποτε σημείο της C_f δεν έχει εκτός από το σημείο επαφής, άλλο κοινό σημείο με την C_f

Είναι $f'(\chi)=\left(\chi^4+3\chi^2+5\right)'=4\chi^3+6\chi$ άρα $f''(\chi)=\left(4\chi^3+6\chi\right)'=12\chi^2+6$

Άρα $f''(\chi)>0$ επομένως η f είναι κυρτή, άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη, εκτός του σημείου επαφής (δες τα προηγούμενα)

Πρακτικά η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά γίνεται με βάση το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα :

Έστω μία συνάρτηση **f** ***συνεχής*** σε ένα διάστημα **Δ** και ***δυο φορές παραγωγίσιμη*** στο ***εσωτερικό*** του **Δ,** τότε :

- ✓ Αν $\mathbf{f''(\chi)>0}$ για κάθε ***εσωτερικό*** σημείο χ του **Δ**, τότε η f είναι ***κυρτή*** στο **Δ**.
- ✓ Αν $\mathbf{f''(\chi)<0}$ για κάθε ***εσωτερικό*** σημείο χ του **Δ**, τότε η f είναι ***κοίλη*** στο **Δ**.

Προσοχή :

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει πάντα, δηλαδή μπορεί μια συνάρτηση f να είναι π. χ. κυρτή και η f'' να μην είναι **αυστηρά** θετική αλλά να υπάρχουν σημεία, εσωτερικά του Δ, όπου η f'' να γίνεται μηδέν.

Πάντως **αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή <u>αποκλείεται</u> η f'' να είναι αρνητική** .

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4$, η $f'(\chi)=4\chi^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η $f(\chi)=\chi^4$ είναι κυρτή στο R, παρ' όλα αυτά η f'' δεν είναι **αυστηρά** θετική αλλά υπάρχει και το $\chi_0=0\in R$, στο οποίο η $f''(0)=0$, προσέξτε πάντως ότι η f'' **δεν γίνεται αρνητική**.

<u>Αν η f είναι κοίλη ισχύουν αντίστοιχα πράγματα για την</u> f'' .

Δαμιανός Μωραΐτης

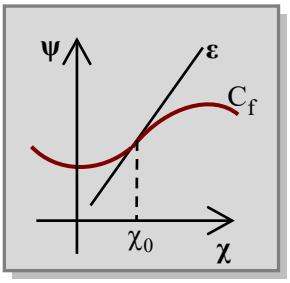
✓ Σημεία καμπής

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση **f** ***παραγωγίσιμη*** σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$.

Αν η f είναι ***κυρτή*** στο (α, χ_0) και ***κοίλη*** στο (χ_0, β) ή αντίστροφα, και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f** ***παρουσιάζει καμπή στο*** χ_0 και ***το*** χ_0 ***λέγεται θέση σημείου καμπής.***



Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη ε της C_f ***«διαπερνά» την καμπύλη.***

Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι :

Θεώρημα :

Αν το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(\chi_0) = 0$, δηλαδή το σημείο καμπής της f είναι σημείο ακρότατου για την f΄.

Πρακτικά :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$

Πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης **f** σ' ένα διάστημα **Δ** είναι:

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Τα εσωτερικά σημεία $\chi_0 \in \Delta$ στα οποία η f'' ***μηδενίζεται***.

ii) Τα εσωτερικά σημεία $\chi_0 \in \Delta$ στα οποία ***δεν υπάρχει η*** f''.

Αν επιπλέον

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0 και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$, τότε το $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής.

S O S για τις ασκήσεις:

Σύμφωνα με τα παραπάνω ***αν σε μια άσκηση σου ζητά*** να δείξεις ότι κάποιο χ_0 ***δεν είναι*** σημείο καμπής, **αρκεί να δείξεις** ότι $f''(\chi_0) \neq 0$, αν η άσκηση ***σου ζητά να δείξεις*** ότι η f δεν έχει καθόλου σημεία καμπής τότε δείχνεις ότι η εξίσωση $f''(\chi) = 0$ ***δεν έχει λύσεις στο*** **Δ**.

Παραδείγματα :

3. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα η συνάρτηση : $f(\chi) = 3\chi^5 - 5\chi^4 + 2$, και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της.

Απάντηση :

Π Ο το R . $f(\chi) = 3\chi^5 - 5\chi^4 + 2 \Rightarrow f'(\chi) = \left(3\chi^5 - 5\chi^4 + 2\right)' = 15\chi^4 - 20\chi^3$.

$f''(\chi) = \left(15\chi^4 - 20\chi^3\right)' = 60\chi^3 - 60\chi^2 = 60\chi^2(\chi - 1)$

$f''(\chi) = 0 \Leftrightarrow 60\chi^2(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = 1$

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f'' :

✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 0$ και $\chi = 1$

χ	$-\infty$	**0**	**1**	$+\infty$
$f''(\chi)$	$-$	$-$	$+$	
$f(\chi)$	⌐↘	⌐↘	⌙↗	

Σ. Κ

Δαμιανός Μωραΐτης

- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 0$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty , 0)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω και στο $(0 , 1)$ άρα το $\chi = 0$ **δεν είναι θέση σημείου καμπής .**
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0 , +\infty)$ άρα η f ***παρουσιάζει καμπή*** στο $\chi = 1$ και το **A(1 , 0)** ***είναι σημείο καμπής.***

4. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα η συνάρτηση : $f(\chi) = \chi\left(e^{-\chi}+1\right)$, και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της.

Απάντηση :

Π Ο το R . $f(\chi) = \chi\left(e^{-\chi}+1\right) \Rightarrow f'(\chi) = \left(\chi\left(e^{-\chi}+1\right)\right)' = \left(e^{-\chi}+1\right) + \chi\left(e^{-\chi}+1\right)'$

$= e^{-\chi}+1+\chi e^{-\chi}(-\chi)' \Rightarrow f'(\chi) = -\chi e^{-\chi}+e^{-\chi}+1.$

$f''(\chi) = \left(-\chi e^{-\chi}+e^{-\chi}+1\right)' = -e^{-\chi} - \chi\left(e^{-\chi}\right)' + \left(e^{-\chi}\right)' = -e^{-\chi}+\chi e^{-\chi}-e^{-\chi} \Rightarrow$

$f''(\chi) = e^{-\chi}(\chi-2) \quad f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\chi}(\chi-2) \geq 0 \\ \text{επειδή } e^{-\chi} > 0 \end{cases} \Rightarrow \chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$.

άρα πίνακας μεταβολών για τις : f΄΄, f στο R

χ	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(\chi)$	−	0	+
$f(\chi)$	⌐	↓ Σ. Κ	⌙

Άρα όπως φαίνεται και από τον πίνακα η f΄΄ :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 2$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 2$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty , 2)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 2$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(2 , +\infty)$ άρα η f ***παρουσιάζει καμπή*** στο $\chi = 2$ και το $A\left(2, 2\left(e^{-2}+1\right)\right)$ ***είναι σημείο καμπής.***

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα η συνάρτηση : $f(\chi)=\chi\ln\chi-\frac{\chi^3}{6}$, και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της.

Απάντηση :

Π Ο το $(0\,,+\infty)$, $f(\chi)=\chi\ln\chi-\frac{\chi^3}{6}\Rightarrow f'(\chi)=\left(\chi\ln\chi-\frac{\chi^3}{6}\right)'=$

$$\ln\chi+\chi(\ln\chi)'-\frac{3\chi^2}{6}=\ln\chi+\chi\frac{1}{\chi}-\frac{\chi^2}{2}\Rightarrow f'(\chi)=\ln\chi-\frac{\chi^2}{2}+1\,.$$

$$f''(\chi)=\left(\ln\chi-\frac{\chi^2}{2}+1\right)'=\frac{1}{\chi}-\left(\frac{\chi^2}{2}\right)'=\frac{1}{\chi}-\chi\Rightarrow f''(\chi)=\frac{1-\chi^2}{\chi}$$

$$f''(\chi)\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\chi^2}{\chi}\geq 0\\ \text{και } \chi>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\chi^2\geq 0\\ \text{και } \chi>0\end{cases}\Leftrightarrow \chi^2-1\leq 0$$

ρίζες $\chi=-1$ και $\chi=1$

άρα πίνακας μεταβολών

για τις : f'', f στο $(0\,,+\infty)$

χ		0	1	$+\infty$
$f''(\chi)$		+	0	–
$f(\chi)$		⌣	Σ. Κ	⌢

Άρα όπως φαίνεται και από τον διπλανό πίνακα η f'' :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi=1$.
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi<1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0\,,1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi>1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(1\,,+\infty)$

  άρα η f ***παρουσιάζει καμπή*** στο $\chi=1$ και το $A\left(1,-\frac{1}{6}\right)$ ***είναι σημείο καμπής.***

6. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα η συνάρτηση :

$$f(\chi)=\begin{cases}-3\chi^2+1 & ,\ \chi<0\\ -\chi^3+3\chi^2+1 & ,\ \chi\geq 0\end{cases}$$

, και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

Π Ο το $(0\,,+\infty)$.

- Αν $\chi<0$ είναι $f(\chi)=-3\chi^2+1 \Leftrightarrow f'(\chi)=\left(-3\chi^2+1\right)' \Leftrightarrow f'(\chi)=-6\chi$.
- Είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0} \Rightarrow \lambda(\chi)=\dfrac{-3\chi^2+1-1}{\chi} \Rightarrow \lambda(\chi)=-3\chi$ άρα

  $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\lambda(\chi)=0$.
- Αν $\chi>0$ είναι $f(\chi)=-\chi^3+3\chi^2+1 \Rightarrow f'(\chi)=\left(-\chi^3+3\chi^2+1\right)' \Rightarrow$

  $f'(\chi)=-3\chi^2+6\chi$.
- Είναι $\lambda(\chi)=\dfrac{f(\chi)-f(0)}{\chi-0} \Rightarrow \lambda(\chi)=\dfrac{-\chi^3+3\chi^2+1-1}{\chi} \Rightarrow \lambda(\chi)=\chi(3-\chi)$

  άρα $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)=0$.
- Αν $\chi=0$ είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\lambda(\chi)=0=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\lambda(\chi)$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη

  στο $\chi=0$ με $f'(0)=0$.

Και $f'(\chi)=\begin{cases}-6\chi & \chi<0\\ -3\chi^2+6\chi & \chi\geq 0\end{cases}$ άρα αν $\chi\neq 0$ τότε είναι

$f''(\chi)=\begin{cases}-6 & \chi<0\\ -6\chi+6 & \chi>0\end{cases}$.

- Αν $\chi<0$ $f''(\chi)<0$
- Αν $\chi>0$ $f''(\chi)\geq 0$ $-6\chi+6\geq 0 \Leftrightarrow -\chi+1\geq 0 \Leftrightarrow \chi\leq 1$.

  άρα πίνακας μεταβολών για τις : f'' f στο R

χ	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f''(\chi)$	$-$	‖	$+$	0	$-$
$f(\chi)$	↷		↶		↷

Σ. Κ **Σ. Κ**

Άρα όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η f'':

Λιβαδειά

- ✓ **Δεν ορίζεται** όταν $\chi = 0$ και **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 0$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty , 0)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $0 < \chi < 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0 , 1)$
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(1 , +\infty)$

  άρα το $\chi = 0$ **είναι θέση σημείου καμπής , Σ. Κ. το f(0) = 1.**

  και το $\chi = 1$ **είναι επίσης θέση σημείου καμπής , Σ. Κ. το A(1 , 3).**

7. Να βρείτε τα κ και λ έτσι ώστε η συνάρτηση : $f(\chi) = \kappa\chi^3 + \lambda\chi^2 + 1$, να έχει σημείο καμπής το σημείο M(1 , 3) .

Απάντηση :

Π Ο το $(0 , +\infty)$, η f ως πολυωνυμική είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με :

$f'(\chi) = 3\kappa\chi^2 + 2\lambda\chi$ και $f''(\chi) = 6\kappa\chi + 2\lambda$.

Αν το σημείο M(1 , 3) είναι σημείο καμπής θα πρέπει : $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(1) = \kappa \cdot 1^3 + \lambda \cdot 1^2 + 1 \\ f''(1) = 6\kappa \cdot 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda + 1 = 3 \\ 3\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa = -1 , \lambda = 3}$$

Επαλήθευση :

Αν $\kappa = -1$ και $\lambda = 3$ τότε $f(\chi) = -\chi^3 + 3\chi^2 + 1$ και $f'(\chi) = -3\chi^2 + 6\chi$ και

$f''(\chi) = -6\chi + 6$. $f''(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow -6\chi + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \leq 1$ και

πίνακας μεταβολών για τις : f΄΄, f στο R :

χ	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(\chi)$		+	0	–	
$f(\chi)$		⊓	↓	⊔	
			Σ. Κ		

Άρα όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα η f΄΄ :

- ✓ **μηδενίζεται** όταν $\chi = 1$.
- ✓ είναι **αρνητική** όταν $\chi < 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty , 1)$
- ✓ είναι **θετική** όταν $\chi > 1$, άρα η **f** στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(1 , +\infty)$

  άρα το $\chi = 1$ **είναι θέση σημείου καμπής , Σ. Κ. το A(1 , 3) επομένως δεκτές οι τιμές κ = – 1 , λ = 3.**

Δαμιανός Μωραΐτης

8. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0\ ,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $\left[f'(\chi)\right]^2=\frac{1}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^2}+4$, για κάθε $\chi>0$.

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Απάντηση :

Έστω $\chi_0\in(0,+\infty)$ ώστε το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

Η f ως πολυωνυμική είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και επομένως αν παραγωγίσεις την σχέση που σου δίνει θα έχεις :

$$\left(\left[f'(\chi)\right]^2\right)'=\left(\frac{1}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^2}+4\right)'\Rightarrow 2f'(\chi)f''(\chi)=\left(\frac{1}{\chi^4}\right)'+\left(\frac{4}{\chi^2}\right)'\Rightarrow$$

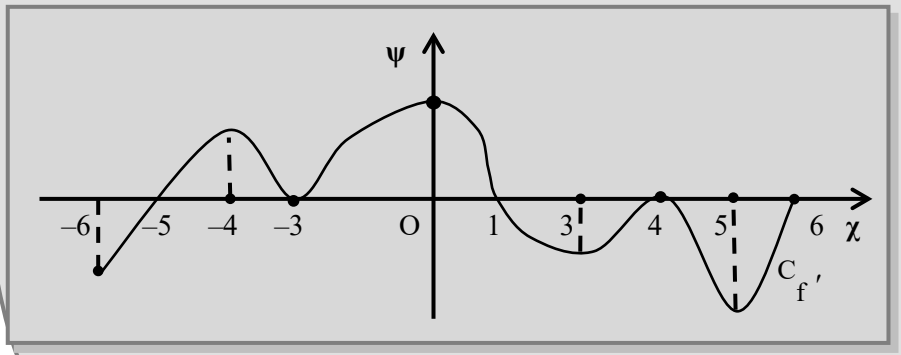
$$2f'(\chi)f''(\chi)=-\frac{\left(\chi^4\right)'}{\left(\chi^4\right)^2}-\frac{4\left(\chi^2\right)'}{\left(\chi^2\right)^2}\Rightarrow 2f'(\chi)f''(\chi)=-\frac{4\chi^3}{\chi^8}-\frac{8\chi}{\chi^4}\Rightarrow$$

$2f'(\chi)f''(\chi)=-\frac{4}{\chi^5}-\frac{8}{\chi^3}$ Αν λοιπόν το $A(\chi_0,f(\chi_0))$ πρέπει : $f''(\chi_0)=0$

και αν το αντικαταστήσεις στη σχέση που βρήκες θα ισχύει

$2f'(\chi_0)\cdot 0=-\frac{4}{\chi_0^5}-\frac{8}{\chi_0^3}\Rightarrow\frac{4}{\chi_0^5}+\frac{8}{\chi_0^3}=0$ άτοπο , άρα η συνάρτηση f δεν έχει σημείο καμπής.

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f δηλαδή η $C_{f'}$.



Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη καθώς και τις θέσεις τοπικών ακρότατων και σημείων καμπής.

Απάντηση :

ΠΟ είναι το διάστημα $[-6, 6]$.

Α. Μονοτονία – Ακρότατα

Παρατήρησε ότι η C_f, είναι μια συνεχής γραμμή χωρίς κενά άρα η f΄ είναι συνεχής συνάρτηση επομένως η f είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το διάστημα $[-6, 6]$. ***Κρίσιμα σημεία*** για την f είναι τα σημεία με τετμημένες :

$\chi_1 = -6$, $\chi_2 = -5$, $\chi_3 = -3$, $\chi_4 = 1$, $\chi_5 = 4$, $\chi_6 = 6$.

Στο διάστημα $(-6, -5)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι κάτω από τον χ΄χ

επομένως $f'(\chi) < 0$

Στο διάστημα $(-5, -4)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι πάνω από τον χ΄χ

επομένως $f'(\chi) > 0$

Με βάση λοιπόν την γραφική παράσταση της f΄ και με παρόμοιες παρατηρήσεις κατασκευάζεις τον πιο κάτω πίνακα μεταβολών

χ	**– 6**		–5		–3		1		4		6
$f'(\chi)$		–	0	+	0	+	0	–	0	–	
$f(\chi)$		↘		↗		↗		↘		↘	
			τ.μ.				**τ.μ.**				**τ.ε.**

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η f είναι:

γνησίως φθίνουσα στο $[-6, -5]$, ***γνησίως αύξουσα*** στο $[-5, 1]$ και ***γνησίως φθίνουσα*** στο $[1, 6]$, και παρουσιάζει ακρότατα μόνο στα άκρα του διαστήματος $\chi_1 = -6$, $\chi_6 = 6$ και στις θέσεις $\chi_2 = -5$ και $\chi_4 = 1$.

Β. Σημεία καμπής

- ✓ Στο διάστημα $(-6, -4)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «ανερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα
- ✓ Στο διάστημα $(-4, -3)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «κατερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα στη θέση χ = – 4 η f παρουσιάζει σημείο καμπής .
- ✓ Στο διάστημα $(-4, -3)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «κατερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα
- ✓ Στο διάστημα $(-3, 0)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «ανερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα άρα στη θέση χ = – 3 η f παρουσιάζει σημείο καμπής
- ✓ Στο διάστημα $(-3, 0)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «ανερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα
- ✓ Στο διάστημα $(-3, 0)$ η γραφ. παράσταση της f΄ είναι «κατερχόμενη» άρα η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα άρα στη θέση χ = 0 η f παρουσιάζει σημείο καμπής

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι σημείο καμπής η f παρουσιάζει στις θέσεις :
χ = 3, χ = 4 και χ = 5.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Μια πολυωνυμική συνάρτηση $3^{ου}$ βαθμού έχει τουλάχιστον ένα σημείο καμπής.	☐	☐
2.	Μια πολυωνυμική συνάρτηση $4^{ου}$ βαθμού έχει οπωσδήποτε σημείο καμπής.	☐	☐
3.	Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και η f είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$.	☐	☐
4.	Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ , τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.	☐	☐
5.	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f''(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$	☐	☐
6.	Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ , τότε η τότε η εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της C_f βρίσκεται κάτω από την C_f.	☐	☐
7.	Η συνάρτηση $f(\chi) = e^{-\chi}$ είναι κυρτή στο R.	☐	☐
8.	Το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0.	☐	☐

9. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και χ_0 εσωτερικό σημείο του Δ με $f''(\chi_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει καμπή στο χ_0.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $f''(\chi_0)\neq 0$ για κάθε $\chi_0 \in \Delta$ τότε η f δεν παρουσιάζει καμπή στο Δ.

Δες παρ. 2 σελ 227

1. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=\eta\mu\chi+5\chi-2$. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το σημείο επαφής.

2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(\chi)=\dfrac{f(\chi)+2\chi}{\chi}$, $\chi \in (0, +\infty)$. Να δειχτεί ότι η εφαπτομένη της C_f, σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από την C_f.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=(\chi-1)\cdot\ln(-\chi)$, $\chi\in(-\infty,-1)$.

Να δείξετε ότι :

α. Η f είναι κοίλη.

β. $f(\chi)\le 2(\chi+1)$.

(Υπ. δείξτε ότι η $\psi=2\chi+2$ είναι εφαπτομένη της C_f)

4. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=(\chi^2+2)e^{\chi}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το σημείο επαφής.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(\chi)=e^{\chi}$ είναι κυρτή.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^{\chi}$ είναι κυρτή.

Δες παρ. 3 – 5 σελ 229 – 231

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(\chi)=\ln\chi$ είναι κοίλη.

8. Να δείξετε ότι αν η f κυρτή στο (α,β), τότε η $-f$ είναι κοίλη στο (α,β).

9. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(\chi)=3\chi^5-5\chi^4+2$ **ii)** $g(\chi)=\dfrac{3\chi^2-2}{\chi^3}$.

10. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(\chi)=\chi(\chi^2+3)$ **ii)** $g(\chi)=-\dfrac{\chi^3}{\chi^2-9}$.

11. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) $f(\chi)=3\chi\cdot e^{\chi}+5\chi-2$ **ii)** $g(\chi)=2\ln^2\chi-4\ln\chi+5$.

12. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(\chi)=\chi\cdot e^{1-\chi}$ **ii)** $g(\chi)=\chi^2(2\ln\chi-5)$ **iii)** $f(\chi)=\chi\cdot e^{\chi-\chi^2}$

13. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(\chi)=\dfrac{3\ln\chi-2}{\chi^2}$ **ii)** $g(\chi)=(\chi-2)e^{\chi}$.

14. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(\chi)=e^{-\chi^2}$ **ii)** $g(\chi)=\varepsilon\varphi\chi$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

15. Να εξετάσετε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(\chi)=\dfrac{2\chi}{e^{\chi}}+3\chi$ **ii)** $g(\chi)=-\dfrac{\chi^3}{2}+\chi\cdot\ln\chi$.

16. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2+1}$ και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(\chi)=\dfrac{(\chi-1)^2}{\chi^2+1}$, έχει ακριβώς τρία σημεία καμπής, από τα οποία το ένα είναι μέσον του τμήματος που δημιουργούν τα άλλα δυο.

18. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1,4)$, αν η f είναι κυρτή και επί πλέον $f(1)=2$. Να δείξετε ότι $2f(4)+3f(-1)>10$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, αν η f είναι κοίλη και επί πλέον $f(\alpha)=f(\beta)=\kappa$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Να δείξετε ότι $f(\chi) \geq \kappa$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^3 - 3\chi^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν χ_1, χ_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων και χ_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$, $B(\chi_2, f(\chi_2))$ και $\Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$ είναι συνευθειακά.

21. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, αν η f είναι κυρτή να δείξετε ότι ισχύει: $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, αν η f είναι κυρτή να δείξετε ότι κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει:

$$f'(\chi_1) < \frac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1} < f'(\chi_2).$$

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \chi^3 - 9\chi^2 + 57$, $g(\chi) = \ln\chi + 1$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(1, g(1))$ τέμνει την C_f σε σημείο που είναι σημείο καμπής για την C_f.

24. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(\chi) \cdot f''(\chi) > \left(f'(\chi)\right)^2 = 0$, να δείξετε ότι η $g(\chi) = \ln f(\chi)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

25. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(\chi) = \ln(\chi^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

26. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi+\delta$.

α. Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β. Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ. Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακρότατων στα χ_1, χ_2, να αποδείξετε ότι

$f''(\chi_1)+f''(\chi_2)=0$.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi}$ και $g(\chi)=2\chi+f(\chi)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\ln\chi<\chi$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ. Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα – κυρτά και τα σημεία καμπής.

δ. Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $\psi=2\chi$.

ε. Να βρείτε ένα σημείο χ_0, στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi=2\chi$.

28. Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ' ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;

29. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f''(\chi)<0$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$.

30. Να βρείτε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

$$f(\chi)=\begin{cases}\chi^2-4\chi & \text{αν } \chi<1\\ \chi^3-6\chi^2+7\chi-5 & \text{αν } \chi\geq 1\end{cases}.$$

Δες παρ. 6 σελ 232

31. Να βρείτε που στρέφει τα κοίλα και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$h(\chi)=\begin{cases}-3\chi^2+1 & , \ \chi<0\\ -\chi^3+3\chi^2+1, & \chi\geq 0\end{cases}.$$

32. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(\chi)=\chi|\chi|$ **ii)** $g(\chi)=\sqrt{|\chi|}$.

33. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(\chi)=2e^{\chi-\alpha}-\chi^2$ έχει για κάθε τιμή του $\alpha\in R$ ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $\psi=-\chi^2+2$

Δες παρ. 7 σελ 233

34. Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\chi^3+\lambda\chi^2+(\kappa-1)\chi-2$ να έχει σημείο καμπής στο σημείο $\chi_1=\frac{1}{2}$ και ακρότατο στο $\chi_2=1$.

35. Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\chi^3+\lambda\chi^2$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $A(1,3)$.

36. Να βρείτε το κ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-4\kappa\chi^3+8\chi^2+20$ να στρέφει τα κοίλα άνω στο R.

37. Να βρείτε το κ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\left(\kappa-\frac{2}{3}\right)\chi^3-\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\chi^2-10\chi+7$ να παρουσιάζει καμπή στο $\chi=\frac{2}{3}$ και μετά για την τιμή του κ που βρήκατε να φτιάξετε τον πίνακα μεταβολών της f επιβεβαιώνοντας ότι το $\chi=\frac{2}{3}$ είναι σημείο καμπής.

(Υπ. δείξτε ότι η $\psi=2\chi+2$ είναι εφαπτομένη της C_f)

38. Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3-2\kappa\cdot\chi^2+\lambda\cdot\chi+10$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $A(2,-8)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3-\kappa\cdot\chi^2+3\chi+2$. Να βρείτε το $\kappa\in R$ ώστε η f να έχει σημείο καμπής, το σημείο της γραφικής της παράστασης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια .

40. Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\cdot\chi^3+\lambda\cdot\chi^2+2$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $A(1,1)$.

41. Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\kappa\cdot\chi^2+1$ έχει σημείο καμπής για $\chi=1$;

42. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2+\lambda\cdot\ln\chi$ έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in R$, $\lambda>0$.

43. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-2\kappa\cdot\chi^3+6\chi^2+2\chi+1$ είναι κυρτή σε όλο το R για κάθε $\kappa\in(-2,\ 2)$.

44. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(\chi)=\chi^3+3\cdot\kappa\cdot\chi+\lambda$, έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, το οποίο και να βρείτε

45. Να βρείτε τα κ, λ ∈ R ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa\cdot\chi^2-\ln^2\chi+\lambda$ να έχει σημείο καμπής το σημείο $A(1,5)$.

46. Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, για την οποία ισχύει : $f^2(\chi)+(\chi-4)f(\chi)+\chi=0$, δεν έχει σημεία καμπής.

Δες παρ. 8 σελ 234

47. Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$, για την οποία ισχύει $f^2(\chi)-2f(\chi)+\chi^2-3=0$, δεν έχει σημεία καμπής.

48. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

για την οποία ισχύει $\left[f'(\chi)\right]^2 = \frac{4}{\chi^3} + \frac{2}{\chi^2} + 8$, δεν έχει σημεία καμπής.

49. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες και ισχύει $g\left(f'(\chi)\right) = \chi^3 + 3\chi^2 + 5\chi - 11$, να αποδείξετε ότι η f, δεν έχει σημεία καμπής.

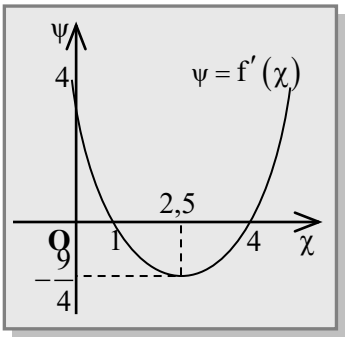
50. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$f''(\chi) \neq 4f'(\chi) - 4f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$.

Να δείξετε ότι η $g(\chi) = e^{-2\chi} f(\chi)$ δεν έχει σημεία καμπής στο R.

Δες παρ. 9 σελ 234

51. Η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

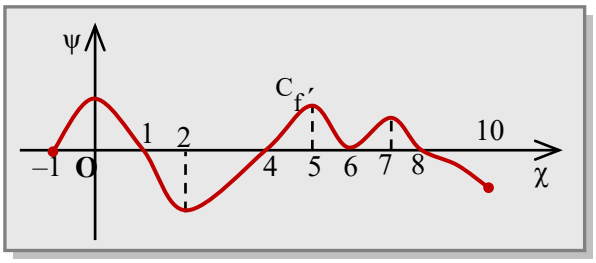


α. Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f.

β. Να βρείτε τον τύπο της f, αν f (0) = 1.

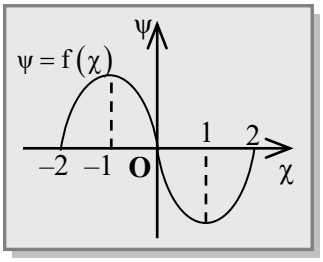
γ. Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

52. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1, 10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακρότατων και σημείων καμπής.

53. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λύσετε τις :

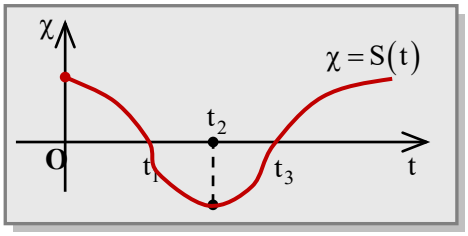


α. $f'(\chi)=0$.

β. $f'(\chi)<0$.

γ. $f'(\chi)>0$.

54. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $\chi = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα.



Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

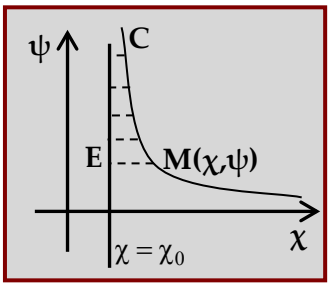
ii) Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ασύμπτωτες

Ασύμπτωτη (από το α + συμπίπτω).

1. *Κατακόρυφη Ασύμπτωτη*



Έστω μια καμπύλη C, η ευθεία **ε** με εξίσωση $\chi = \chi_0$ και ένα σημείο $M(\chi, \psi)$ πάνω στην καμπύλη C, σχήμα δίπλα .

Παρατήρησε ότι η απόσταση ΜΕ του Μ από την ευθεία **ε** : $\chi = \chi_0$ **μικραίνει διαρκώς**, καθώς το $\chi \to \chi_0^+$ **.**

Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ευθεία **ε** ονομάζεται **ασύμπτωτη** της καμπύλης C.

Γενικότερα ισχύει ο

Ορισμός :

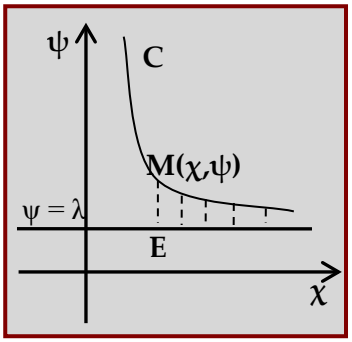
Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} f(\chi)$ είναι το $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $\chi = \chi_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Παρατήρηση :

Είναι προφανές ότι αν πχ $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} f(\chi) = +\infty$ ή αν $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} f(\chi) = -\infty$, δεν χρειάζεται να αναζητήσεις και το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} f(\chi)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. *Οριζόντια Ασύμπτωτη*



Έστω μια καμπύλη C, η ευθεία **ε** με εξίσωση **ψ = λ** και ένα σημείο M(χ,ψ) πάνω στην καμπύλη C, σχήμα δίπλα .

Παρατήρησε ότι η απόσταση ME του M από την ευθεία **ε : ψ = λ μικραίνει διαρκώς**, καθώς το $\chi \to +\infty$.

Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι ευθεία **ε** ονομάζεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της καμπύλης C.

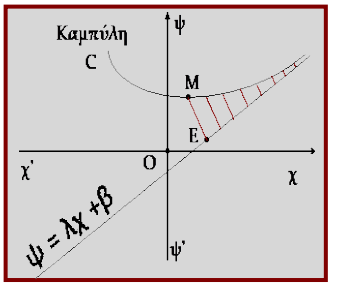
Ορισμός :

Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lambda$ $\left(\text{αντίστοιχα } \lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\kappa\right)$, τότε η ευθεία **ψ = λ** $\left(\text{αντίστοιχα η } \boldsymbol{\psi=\kappa}\right)$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ $\left(\text{αντίστοιχα στο } -\infty\right)$.

Παρατήρηση :

Είναι προφανές ότι θα αναζητάς πάντα $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)$ ***και*** το $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$, γιατί όπως κατάλαβες … μπορεί μια συνάρτηση f να έχει και δυο **οριζόντιες ασύμπτωτες**, μια στο +∞ και μια στο – ∞.

3. *Πλάγια Ασύμπτωτη*



Έστω μια καμπύλη C, η ευθεία **ε** με εξίσωση ψ = λχ + β και ένα σημείο M(χ,ψ) πάνω στην καμπύλη C, σχήμα δίπλα .

Παρατήρησε ότι η απόσταση ME του M από την ευθεία **ε** : ψ = λχ + β **μικραίνει διαρκώς**, καθώς το $\chi \to +\infty$. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι ευθεία **ε** ονομάζεται **πλάγια ασύμπτωτη** ή απλώς **ασύμπτωτη** της καμπύλης C.

Γενικότερα ισχύει ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ορισμός :

Η ευθεία **ε : ψ = λχ + β** λέγεται ***ασύμπτωτη*** της γραφική παράστασης της f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-(\lambda\chi+\beta)\right]=0$

$\left(\text{αντίστοιχα στο } -\infty \text{ αν } \lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[f(\chi)-(\lambda\chi+\beta)\right]=0\right)$.

Παρατηρήσεις :

- ✓ Αν **λ = 0** τότε η ευθεία παίρνει τη μορφή **ψ =** β και είναι προφανές πως είναι **οριζόντια ασύμπτωτη.**
- ✓ Αν **λ ≠ 0** τότε η **ψ = λχ + β** λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη**.
- ✓ Είναι προφανές ότι θα αναζητάς πάντα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-(\lambda\chi+\beta)\right]$ ***και*** το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[f(\chi)-(\lambda\chi+\beta)\right]$, γιατί όπως κατάλαβες μπορεί μια συνάρτηση f να έχει και δυο **ασύμπτωτες**, μια στο $+\infty$ και μια στο $-\infty$.
- ✓ Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει περισσότερες από μια ασύμπτωτες, επειδή όμως το όριο μιας συνάρτησης, αν υπάρχει είναι μοναδικό, η κάθε ασύμπτωτη, αν υπάρχει θα είναι μοναδική.
- ✓ Ο ορισμός, δηλαδή η αναζήτηση του $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-(\lambda\chi+\beta)\right]$, μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην περίπτωση που η **ψ = λχ + β *είναι γνωστή***. ***Δες παράδειγμα 1 πιο κάτω***.

Αν ***δεν είναι γνωστή*** η **ψ = λχ + β,** για τον προσδιορισμό των ασύμπτωτων μιας συνάρτησης εφαρμόζεις το πιο κάτω θεώρημα :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα :

- Η ευθεία **ε: ψ = λχ + β** είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-\lambda\chi\right]=\beta\in R$
- Η ευθεία **ε: ψ = λχ + β** είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[f(\chi)-\lambda\chi\right]=\beta\in R$

Παρατηρήσεις :

- Το πιο πάνω θεώρημα σου υποδεικνύει τι πρέπει να κάνεις για να βρεις τα λ και β της ευθείας $\psi=\lambda\chi+\beta$.
- **Προσοχή πρέπει λ ∈ R και β ∈ R.**
- Οι ***πολυωνυμικές*** συναρτήσεις ***δεν έχουν ασύμπτωτες***.
- Όταν η f είναι ***ρητή*** συνάρτηση $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, αναζητάς ***κατακόρυφες ασύμπτωτες*** στα σημεία που ***μηδενίζεται ο παρονομαστής***.
- Σε μια ***ρητή*** συνάρτηση $f(\chi)=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$,
  - **i.** Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(\chi)$ είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή $Q(\chi)$, ***υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες***.
  - **ii.** Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(\chi)$ είναι μεγαλύτερος κατά ένα από το βαθμό του παρονομαστή $Q(\chi)$, τότε ***υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες***.
  - **iii.** Αν ο βαθμός του αριθμητή $P(\chi)$ είναι μεγαλύτερος ***τουλάχιστον*** κατά δύο από το βαθμό του παρονομαστή $Q(\chi)$, ***δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες***.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- ✓ Επειδή ***το όριο*** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lambda$ ***είναι μοναδικό***, άρα όταν $\boldsymbol{\lambda = 0}$ δηλαδή η συνάρτηση f ***έχει οριζόντια ασύμπτωτη*** τότε ***δεν μπορεί να έχει και πλάγια***, και αν αντίστοιχα $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ τότε θα έχει ***πλάγια ασύμπτωτη***, αλλά δεν μπορεί να έχει και ***οριζόντια ασύμπτωτη***.
  Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν και για το $-\infty$

- ✓ Όταν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ***ανοικτό*** ή ***ημιανοικτό διάστημα*** αναζητάς ασύμπτωτη στα ***άκρα στα οποία η f δεν ορίζεται***.
  Δες παραδείγματα 2, 3 πιο κάτω.

- ✓ ***Στα σημεία*** του πεδίου ορισμού της, στα οποία η **f** ***δεν είναι συνεχής***.

- ✓ Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντίστοιχα $(-\infty,\alpha)$.

- ✓ Είναι προφανές ότι θα αναζητάς πάντα ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Παραδείγματα :

1. Δίνεται η $\psi = 3\chi - 2$, να εξετάσετε αν είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^2$, στο $+\infty$.

Απάντηση :

Η f έχει πεδίο ορισμού το R και είναι συνεχής σε αυτό.

Για να είναι η $\psi = 3\chi - 2$ ασύμπτωτη της $f(\chi)=\chi^2$ στο $+\infty$ πρέπει

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-(3\chi-2)\right]=0$, όμως $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^2-3\chi+2\right)=+\infty$ άρα η

η $\psi = 3\chi - 2$ δεν είναι ασύμπτωτη της $f(\chi)=\chi^2$ στο $+\infty$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f της συνάρτησης $f(\chi)=\dfrac{3\chi^2-2}{\chi}$.

Απάντηση :

Η f είναι ρητή, έχει πεδίο ορισμού το $R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σ' αυτό, οπότε, σύμφωνα και με τις παρατηρήσεις πιο πάνω, θα αναζητήσεις κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 (επειδή δεν ορίζεται στο 0) και πλάγιες στο $-\infty$ και στο $+\infty$, αφού ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ αντίστοιχα.

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{3\chi^2-2}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^-}(3\chi^2-2)\cdot\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{1}{\chi}=(-2)(-\infty)\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=+\infty$. Άρα η ευθεία $\chi=0$ είναι ***κατακόρυφη ασύμπτωτη*** της γραφικής παράστασης της f.

Δεν χρειάζεται να αναζητήσεις και το $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$, αρκεί που $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=+\infty$

✓ Εξετάζεις αν υπάρχει ευθεία της μορφής $\psi=\lambda\chi+\beta$ η οποία να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\frac{3\chi^2-2}{\chi}}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{3\chi^2-2}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{3\chi^2}{\chi^2}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}3=3$, οπότε $\boldsymbol{\lambda=3}$ και

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(f(\chi)-\lambda\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{3\chi^2-2}{\chi}-3\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{3\chi^2-2-3\chi^2}{\chi}\right)=$$

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{-2}{\chi}\right)\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(f(\chi)-\lambda\chi\right)=-2\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\chi}\right)=0$, οπότε $\boldsymbol{\beta=0}$.

Επομένως, η ευθεία $\boldsymbol{\psi=3\chi}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της **f** στο $-\infty$.

✓ Εξετάζεις αν υπάρχει ευθεία της μορφής $\psi=\lambda\chi+\beta$ η οποία να είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Με ακριβώς όμοιο τρόπο βρίσκεις ότι η ευθεία $\boldsymbol{\psi=3\chi}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της **f** και στο $+\infty$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(\chi)=\ln\chi$.

Απάντηση :

Η g έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Επειδή το $\chi_0=0$ είναι άκρο του πεδίου ορισμού της g, στο οποίο δεν ορίζεται η g, θα αναζητήσεις αν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Από την θεωρία είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{\chi\to 0^+} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\ln\chi=-\infty$ άρα η η $\chi=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $g(\chi)=\ln\chi$ στο $\chi_0=0$.

4. Να αποδειχθεί ότι η $f(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0$ (πολυωνυμική συνάρτηση) ***δεν έχει ασύμπτωτες***.

Απάντηση :

Η f, ως πολυωνυμική έχει πεδίο ορισμού το R και είναι συνεχής σ' αυτό, οπότε για κάθε $\chi_0\in R$ θα είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=f(\chi_0)\neq\pm\infty$ ***άρα αποκλείονται*** οι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0}{\chi}=$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu\chi^\nu}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\alpha_\nu\chi^{\nu-1}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\begin{cases}+\infty & \text{αν } \alpha>0\\ -\infty & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$.

Άρα δεν ορίζεται το λ επομένως δεν μπορεί να υπάρχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

- ✓ Ανάλογα πράγματα ισχύουν για το $-\infty$.
- ✓ Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται πως μια ρητή συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ με βαθμό του αριθμητή $P(\chi)$ μεγαλύτερο ***τουλάχιστον*** κατά δύο από το βαθμό του παρονομαστή $Q(\chi)$, ***δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες***.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases} 2\chi+1 & \text{αν } \chi\le 0 \\ \dfrac{\chi^2-1}{\chi} & \text{αν } \chi>0 \end{cases}$

i) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τις ασύμπτωτες.

Απάντηση :

i) Η f είναι διπλού τύπου, έχει πεδίο ορισμού το R και είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική , συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή.

Στο $\chi_0=0$ είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-}(2\chi+1)=1$ και

$$\lim_{\chi\to 0^+} f(\chi)=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\chi^2-1}{\chi}=\lim_{\chi\to 0^+}(\chi^2-1)\lim_{\chi\to 0^+}\frac{1}{\chi}=-1(+\infty)\Rightarrow$$

$\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=-\infty$ άρα η f ***δεν είναι συνεχής στο*** $\chi_0=0$.

Α. Θα αναζητήσεις κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi_0=0$, επειδή η f δεν είναι συνεχής στο $\chi_0=0$.

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=-\infty$ άρα η ευθεία **χ = 0** είναι ***κατακόρυφη ασύμπτωτη***.

Β. Θα αναζητήσεις ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$, αφού ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$ αντίστοιχα.

✓ Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η f είναι πολυωνυμική και επομένως ***δεν έχει ασύμπτωτες*** .

✓ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\frac{\chi^2-1}{\chi}}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2-1}{\chi^2}=$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2}{\chi^2}\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}1=1$, άρα **λ = 1**.

Είναι

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-\lambda\chi\right]=\lim_{\chi\to+\infty}\left[\frac{\chi^2-1}{\chi}-\chi\right]=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2-1+\chi^2}{\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{-1}{\chi}$$ άρα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-\lambda\chi\right]=0$, άρα **β = 0**.

Επομένως η C_f ***έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία*** $\psi=\chi$.

ii) Επειδή οι ασύμπτωτες (και οι δυο) αφορούν τον ***κλάδο*** της C_f που έχει τύπο $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-1}{\chi}$, αν υπάρχουν κοινά σημεία των ασύμπτωτων με την C_f αυτά θα προκύπτουν από την τομή των ασύμπτωτων με τον **κλάδο** της C_f που έχει τύπο $f(\chi)=2\chi+1$ και για να τα βρεις θα λύσεις τα συστήματα :

✓ $\begin{cases}\chi=0\\ \psi=2\chi+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=0\\ \psi=1\end{cases}$ άρα το κοινό σημείο της κατακόρυφης ασύμπτωτης $\chi=0$ και της C_f είναι το σημείο $A(0,1)$.

✓ $\begin{cases}\psi=\chi\\ \psi=2\chi+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\chi\\ \chi=2\chi+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=-1\\ \chi=-1\end{cases}$ άρα το κοινό σημείο της πλάγιας ασύμπτωτης $\psi=\chi$ και της C_f είναι το σημείο $B(-1,-1)$.

6. Να βρεθούν τα κ, λ ∈ R ώστε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}-5\chi\right]=-2$.

Απάντηση :

Αν θεωρήσεις την $g(\chi)=\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}$, τότε η g έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό, άρα έχει νόημα το όριο όταν $\chi\to+\infty$. Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}-5\chi\right]=-2$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}-5\chi+2\right]=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}-(5\chi-2)\right]=0$. Η τελευταία σχέση σημαίνει πως η

ευθεία $\psi = 5\chi - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, άρα με βάση το θεώρημα θα πρέπει $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{g(\chi)}{\chi}=5$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[g(\chi)-5\chi\right]=-2$.

Όμως $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{g(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^3+\chi^2}=$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\kappa\chi^3}{\chi^3}=\kappa$ άρα $\kappa = 5$.

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left[\frac{5\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}-5\chi\right]=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{5\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3-5\chi^3-5\chi^2}{\chi^2+\chi}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{-(\lambda+5)\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{-(\lambda+5)\chi^2}{\chi^2}=-\lambda-5 \text{ άρα } -\lambda-5=-2$$

$\Leftrightarrow$ **$\lambda = -3$**.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$. Αν η ευθεία $\psi = -3\chi + 2$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και επί πλέον είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\cdot f(\chi)+3\chi^2+2\lambda\chi+5}{\lambda\cdot f(\chi)-5\chi+4}=-1$, να βρεθεί το $\lambda \in R$.

Απάντηση :

Αφού η $\psi = -3\chi + 2$ θα πρέπει $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=-3$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)+3\chi\right]=2$.

Όμως

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\cdot f(\chi)+3\chi^2+2\lambda\chi+5}{\lambda\cdot f(\chi)-5\chi+4}=-1\Leftrightarrow\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(f(\chi)+3\chi+2\lambda+\frac{5}{\chi}\right)}{\chi\left(\lambda\frac{f(\chi)}{\chi}-5+\frac{4}{\chi}\right)}=-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(f(\chi)+3\chi\right)+\lim\limits_{\chi\to-\infty}2\lambda+\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{5}{\chi}}{\lambda\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}-\lim\limits_{\chi\to-\infty}5+\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{4}{\chi}}=-1\Leftrightarrow\frac{2+2\lambda+0}{-3\lambda-5+0}=-1\Leftrightarrow$$

$2+2\lambda=3\lambda+5 \Leftrightarrow$ **$\lambda = -3$**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\chi$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = 0$.	☐	☐
2.	Η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\chi}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 0$.	☐	☐
3.	Μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη .	☐	☐
4.	Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το R και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.	☐	☐
5.	Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το R μπορεί να έχει το πολύ δυο ασύμπτωτες.	☐	☐
6.	Αν μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το R έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.	☐	☐
7.	Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το R και έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ τότε δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.	☐	☐
8.	Η ευθεία $\chi = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, με $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-4}{(\chi-2)^2}$.	☐	☐

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Μια συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το R και για την οποία, για κάθε $\chi \in R$, ισχύει $\left|f(\chi)\right| \le \theta$, $\theta \in R$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \dfrac{\chi^5 + \chi^3 - 2}{\chi^2 + \chi + 2004}$ έχει μια πλάγια ασύμπτωτη.

11. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \dfrac{\chi^4 + \chi^3 + 3}{\chi^2 + 2}$ έχει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη.

12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = 2\chi^5 - 3\chi^3 - 2$ έχει τουλάχιστον μια πλάγια ασύμπτωτη.

13. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = \dfrac{\chi}{\chi^2 - 1}$ έχει δύο έχει κατακόρυφες ασύμπτωτη.

14. Ισχύει $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{συν}\chi}{\chi - \frac{\pi}{2}} = -1$

15. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\chi) = e^{-\chi}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+2}{-4\chi+3}$.

Δες παρ. 1 – 3 σελ 251 – 253

2. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $f(\chi)=\dfrac{\chi+2}{\chi^2-4\chi+3}$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ της f όταν

i) $f(\chi)=\chi+\dfrac{1}{\chi^2}$ **ii)** $f(\chi)=-\chi+\dfrac{1}{e^{\chi}}+1$ **iii)** $f(\chi)=2+\dfrac{5}{\chi-4}$

4. Μια συνάρτηση f, έχει πεδίο ορισμού το R και ισχύει $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[f(\chi)-\lambda\chi\right]=\beta$, λ, β ∈ R. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lambda$

5. Να δείξετε ότι η ευθεία ψ = χ + 3 είναι πλάγια ασύμπτωτη της

$f(\chi)=\dfrac{\chi^2+3\chi+2}{\chi}$.

6. Να δείξετε ότι η ευθεία ψ = 2χ + 3 είναι πλάγια ασύμπτωτη της

$f(\chi)=\dfrac{2\chi^3+3\chi^2+7}{\chi^2+1}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi+7}{e^{\chi}}$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi-2}{e^{2\chi}}$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες.

9. Έστω ότι για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει $3\le\chi\cdot f(\chi)\le 11$ για κάθε χ. Να δείξετε ότι ο χ΄χ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο διάστημα $(\kappa, +\infty)$, $\kappa > 0$.

Αν η συνάρτηση f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi = \alpha\chi + \beta$ και η συνάρτηση g έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi = \gamma\chi + \delta$ να δείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση f + g έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία :

$$\psi = (\alpha + \gamma)\chi + (\beta + \delta).$$

ii) Η συνάρτηση f – g έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία :

$$\psi = (\alpha - \gamma)\chi + (\beta - \delta).$$

iii) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία :

$$\psi = (\alpha - \gamma)\chi + (\beta - \delta).$$

iv) Η συνάρτηση $f \cdot g$ δεν έχει ασύμπτωτη.

11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{3\chi + 1}{3\chi - 6}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 1$ και κατακόρυφη την $\chi = 2$.

Δες παρ. 4 σελ 253

12. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 2}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + 2\chi + 2}$ $\chi \in (0, +\infty)$ και η ευθεία ε: $\psi = \chi + 1$.

Να αποδείξετε ότι

i) Η **ε** είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ η C_f βρίσκεται πάνω από την **ε**.

$\left(\text{Υπ δείξτε ότι } \sqrt{\chi^2 + 2\chi + 2} > \chi + 1 \text{ όταν } \chi \in (0, +\infty)\right)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \chi \cdot e^{-\frac{2}{\chi}}$.

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Να αποδειχθεί ότι η $f(\chi)=\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma$ δεν έχει ασύμπτωτες.

16. Να αποδειχθεί ότι η $f(\chi)=\dfrac{3\chi^4+5\chi^3+6}{\chi^2+\chi+2}$

i) δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

i) δεν έχει ασύμπτωτες (οριζόντιες ή πλάγιες).

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases}\chi-1 & \text{αν } \chi\le 0\\ \dfrac{3}{\chi} & \text{αν } \chi>0\end{cases}$.

Δες παρ. 5 σελ 254

i) Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τις ασύμπτωτες.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases}\chi-1 & \text{αν } \chi\le 0\\ \dfrac{3}{\chi} & \text{αν } \chi>0\end{cases}$.

Δες παρ. 5 σελ 254

i) Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τις ασύμπτωτες.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\frac{1}{\chi}}$.

i) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

ii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τις ασύμπτωτες.

20. Να βρείτε τα κ, λ ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\kappa\chi^3-\lambda\chi^2+5\chi+3}{\chi^2+\chi}$ να έχει ως ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi=5\chi-2$.

Δες παρ. 6 σελ 255

21. Να βρείτε τα α, β, γ, δ ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\alpha\chi^2+\beta\chi+2}{\gamma\chi^2+\chi+\delta}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $\chi = 3$, $\chi = 0$, $\psi = 1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{(\alpha+1)\chi^3+(\beta+2)\chi^2-3}{2\chi^2+3}$. Να βρείτε τους α, β ώστε η ευθεία $\psi = \chi - 2$ να είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\kappa^2\chi^2-\chi-3}{\chi-1}$. Να βρείτε τον κ ώστε η C_f της συνάρτησης να μην έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

24. Να βρείτε τα κ, λ ώστε η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\lambda\chi+2}{\chi+\kappa}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $\chi = 2$, $\psi = 1$.

Δες παρ. 7 σελ 254

25. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$. Αν η ευθεία $\psi = 2\chi - 3$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και επί πλέον είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-2\chi^2+\lambda\chi+5}{\lambda\cdot f(\chi)-4\chi+3}=1$, να βρεθεί το $\lambda \in R$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$. Αν η ευθεία $\psi = 5\chi + 1$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και επί πλέον είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-3\chi^2+\chi\eta\mu\chi}{\chi^2\cdot f(\chi)-5\chi}=1$, να βρεθεί το $\lambda \in R$.

27. Αν η συνάρτηση f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 3\chi - 2$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\dfrac{\chi\cdot f(\chi)-3\chi^2+5}{f(\chi)+\chi-1}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $\psi=-\dfrac{1}{2}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Κανόνες De L' Hospital

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\dfrac{e^{\chi}-1}{2\eta\mu\chi}$, $\chi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Η φ είναι ρητή, έχει πεδίο ορισμού το $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και είναι συνεχής σ' αυτό, οπότε, αν θελήσεις να αναζητήσεις κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 (αφού δεν ορίζεται στο 0), θα χρειασθεί να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\dfrac{e^{\chi}-1}{2\eta\mu\chi}$ ή το $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{e^{\chi}-1}{2\eta\mu\chi}$.

Παρατήρησε ότι αν θελήσεις να εφαρμόσεις τον κανόνα του ορίου για το πηλίκο, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$ και δεν μπορείς να εφαρμόσεις καμιά από τις μεθόδους που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο περί ορίων για την άρση της απροσδιοριστίας (απλοποίηση, συζυγείς παραστάσεις κτλ.).

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως ***κανόνες De L' Hospital*** .

Θεώρημα 1ο $\left(\text{αφορά την μορφή } \dfrac{0}{0}\right)$.

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=0$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=0$ και $\chi_0\in R$ ή το χ_0 είναι το $\pm\infty$ και

υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{f'(\chi)}{g'(\chi)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f(\chi)}{g(\chi)}=\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{f'(\chi)}{g'(\chi)}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα 2ο $\left(\text{αφορά την μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Αν $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} f(\chi) = +\infty$, $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} g(\chi) = +\infty$ και $\chi_0 \in R$ ή το χ_0 είναι το $\pm\infty$

και ***υπάρχει*** το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f'(\chi)}{g'(\chi)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)} = \lim_{\chi \to \chi_0} \frac{f'(\chi)}{g'(\chi)}.$$

Παρατηρήσεις :

- ✓ Το Θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$.
- ✓ Και τα δυο Θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια.
- ✓ Αν εφαρμόσεις τον De L' Hospital και το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f'(\chi)}{g'(\chi)}$ είναι απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ ή της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και για τις $f'(\chi)$, $g'(\chi)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του De L' Hospital τότε προχωράς στον υπολογισμό του $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \frac{f''(\chi)}{g''(\chi)}$ και ούτω καθ' εξής.

Εφαρμογές στον De L' Hospital

Υπάρχουν τέσσερις μορφές απροσδιοριστίας στις οποίες εφαρμόζονται οι κανόνες (Θεωρήματα) του De L' Hospital :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- ✓ **Μορφή πρώτη :** $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- ✓ **Μορφή δεύτερη :** $0\cdot\infty$
- ✓ **Μορφή τρίτη :** $\infty - \infty$
- ✓ **Μορφή τέταρτη :** 0^0 , 1^∞ , ∞^0

✓ **Μορφή πρώτη :** $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Λύνονται με βάση τα δυο θεωρήματα του De L' Hospital .

Παραδείγματα :

1. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\frac{e^\chi-1}{2\eta\mu\chi}$, $\chi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ στο $\chi_0=0$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(e^\chi-1\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(2\eta\mu\chi\right)=0$ εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{(e^\chi-1)'}{(2\eta\mu\chi)'}$, είναι

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{(e^\chi-1)'}{(2\eta\mu\chi)'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{e^\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{e^0}{2\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{2}$$ άρα

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{e^\chi-1}{2\eta\mu\chi}=\lim_{\chi\to 0}\frac{(e^\chi-1)'}{(2\eta\mu\chi)'}=\frac{1}{2}.$$

2. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\frac{1-\chi^2}{1-\chi^3}$, στο $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-\chi^2\right)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-\chi^3\right)=0$ εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{(1-\chi^2)'}{(1-\chi^3)'}$, είναι

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{(1-\chi^2)'}{(1-\chi^3)'}=\lim_{\chi\to 1}\frac{-2\chi}{-3\chi^2}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$ άρα $$\lim_{\chi\to 1}\frac{1-\chi^2}{1-\chi^3}=\lim_{\chi\to 1}\frac{(1-\chi^2)'}{(1-\chi^3)'}=\frac{2}{3}$$

3. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1}{3\chi^2}$, στο $\chi_0=0$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(3\chi^2\right)=0$ εξετάζεις το

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{(\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1)'}{(3\chi^2)'}$. Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{(\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1)'}{(3\chi^2)'}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\chi+\eta\mu\chi}{6\chi}=$

1ος τρόπος : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\chi}{6\chi}+\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{6\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

2ος τρόπος : μορφή $\dfrac{0}{0}$ οπότε $=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{(2\chi+\eta\mu\chi)'}{(6\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu\chi}{6}\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1}{3\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{(\chi^2-\sigma\upsilon\nu\chi+1)'}{(3\chi^2)'}=\dfrac{1}{2}$.

4. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln\chi-\chi+1}{(\chi-1)^2}$, στο $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\ln\chi-\chi+1\right)=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)^3=0$ εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{(\ln\chi-\chi+1)'}{\left((\chi-1)^2\right)'}$.

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{(\ln\chi-\chi+1)'}{\left((\chi-1)^2\right)'}=\lim_{\chi\to 1}\frac{\frac{1}{\chi}-1}{2(\chi-1)(\chi-1)'}=\lim_{\chi\to 1}\frac{\frac{1-\chi}{\chi}}{2(\chi-1)}=\lim_{\chi\to 1}\frac{1-\chi}{2\chi(\chi-1)}=$$

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1-\chi}{2\chi^2-2\chi}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{-\chi}{2\chi^2}=-\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{2\chi}=-\dfrac{1}{2}$. άρα

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\ln\chi-\chi+1}{(\chi-1)^2}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{(\ln\chi-\chi+1)'}{\left((\chi-1)^2\right)'}=-\dfrac{1}{2}$.

5. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{2\ln\chi}{e^{\chi}}$, όταν $\chi\to+\infty$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(2\ln\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}e^{\chi}=+\infty$ εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(2\ln\chi)'}{\left(e^{\chi}\right)'}$, είναι

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(2\ln\chi)'}{\left(e^{\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{2}{\chi}}{e^{\chi}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{2}{2\chi e^{\chi}}=0 \quad \text{άρα}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{2\ln\chi}{e^{\chi}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(2\ln\chi)'}{\left(e^{\chi}\right)'}=0.$$

6. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{\chi}}}{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi\to\pm\infty$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{\chi}\right)=0$ άρα και $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)=1-e^{0}=0$ εξετάζεις το

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{1}{\chi}\right)'e^{\frac{1}{\chi}}}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to\pm\infty}e^{\frac{1}{\chi}}=1 \quad \text{άρα}$$

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{\chi}}}{\frac{1}{\chi}}=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=1.$$

7. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi^{\alpha}}$, $\alpha>0$ και $\chi\to+\infty$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\ln\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^{\alpha}=+\infty$ εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\ln\chi)'}{\left(\chi^{\alpha}\right)'}=$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{1}{\chi}}{\alpha\chi^{\alpha-1}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{1}{\alpha\chi^{\alpha}}=0 \quad \text{άρα} \quad \lim_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\chi}{\chi^{\alpha}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(\ln\chi)'}{\left(\chi^{\alpha}\right)'}=0.$$

8. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{e^{\chi}}{\chi^{\alpha}}$, $\alpha>0$ και $\chi\to+\infty$

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^{\alpha}=+\infty$ εξετάζεις το

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(e^{\chi})'}{\left(\chi^{\alpha}\right)'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{e^{\chi}}{\alpha\chi^{\alpha-1}}$ και επειδή εμφανίζεται ίδιας μορφής

απροσδιοριστία θα κάνεις ν φορές την ίδια διαδικασία , μέχρι να μην

υπάρχει στον παρονομαστή χ οπότε θα είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{e^{\chi}}{\chi^{\alpha}}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{e^{\chi}}{\alpha^{\nu}}=+\infty$.

9. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln(\eta\mu2\chi)}{\ln(\eta\mu3\chi)}$, όταν $\chi\to0$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to0}(\eta\mu2\chi)=\lim\limits_{\chi\to0}(\eta\mu3\chi)=0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to0}(\ln(\eta\mu2\chi))=$

$\lim\limits_{\chi\to0}(\ln(\eta\mu3\chi))=-\infty$, εξετάζεις το $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{\left(\ln(\eta\mu2\chi)\right)'}{\left(\ln(\eta\mu3\chi)\right)'}=$

$$\lim_{\chi\to0}\frac{\dfrac{1}{\eta\mu2\chi}(\eta\mu2\chi)'}{\dfrac{1}{\eta\mu3\chi}(\eta\mu3\chi)'}=\lim_{\chi\to0}\frac{\dfrac{2\sigma\upsilon\nu2\chi}{\eta\mu2\chi}}{\dfrac{3\sigma\upsilon\nu3\chi}{\eta\mu3\chi}}=\frac{2}{3}\lim_{\chi\to0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi}{\eta\mu2\chi}\frac{\eta\mu3\chi}{\sigma\upsilon\nu3\chi}\right)=$$

$$\frac{2}{3}\lim_{\chi\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi}{\sigma\upsilon\nu3\chi}\lim_{\chi\to0}\frac{\eta\mu3\chi}{\eta\mu2\chi}=\frac{2}{3}\cdot1\cdot\lim_{\chi\to0}\frac{\dfrac{\eta\mu3\chi}{\chi}}{\dfrac{\eta\mu2\chi}{\chi}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1\Rightarrow\lim_{\chi\to0}\frac{\ln(\eta\mu2\chi)}{\ln(\eta\mu3\chi)}=1.$$

10. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}$, όταν $\chi\to+\infty$

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)=+\infty$, εξετάζεις το

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)'}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)'}=\dfrac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{e^{\chi}-e^{-\chi}}$ και ξανά De L' Hospital οπότε

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)''}{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)''}=\frac{\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)'}{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)'}=\frac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}=\varphi(\chi)\ldots \text{ αδιέξοδο}$$

άρα δεν μπορεί να εφαρμοσθεί με αυτό τον τρόπο ο De L' Hospital .

Κάνεις την εξής «κομπίνα» $\varphi(\chi)=\dfrac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{e^{\chi}+e^{-\chi}}=\dfrac{e^{\chi}\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)}{e^{\chi}\left(e^{\chi}+e^{-\chi}\right)}=\dfrac{e^{2\chi}-1}{e^{2\chi}+1}$

οπότε το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$ είναι πάλι της μορφής $\dfrac{\infty}{\infty}$ άρα εφαρμόζεις

De L' Hospital και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\left(e^{2\chi}-1\right)'}{\left(e^{2\chi}+1\right)'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2e^{2\chi}}{2e^{2\chi}}=1$.

✓ Μορφή δεύτερη : $0\cdot\infty$

Αν υποθέσουμε πως πρέπει να βρεις το όριο μιας παράστασης $f(\chi)\cdot g(\chi)$ με $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=0$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}g(\chi)=\infty$ και $\chi_0\in R$ ή το χ_0 είναι το $\pm\infty$.

1ος τρόπος : $f(\chi)\cdot g(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\dfrac{1}{g(\chi)}}$ **οπότε η απροσδιοριστία** $0\cdot\infty$

μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$**.**

2ος τρόπος : $f(\chi)\cdot g(\chi)=\dfrac{g(\chi)}{\dfrac{1}{f(\chi)}}$ **οπότε η απροσδιοριστία** $0\cdot\infty$

μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\dfrac{\infty}{\infty}$**.**

11. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\chi^5\cdot\ln\chi$, όταν $\chi\to 0^+$

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\chi^5=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\ln\chi=-\infty$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\chi^5\cdot\ln\chi=0(-\infty)$

εφαρμόζεις τον ***2ο τρόπο*** και έχεις :

$$\lim_{\chi\to 0^+}\left(\chi^5\ln\chi\right)=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\ln\chi}{\frac{1}{\chi^5}}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{(\ln\chi)'}{\left(\frac{1}{\chi^5}\right)'}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{5\chi^4}{\chi^{10}}}=$$

$$-\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\chi^{10}}{5\chi^5}=-\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\chi^5}{5}=0.$$

12. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\chi^2\ln\chi$, όταν $\chi\to 0^+$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\chi^2=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\ln\chi=-\infty$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\chi^2\cdot\ln\chi=0(-\infty)$

Αν προσπαθήσεις να εφαρμόσεις τον ***1ο τρόπο*** θα έχεις :

$$\lim_{\chi\to 0^+}\chi^2\ln\chi=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\chi^2}{\frac{1}{\ln\chi}}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\left(\chi^2\right)'}{\left(\frac{1}{\ln\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to 0^+}\frac{2\chi}{-\frac{(\ln\chi)'}{(\ln\chi)^2}}=$$

$$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{2\chi}{-\frac{1}{\chi(\ln\chi)^2}}=\lim_{\chi\to 0^+}\left(-2\chi^2\ln\chi\right)=-2\lim_{\chi\to 0^+}\left(\chi^2\ln\chi\right)$$ επομένως

καταλήγεις στο ίδιο.

Από αυτό το παράδειγμα προκύπτει και η αναγκαιότητα για δυο τρόπους. Η άσκηση επομένως θα λυθεί με τον 2ο τρόπο όπως ακριβώς και στο προηγούμενο παράδειγμα 13.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=(\chi+2)\ln\frac{\chi}{\chi-1}$, όταν $\chi\to+\infty$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi+2)=+\infty$ και αν θέσεις $u=\frac{\chi}{\chi-1}$ τότε

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} u=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\chi}{\chi-1}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\chi}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}1=1$ οπότε :

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\ln\frac{\chi}{\chi-1}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[(\chi+2)\ln\frac{\chi}{\chi-1}\right]=(+\infty)0$ άρα

εφαρμόζεις τον ***2ο τρόπο*** και έχεις :

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[(\chi+2)\ln\frac{\chi}{\chi-1}\right]=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\frac{\chi}{\chi-1}}{\frac{1}{\chi+2}}$ και επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\ln\frac{\chi}{\chi-1}=0$ και

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{1}{\chi+2}=0$ άρα το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\frac{\chi}{\chi-1}}{\frac{1}{\chi+2}}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ επομένως

εφαρμόζεις De l' Hospital και έχεις :

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\frac{\chi}{\chi-1}}{\frac{1}{\chi+2}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{\chi}{\chi-1}\right)'}{\left(\frac{1}{\chi+2}\right)'}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\chi}{\chi-1}}\left(\frac{\chi}{\chi-1}\right)'}{-\frac{(\chi+2)'}{(\chi+2)^2}}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{\chi-1}{\chi}\cdot\frac{\chi'(\chi-1)-\chi(\chi-1)'}{(\chi-1)^2}}{-\frac{1}{(\chi+2)^2}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{\chi-1}{\chi}\cdot\frac{-1}{(\chi-1)^2}}{-\frac{1}{(\chi+2)^2}}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\chi(\chi-1)}}{-\frac{1}{(\chi+2)^2}}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2+4\chi+4}{\chi^2-\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2}{\chi^2}=1.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\chi\cdot\alpha^{\chi}$, με $\alpha>1$ και $\chi\to-\infty$.

Απάντηση :

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\alpha^{\chi}=0$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi\cdot\alpha^{\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi}{\alpha^{-\chi}}$ και επειδή

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi=-\infty$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\alpha^{-\chi}=+\infty$ άρα το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi}{\alpha^{-\chi}}$ είναι της μορφής $\dfrac{-\infty}{+\infty}$

άρα $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi}{\alpha^{-\chi}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{(\chi)'}{\left(\alpha^{-\chi}\right)'}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{-\alpha^{-\chi}\ln\alpha}=-\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}=0$.

15. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\chi\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)$, όταν $\chi\to\pm\infty$.

Απάντηση :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\chi=\pm\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)=1-e^{0}=0$ άρα

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\left[\chi\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)\right]=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{\left(1-e^{\frac{1}{\chi}}\right)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=\lim_{\chi\to\pm\infty}\frac{\left(\frac{1}{\chi}\right)'e^{\frac{1}{\chi}}}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}\Rightarrow$$

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to\pm\infty}e^{\frac{1}{\chi}}=1.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Μορφή τρίτη : $\infty - \infty$

Αν υποθέσουμε πως πρέπει να βρεις το όριο μιας παράστασης $f(\chi)-g(\chi)$ και το όριο της $f(\chi)$ και της $g(\chi)$ είναι το $+\infty$, μπορείς να ακολουθήσεις δυο τρόπους :

1ος τρόπος : $f(\chi)-g(\chi)=\dfrac{f(\chi)-g(\chi)}{1}=\dfrac{\dfrac{f(\chi)-g(\chi)}{f(\chi)\cdot g(\chi)}}{\dfrac{1}{f(\chi)\cdot g(\chi)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(\chi)}-\dfrac{1}{f(\chi)}}{\dfrac{1}{f(\chi)\cdot g(\chi)}}$

οπότε η απροσδιοριστία $\infty - \infty$ μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$

2ος τρόπος : $f(\chi)-g(\chi)=f(\chi)\left(1-\dfrac{g(\chi)}{f(\chi)}\right)$

οπότε η απροσδιοριστία $\infty - \infty$ μετατρέπεται σε απροσδιοριστία $\dfrac{\infty}{\infty}$

16. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\chi-\ln\chi$, όταν $\chi\to+\infty$.

Απάντηση :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\ln\chi=+\infty$ άρα $\varphi(\chi)=\chi-\ln\chi=\chi\left(1-\dfrac{\ln\chi}{\chi}\right)\Rightarrow$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\chi}{\chi}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(\ln\chi)'}{\chi'}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{1}{\chi}}{1}=0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}(\chi-\ln\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\chi\lim_{\chi\to+\infty}\left(1-\frac{\ln\chi}{\chi}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

17. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\eta\mu\chi}$, όταν $\chi\to0$.

Απάντηση :

Παρατήρηση : Το $\lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{1}{\chi}$***, όπως ξέρεις, δεν υπάρχει, αλλά μην βιαστείς να πεις ότι και το*** $\lim\limits_{\chi\to0}\varphi(\chi)$ ***δεν υπάρχει. Σε μια τέτοια περίπτωση προσπαθείς πρώτα να κάνεις κάποιες πράξεις, (ομώνυμα, παραγοντοποίηση κλπ).***

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\varphi(\chi)=\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\eta\mu\chi}=\frac{\eta\mu\chi-\chi}{\chi\cdot\eta\mu\chi}$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\eta\mu\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{\eta\mu\chi-\chi}{\chi\cdot\eta\mu\chi}\right)$,

είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}(\eta\mu\chi-\chi)=0=\lim\limits_{\chi\to 0}(\chi\cdot\eta\mu\chi)$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{\eta\mu\chi-\chi}{\chi\cdot\eta\mu\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{(\eta\mu\chi-\chi)'}{(\chi\cdot\eta\mu\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\eta\mu\chi+\chi\sigma\upsilon\nu\chi}$, είναι

$\lim\limits_{\chi\to 0}(\sigma\upsilon\nu\chi-1)=0=\lim\limits_{\chi\to 0}(\eta\mu\chi+\chi\sigma\upsilon\nu\chi)$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\eta\mu\chi+\chi\sigma\upsilon\nu\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi-1)'}{(\eta\mu\chi+\chi\sigma\upsilon\nu\chi)'}=\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-\chi\cdot\eta\mu\chi}=$

$-\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi-\chi\cdot\eta\mu\chi}=-\frac{0}{2\cdot 1-0\cdot 0}=0$. Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=0$.

18. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=e^{\chi}-\ln\chi$, όταν $\chi\to+\infty$.

Απάντηση :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}e^{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\ln\chi=+\infty$ άρα $\varphi(\chi)=e^{\chi}-\ln\chi=e^{\chi}\left(1-\frac{\ln\chi}{e^{\chi}}\right)$, το

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\chi}{e^{\chi}}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\ln\chi}{e^{\chi}}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{(\ln\chi)'}{(e^{\chi})'}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\frac{1}{\chi}}{e^{\chi}}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{1}{\chi\cdot e^{\chi}}=0$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}(e^{\chi}-\ln\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[e^{\chi}\left(1-\frac{\ln\chi}{e^{\chi}}\right)\right]=+\infty(1-0)=+\infty$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Μορφή τέταρτη : 0^0 , 1^∞ , ∞^0.

Οι πιο πάνω απροσδιοριστίες εμφανίζονται όταν η συνάρτηση είναι της μορφής : $\varphi(\chi)=f(\chi)^{g(\chi)}$ και με $\chi_0 \in R$ ή το χ_0 είναι το $\pm\infty$

- ✓ $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=0$
- ✓ $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=1$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=\infty$
- ✓ $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=0$

Αυτές οι περιπτώσεις αντιμετωπίζονται, αρχικά, με αντικατάσταση του $f(\chi)^{g(\chi)}=e^{g(\chi)\cdot\ln f(\chi)}$, στη συνέχεια θέτεις $u=g(\chi)\cdot\ln f(\chi)$, βρίσκεις το $u_0=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left(g(\chi)\cdot\ln f(\chi)\right)$ οπότε θα είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lim\limits_{u\to u_0} e^u$.

Υπενθύμιση γι' αυτούς που ξεχνούν :

$$\lim_{u\to u_0} e^u=e^{u_0} \quad , \quad \lim_{u\to-\infty} e^u=0 \quad , \quad \lim_{u\to+\infty} e^u=+\infty$$

Προσοχή :

✓ Οι μορφές 0^0 , 1^∞ , ∞^0 είναι απροσδιόριστες και η αντικατάσταση του $f(\chi)^{g(\chi)}=e^{g(\chi)\cdot\ln f(\chi)}$ δεν **αίρει** την απροσδιοριστία, δεν λύνει δηλαδή άμεσα το πρόβλημα, απλά η αντικατάσταση αυτή μετατρέπει όλες αυτές της απροσδιόριστες μορφές στη μορφή : $0\cdot\infty$, την οποία όμως ξέρουμε πώς να τη χειρισθούμε.

✓ Αν στις απροσδιόριστες μορφές 0^0, 1^∞, ∞^0, $0\cdot\infty$, ***το 0 και το 1 είναι από σταθερές συναρτήσεις***, όπως στα πιο κάτω παραδείγματα, τότε το όριο προκύπτει άμεσα.

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^0\right)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left((\chi^\kappa)^0\right)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(0\cdot\ln\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to 0^+}(0\cdot\ln\chi)$ $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1^\chi\right)$,

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1^{\eta\mu\chi}\right)$, $\lim\limits_{\chi\to\frac{1}{2}}\left(0^{2\chi-1}\right)$, και να γιατί :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- ✓ $\chi^0 = 1$ όταν $\chi \neq 0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^0\right) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} 1 = 1$,
- ✓ $0\cdot\ln\chi = 0$, $\chi > 0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(0\cdot\ln\chi\right) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} 0 = 0$, όμοια το

  $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(0\cdot\ln\chi\right) = \lim\limits_{\chi\to 0^+} 0 = 0$
- ✓ $1^\chi = 1$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1^\chi\right) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} 1 = 1$ και

  $1^{\eta\mu\chi} = 1$ άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1^{\eta\mu\chi}\right) = \lim\limits_{\chi\to+\infty} 1 = 1$
- ✓ $0^{2\chi-1} = 0,\ \chi \neq \frac{1}{2}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\frac{1}{2}}\left(0^{2\chi-1}\right) = \lim\limits_{\chi\to\frac{1}{2}} 0 = 0$

19. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi) = \left(\frac{1}{\chi}\right)^{\eta\mu\chi}$, όταν $\chi \to 0^+$.

Απάντηση :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{1}{\chi} = +\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\eta\mu\chi = 0$, απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)^0$.

Είναι $\varphi(\chi) = \left(\frac{1}{\chi}\right)^{\eta\mu\chi} = e^{\eta\mu\chi\cdot\ln\frac{1}{\chi}}$, θέτεις $u = \eta\mu\chi\cdot\ln\frac{1}{\chi} = \eta\mu\chi\left(\ln 1 - \ln\chi\right) =$

$-\eta\mu\chi\cdot\ln\chi$, βρίσκεις το $u_0 = \lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(-\eta\mu\chi\cdot\ln\chi\right) = -\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\eta\mu\chi\cdot\ln\chi\right)$.

Το $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\eta\mu\chi\cdot\ln\chi\right)$ είναι της μορφής $0\cdot\infty$ άρα

$$-\lim_{\chi\to 0^+}\left(\eta\mu\chi\cdot\ln\chi\right) = -\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\ln\chi}{\frac{1}{\eta\mu\chi}} = -\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\left(\ln\chi\right)'}{\left(\frac{1}{\eta\mu\chi}\right)'} = -\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}} =$$

$$\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu^2\chi}{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi} = \lim_{\chi\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = \lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\cdot\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 1\cdot 0 = 0 \text{ άρα}$$

$u_0 = 0$, οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\eta\mu\chi} = \lim\limits_{\chi\to 0^+} e^{\eta\mu\chi\cdot\ln\frac{1}{\chi}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = e^0 = 1$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=(1+\chi)^{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi\to 0^-$.

Απάντηση :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{1}{\chi}=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}(1+\chi)=1$ άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $1^{-\infty}$. Είναι $\varphi(\chi)=(1+\chi)^{\frac{1}{\chi}}=e^{\frac{1}{\chi}\ln(\chi+1)}=e^{\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}}$, θέτεις $u=\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$, βρίσκεις το $u_0=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$, το $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{(\ln(\chi+1))'}{\chi'}=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{\frac{1}{\chi+1}}{1}=$

$\lim\limits_{\chi\to 0^-}\frac{1}{\chi+1}=1$, άρα $u_0=1$ άρα

$$\lim_{\chi\to 0^-}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 0^-}(1+\chi)^{\frac{1}{\chi}}=\lim_{\chi\to 0^-}e^{\frac{1}{\chi}\ln(\chi+1)}=\lim_{\chi\to 0^-}e^{\frac{\ln(\chi+1)}{\chi}}=\lim_{u\to 1}e^u=e^1=e$$

Ένα παράδειγμα που συνδυάζει περισσότερες περιπτώσει De L' Hospital

21. Πανελλήνιες 2001 - Επαναληπτικές

Πέμπτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases}\chi+\alpha & \text{αν } \chi\le 1\\ \left(1-e^{-\chi+1}\right)\ln(\chi-1) & \text{αν } \chi\in(1,2]\end{cases}$, $\alpha\in R$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{1-e^{-\chi+1}}{\chi-1}$.

β. Να βρείτε το $\alpha\in R$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\chi_0=1$.

Απάντηση

α. $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1-e^{-\chi+1}}{\chi-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\left(1-e^{-\chi+1}\right)'}{(\chi-1)'}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{-e^{-\chi+1}(-\chi+1)'}{1}=\lim\limits_{\chi\to 1}e^{-\chi+1}=1$.

β. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f, πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0=1$. Άρα πρέπει : $\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)=f(1)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi+\alpha)$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)=\alpha+1$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left[\left(1-e^{-\chi+1}\right)\ln(\chi-1)\right]$, όμως $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-e^{-\chi+1}\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\ln(\chi-1)=-\infty$ άρα το $\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)$ είναι της μορφής $0\cdot(-\infty)$ άρα θα υπολογισθεί με De L' Hospital : $\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left[\left(1-e^{-\chi+1}\right)\ln(\chi-1)\right]$

$$=\lim_{\chi\to 1}\frac{\ln(\chi-1)}{\dfrac{1}{1-e^{-\chi+1}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{\chi\to 1}\frac{\left[\ln(\chi-1)\right]'}{\left(\dfrac{1}{1-e^{-\chi+1}}\right)'}=\lim_{\chi\to 1}\frac{\dfrac{1}{\chi-1}}{-\dfrac{\left(1-e^{-\chi+1}\right)'}{\left(1-e^{-\chi+1}\right)^2}}=$$

$$-\lim_{\chi\to 1}\frac{\dfrac{1}{\chi-1}}{\dfrac{e^{-\chi+1}}{\left(1-e^{-\chi+1}\right)^2}}=-\lim_{\chi\to 1}\frac{\left(1-e^{-\chi+1}\right)^2}{(\chi-1)e^{-\chi+1}}=-\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{1-e^{-\chi+1}}{\chi-1}\cdot\frac{1-e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}}\right)=$$

$$-\lim_{\chi\to 1}\frac{1-e^{-\chi+1}}{\chi-1}\cdot\lim_{\chi\to 1}\frac{1-e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}}.$$

Το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1-e^{-\chi+1}}{e^{-\chi+1}}=\dfrac{0}{1}=0$, και $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1-e^{-\chi+1}}{\chi-1}=1$ από το ερώτημα **α.**, άρα τελικά $\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)=1\cdot 0=0$ οπότε

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}f(\chi)\Leftrightarrow\alpha+1=0$ άρα $\alpha=-1$.

Το πείσμα και η θέληση είναι «τα καύσιμα» για την κίνηση προς τα μπρος.
Τα πισωγυρίσματα «καίνε» αναποφασιστικότητα και αναβλητικότητα.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Ισχύει $\lim\limits_{\chi \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi - \frac{\pi}{2}} = -1$	☐	☐
2.	Ισχύει $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\chi}{\eta\mu\chi} = 1$	☐	☐

Ασκήσεις Ανάπτυξης

Δες παρ. 1 – 10
σελ 265 – 268

1. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{\ln\chi - \chi + 1}{\chi - 1}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 1} \dfrac{\ln(2-\chi) - \chi + 1}{\chi - 1}$.

2. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\chi^3 + 1 - \sigma\upsilon\nu\chi}{2\chi^3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\chi - \frac{\pi}{2} - \sigma\upsilon\nu\chi}{\chi - \frac{\pi}{2}}$.

3. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\ln\chi - 2}{2e^{\chi} - 3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\chi^2 + e^2}{\chi \cdot \ln\chi + e}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{e^{-2\chi}}{\chi^2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi^2+1}{e^{-3\chi}}$.

5. Να βρεθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{-2\chi}-2e^{\chi}+3\chi+1}{\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}-2\chi-1}{\chi}$.

6. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\ln\chi}{\chi}$ έχει ως ασύμπτωτες τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$.

$\left(\text{Υπ. βρες τα } \lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi) \text{ και } \lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)\right)$

Δες παρ. 11 – 15 σελ 270 – 272

7. Να βρείτε το όριο της $g(\chi)=\chi\cdot\ln\chi$, όταν $\chi\to 0$.

8. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\ln\chi\ln(\chi-1)$, όταν $\chi\to 1$.

9. Να βρείτε το όριο της $h(\chi)=(\chi-1)^2\ln(\chi-1)$, όταν $\chi\to 1$.

10. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(\chi)=e^{\chi}\chi^2$ στο $-\infty$.

Δες παρ. 16 – 18 σελ 273 – 274

11. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\sigma\varphi\chi-\dfrac{1}{\chi}$, όταν $\chi\to 0$.

12. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\dfrac{1}{\eta\mu\chi}-\dfrac{1}{\chi}$, όταν $\chi\to 0$.

13. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\dfrac{5}{\chi^2}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi-1}$, όταν $\chi\to 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\frac{1}{\ln\chi}-\frac{1}{\chi-1}$, όταν $\chi\to 1$.

15. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\chi-\ln\chi$, όταν $\chi\to+\infty$.

16. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=e^{\chi}-\ln\chi$, όταν $\chi\to+\infty$.

17. Να βρείτε το όριο της $g(\chi)=\ln\left(\chi^2+3\right)-3\ln\chi$, όταν $\chi\to+\infty$.

18. Να βρείτε το όριο της $g(\chi)=\left(\chi^2+1\right)\left[\ln\left(\chi^2+3\right)-3\ln\chi\right]$, όταν $\chi\to+\infty$.

19. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=(\chi+1)^{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi\to 0$.

Δες παρ. 19 – 20 σελ 276 – 277

20. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=(1-\chi)^{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi\to+\infty$.

21. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=\chi^{\ln\chi}$, όταν $\chi\to 0^+$.

22. Να βρείτε το όριο της $\varphi(\chi)=(\ln\chi)^{\chi-1}$, όταν $\chi\to 1^+$.

23. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=(\alpha\chi+\beta)^{\frac{1}{\chi}}$, όταν $\chi\to 0$.

24. Να βρείτε το όριο της $f(\chi)=(\eta\mu\chi)^{\chi}$, όταν $\chi\to 0^+$.

Δες παρ. 21 σελ 277

25. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases} e^{2\chi}+3 & \text{αν } \chi\ge 0 \\ 2\eta\mu\chi+3\sigma\upsilon\nu\chi+1 & \text{αν } \chi<0 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

26. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases} \frac{(\chi-1)\left(e^{\chi}-1\right)}{\chi} & \text{αν } 0<\chi\le 1 \\ \ln\chi & \text{αν } 1<\chi\le 2 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases} e^{\chi}-\eta\mu\chi & \text{αν } \chi\le 0 \\ \dfrac{1}{e^{\chi}}-\eta\mu\chi & \text{αν } \chi>0 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

28. Δίνετε η συνάρτηση f με $f(\chi)=\begin{cases} \dfrac{\ln\left(\chi^2-4\chi+2\right)e^{\chi}-\eta\mu\chi}{\chi-3} & \text{αν } \chi\ne 3 \\ 0 & \text{αν } \chi=3 \end{cases}$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

29. Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου: $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^3+2\chi-3}{\chi^2-5\chi+4}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{3\chi^2+2}{2\chi-5}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{6\chi}{2}=3$.

$\left(\text{η πραγματική τιμή είναι } -\dfrac{5}{3}\right)$.

Στο δεύτερο βήμα δηλαδή όταν εφαρμόζεις L' Hospital για να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{3\chi^2+2}{2\chi-5}$ δεν ισχύουν οι υπο θέσεις του θεωρήματος L' Hospital άρα κακώς εφαρμόζεις L' Hospital.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μελέτη Συνάρτησης

Η μελέτη μιας συνάρτησης f έχει στόχο την χάραξη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης. Η χάραξη της γραφικής παράστασης C_f μπορεί να γίνει με σχετική ακρίβεια μόνο αν υπάρχουν σχετικές πληροφορίες για την συνάρτηση, όπως είναι το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών, η μονοτονία.

Έτσι λοιπόν ***για να μελετήσεις μια συνάρτηση* f** :

1. Βρίσκεις το πεδίου ορισμού της
2. Μελετάς τη συνέχεια της
3. Μελετάς την μονοτονία της και βρίσκεις τα ακρότατα αν υπάρχουν (κάνεις πίνακα προσήμου για την **f΄**).
4. Μελετάς τα κοίλα και τα κυρτά της και βρίσκεις τα σημεία καμπής αν υπάρχουν (κάνεις πίνακα προσήμου για την **f΄΄**).
5. Μελετάς τη συμπεριφορά της f στα άκρα των διαστημάτων που αυτή ορίζεται. Π χ αν ορίζεται στο R, βρίσκεις τα $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$ αν ορίζεται σε διάστημα $(\alpha,\beta]$ βρίσκεις τα $\lim\limits_{\chi\to\alpha^+} f(\chi)$ και $f(\beta)$ κλπ.
6. Βρίσκεις τις ασύμπτωτες αν (υπάρχουν).
7. Βρίσκεις τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες (αν υπάρχουν και αν είναι εύκολο) λύνοντας την $f(\chi)=0$ για να βρεις που τέμνει τον χ΄χ και βρίσκεις το $f(0)$ για να βρεις που τέμνει τον ψ΄ψ.
8. Σχηματίζεις ένα ***πίνακα μεταβολών*** στον οποίο μεταφέρεις όλα αυτά τα στοιχεία.
9. Τέλος βάζεις τα ***χαρακτηριστικά σημεία*** που βρήκες (ακρότατα, σημεία καμπής, σημεία στα οποία η f τέμνει τους άξονες κλπ) πάνω σε ένα σύστημα αξόνων και με την βοήθεια της μονοτονίας και της καμπυλότητας σχεδιάζεις την γραφική παράσταση C_f της f.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις:

Α. ***Προαιρετικά εξετάζεις***

- ✓ αν η f είναι άρτια οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ και
- ✓ αν η f είναι περιττή οπότε έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$

Β. Αν ζητάει το Πεδίο Τιμών χρησιμοποιείς την μονοτονία ξαναδές την παράγραφο «Μονοτονία και Πεδίο Τιμών»

Γ. Για να βρεις τις λύσεις της $f(\chi)=0$ ξαναδές την παράγραφο «Μονοτονία και ρίζες.

Παραδείγματα :

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3-3\chi^2+3$.

Απάντηση :

1. ***Πεδίο Ορισμού*** : το R.
2. ***Συνέχεια*** : Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.
3. ***Μονοτονία*** : είναι $f'(\chi)=\left(\chi^3-3\chi^2+3\right)'=3\chi^2-6\chi=3\chi(\chi-2)$.

$f'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi_1=0$ ή $\chi_2=2$

άρα έχει πίνακα προσήμου :

$-\infty$		0		2		$+\infty$
	+	|	−	|	+	

και επομένως ισχύει ο διπλανός πίνακας μεταβολών της f .

χ	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\varphi'(\chi)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(\chi)$		↗	|	↘	|	↗	

Άρα όπως φαίνεται από τον διπλανό πίνακα η f΄ **μηδενίζεται** όταν $\chi=0$ και $\chi=2$ και έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)=3$ $A(0, 3)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-1$ δηλαδή τα σημεία $A(0, 3)$ και $B(2, -1)$ ανήκουν στην C_f.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. ***Κοίλα – Κυρτά – Σημεία καμπής*** :

είναι $f''(\chi)=\left(f'(\chi)\right)'=\left(3\chi^2-6\chi\right)'=6\chi-6=6(\chi-1)$.

Άρα $f''(\chi)\geq 0 \Leftrightarrow 6(\chi-1)\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq 1$.

Επομένως ισχύει ο πίνακας μεταβολών για την f΄΄

χ	$-\infty$	**1**	$+\infty$
$\varphi''(\chi)$	$-$	0	$+$
$\varphi(\chi)$	$\cap$		$\cup$

Είναι $f(1)=1$ άρα
Σημείο Καμπής το $\Gamma(1,1)$

5. Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^3-3\chi^2+3\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^3=+\infty$ και

$\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi^3-3\chi^2+3\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^3=-\infty$

6. Η f είναι ***πολυωνυμική άρα η*** C_f ***δεν έχει ασύμπτωτες.***

7. Όταν $\chi=0$ είναι $f(0)=3$ άρα η C_f τέμνει τον ψ΄ψ στο σημείο $A(0,3)$

και επειδή η εξίσωση $f(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^3-3\chi^2+3=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες

και είναι δύσκολο να λυθεί δεν βρίσκεις τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει

τον χ΄χ.

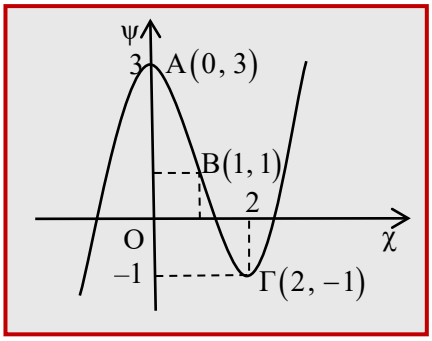
8. Γενικός πίνακας μεταβολών για την f είναι :

χ	$-\infty$	**0**		**1**		**2**	$+\infty$
$\varphi'(\chi)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\varphi''(\chi)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\varphi(\chi)$	$-\infty$ ↗	τ.μ. $f(0)=3$	↘		↘	τ.ε. $f(2)=-1$	↗ $+\infty$

10. Τέλος βάζεις τα ***χαρακτηριστικά σημεία*** που βρήκες (ακρότατα, σημεία καμπής, σημεία στα οποία η και τέμνει τους άξονες κλπ) πάνω σε ένα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

σύστημα αξόνων και με την βοήθεια της μονοτονίας και της καμπυλότητας σχεδιάζεις την γραφική παράσταση C_f της f όπως πιο κάτω .



Ασκήσεις Ανάπτυξης

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(\chi)=\chi^3-3\chi^2-9\chi+11$ **ii)** $f(\chi)=\dfrac{\chi+1}{\chi-1}$ **iii)** $f(x)=x^4-2x^2$.

2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

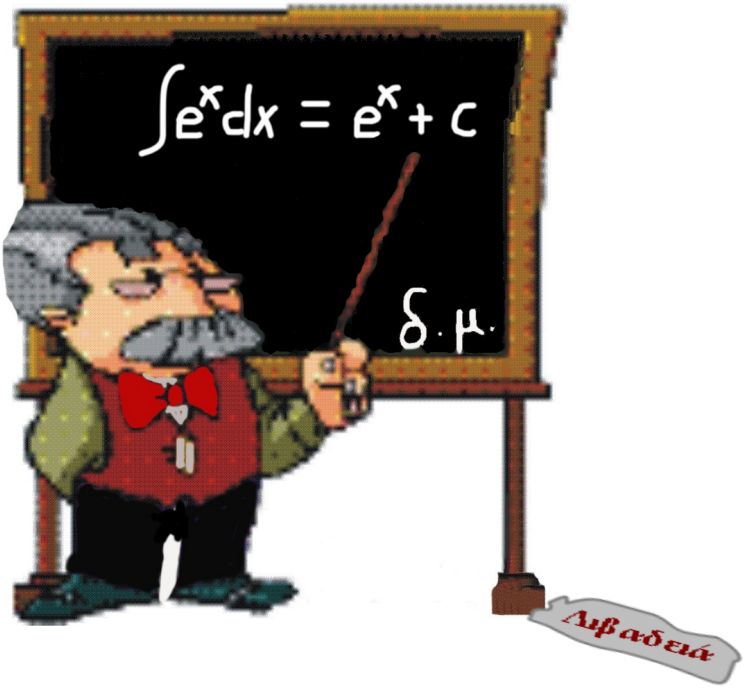
i) $f(\chi)=\chi+\dfrac{1}{\chi}$ **ii)** $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-\chi-2}{\chi-1}$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi+\eta\mu\chi$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ολοκλήρωμα

Θεωρία – υποδείξεις – παρατηρήσεις.



Παραδείγματα λυμένα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Μεθοδολογία – Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα : Ολοκλήρωμα

Θεματική ενότητα	σελίδα
Αόριστο Ολοκλήρωμα	305
Υπολογισμός Ολοκληρώματος με την εύρεση μια παράγουσας	310
Λυμένες Ασκήσεις	335
Ολοκλήρωση κατά παράγοντες – Παραδείγματα	351
Προβλήματα εύρεσης της $f(\chi)$	359
Ορισμένο Ολοκλήρωμα	366
Η συνάρτηση $f(\chi)=\int_0^{\chi} f(t)dt$	371
Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ. Θ. Ο. Λ.)	380
Αρχική συνάρτηση και εύρεση της f	382
Μέθοδοι υπολογισμού Ορισμένου Ολοκληρώματος	386
Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Ανίσωση	393
Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού	395
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ολοκλήρωμα με τις ΝΕΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΥΠΑΙΠΘ	397
Εμβαδόν	439

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όποιον σου λέει αυτά που θες να ακούσεις,
όχι για φίλο μα για εχθρό σου να τον λογιάζεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού ένα διάστημα **Δ**.
Ονομάζεται ***αρχική συνάρτηση*** ή ***παράγουσα της*** f, κάθε συνάρτηση **F** παραγωγίσιμη στο **Δ** για την οποία ισχύει $\mathbf{F}'(\chi)=\mathbf{f}(\chi)$ για κάθε $\chi \in \Delta$.

Παράδειγμα :

Έστω οι $F(\chi)=\frac{\chi^4}{2}+5$, $G(\chi)=\frac{\chi^4}{2}-11$, $f(\chi)=2\chi^3$. Παρατήρησε ότι :

✓ $F'(\chi)=\left(\frac{\chi^4}{2}+5\right)'=\frac{4\chi^3}{2}=2\chi^3=f(\chi)$,

άρα η F είναι μια παράγουσα της f.

✓ $G'(\chi)=\left(\frac{\chi^4}{2}-11\right)'=\frac{4\chi^3}{2}=2\chi^3=f(\chi)$,

άρα η G είναι, ***επίσης*** μια παράγουσα της f

Θεώρημα :

Αν **F** είναι μία αρχική συνάρτηση της **f,** τότε κάθε συνάρτηση **G** της μορφής $\mathbf{G}(\chi)=\mathbf{F}(\chi)+\mathbf{c}$ είναι επίσης μια αρχική συνάρτηση της **f** και αντίστροφα κάθε αρχική συνάρτηση **G** της **f** θα είναι οπωσδήποτε της μορφής $\mathbf{G}(\chi)=\mathbf{F}(\chi)+\mathbf{c}$.

Απόδειξη :

✓ Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(\chi)=F(\chi)+c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(\chi)=\left(F(\chi)+c\right)'=F'(\chi)=f(\chi)$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $\chi \in \Delta$ ισχύουν $F'(\chi) = f(\chi)$ και $G'(\chi) = f(\chi)$, οπότε

$G'(\chi) = F'(\chi)$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

Άρα, σύμφωνα με ***πόρισμα*** των παραγώγων, θα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G'(\chi) = F'(\chi) \Rightarrow G(\chi) = F(\chi) + c$ για κάθε $\chi \in \Delta$.

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού ένα διάστημα **Δ**.
Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης **f** είναι το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων της **f** στο **Δ** και συμβολίζεται με : $\int f(\chi)d\chi = F(\chi) + c$ όπου **F** μια αρχική συνάρτηση της **f** και **c ∈ R.**

Παράδειγμα :

Επειδή $(\chi^2)' = 2\chi$ άρα το χ^2 είναι μια παράγουσα της 2χ άρα $\int 2\chi d\chi = \chi^2 + c$.

Ιδιότητες

Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο Δ τότε για κάθε $\chi \in \Delta$ ισχύει:

1. $\int f'(\chi)d\chi = f(\chi) + c$, $c \in R$.

2. $\int f''(\chi)d\chi = f'(\chi) + c$, $c \in R$.

Συμβολισμός
$df(\chi) = f'(\chi)d\chi$

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο Δ παράγουσες **F**, **G** αντίστοιχα τότε

3. $\int \lambda \cdot f(\chi)d\chi = \lambda \cdot \int f(\chi)d\chi = \lambda \cdot F(\chi) + c$, $\lambda \in R$.

4. $\int [f(\chi) + g(\chi)]d\chi = \int f(\chi)d\chi + \int g(\chi)d\chi = F(\chi) + G(\chi) + c$, $c \in R$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις :

α. Το $\int f(\chi)d\chi$ διαβάζεται «***αόριστο ολοκλήρωμα της εφ του χ ντε χ***».

Η διαδικασία, για να βρεις το αόριστο ολοκλήρωμα**,** λέγεται ***ολοκλήρωση*** και είναι αντίστροφη διαδικασία από αυτή της παραγώγισης, η **σταθερά c** λέγεται ***σταθερά ολοκλήρωσης***.

β. Αν η συνάρτηση **f** είναι ***συνεχής στο διάστημα* Δ** τότε υπάρχει ***πάντα*** η **F,** (η παράγουσα της f) άρα όταν η **f** είναι ***συνεχής στο διάστημα* Δ** τότε ***υπάρχει πάντα*** το αόριστο ολοκλήρωμα της **f**, ***όμως***

** ***Προσοχή :*** ***Το ολοκλήρωμα*** μια συνεχούς συνάρτησης **f** , αυτό που πάντα υπάρχει, ***δεν εκφράζεται πάντα με βάση απλές, γνωστές μας συναρτήσεις.***

Παραδείγματα ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που δεν εκφράζονται με βάση στοιχειώδεις συναρτήσεις (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές κλπ) είναι : $\int e^{f(\chi)}d\chi$ π. χ. $\int e^{2\chi^3}d\chi$, $\int \frac{\eta\mu\alpha\chi}{\beta\chi}d\chi$

π. χ. $\int \frac{\eta\mu\chi}{\chi}d\chi$, $\int \frac{1}{\ln\chi}d\chi$ και άλλα.

Με άλλα λόγια, όπως θα δεις και πιο κάτω, ***μπορούμε να βρίσκουμε μόνο τα ολοκληρώματα για τα οποία έχουμε αναπτύξει τρόπους*** για τον υπολογισμό τους.

Αυτό φίλε μαθητή δεν πρέπει να σε ανησυχεί καθόλου, το αντίθετο, ***τα ολοκληρώματα που θα σου ζητήσουν να υπολογίσεις, θα υπολογίζονται οπωσδήποτε και θα υπολογίζονται με βάση έναν από τους τρόπους (μεθόδους) που ακολουθούν.***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Όταν έχεις να υπολογίσεις ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(\chi)d\chi$ πάντα προσπαθείς να βρεις μια παράγουσα **F** της **f**, χρησιμοποιώντας τις πάνω ιδιότητες και συμβολισμούς καθώς και τις γνώσεις σου από τις παραγώγους.

Αν **F** παράγουσα της **f** τότε $F'(\chi)=f(\chi) \Leftrightarrow \int f(\chi)d\chi=\int F'(\chi)d\chi=F(\chi)+c$.

Ο πιο κάτω πίνακας συνδέει τις παραγώγους με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα και σε βοηθά να βρεις τα αντίστοιχα ολοκληρώματα

Απλή συνάρτηση (όχι σύνθετη)	
Παράγωγος	**Ολοκλήρωμα**
$(c)'=0$	$\int 0d\chi=\int (c)'\,d\chi=c$
$(\chi)'=1$	$\int d\chi=\int 1d\chi=\int (\chi)'\,d\chi=\chi+c$
$\left(\chi^{\alpha+1}\right)'=(\alpha+1)\cdot\chi^{\alpha}$	$\int \chi^{\alpha}d\chi=\int\left(\frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'d\chi=\frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\left(\sqrt{\chi}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}$	$\int \frac{1}{2\sqrt{\chi}}d\chi=\int\left(\sqrt{\chi}\right)'d\chi=\sqrt{\chi}+c$
$\left(\alpha^{\chi}\right)'=\alpha^{\chi}\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow \alpha^{\chi}=\left(\frac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}\right)'$	$\int \alpha^{\chi}d\chi=\int\left(\frac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}\right)'d\chi=\frac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}+c$
$(\eta\mu\chi)'=\sigma\upsilon\nu\chi$	$\int \sigma\upsilon\nu\chi\cdot d\chi=\int(\eta\mu\chi)'\,d\chi=\eta\mu\chi+c$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$(\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu\chi$	$\int \eta\mu\chi \cdot d\chi = \int (-\sigma\upsilon\nu\chi)' d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi + c$
$(\varepsilon\varphi\chi)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	$\int \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} d\chi = \int (\varepsilon\varphi\chi)' d\chi = \varepsilon\varphi\chi + c$
$(\sigma\varphi\chi)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}$	$\int \dfrac{1}{\eta\mu^2\chi} \cdot d\chi = \int (-\sigma\varphi\chi)' d\chi = -\sigma\varphi\chi + c$
$(e^\chi)' = e^\chi$	$\int e^\chi \cdot d\chi = \int (e^\chi)' d\chi = e^\chi + c$
$(\ln\chi)' = \dfrac{1}{\chi}$	$\int \dfrac{1}{\chi} \cdot d\chi = \int (\ln\lvert\chi\rvert)' d\chi = \ln\lvert\chi\rvert + c$

- ✓ Οι πιο πάνω ***τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση*** ότι κάθε φορά ***υπάρχει κατάλληλο διάστημα*** ώστε οι συναρτήσεις και ***οι παραστάσεις*** που εμφανίζονται να ***έχουν νόημα***.

- ✓ Όπως και με τις παραγώγους έτσι και στα ολοκληρώματα, οι πιο πολλές περιπτώσεις δεν αφορούν απλές συναρτήσεις, όπως αυτές του πιο πάνω πίνακα, αλλά σύνθετες συναρτήσεις, δηλαδή έχεις να υπολογίσεις ολοκληρώματα της μορφής $\int f\left(g'(\chi)\right)g'(\chi)d\chi$ πχ αντί για $\int \chi^\alpha d\chi$ έχεις να υπολογίσεις το $\int \left[f(\chi)\right]^\alpha \cdot f'(\chi)d\chi$.

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείς, όπως θα δεις να επαναλαμβάνεται συχνά πιο κάτω, το «κλασικό» κόλπο, την «***αλλαγή μεταβλητής***» ή «***ολοκλήρωση με αντικατάσταση***».

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Υπολογισμός ολοκληρώματος με την εύρεση μια παράγουσας.

Στις ασκήσεις θα ακολουθείς την εξής διαδικασία :

Προσδιορίζεις πάνω – κάτω την παράγουσα, από την οποία προέρχεται η (βασική) συνάρτηση, η οποία βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα, δηλαδή προσδιορίζεις με βάση την εμπειρία σου, την συνάρτηση F από την οποία υπολογίζεις ότι «θα πρέπει» να έχει προκύψει η f οπότε **γράφεις :**

Παρατηρώ ότι : $\left(F(\chi)\right)' = f(\chi)$ άρα $\int f(\chi)d\chi = \int \left(F(\chi)\right)' d\chi = F(\chi) + c$.

Προσοχή : Παρακάτω αναφέρονται πολλές περιπτώσεις υπολογισμού ολοκληρωμάτων τα οποία, δεν αναφέρονται στον «κλασικό» πίνακα ολοκληρωμάτων, αυτόν που αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο.

- ✓ Οι διαδικασίες αυτές ***καταλήγουν πάντα σε τύπο*** που υπάρχει στον πιο πάνω πίνακα .
- ✓ Αποτελούν ***μέθοδο*** και πρέπει να επισημάνω ότι όταν τις χρησιμοποιείς θα πρέπει να γράφεις με ακρίβεια ολόκληρη τη διαδικασία, όπως θα δεις και στα παραδείγματα πιο κάτω, χωρίς περικοπές και παραλείψεις, αλλιώς δεν θα θεωρείται πλήρως «τεκμηριωμένη» η απάντηση σου.

Ακολουθούν οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις αναλυτικά, με απλά και χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1. $\int 0 d\chi = c$, $c \in R$.

2. $\int d\chi = \int 1 d\chi = \chi + c$, $c \in R$.

3. $\int \left[f'(\chi)g(\chi) + f(\chi)g'(\chi)\right] d\chi = \int \left[f(\chi)g(\chi)\right]' d\chi = f(\chi)g(\chi) + c$, $c \in R$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int\left(e^{\chi}+\chi e^{\chi}\right)d\chi$ **ii)** $\int\left(2\chi\eta\mu\chi+\chi^{2}\sigma\upsilon\nu\chi\right)d\chi$.

Απάντηση :

i) Η παράσταση $e^{\chi}+\chi e^{\chi}$ πρέπει να έχει προκύψει από το γινόμενο χe^{χ},

οπότε γράφεις : **Παρατηρώ** ότι : $\left(\chi e^{\chi}\right)'=\chi' e^{\chi}+\chi\left(e^{\chi}\right)'=e^{\chi}+\chi e^{\chi}$

άρα $\int\left(e^{\chi}+\chi e^{\chi}\right)d\chi=\int\left(\chi e^{\chi}\right)'d\chi=\chi e^{\chi}+c$, $c\in R$.

ii) Η παράσταση $2\chi\eta\mu\chi+\chi^{2}\sigma\upsilon\nu\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από το γινόμενο $\chi^{2}\eta\mu\chi$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\chi^{2}\eta\mu\chi\right)'=\left(\chi^{2}\right)'\eta\mu\chi+\chi^{2}\left(\eta\mu\chi\right)'=2\chi\eta\mu\chi+\chi^{2}\sigma\upsilon\nu\chi$ άρα

$\int\left(2\chi\eta\mu\chi+\chi^{2}\sigma\upsilon\nu\chi\right)d\chi=\int\left(\chi\eta\mu\chi\right)'d\chi=\chi\eta\mu\chi+c$, $c\in R$.

4. $$\int\frac{f'(\chi)g(\chi)-f(\chi)g'(\chi)}{\left[g(\chi)\right]^{2}}d\chi=\int\left[\frac{f(\chi)}{g(\chi)}\right]'d\chi=\frac{f(\chi)}{g(\chi)}+c,\ c\in R.$$

Ειδικά $$\int\frac{-g'(\chi)}{\left[g(\chi)\right]^{2}}d\chi=\int\left[\frac{1}{g(\chi)}\right]'d\chi=\frac{1}{g(\chi)}+c$$

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int\frac{2\chi-\chi^{2}}{e^{\chi}}d\chi$ **ii)** $\int\frac{\chi\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{\chi^{2}}d\chi$, **iii)** $\int\frac{-2\chi}{\left(\chi^{2}+3\right)^{2}}d\chi$.

Απάντηση :

i) Η παράσταση $\frac{2\chi-\chi^{2}}{e^{\chi}}$ πρέπει να έχει προκύψει από το πηλίκο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\frac{\chi^2}{e^\chi}$ μετά από απλοποιήσεις, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι :

$$\left(\frac{\chi^2}{e^\chi}\right)' = \frac{\left(\chi^2\right)' e^\chi - \chi^2\left(e^\chi\right)'}{\left(e^\chi\right)^2} = \frac{2\chi e^\chi - \chi^2 e^\chi}{e^{2\chi}} = \frac{e^\chi\left(2\chi - \chi^2\right)}{e^{2\chi}} = \frac{2\chi - \chi^2}{e^\chi} \quad \text{άρα}$$

$$\int \frac{2\chi - \chi^2}{e^\chi} d\chi = \int \left(\frac{\chi^2}{e^\chi}\right)' d\chi = \frac{\chi^2}{e^\chi} + c\ ,\ c \in R.$$

ii) Η παράσταση $\frac{\chi\text{συν}\chi - \eta\mu\chi}{\chi^2}$ πρέπει να έχει προκύψει από το πηλίκο

$\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)' = \frac{\chi\left(\eta\mu\chi\right)' - \chi'\eta\mu\chi}{\chi^2} = \frac{\chi\text{συν}\chi - \eta\mu\chi}{\chi^2}$ άρα

$$\int \frac{\chi\text{συν}\chi - \eta\mu\chi}{\chi^2} d\chi = \int \left(\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)' d\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\chi} + c\ ,\ c \in R.$$

iii) Η παράσταση είναι η $\frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2}$ πρέπει να έχει προκύψει από το πηλίκο

$\frac{1}{\chi^2+3}$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\frac{1}{\chi^2+3}\right)' = \frac{-\left(\chi^2+3\right)'}{\left(\chi^2+3\right)^2} = \frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2}$ άρα

$$\int \frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2} d\chi = \int \left(\frac{1}{\chi^2+3}\right)' d\chi = \frac{1}{\chi^2+3} + c\ ,\ c \in R.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. $\int \chi^{\alpha} d\chi = \int \left(\frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' d\chi = \frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ με $\alpha \neq -1$ και $c \in R$.

Γενίκευση ***Για να βρεις το*** $\int [f(\chi)]^{\alpha} \cdot f'(\chi) d\chi$ ***θέτεις*** $u = f(\chi)$

οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα :

$\int [f(\chi)]^{\alpha} \cdot f'(\chi) d\chi = \int u^{\alpha} \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int u^{\alpha} du$. ***Παρατήρησε ότι :***

βάζοντας $u = f(\chi)$ (αλλαγή μεταβλητής) το ***«σύνθετο»*** ολοκλήρωμα

$\int [f(\chi)]^{\alpha} \cdot f'(\chi) d\chi$ μετατράπηκε στο ***πολύ απλό ολοκλήρωμα*** $\int u^{\alpha} du$,

το οποίο, ***με την χρήση του πίνακα ολοκληρωμάτων*** που αναφέρθηκε πιο πάνω και τον οποίο πρέπει να μάθεις πολύ καλά, προφανώς υπολογίζεται

εύκολα : $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{[f(\chi)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, με $\alpha \neq -1$ και $c \in R$.

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int 3\chi^7 d\chi$, **ii)** $\int (3\chi^4 + \chi^3 + 5) d\chi$,

iii) $\int \eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \, d\chi$, **iv)** $\int (\chi^3 - 3\chi + 5)^4 (\chi^2 - 1) d\chi$.

Απάντηση :

i) Η παράσταση χ^7 πρέπει να έχει προκύψει από την χ^8, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι :

$(\chi^8)' = 8\chi^7 \Leftrightarrow 3\chi^7 = \left(\frac{3\chi^8}{8} \right)'$ άρα $\int 3\chi^7 d\chi = \int \left(\frac{3\chi^8}{8} \right)' d\chi = \frac{3\chi^8}{8} + c$, $c \in R$.

ii) Θα «σπάσεις» το ολοκλήρωμα σε άθροισμα ολοκληρωμάτων και στη συνέχεια θα σκεφτείς, όπως πριν, για καθένα από τα επί μέρους

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ολοκληρώματα ***οπότε γράφεις :***

$$\int(3\chi^4+\chi^3+5)d\chi=\int 3\chi^4 d\chi+\int\chi^3 d\chi+\int 5d\chi=3\frac{\chi^5}{5}+\frac{\chi^4}{4}+5\chi+c\,,\ c\in R.$$

iii) Η παράσταση $\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από την $\eta\mu^3\chi$,

οπότε γράφεις :

Παρατηρώ ότι : $\left(\eta\mu^3\chi\right)'=3\eta\mu^2\chi\cdot\left(\eta\mu\chi\right)'=3\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\Leftrightarrow$

$$\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\left(\frac{\eta\mu^3\chi}{3}\right)'\ \text{ άρα }\int\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\int\left(\frac{\eta\mu^3\chi}{3}\right)'d\chi=\frac{\eta\mu^3\chi}{3}+c\,,\ c\in R.$$

iv) Είναι προφανές ότι ***το ρόλο της*** $f(\chi)$ μέσα στο ολοκλήρωμα

$\int\left(\chi^3-3\chi+5\right)^4\left(\chi^2-1\right)d\chi$ ***τον έχει το*** $\chi^3-3\chi+5$ και η $f'(\chi)$ θα πρέπει

να είναι το χ^2-1 , ***οπότε :*** θέτεις $u=\chi^3-3\chi+5$ άρα

$$du=\left(\chi^3-3\chi+5\right)'d\chi=\left(3\chi^2-3\right)d\chi=3\left(\chi^2-1\right)d\chi\Leftrightarrow d\chi=\frac{du}{3\left(\chi^2-1\right)}.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int\left(\chi^3-3\chi+5\right)^4\left(\chi^2-1\right)d\chi=\int u^4\left(\chi^2-1\right)\frac{du}{3\left(\chi^2-1\right)}=\int\frac{u^4du}{3}=\frac{1}{3}\int u^4du=$$

$$\frac{1}{3}\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(\chi^3-3\chi+5\right)^5}{15}+c\,,\ c\in R.$$

** Δεν θα ξεχνάς ότι το u είναι μια «προσωρινή» μεταβλητή, που εσύ χρησιμοποιείς και στο τέλος δεν πρέπει να υπάρχει, άρα θα πρέπει στο τέλος να αντικατασταθεί το u.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. $\int \frac{1}{2\sqrt{\chi}}d\chi = \int \left(\sqrt{\chi}\right)' d\chi = \sqrt{\chi} + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}}d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$du = f'(\chi)d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}}d\chi = \int \frac{f'(\chi)}{2\sqrt{u}}\frac{du}{f'(\chi)} =$

$\int \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \sqrt{u} = \sqrt{f(\chi)} + c$ με $c \in R$.

Οι παραπάνω διαδικασίες έχουν, όπως καταλαβαίνεις, ***περιορισμένη εφαρμογή*** και αφορούν ***αποκλειστικά τετραγωνικές ρίζες.***

Όταν όμως ***μέσα στο ολοκλήρωμα*** έχει ***ριζικό***, ***θα το μετατρέπεις πρώτα σε δύναμη*** με τους γνωστούς μετασχηματισμούς :

$\sqrt[\nu]{\chi^\mu} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\frac{1}{\sqrt[\nu]{\chi^\mu}} = \chi^{-\frac{\mu}{\nu}}$, $\sqrt[\nu]{f^\mu(\chi)} = f^{\frac{\mu}{\nu}}(\chi)$, $\frac{1}{\sqrt[\nu]{f^\mu(\chi)}} = f^{-\frac{\mu}{\nu}}(\chi)$ οπότε τα

αντίστοιχα ολοκληρώματα αντιμετωπίζονται με την μορφή : $\int \chi^\alpha d\chi$ ή με την

μορφή : $\int \left[f(\chi)\right]^\alpha \cdot f'(\chi)d\chi$ όπως στα ***παραδείγματα που ακολουθούν :***

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int \sqrt[4]{\chi^7}d\chi$,

ii) $\int \left(\eta\mu\chi - \frac{5}{\sqrt{\chi^3}}\right)d\chi$,

iii) $\int \sqrt[5]{\left(\chi^3+2\right)^2}\chi^2 d\chi$,

iv) $\int \frac{\chi}{\sqrt[5]{\left(\chi^2+1\right)^2}}d\chi$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

i) Η παράσταση $\sqrt[4]{\chi^7}$, σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν, γράφεται $\chi^{\frac{7}{4}}$

και είναι της μορφής χ^{α} , ***οπότε γράφεις :***

Είναι : $\int \sqrt[4]{\chi^7}\,d\chi = \int \chi^{\frac{7}{4}}\,d\chi = \dfrac{\chi^{\frac{7}{4}+1}}{\frac{7}{4}+1} = \dfrac{\chi^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}} = \dfrac{4}{11}\chi^{\frac{11}{4}} + c\,,\ c \in R.$

ii) Θα «σπάσεις» το ολοκλήρωμα σε άθροισμα ολοκληρωμάτων και στη συνέχεια θα σκεφτείς, όπως πριν, για καθένα από τα επί μέρους ολοκληρώματα ***οπότε γράφεις :***

$$\int\left(\eta\mu\chi - \frac{5}{\sqrt{\chi^3}}\right)d\chi = \int \eta\mu\chi d\chi - \int \frac{5}{\sqrt{\chi^3}}d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi - \int \frac{5}{\chi^{\frac{3}{2}}}d\chi =$$

$$-\sigma\upsilon\nu\chi - \int 5\chi^{-\frac{3}{2}}d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi - 5\frac{\chi^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = -\sigma\upsilon\nu\chi - 5\frac{\chi^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c \text{ άρα}$$

$$\int\left(\eta\mu\chi - \frac{5}{\sqrt{\chi^3}}\right)d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi + 10\chi^{-\frac{1}{2}} + c,\ \ c \in R.$$

iii) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν ***γράφεις :***

Είναι : $\int \sqrt[5]{\left(\chi^3+2\right)^2}\,\chi^2 d\chi = \int \left(\chi^3+2\right)^{\frac{2}{5}}\chi^2 d\chi$ **(1)**.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int \left[f(\chi)\right]^{\alpha}\cdot f'(\chi)d\chi$ ***οπότε :***

θέτεις $u = \chi^3+2$ άρα $du = \left(\chi^3+2\right)' d\chi = 3\chi^2 d\chi \Leftrightarrow d\chi = \dfrac{du}{3\chi^2}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \left(\chi^3+2\right)^{\frac{2}{5}}\chi^2 d\chi = \int u^{\frac{2}{5}}\chi^2\frac{du}{3\chi^2} = \frac{1}{3}\int u^{\frac{2}{5}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c\,,\ c \in R$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+c=\frac{5}{21}u^{\frac{7}{5}}+c=\frac{5}{21}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}}+c\,,\ c\in R.$$

iv) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν ***γράφεις :***

Είναι : $\displaystyle\int\frac{\chi}{\sqrt[5]{\left(\chi^2+1\right)^2}}d\chi=\int\frac{\chi}{\left(\chi^2+1\right)^{\frac{2}{5}}}d\chi=\int\left(\chi^2+1\right)^{-\frac{2}{5}}\chi d\chi$ **(1)**.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\displaystyle\int\left[f(\chi)\right]^{\alpha}\cdot f'(\chi)d\chi$ ***οπότε :***

θέτεις $u=\chi^2+1$ άρα $du=\left(\chi^2+1\right)'d\chi=2\chi d\chi\Leftrightarrow d\chi=\frac{du}{2\chi}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int\left(\chi^2+1\right)^{-\frac{2}{5}}\chi d\chi=\int u^{-\frac{2}{5}}\chi\frac{du}{2\chi}=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{2}{5}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}+c=$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+c=\frac{5}{6}u^{\frac{3}{5}}+c=\frac{5}{6}\left(\chi^2+1\right)^{\frac{3}{5}}+c\,,\ c\in R.$$

*** Τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{\chi}}d\chi$ και $\displaystyle\int\frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}}d\chi$ μπορείς, επίσης, να τα υπολογίσεις ως **εφαρμογή** της πιο πάνω διαδικασίας.

7. $\boxed{\int\text{συν}\chi d\chi=\int(\text{ημ}\chi)'d\chi=\text{ημ}\chi+c\,,}$ $c\in R$.

<u>Γενίκευση</u> Για να βρεις :

✓ το $\int\left[\text{συν}f(\chi)\right]f'(\chi)d\chi$, θέτεις $u=f(\chi)$ οπότε $du=f'(\chi)d\chi\Leftrightarrow$

$d\chi=\frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int\left[\text{συν}f(\chi)\right]\cdot f'(\chi)d\chi=\int\text{συν}u\,f'(\chi)\frac{du}{f'(\chi)}=$

$\int\text{συν}u\,du=\text{ημ}u+c=\text{ημ}\left[f(\chi)\right]+c\,,\ c\in R$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ το $\int f(\text{συν}\chi)\text{ημ}\chi\, d\chi$, θέτεις $u=\text{συν}\chi$ οπότε $du=(\text{συν}\chi)'\, d\chi=-\text{ημ}\chi d\chi$

$\Leftrightarrow d\chi=\dfrac{du}{-\text{ημ}\chi}$ άρα $\int f(\text{συν}\chi)\text{ημ}\chi d\chi=\int f(u)\text{ημ}\chi\dfrac{du}{-\text{ημ}\chi}=$

$-\int f(u)du$ ολοκληρώνεις ανάλογα με τη συνάρτηση και στο τέλος αντικαθιστάς το $u=\text{συν}\chi$.

8. $\int \text{συν}^2\chi d\chi$

Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο του διπλάσιου τόξου για να «φύγει» το τετράγωνο, στην προκείμενη περίπτωση είναι $\text{συν}^2\chi=\dfrac{\text{συν}2\chi+1}{2}$ οπότε

$$\int \text{συν}^2\chi\, d\chi=\int\frac{\text{συν}2\chi+1}{2}d\chi=\frac{1}{2}\int\text{συν}2\chi\, d\chi+\frac{1}{2}\int d\chi.$$

Για το $\frac{1}{2}\int\text{συν}2\chi\, d\chi$, $u=2\chi$ οπότε $du=(2\chi)'\, d\chi=2d\chi\Leftrightarrow d\chi=\frac{1}{2}du$ άρα

$\frac{1}{2}\int\text{συν}2\chi\, d\chi=\frac{1}{2}\int\text{συν}u\frac{1}{2}du=\frac{1}{4}\int\text{συν}u\, du=\frac{1}{4}\text{ημ}u+c=\frac{1}{4}\text{ημ}2\chi+c$ και

$\frac{1}{2}\int d\chi=\frac{1}{2}\chi$ άρα $\int\text{συν}^2\chi\, d\chi=\frac{1}{4}\text{ημ}2\chi+\frac{1}{2}\chi+c$, $c\in R$.

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int\text{συν}(\chi^2+3)\chi\, d\chi$, **ii)** $\int\dfrac{\text{συν}(\ln\chi)}{\chi}d\chi$, **iii)** $\int(\text{συν}^2\chi+2)\cdot\text{ημ}\chi\, d\chi$.

Απάντηση :

i) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν θέτεις $u=\chi^2+3$ άρα

$du=(\chi^2+3)'\, d\chi=2\chi\cdot d\chi\Leftrightarrow d\chi=\dfrac{du}{2\chi}$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int\text{συν}(\chi^2+3)\chi\, d\chi=\int\text{συν}u\,\chi\frac{du}{2\chi}=\frac{1}{2}\int\text{συν}u\, du=\frac{1}{2}\text{ημ}u=\frac{1}{2}\text{ημ}(\chi^2+3)+c.$$

Λιβαδειά

ii) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν, θέτεις $u = \ln\chi$ άρα

$du = (\ln\chi)'\,d\chi = \frac{1}{\chi}d\chi \Leftrightarrow d\chi = \chi\,du$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln\chi)}{\chi}d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu(u)}{\chi}\chi\,du = \int \sigma\upsilon\nu u\,du = \eta\mu u + c = \eta\mu(\ln\chi) + c.$$

iii) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν θέτεις $u = \sigma\upsilon\nu\chi$ άρα

$du = (\sigma\upsilon\nu\chi)'\,d\chi = -\eta\mu\chi\,d\chi \Leftrightarrow d\chi = -\frac{du}{\eta\mu\chi}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int (\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2)\cdot\eta\mu\chi\,d\chi = \int (u^2+2)\cdot\eta\mu\chi\left(-\frac{du}{\eta\mu\chi}\right) = -\int (u^2+2)\,du =$$

$$-\left(\frac{u^3}{3} + 2u\right) + c = -\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi}{3} + 2\sigma\upsilon\nu\chi\right) + c,\ c \in R.$$

9. $\int \eta\mu\chi d\chi = \int(-\sigma\upsilon\nu\chi)'\,d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi + c,\ c \in R$.

<u>Γενίκευση</u> Για να βρεις το

✓ $\int[\eta\mu f(\chi)]\cdot f'(\chi)d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi)d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int[\eta\mu f(\chi)]\cdot f'(\chi)d\chi = \int \eta\mu u\cdot f'(\chi)\frac{du}{f'(\chi)} =$

$\int \eta\mu u\cdot du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu[f(\chi)] + c,\ c \in R$.

✓ $\int f(\eta\mu\chi)\sigma\upsilon\nu\chi\cdot d\chi$ θέτεις $u = \eta\mu\chi$ οπότε $du = (\eta\mu\chi)'\,d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ άρα $\int f(\eta\mu\chi)\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \int f(u)\sigma\upsilon\nu\chi\frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi} =$

$\int f(u)du$ ολοκληρώνεις ανάλογα με τη συνάρτηση και στο τέλος

αντικαθιστάς το $u = \eta\mu\chi$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. $\int \eta\mu^2\chi d\chi$

Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο του διπλάσιου τόξου για να «φύγει» το τετράγωνο, στην προκείμενη περίπτωση είναι $\eta\mu^2\chi = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2}$ οπότε

$\int \eta\mu^2\chi \cdot d\chi = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} d\chi = \frac{1}{2}\int d\chi - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot d\chi$. Είναι $\frac{1}{2}\int d\chi = \frac{1}{2}\chi$

και $\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot d\chi = \frac{1}{4}\eta\mu 2\chi$ (δες περίπτωση 7) άρα

$$\int \eta\mu^2\chi \cdot d\chi = \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{4}\eta\mu 2\chi + c.$$

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int \eta\mu\left(\chi^3+1\right)\chi^2\, d\chi$, **ii)** $\int \sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu\chi\right)\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi$.

Απάντηση :

i) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν θέτεις $u = \chi^3+1$ άρα

$du = \left(\chi^3+1\right)' d\chi = 3\chi^2 d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{3\chi^2}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται : $\int \eta\mu\left(\chi^3+1\right)\chi^2\, d\chi = \int \eta\mu u\, \chi^2 \frac{du}{3\chi^2} =$

$\frac{1}{3}\int \eta\mu u\, du = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu u = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu\left(\chi^3+1\right) + c$.

ii) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν θέτεις $u = \eta\mu\chi$ άρα

$du = \left(\eta\mu\chi\right)' d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}$. Επομένως το ολοκλήρωμα

γίνεται : $\int \sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu\chi\right)\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi = \int \sigma\upsilon\nu\left(u\right)\sigma\upsilon\nu\chi \frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi} =$

$\int \sigma\upsilon\nu u\, du = \eta\mu u = \eta\mu\left(\eta\mu\chi\right) + c$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi = \int (\varepsilon\varphi\chi)' d\chi = \varepsilon\varphi\chi + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(\chi)}d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$du = f'(\chi)d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int \frac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(\chi)}d\chi =$

$\int \frac{f'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\frac{du}{f'(\chi)} = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du = \varepsilon\varphi u + c = \varepsilon\varphi[f(\chi)] + c$, $c \in R$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\chi}{\sigma\upsilon\nu^2(\chi^2+3)}d\chi$.

Απάντηση : θέτεις $u = \chi^2 + 3$ οπότε $du = (\chi^2+3)' d\chi \Leftrightarrow du = 2\chi d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{2\chi}$ άρα $\int \frac{\chi}{\sigma\upsilon\nu^2(\chi^2+3)}d\chi = \int \frac{\chi}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\frac{du}{2\chi} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du =$

$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi u + c = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi(\chi^2+3) + c$, $c \in R$

12. $\int \frac{1}{\eta\mu^2\chi}d\chi = \int (-\sigma\varphi\chi)' d\chi = -\sigma\varphi\chi + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \frac{1}{\eta\mu^2 f(\chi)}f'(\chi)d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$du = f'(\chi)d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int \frac{1}{\eta\mu^2 f(\chi)}f'(\chi)d\chi =$

$\int \frac{1}{\eta\mu^2 u}f'(\chi)\frac{du}{f'(\chi)} = \int \frac{1}{\eta\mu^2 u}du = -\sigma\varphi u + c = -\sigma\varphi[f(\chi)] + c$, $c \in R$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\eta\mu^2 3\chi} d\chi$.

Απάντηση : θέτεις $u = 3\chi$ οπότε $du = (3\chi)' d\chi \Leftrightarrow du = 3 d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{3}$ άρα $\int \frac{1}{\eta\mu^2 3\chi} d\chi = \int \frac{1}{\eta\mu^2 u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\eta\mu^2 u} du =$

$-\frac{1}{3} \sigma\varphi u + c = -\frac{1}{3} \sigma\varphi 3\chi + c$, $c \in R$

13. $\int \eta\mu[f(\chi)] \cdot \sigma\upsilon\nu[g(\chi)] d\chi$. Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta)}{2}$ και διασπάς το ολοκλήρωμα

$\int \eta\mu[f(\chi)] \sigma\upsilon\nu[g(\chi)] d\chi = \int \frac{\eta\mu[f(\chi)+g(\chi)] + \eta\mu[f(\chi)-g(\chi)]}{2} d\chi =$

$\frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi)+g(\chi)] d\chi + \frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi)-g(\chi)] d\chi$. Εννοείται πως στη συνέχεια εφαρμόζεις ***ολόκληρη*** τη διαδικασία υπολογισμού για τα $\frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi)+g(\chi)] d\chi$ και $\frac{1}{2} \int \eta\mu[f(\chi)-g(\chi)] d\chi$, όπως αναφέρεται στην περίπτωση 9 πιο πάνω.

14. $\int \eta\mu[f(\chi)] \eta\mu[g(\chi)] d\chi$. Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{2}$ και διασπάς το ολοκλήρωμα

$\int \eta\mu[f(\chi)] \eta\mu[g(\chi)] d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu[f(\chi)-g(\chi)] - \sigma\upsilon\nu[f(\chi)+g(\chi)]}{2} d\chi =$

$\frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu[f(\chi)-g(\chi)] d\chi - \frac{1}{2} \int \sigma\upsilon\nu[f(\chi)+g(\chi)] d\chi$. Εννοείται πως στη

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

συνέχεια εφαρμόζεις ***ολόκληρη*** τη διαδικασία υπολογισμού για τα

$\frac{1}{2}\int \text{συν}\left[f(\chi)-g(\chi)\right]d\chi$ και $\frac{1}{2}\int \text{συν}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]d\chi$, όπως αναφέρεται

στην περίπτωση 7 πιο πάνω.

15. $\int \text{συν}\left[f(\chi)\right]\text{συν}\left[g(\chi)\right]d\chi$. Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο

τριγωνομετρίας που μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα

$\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta=\frac{\text{συν}(\alpha+\beta)+\text{συν}(\alpha-\beta)}{2}$ και διασπάς το ολοκλήρωμα

$$\int \text{συν}\left[f(\chi)\right]\text{συν}\left[g(\chi)\right]d\chi=\int\frac{\text{συν}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]+\text{συν}\left[f(\chi)-g(\chi)\right]}{2}d\chi=$$

$$\frac{1}{2}\int \text{συν}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]d\chi+\frac{1}{2}\int \text{συν}\left[f(\chi)-g(\chi)\right]d\chi=\cdots.$$

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \text{ημ}3\chi\cdot\text{συν}5\chi d\chi$.

Απάντηση : Εφαρμόζεις τον κατάλληλο τύπο τριγωνομετρίας που

μετατρέπει το γινόμενο σε άθροισμα : $\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta=\frac{\text{ημ}(\alpha+\beta)+\text{ημ}(\alpha-\beta)}{2}$

οπότε έχεις $\text{ημ}3\chi\cdot\text{συν}5\chi=\frac{\text{ημ}(3\chi+5\chi)+\text{ημ}(3\chi-5\chi)}{2}=\frac{\text{ημ}8\chi+\text{ημ}(-2\chi)}{2}$

$=\frac{\text{ημ}8\chi}{2}-\frac{\text{ημ}2\chi}{2}$ διασπάς το ολοκλήρωμα και έχεις :

$$\int \text{ημ}3\chi\cdot\text{συν}5\chi d\chi=\frac{1}{2}\int \text{ημ}8\chi\, d\chi-\frac{1}{2}\int \text{ημ}2\chi\, d\chi \quad (1).$$

✓ Για να βρεις το $\int \text{ημ}8\chi\, d\chi$ θέτεις $u=8\chi$ άρα $du=(8\chi)'\,d\chi=8\cdot d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi=\frac{du}{8}$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \eta\mu 8\chi\, d\chi = \int \eta\mu u \frac{du}{8} = \frac{1}{8}\int(-\sigma\upsilon\nu u)\,du = -\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu u = -\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 8\chi$$

✓ Για να βρεις το $\int \eta\mu 2\chi\, d\chi$ θέτεις $u = 2\chi$ άρα $du = (2\chi)'\, d\chi = 2\cdot d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{2}$. Επομένως $\int \eta\mu 2\chi\, d\chi = \int \eta\mu u \frac{du}{2} = \cdots -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi$.

Άρα η (1) γίνεται $\int \eta\mu 3\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 5\chi d\chi = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\sigma\upsilon\nu 8\chi\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi\right) + c \Leftrightarrow$

$$\int \eta\mu 3\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 5\chi d\chi = -\frac{1}{16}\sigma\upsilon\nu 8\chi + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2\chi + c, c \in R.$$

Οι περιπτώσεις **13, 14, και 15** είναι εκτός ύλης στο αντίστοιχο κεφάλαιο Τριγωνομετρίας και δεν θα αναπτυχθούν περισσότερο, αν χρειαστούν μέσα σε άσκηση ***θα σου δώσει αυτούς τους τύπους***, όπως κάνει και το σχολικό βιβλίο.

16. $\int \alpha^{\chi} d\chi = \int \left(\frac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}\right)' d\chi = \frac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha} + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int \alpha^{f(\chi)} f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int \alpha^{f(\chi)} f'(\chi) d\chi = \int \alpha^{u} f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int \alpha^{u}\, du = \frac{\alpha^{u}}{\ln\alpha} = \frac{\alpha^{f(\chi)}}{\ln\alpha}$.

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int 3^{\chi} d\chi$, **ii)** $\int \alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda} d\chi$ $\alpha \in R$, $1 \neq \alpha > 0$,

iii) $\int \frac{2^{2\chi+3}}{9^{\chi}} d\chi$, **iv)** $\int \frac{\alpha^{\sqrt{\chi}}}{\sqrt{\chi}} d\chi$ όπου $\alpha \in R$ με $1 \neq \alpha > 0$.

Απάντηση :

Λιβαδειά

i) Σύμφωνα με τον πίνακα ολοκληρωμάτων είναι $\int 3^{\chi}\,d\chi = \frac{3^{\chi}}{\ln 3} + c\,,\quad c \in R.$

ii) Για να βρεις το $\int \alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda}\,d\chi$ θέτεις $u = \kappa\cdot\chi+\lambda$ άρα

$$du = (\kappa\cdot\chi+\lambda)'\,d\chi = \kappa\cdot d\chi \;\Leftrightarrow\; d\chi = \frac{du}{\kappa} \quad \text{άρα} \quad \int \alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda}\,d\chi = \int \alpha^{u}\,\frac{du}{\kappa} =$$

$$\frac{1}{\kappa}\int \alpha^{u}\,du = \frac{1}{\kappa}\frac{\alpha^{u}}{\ln\alpha} + c = \frac{\alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda}}{\kappa\cdot\ln\alpha} + c\,,\quad c \in R.$$

iii) Το $\int \frac{2^{2\chi+3}}{9^{\chi}}\,d\chi = \int \frac{2^{2\chi}\cdot 2^{3}}{\left(3^{2}\right)^{\chi}}\,d\chi = 8\int \frac{2^{2\chi}}{3^{2\chi}}\,d\chi = 8\int \left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi} d\chi$ οπότε

θέτεις $u = 2\chi$ άρα $du = (2\chi)'\,d\chi = 2\cdot d\chi \;\Leftrightarrow\; d\chi = \frac{du}{2}$ άρα

$$8\int \left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi} d\chi = 8\int \left(\frac{2}{3}\right)^{u}\frac{du}{2}\,d\chi = 4\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{u}}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 4\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi+3}}{\ln 2 - \ln 3} + c\,,\quad c \in R.$$

iv) Για να βρεις το $\int \frac{\alpha^{\sqrt{\chi}}}{\sqrt{\chi}}\,d\chi$ θέτεις $u = \sqrt{\chi}$ άρα

$$du = \left(\sqrt{\chi}\right)'\,d\chi = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}\cdot d\chi \;\Leftrightarrow\; d\chi = 2\sqrt{\chi}\,du \quad \text{άρα}$$

$$\int \frac{\alpha^{\sqrt{\chi}}}{\sqrt{\chi}}\,d\chi = \int \frac{\alpha^{u}}{\sqrt{\chi}}\,2\sqrt{\chi}\,du = 2\int \alpha^{u}\,du = 2\frac{\alpha^{u}}{\ln\alpha} + c = 2\frac{\alpha^{\sqrt{\chi}}}{\ln\alpha} + c\,,\quad c \in R.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. $\int \frac{1}{\chi} d\chi = \int (\ell n|\chi|)' d\chi = \ell n|\chi| + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} d\chi = \int \frac{1}{u} f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|f(\chi)| + c$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\chi^3}{\chi^4 + 2} d\chi$.

Απάντηση : θέτεις $u = \chi^4 + 2$ οπότε $du = (\chi^4 + 2)' d\chi = 4\chi^3 d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{4\chi^3}$ άρα $\int \frac{\chi^3}{\chi^4 + 2} d\chi = \int \frac{\chi^3}{u} \frac{du}{4\chi^3} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln|u| + c =$

$\frac{1}{4} \ln|\chi^4 + 2| + c$, $c \in R$.

18. $\int \varepsilon\varphi\chi d\chi = \int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = -\int \frac{-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)'}{\sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = -\ln|\sigma\upsilon\nu\chi| + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το $\int \varepsilon\varphi(f(\chi)) f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int \varepsilon\varphi f(\chi) f'(\chi) d\chi = \int \varepsilon\varphi u f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} =$

$\int \varepsilon\varphi u \, du = -\int \frac{-\eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu u} du = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu u)'}{\sigma\upsilon\nu u} du = -\ln|\sigma\upsilon\nu u| + c = -\ln|\sigma\upsilon\nu f(\chi)| + c$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \varepsilon\varphi\left(3\chi + \frac{\pi}{4}\right) d\chi$.

Λιβαδειά

Απάντηση : θέτεις $u = 3\chi + \frac{\pi}{4}$ οπότε $du = \left(3\chi + \frac{\pi}{4}\right)' d\chi = 3\,d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{3}$ άρα $\int \varepsilon\varphi\left(3\chi + \frac{\pi}{4}\right)d\chi = \int \varepsilon\varphi u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \varepsilon\varphi u\, du = -\frac{1}{3}\int \frac{-\eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu u} du$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{(\sigma\upsilon\nu u)'}{\sigma\upsilon\nu u} du = -\frac{1}{3}\ln|\sigma\upsilon\nu u| + c = -\frac{1}{3}\ln\left|\sigma\upsilon\nu\left(3\chi + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$, $c \in R$.

19. $\int \sigma\varphi\chi d\chi = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} d\chi = \int \frac{(\eta\mu\chi)'}{\eta\mu\chi} d\chi = \ln|\eta\mu\chi| + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το $\int [\sigma\varphi f(\chi)] f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε

$du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$ άρα $\int [\sigma\varphi f(\chi)] f'(\chi) d\chi =$

$\int [\sigma\varphi u] \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int \sigma\varphi u \cdot du = \int \frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u} du = \int \frac{(\eta\mu u)'}{\eta\mu u} du =$

$\ln|\eta\mu u| + c = \ln|\eta\mu f(\chi)| + c$, $c \in R$

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \chi \cdot \sigma\varphi\left(\chi^2 + \frac{3\pi}{4}\right) d\chi$.

Απάντηση : θέτεις $u = \chi^2 + \frac{3\pi}{4}$ οπότε $du = \left(\chi^2 + \frac{3\pi}{4}\right)' d\chi = 2\chi\, d\chi \Leftrightarrow$

$d\chi = \frac{du}{2\chi}$ άρα $\int \chi \cdot \sigma\varphi\left(\chi^2 + \frac{3\pi}{4}\right) d\chi = \int \chi \cdot \sigma\varphi u \frac{du}{2\chi} =$

$\frac{1}{2}\int \sigma\varphi u\, du = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u} du = \frac{1}{2}\int \frac{(\eta\mu u)'}{\eta\mu u} du =$

$\frac{1}{2}\ln|\eta\mu u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\eta\mu\left(\chi^2 + \frac{3\pi}{4}\right)\right| + c$, $c \in R$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}d\chi$, $c \in R$. Αρχικά γράφεις το $\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}} = \chi^{\frac{\mu}{\nu}}$ οπότε το $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}d\chi$

γίνεται $\int \frac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}d\chi = \int P(\chi)\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}d\chi$, στη συνέχεια εφαρμόζεις την

επιμεριστική ιδιότητα κάνοντας πράξεις, τέλος διασπάς το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{(\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi - 2)}{\sqrt[3]{\chi^4}}d\chi$.

Απάντηση : Είναι $\int \frac{(\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi - 2)}{\sqrt[3]{\chi^4}}d\chi = \int (\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi - 2)\chi^{-\frac{4}{3}}d\chi =$

$$\int \left(\chi^{\frac{8}{3}} - 2\chi^{\frac{5}{3}} + 5\chi^{-\frac{1}{3}} - 2\chi^{-\frac{4}{3}}\right)d\chi = \frac{\chi^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} - 2\frac{\chi^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + 5\frac{\chi^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2\frac{\chi^{-\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}$$

$= \cdots$ συνεχίζεις κάνοντας τις πράξεις.

21. $\int \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}d\chi$. Ότι ακολουθεί αφορά περιπτώσεις που δεν έχουν αναφερθεί σε προηγούμενη διαδικασία και το $Q(\chi)$ παραγοντοποιείται και γράφεται $Q(\chi) = (\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)\cdots(\chi - \chi_\nu)$

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μικρότερου βαθμού από το $Q(\chi)$, μέσα από την ισότητα

$$\frac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{\chi - \chi_\nu},$$

βρίσκεις τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$

οπότε : $\int \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}d\chi = \int \left(\frac{\alpha_1}{\chi - \chi_1} + \frac{\alpha_2}{\chi - \chi_2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{\chi - \chi_\nu}\right)d\chi = \cdots$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μεγαλύτερου βαθμού από το $Q(\chi)$ τότε πρώτα εκτελείς τη διαίρεση $P(\chi):Q(\chi)$ και βρίσκεις τα $\pi(\chi)$ και $\upsilon(\chi)$ οπότε θα είναι

$$P(\chi)=Q(\chi)\pi(\chi)+\upsilon(\chi) \Leftrightarrow \frac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\pi(\chi)+\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)} \text{ άρα}$$

$$\int\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}d\chi=\int\left(\pi(\chi)+\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}\right)d\chi=\int\pi(\chi)d\chi+\int\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}d\chi \text{ , το } \int\pi(\chi)d\chi$$

υπολογίζεται με κάποιον από τους προηγούμενους τρόπους και το

$\int\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}d\chi$ υπολογίζεται με τον ***ακριβώς προηγούμενο*** τρόπο, δηλαδή

βρίσκεις τους αριθμούς : $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ μέσα από την ισότητα :

$$\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}=\frac{\alpha_1}{\chi-\chi_1}+\frac{\alpha_2}{\chi-\chi_2}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{\chi-\chi_\nu} \text{ , οπότε :}$$

$$\int\frac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}d\chi=\int\left(\frac{\alpha_1}{\chi-\chi_1}+\frac{\alpha_2}{\chi-\chi_2}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{\chi-\chi_\nu}\right)d\chi=\cdots$$

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{3\chi-13}{\chi^2-4\chi+3}d\chi$.

Απάντηση : Είναι $\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$ άρα

$\frac{3\chi-13}{\chi^2-4\chi+3}=\frac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}$, βρίσκεις τους αριθμούς : α_1, α_2 από την

ισότητα $\frac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{\alpha_1}{\chi-1}+\frac{\alpha_2}{\chi-3} \Leftrightarrow$

$$\frac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{\alpha_1\cdot\chi-3\alpha_1+\alpha_2\cdot\chi-\alpha_2}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\chi-3\alpha_1-\alpha_2}{(\chi-1)(\chi-3)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3\\-3\alpha_1-\alpha_2=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-3\alpha_1+13=3\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha_1=-10\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}. \quad \text{Άρα} \int \frac{3\chi - 13}{\chi^2 - 4\chi + 3} d\chi = \int \left(\frac{5}{\chi - 1} - \frac{2}{\chi - 3} \right) d\chi =$$

$$\int \frac{5}{\chi - 1} d\chi - \int \frac{2}{\chi - 3} d\chi = 5 \int \frac{1}{\chi - 1} d\chi - 2 \int \frac{1}{\chi - 3} d\chi = 5 \ln|\chi - 1| - 2 \ln|\chi - 3|.$$

22. $\int e^{\chi} = \int \left(e^{\chi}\right)' = e^{\chi} + c$, $c \in R$.

Γενίκευση Για να βρεις το

✓ $\int e^{f(\chi)} \cdot f'(\chi) d\chi$ θέτεις $u = f(\chi)$ οπότε $du = f'(\chi) d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{f'(\chi)}$

άρα $\int e^{f(\chi)} \cdot f'(\chi) d\chi = \int e^{u} \cdot f'(\chi) \frac{du}{f'(\chi)} = \int e^{u} du$

$= e^{u} + c = e^{f(\chi)} + c$.

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int e^{-\chi} d\chi$, **ii)** $\int e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot \eta\mu\chi \, d\chi$.

Απάντηση :

i) Θέτεις $u = -\chi$ άρα $du = (-\chi)' d\chi = -d\chi \Leftrightarrow d\chi = -du$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int e^{-\chi} d\chi = \int e^{u} (-du) = -\int e^{u} du = -e^{u} + c = -e^{-\chi} + c, \; c \in R.$$

ii) Θέτεις $u = \sigma\upsilon\nu\chi$ άρα $du = (\sigma\upsilon\nu\chi)' d\chi = -\eta\mu\chi \, d\chi \Leftrightarrow d\chi = -\frac{du}{\eta\mu\chi}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot \eta\mu\chi \, d\chi = \int e^{u} \cdot \eta\mu\chi \left(-\frac{du}{\eta\mu\chi} \right) = -\int e^{u} du = -e^{u} + c = -e^{\sigma\upsilon\nu\chi} + c, \; c \in R.$$

Λιβαδειά

23. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **την ίδια δύναμη** $e^{\kappa\cdot\chi}$, $\kappa > 0$, τότε ένας εύκολος και άμεσος μετασχηματισμός είναι να θέσεις $u = e^{\kappa\cdot\chi}$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{2\chi}+1}{e^{2\chi}-1}d\chi$.

Απάντηση :

Θέτεις $u = e^{2\chi} \Leftrightarrow du = \left(e^{2\chi}\right)' d\chi = 2e^{2\chi}d\chi \Leftrightarrow du = 2u\,d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{2u}$ άρα

$\int \frac{e^{2\chi}+1}{e^{2\chi}-1}d\chi = \int \frac{u+1}{u-1}\frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{(u-1)u}du$, βρίσκεις τους αριθμούς :

α_1, α_2 από την ισότητα

$$\frac{u+1}{(u-1)u} = \frac{\alpha_1}{u-1} + \frac{\alpha_2}{u} = \frac{\alpha_1\cdot u + \alpha_2\cdot u - \alpha_2}{(u-1)u} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot u - \alpha_2}{(u-1)u} \text{ άρα}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 = 1\\ -\alpha_2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 - 1 = 1\\ \alpha_2 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_2 = -1\end{cases} \text{ επομένως}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{u+1}{(u-1)u}du = \frac{1}{2}\int \frac{2}{u-1}du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\cdot 2\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u| + c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{e^{2\chi}+1}{e^{2\chi}-1}d\chi = \ln\left|e^{\chi}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|e^{2\chi}\right| + c = \ln\left|e^{2\chi}-1\right| - \frac{1}{2}\ln e^{2\chi} + c \text{ άρα}$$

$$\int \frac{e^{2\chi}+1}{e^{2\chi}-1}d\chi = \ln\left|e^{2\chi}-1\right| - \chi + c,\ c \in R.$$

24. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **διαφορετικές «δυνάμεις» του e πχ** $e^{\chi}, e^{2\chi}, e^{3\chi}, \cdots$, τότε ένας εύκολος και άμεσος μετασχηματισμός είναι να θέσεις $u = e^{\chi}$

οπότε $u = e^{\chi} \Leftrightarrow du = \left(e^{\chi}\right)' d\chi = e^{\chi}d\chi \Leftrightarrow du = u\,d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$ και επί πλέον $\mathbf{e^{2\chi} = u^2}$, $\mathbf{e^{3\chi} = u^3}$, $\cdots$ κατά τα άλλα λειτουργείς όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^{4\chi} - e^{\chi}}{e^{\chi} - 1} d\chi$, $\chi \neq 0$.

Απάντηση :

Θέτεις $u = e^{\chi} \Leftrightarrow du = \left(e^{\chi}\right)' d\chi = e^{\chi} d\chi \Leftrightarrow du = u\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$ άρα

$$\int \frac{e^{4\chi} - e^{\chi}}{e^{\chi} - 1} d\chi = \int \frac{u^4 - u}{u - 1} \frac{du}{u} = \int \frac{\left(u^3 - 1\right)u}{\left(u - 1\right)u} du = \int \frac{u^3 - 1}{u - 1} du =$$

$$\int \left(u^2 + u + 1\right) du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + c = \frac{e^{3\chi}}{3} + \frac{e^{2\chi}}{3} + e^{\chi} + c \text{ , } c \in R.$$

25. Όταν στο ολοκλήρωμα υπάρχουν παραστάσεις που περιέχουν **ταυτόχρονα ημχ και συνχ** ακολουθείς μια από τις επόμενες διαδικασίες :

α. Αντικαθιστάς το **συνχ** με **– συνχ**, και αν μετά από αυτό η παράσταση γίνει αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε ο μετασχηματισμός είναι : **u = ημχ.**

β. Αντικαθιστάς το **ημχ** με **– ημχ**, και αν μετά από αυτό η παράσταση γίνει αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε ο μετασχηματισμός είναι : **u = συνχ.**

γ. Αντικαθιστάς το **ημχ** με **– ημχ** και το **συνχ** με **– συνχ**, και αν μετά από αυτό η παράσταση που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα δεν αλλάξει τότε ο μετασχηματισμός είναι : **u = εφχ.**

δ. Αν τελικά η περίπτωση δεν εμπίπτει σε καμιά από τις προηγούμενες τότε ο μετασχηματισμός είναι : $u = \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\text{συν}\chi}{\text{ημ}^2\chi - 9} d\chi$.

Απάντηση : ***Αντικαθιστάς*** το **συνχ** με **– συνχ**, και επειδή η παράσταση γίνεται αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε, σύμφωνα με αυτά που είπαμε πιο πάνω ο μετασχηματισμός είναι : **u = ημχ**

άρα $du = (\text{ημ}\chi)' d\chi = \text{συν}\chi\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{\text{συν}\chi}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{\text{συν}\chi}{\text{ημ}^2\chi - 9} d\chi = \int \frac{\text{συν}\chi}{u^2 - 9} \frac{du}{\text{συν}\chi} = \int \frac{du}{u^2 - 9}$$, βρίσκεις τους αριθμούς : α_1 , α_2

από την ισότητα $\frac{1}{(u+3)(u-3)} = \frac{\alpha_1}{u+3} + \frac{\alpha_2}{u-3} = \frac{\alpha_1 \cdot u - 3\alpha_1 + \alpha_2 \cdot u + 3\alpha_2}{(u+3)(u-3)}$

άρα $\frac{1}{(u+3)(u-3)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot u - 3(\alpha_1 - \alpha_2)}{(u+3)(u-3)}$ επομένως

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -3(\alpha_1 - \alpha_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -3(-2\alpha_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{6} \\ \alpha_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$ άρα

$$\int \frac{du}{u^2 - 9} = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{u+3} + \frac{1}{6}\int \frac{du}{u-3} = -\frac{1}{6}\ln|u+3| + \frac{1}{6}\ln|u-3| + c$$ άρα

$$\int \frac{\text{συν}\chi}{\text{ημ}^2\chi - 9} d\chi = -\frac{1}{6}\ln|\text{ημ}\chi + 3| + \frac{1}{6}\ln|\text{ημ}\chi - 3| + c \text{ , } c \in R.$$

26. $\int [f(\chi)]^{\kappa} [g(\chi)]^{\lambda} d\chi$. Εξετάζεις τα **κ** και **λ** και αν

- ✓ $|\kappa| > |\lambda|$ τότε ο μετασχηματισμός είναι : $\mathbf{u = f(\chi)}$.
- ✓ $|\kappa| < |\lambda|$ τότε ο μετασχηματισμός είναι : $\mathbf{u = g(\chi)}$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int (2\chi + 3)^5 (\chi - 2)^2 d\chi$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

Θέτεις $u = 2\chi + 3$ άρα $du = (2\chi+3)'\,d\chi$ άρα $du = 2d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{2}$ και

$u = 2\chi + 3 \Leftrightarrow 2\chi = u - 3 \Leftrightarrow \chi = \frac{u-3}{2} \Leftrightarrow \chi - 2 = \frac{u-3}{2} - 2 = \frac{u-7}{2}$ άρα

$$\int (2\chi+3)^5(\chi-2)^2\,d\chi = \int u^5\left(\frac{u-7}{2}\right)^2\frac{du}{2} = \int u^5\,\frac{u^2-14u+49}{4}\,\frac{du}{2} =$$

$$\frac{1}{8}\int u^5\left(u^2-14u+49\right)du = \frac{1}{8}\int\left(u^7-14u^6+49u^5\right)du =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{u^8}{8} - 14\frac{u^7}{7} + 49\frac{u^6}{6}\right) + c \text{ άρα}$$

$$\int (2\chi+3)^5(\chi-2)^2\,d\chi = \frac{(2\chi+3)^8}{64} - \frac{(2\chi+3)^7}{4} + \frac{49(2\chi+3)^6}{48} + c\,,\ c \in R.$$

27. $\int \sqrt[\kappa]{f(\chi)}\,\sqrt[\lambda]{f(\chi)}\,d\chi$.

Βρίσκεις το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο ρ των κ και λ και θέτεις

$$u = \sqrt[\rho]{f(\chi)} \Leftrightarrow f(\chi) = u^\rho \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[\kappa]{f(\chi)} = u^{\frac{\rho}{\kappa}} \\ \sqrt[\lambda]{f(\chi)} = u^{\frac{\rho}{\lambda}} \end{cases}$$, όπου τα $\frac{\rho}{\kappa}$ και $\frac{\rho}{\lambda}$

απλοποιούνται γιατί το $\rho = \text{Ε.Κ.Π.}(\kappa\,,\lambda)$.

Μετά … δες καλλίτερα το παράδειγμα :

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{\chi-3}-(\chi-3)}{\sqrt[3]{\chi-3}-\sqrt{\chi-3}}\,d\chi$.

Απάντηση :

Βρίσκεις το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 2 και 3, που είναι το 6 και

θέτεις $u = \sqrt[6]{\chi-3} \Leftrightarrow \chi - 3 = u^6 \Leftrightarrow (\chi-3)'\,d\chi = \left(u^6\right)'du \Leftrightarrow d\chi = 6u^5du$ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\chi-3=u^6 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\chi-3}=\sqrt{u^6}=u^3\\ \sqrt[3]{\chi-3}=\sqrt[3]{u^6}=u^2\end{cases}, \text{ επομένως είναι :}$$

$$\int \frac{\sqrt{\chi-3}-(\chi-3)}{\sqrt[3]{\chi-3}-\sqrt{\chi-3}}d\chi = \int \frac{u^3-u^6}{u^2-u^3}6u^5du = 6\int \frac{u^8-u^{11}}{u^2-u^3}du =$$

$$6\int \frac{u^6\left(1-u^3\right)}{1-u}du = 6\int u^6\left(1+u+u^2\right)du = 6\int\left(u^6+u^7+u^8\right)du =$$

$$\frac{6}{7}u^7+\frac{6}{8}u^8+\frac{6}{9}u^9+c=\frac{6}{7}u^7+\frac{3}{4}u^8+\frac{2}{3}u^9+c \text{ άρα}$$

$$\int \frac{\sqrt{\chi-3}-(\chi-3)}{\sqrt[3]{\chi-3}-\sqrt{\chi-3}}d\chi = \frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{\chi-3}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[6]{\chi-3}\right)^8+\frac{2}{3}\left(\sqrt[6]{\chi-3}\right)^9+c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{\sqrt{\chi-3}-(\chi-3)}{\sqrt[3]{\chi-3}-\sqrt{\chi-3}}d\chi = \frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{\chi-3}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\chi-3}\right)^4+\frac{2}{3}\left(\sqrt{\chi-3}\right)^3+c,\ c\in R.$$

Λυμένες Ασκήσεις

Δες περίπτωση **3, 4, 5, 7**

1. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi)e^{\chi}d\chi$ **ii)** $\int\left(3\chi^2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\chi^3\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\chi$

iii) $\int\frac{\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}d\chi$ **iv)** $\int\frac{4\chi^3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi^4\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi$.

Απάντηση :

i) Η παράσταση $(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi)e^{\chi}=\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}-\eta\mu\chi\cdot e^{\chi}=-\eta\mu\chi\cdot e^{\chi}+\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}$

πρέπει να έχει προκύψει από το γινόμενο $\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι :

$$\left(\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}\right)'=(\sigma\upsilon\nu\chi)'e^{\chi}+\sigma\upsilon\nu\chi\left(e^{\chi}\right)'=-\eta\mu\chi\cdot e^{\chi}+\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

άρα $\int(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi)e^{\chi}d\chi = \int\left(\sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}\right)' d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi\cdot e^{\chi}+c\,,\ c\in R.$

ii) Η παράσταση $3\chi^2\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\chi^3\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)$ πρέπει να έχει προκύψει

από το γινόμενο $\chi^3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι :

$$\left(\chi^3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left(\chi^3\right)'\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\chi^3\left(\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)' =$$

$$3\chi^2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\chi^3\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{άρα}$$

$$\int\left(3\chi^2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\chi^3\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\chi = \int\left(\chi^3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)' d\chi \quad \text{άρα}$$

$$\int\left(3\chi^2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)-\chi^3\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\chi = \chi^3\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+c\ ,\ c\in R.$$

iii) Η παράσταση $\frac{\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}$ πρέπει να έχει προκύψει

από το πηλίκο $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}$, ***οπότε γράφεις :*** **Παρατηρώ** ότι :

$$\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}\right)' = \frac{\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)'\cdot e^{\chi}-\sigma\upsilon\nu^2\chi\left(e^{\chi}\right)'}{\left(e^{\chi}\right)^2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\chi\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)'\cdot e^{\chi}-\sigma\upsilon\nu^2\chi\cdot e^{\chi}}{e^{2\chi}} =$$

$$\frac{\left(-2\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)e^{\chi}}{e^{2\chi}} = -\frac{\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{2\chi}} \quad \text{άρα}$$

$$\int\frac{\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}d\chi = -\int\frac{-2\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}d\chi = -\int\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}\right)' d\chi \quad \text{άρα}$$

$$\int\frac{\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}d\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{e^{\chi}}+c\,,\ c\in R$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iv) Η παράσταση $\dfrac{4\chi^3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi^4\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$ πρέπει να έχει προκύψει

από το πηλίκο $\dfrac{\chi^4}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, ***οπότε γράφεις :*** **Παρατηρώ** ότι :

$$\left(\frac{\chi^4}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)'=\frac{\left(\chi^4\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\chi^4\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)'}{\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)^2}=\frac{4\chi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\chi^4\left(-\eta\mu\chi\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}=$$

$$\frac{4\chi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+\chi^4\cdot\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}\quad\text{άρα}$$

$$\int\frac{4\chi^3\eta\mu\chi+\chi^4\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi=\int\left(\frac{\chi^4}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)'d\chi=\frac{\chi^4}{\sigma\upsilon\nu\chi}+c\,,\ c\in R.$$

Δες περίπτωση **5, 6, 7, 8, 9, 10**

2. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int\sqrt[\nu]{\alpha\chi+\beta}\,d\chi$ **ii)** $\int\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi$

iii) $\int\left(\eta\mu^2\chi-\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)d\chi$ **iv)** $\int\dfrac{\eta\mu^3\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{\eta\mu^3\chi}}d\chi$.

Απάντηση :

i) ***1ος τρόπος :*** Μπορείς να κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u=\alpha\chi+\beta$

άρα $du=\left(\alpha\chi+\beta\right)'d\chi=\alpha\,d\chi\ \Leftrightarrow\ d\chi=\dfrac{du}{\alpha}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int\sqrt[\nu]{\alpha\chi+\beta}\,d\chi=\int\sqrt[\nu]{u}\,\dfrac{du}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\int u^{\frac{1}{\nu}}du=$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{u^{\frac{1}{\nu}+1}}{\frac{1}{\nu}+1}+c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{u^{\frac{\nu+1}{\nu}}}{\frac{\nu+1}{\nu}}+c=\frac{\nu}{\alpha\left(\nu+1\right)}u^{\frac{\nu+1}{\nu}}+c=\frac{\nu}{\alpha\left(\nu+1\right)}\left(\alpha\chi+\beta\right)^{\frac{\nu+1}{\nu}}+c$$

2ος τρόπος : Μπορείς να κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u=\sqrt[\nu]{\alpha\chi+\beta}$

Άρα $\alpha\chi+\beta=u^{\nu} \Leftrightarrow \alpha\chi=u^{\nu}-\beta \Leftrightarrow \chi=\dfrac{u^{\nu}-\beta}{\alpha}$ $\boxed{d\chi=\left(\dfrac{u^{\nu}-\beta}{\alpha}\right)' du=\dfrac{\nu\cdot u^{\nu-1}}{\alpha}du}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \sqrt[\nu]{\alpha\chi+\beta}\,d\chi=\int u\frac{\nu\cdot u^{\nu-1}}{\alpha}du=\frac{\nu}{\alpha}\int u^{\nu}\,du=\frac{\nu}{\alpha}\frac{u^{\nu+1}}{\nu+1}+c=\frac{\nu}{\alpha(\nu+1)}u^{\nu+1}+c=$$

$$\frac{\nu}{\alpha(\nu+1)}\left(\sqrt[\nu]{\alpha\chi+\beta}\right)^{\nu+1}=\frac{\nu}{\alpha(\nu+1)}(\alpha\chi+\beta)^{\frac{\nu+1}{\nu}}$$

ii) ***1ος τρόπος :*** Η παράσταση $\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu^{\frac{5}{3}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από την $\eta\mu^{\frac{5}{3}+1}\chi=\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi\right)'=\dfrac{8}{3}\eta\mu^{\frac{8}{3}-1}\chi\cdot(\eta\mu\chi)'=\dfrac{8}{3}\eta\mu^{\frac{5}{3}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

$$\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu^{\frac{5}{3}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\left(\frac{3\cdot\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi}{8}\right)' \quad \text{άρα}$$

$$\int\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\int\left(\frac{3\cdot\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi}{8}\right)'d\chi=\frac{3\cdot\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi}{8}+c,\ c\in R.$$

2ος τρόπος : Μπορείς να κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u=\eta\mu\chi$ άρα

$\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}=\sqrt[3]{u^5}=u^{\frac{5}{3}}$ και $du=(\eta\mu\chi)'d\chi=\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi \Leftrightarrow \boxed{d\chi=\dfrac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται : $\int\sqrt[3]{\eta\mu^5\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\int u^{\frac{5}{3}}\sigma\upsilon\nu\chi\dfrac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

$$=\int u^{\frac{5}{3}}du=\frac{u^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1}+c=\frac{u^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+c=\frac{3\cdot u^{\frac{8}{3}}}{8}+c=\frac{3\cdot\eta\mu^{\frac{8}{3}}\chi}{8}+c$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) ***1ος τρόπος :*** Η παράσταση $\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = -\sigma\upsilon\nu 2\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από την $\eta\mu 2\chi$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $(\eta\mu 2\chi)' = 2\cdot\sigma\upsilon\nu 2\chi \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu 2\chi = \left(-\frac{\eta\mu 2\chi}{2}\right)'$ άρα

$$\int\left(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)d\chi = \int\left(-\frac{\eta\mu 2\chi}{2}\right)' d\chi = -\frac{\eta\mu 2\chi}{2} + c\,,\ c\in R.$$

2ος τρόπος : Είναι $\int\left(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)d\chi = \int\left(-\sigma\upsilon\nu 2\chi\right)d\chi = -\int \sigma\upsilon\nu 2\chi\, d\chi =$

$$-\frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2\chi\cdot(2\chi)'\, d\chi = -\frac{1}{2}\int(\eta\mu 2\chi)'\, d\chi = -\frac{\eta\mu 2\chi}{2} + c\,,\ c\in R.$$

3ος τρόπος : Είναι $\int\left(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)d\chi = \int(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\,d\chi$

Μπορείς να κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$ άρα

$$du = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)'\, d\chi = (\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)\,d\chi \Leftrightarrow \boxed{d\chi = \frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi}}.$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int\left(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)d\chi = \int(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\,d\chi$$

$$= \int u(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)\frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi} = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + c_1 = -\frac{(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2}{2} + c_1$$

$$= -\frac{\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}{2} + c_1 = -\frac{\eta\mu 2\chi}{2} + c_1 - \frac{1}{2} = -\frac{\eta\mu 2\chi}{2} + c\,.$$

Παρατήρηση 1: Αρχικά δες ότι στον τρίτο τρόπο φαίνεται να «βγαίνει» διαφορετικό αποτέλεσμα, από ότι στους δυο πρώτους, όμως στην πραγματικότητα δεν είναι διαφορετικό, με την έννοια ότι τα δυο αποτελέσματα διαφέρουν κατά την σταθερά, όμως σου θυμίζω ότι ***Αόριστο Ολοκλήρωμα*** είναι ***σύνολο συναρτήσεων*** που ***διαφέρουν*** μεταξύ τους ***κατά*** μια ***σταθερά***.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iv) Είναι $\int \frac{\eta\mu^3\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{\eta\mu^3\chi}}d\chi = \int \frac{\eta\mu^3\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^{\frac{3}{2}}\chi}d\chi = \int \eta\mu^3\chi\cdot\eta\mu^{-\frac{3}{2}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi =$

$\int \eta\mu^{\frac{3}{2}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi$. Κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u = \eta\mu\chi$ άρα

$du = (\eta\mu\chi)'\, d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi \Leftrightarrow \boxed{d\chi = \frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}}$.

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{\eta\mu^3\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{\eta\mu^3\chi}}d\chi = \int \eta\mu^{\frac{3}{2}}\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi = \int u^{\frac{3}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \int u^{\frac{3}{2}}du =$$

$$\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + c = \frac{2\eta\mu\chi^{\frac{5}{2}}}{5} + c,\ c \in R.$$

3. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int \frac{1}{\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi$ **ii)** $\int \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 2\chi + 1}d\chi$

Δες περίπτωση **11, 12**

Παρατήρηση: Οι ασκήσεις αυτές μπήκαν για να σε «αναγκάσουν» να θυμηθείς μερικούς τύπους τις τριγωνομετρίας όπως η βασική ταυτότητα : $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$, τους τύπους του διπλασίου τόξου κλπ.

Απάντηση :

i) Η παράσταση $\int \frac{1}{\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi = \int \frac{\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi =$

$$\int \frac{\eta\mu^2\chi}{\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi + \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi + \int \frac{1}{\eta\mu^2\chi}d\chi =$$

$\varepsilon\varphi\chi - \sigma\varphi\chi + c,\ c \in R.$

ii) Είναι : $\int \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 2\chi + 1}d\chi = \int \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 + 1}d\chi = \int \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi =$

$= \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}d\chi = \varepsilon\varphi\chi + c,\ c \in R.$

Λιβαδειά

4. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int 7^{3\chi-2}\,d\chi$ **ii)** $\int 5^{\chi^2+3\chi+2}(2\chi+3)\,d\chi$

iii) $\int \frac{1}{\chi(\ln\chi+2)}\,d\chi$ **iv)** $\int \frac{1}{\chi\sqrt{\ln\chi}}\,d\chi$, $\chi>1$.

Δες περίπτωση **6, 16, 17**

Απάντηση :

i) Κάνεις αλλαγή μεταβλητής, θέτεις $u = 3\chi - 2$ άρα $du = (3\chi-2)'\,d\chi = 3\,d\chi$.

Άρα $d\chi = \frac{du}{3}$ Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int 7^{3\chi-2}\,d\chi = \int 7^{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int 7^{u}\,du = \frac{1}{3}\frac{7^{u}}{\ln 7}$$ (Σύμφωνα με τον πίνακα ολοκληρωμάτων), άρα $\int 7^{3\chi-2}\,d\chi = \frac{7^{3\chi-2}}{3\cdot\ln 7} + c$, $c \in R$.

ii) Για να βρεις το $\int 5^{\chi^2+3\chi+2}(2\chi+3)\,d\chi$ θέτεις $u = \chi^2+3\chi+2$ άρα

$$du = (\chi^2+3\chi+2)'\,d\chi = (2\chi+3)\,d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{2\chi+3}$$ άρα

$$\int 5^{\chi^2+3\chi+2}(2\chi+3)\,d\chi = \int 5^{u}(2\chi+3)\frac{du}{2\chi+3} = \int 5^{u}\,du = \frac{5^{u}}{\ln 5}.$$

Άρα $\int 5^{\chi^2+3\chi+2}(2\chi+3)\,d\chi = \frac{5^{\chi^2+3\chi+2}}{\ln 5} + c$, $c \in R$.

iii) Κάνεις αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $u = \ln\chi + 2$ άρα

$du = (\ln\chi+2)'\,d\chi = \frac{1}{\chi}d\chi \Leftrightarrow d\chi = \chi\cdot du$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{1}{\chi(\ln\chi+2)}\,d\chi = \int \frac{1}{\chi\cdot u}\chi\cdot du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c,$$ άρα

$$\int \frac{1}{\chi(\ln\chi+2)}\,d\chi = \ln|\ln\chi+2| + c,\ c \in R.$$

iv) Κάνεις αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $u = \ell n\chi$ άρα $du = (\ln\chi)'\,d\chi = \frac{1}{\chi}d\chi$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\Leftrightarrow$ $d\chi = \chi \cdot du$. Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{1}{\chi\sqrt{\ln\chi}}d\chi = \int \frac{1}{\chi\cdot\sqrt{u}}\chi\cdot du = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c .$$

Άρα $\int \frac{1}{\chi\sqrt{\ln\chi}}d\chi = 2(\ell n\chi)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{\ell n\chi} + c$, $c \in R$.

5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα. $\int \frac{3\chi-3}{2\chi^2+\chi-1}d\chi$

Δες περίπτωση **21**

Απάντηση : Οι ρίζες του $2\chi^2+\chi-1$ είναι $\chi_1 = \frac{1}{2}$ και $\chi_2 = -1$.

Οπότε $2\chi^2+\chi-1 = 2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)(\chi+1) = (2\chi-1)(\chi+1)$ άρα

$\frac{3\chi-3}{2\chi^2+\chi-1} = \frac{3\chi-3}{(2\chi-1)(\chi+1)}$, βρίσκεις τους αριθμούς : α_1 , α_2 από την

ισότητα $\frac{3\chi-3}{(2\chi-1)(\chi+1)} = \frac{\alpha_1}{2\chi-1} + \frac{\alpha_2}{\chi+1} = \frac{\alpha_1\cdot\chi+\alpha_1+2\alpha_2\cdot\chi-\alpha_2}{(2\chi-1)(\chi+1)} \Leftrightarrow$

$$\frac{3\chi-3}{(2\chi-1)(\chi+1)} = \frac{(\alpha_1+2\alpha_2)\chi+\alpha_1-\alpha_2}{(2\chi-1)(\chi+1)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=3\\ \alpha_1-\alpha_2=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=3\\ \alpha_2=\alpha_1+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_1+6=3\\ \alpha_2=\alpha_1+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\alpha_1=-3\\ \alpha_2=\alpha_1+3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases}\alpha_1=-1\\ \alpha_2=2\end{cases}$. Άρα $\int \frac{3\chi-3}{2\chi^2+\chi-1}d\chi = \int\left(-\frac{1}{2\chi-1}+\frac{2}{\chi+1}\right)d\chi =$

$$-\int\frac{1}{2\chi-1}d\chi + \int\frac{2}{\chi+1}d\chi = -\int\frac{1}{2\chi-1}d\chi + 2\int\frac{1}{\chi+1}d\chi =$$

$-\ln|2\chi-1| + 2\ln|\chi+1|$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

Δες περίπτωση **22, 23, 24**

i) $\int \frac{e^{\chi}}{e^{\chi}+2}d\chi$ **ii)** $\int \frac{e^{\chi}}{\left(e^{\chi}+1\right)\ln\left(e^{\chi}+1\right)}d\chi$

iii) $\int \frac{\left(3e^{2\chi}+2\right)e^{2\chi}}{e^{2\chi}+1}d\chi$ **iv)** $\int \frac{e^{\chi}+1}{e^{2\chi}+e^{3\chi}}d\chi$.

Απάντηση :

i) Θέτεις $u=e^{\chi} \Leftrightarrow du=\left(e^{\chi}\right)' d\chi = e^{\chi}d\chi = u d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$ άρα

$$\int \frac{e^{\chi}}{e^{\chi}+2}d\chi = \int \frac{u}{u+2}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{u+2} = \ln\left|u+2\right|+c \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{e^{\chi}}{e^{\chi}+2}d\chi = \ln\left|e^{\chi}+2\right|+c,\ c\in R$$

ii) Θέτεις $u=e^{\chi} \Leftrightarrow du=\left(e^{\chi}\right)' d\chi = e^{\chi}d\chi = u d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$ άρα

$$\int \frac{e^{\chi}}{\left(e^{\chi}+1\right)\ln\left(e^{\chi}+1\right)}d\chi = \int \frac{u}{(u+1)\ln(u+1)}\frac{du}{u} =$$

$$\int \frac{du}{(u+1)\ln(u+1)} = \int \frac{1}{(u+1)}\frac{du}{\ln(u+1)} = \int \left[\ln(u+1)\right]'\frac{du}{\ln(u+1)} =$$

$$\ln\left|\ln\left|u+1\right|\right|+c \Leftrightarrow \int \frac{e^{\chi}}{\left(e^{\chi}+1\right)\ln\left(e^{\chi}+1\right)}d\chi = \ln\left|\ln\left|e^{\chi}+1\right|\right|+c,\ c\in R.$$

επειδή $e^{\chi}+1>1$ άρα $\ln\left|e^{\chi}+1\right| = \ln\left(e^{\chi}+1\right)>0$ άρα

$$\int \frac{e^{\chi}}{\left(e^{\chi}+1\right)\ln\left(e^{\chi}+1\right)}d\chi = \ln\left(\ln\left(e^{\chi}+1\right)\right)+c,\ c\in R.$$

iii) Θέτεις $u=e^{2\chi} \Leftrightarrow du=\left(e^{2\chi}\right)' d\chi = 2e^{2\chi}d\chi = 2u\cdot d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{2u}$ άρα

$$\int \frac{\left(3e^{2\chi}+2\right)e^{2\chi}}{e^{2\chi}+1}d\chi = \int \frac{(3u+2)u}{u+1}\frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int \frac{3u+2}{u+1}du =$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{1}{2}\int\frac{3u+3-1}{u+1}du = \frac{1}{2}\int\frac{3(u+1)}{u+1}du - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}du =$$

$$\frac{3}{2}\int 1\cdot du - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}du = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\ln|u+1| + c \text{ άρα}$$

$$\int\frac{\left(3e^{2\chi}+2\right)e^{2\chi}}{e^{2\chi}+1}d\chi = \frac{3}{2}e^{2\chi} - \frac{1}{2}\ln\left|e^{2\chi}+1\right| + c,\ c\in R.$$

iv) Θέτεις $u = e^{\chi} \Leftrightarrow du = \left(e^{\chi}\right)' d\chi = e^{\chi}d\chi = u d\chi \Leftrightarrow d\chi = \frac{du}{u}$ άρα

$$\int\frac{e^{\chi}+1}{e^{2\chi}+e^{3\chi}}d\chi = \int\frac{e^{\chi}+1}{\left(e^{\chi}\right)^2+\left(e^{\chi}\right)^3}d\chi = \int\frac{u+1}{u^2+u^3}\frac{du}{u} =$$

$$\int\frac{u+1}{u^2(1+u)}\frac{du}{u} = \int\frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2}u^{-2} \text{ άρα}$$

$$\int\frac{e^{\chi}+1}{e^{2\chi}+e^{3\chi}}d\chi = -\frac{1}{2}\left(e^{\chi}\right)^{-2} = -\frac{1}{2}e^{-2\chi} + c,\ c\in R.$$

Δες περίπτωση **25**

7. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi-4}d\chi$ **ii)** $\int\frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\eta\mu\chi}\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi$

iii) $\int\frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}d\chi$ **iv)** $\int\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-2}d\chi$.

Απάντηση :

i) ***Αντικαθιστάς*** το **ημχ** με **– ημχ**, και επειδή η παράσταση γίνεται αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε, σύμφωνα με την περίπτωση **25** ο μετασχηματισμός είναι : **u = συνχ**

άρα $du = (\sigma\upsilon\nu\chi)' d\chi = -\eta\mu\chi\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = -\frac{du}{\eta\mu\chi}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi-4}d\chi = \int \frac{\eta\mu\chi}{u^2-4}\left(-\frac{du}{\eta\mu\chi}\right) = -\int \frac{du}{u^2-4}$$, βρίσκεις τους α_1 , α_2

από την ισότητα :

$$\frac{1}{u^2-4} = \frac{1}{(u+2)(u-2)} = \frac{\alpha_1}{u+2} + \frac{\alpha_2}{u-2} = \frac{\alpha_1\cdot u - 2\alpha_1 + \alpha_2\cdot u + 2\alpha_2}{(u+2)(u-2)}$$

άρα $\dfrac{1}{(u+2)(u-2)} = \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot u - 2(\alpha_1-\alpha_2)}{(u+2)(u-2)}$ επομένως

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ -2(\alpha_1-\alpha_2)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\alpha_2\\ -2(-2\alpha_2)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\alpha_2\\ \alpha_2=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=-\dfrac{1}{4}\\ \alpha_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$ άρα

$$-\int \frac{du}{u^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+2} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u-2} = \frac{1}{4}\ln|u+2| - \frac{1}{4}\ln|u-2| + c$$ άρα

$$\int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi-4}d\chi = \frac{1}{4}\ln|\sigma\upsilon\nu\chi+2| - \frac{1}{4}\ln|\sigma\upsilon\nu\chi-2| + c\,,\ c\in R.$$

ii) ***Αντικαθιστάς*** το **συνχ** με **– συνχ**, και επειδή η παράσταση γίνεται αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε, σύμφωνα με την περίπτωση **25** ο μετασχηματισμός είναι : **u = ημχ**

άρα $du = (\eta\mu\chi)'\,d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi \Leftrightarrow d\chi = \dfrac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\eta\mu\chi}\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi = \int \frac{1+1-\eta\mu^2\chi}{1+u}\sigma\upsilon\nu\chi\frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \int \frac{2-u^2}{1+u}du =$$

$$\int \frac{1-u^2+1}{1+u}du = \int \frac{(1-u)(1+u)}{1+u}du + \int \frac{1}{1+u}du =$$

$$\int (1-u)du + \ln|1+u| + c = u - \frac{u^2}{2} + \ln|1+u| + c$$ άρα

$$\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\eta\mu\chi}\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi = \eta\mu\chi - \frac{\eta\mu^2\chi}{2} + \ln|1+\eta\mu\chi| + c\,,\ c\in R.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) ***Αντικαθιστάς*** το **συνχ** με **– συνχ**, και επειδή η παράσταση γίνεται αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε, σύμφωνα με την περίπτωση **25** ο μετασχηματισμός είναι : **u = ημχ**

άρα $du = (\eta\mu\chi)' d\chi = \sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = \dfrac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = \int \frac{1+u}{\sigma\upsilon\nu\chi}\frac{du}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \int \frac{1+u}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} du = \int \frac{1+u}{1-\eta\mu^2\chi} du = \int \frac{1+u}{1-u^2} du =$$

$$\int \frac{1+u}{(1-u)(1+u)} du = \int \frac{1}{1-u} du = \ln|1-u| + c \text{ άρα}$$

$$\int \frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = \ln|1-\eta\mu\chi| + c,\ c \in R.$$

iv) ***Αντικαθιστάς*** το **ημχ** με **– ημχ**, και επειδή η παράσταση γίνεται αντίθετη, από αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε, σύμφωνα με την περίπτωση **25** ο μετασχηματισμός είναι : **u = συνχ**

άρα $du = (\sigma\upsilon\nu\chi)' d\chi = -\eta\mu\chi\, d\chi \Leftrightarrow d\chi = -\dfrac{du}{\eta\mu\chi}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 2} d\chi = \int \frac{\eta\mu\chi}{u^2+u-2}\left(-\frac{du}{\eta\mu\chi}\right) = -\int \frac{du}{u^2+u-2},$$

βρίσκεις τους α_1, α_2 από την ισότητα :

$$\frac{1}{u^2+u-2} = \frac{1}{(u+1)(u-2)} = \frac{\alpha_1}{u+1} + \frac{\alpha_2}{u-2} = \frac{\alpha_1 \cdot u - 2\alpha_1 + \alpha_2 \cdot u + \alpha_2}{(u+1)(u-2)}$$

άρα $\dfrac{1}{(u+1)(u-2)} = \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)\cdot u - 2\alpha_1 + \alpha_2}{(u+2)(u-2)}$ επομένως

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -2(-\alpha_2) + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ άρα}$$

$$-\int \frac{du}{u^2+u-2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-2} = \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{3}\ln|u-2| + c \text{ άρα}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-2}d\chi = \frac{1}{3}\ln\left|\sigma\upsilon\nu\chi+1\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\sigma\upsilon\nu\chi-2\right| + c,\ c\in R.$$

Δες περίπτωση **26**

8. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int (3\chi-1)(\chi+2)^6\,d\chi$ **ii)** $\int \frac{2\chi-1}{(\chi-2)^6}d\chi$

iii) $\int (\chi+3)^5(3\chi-2)d\chi$ **iv)** $\int (\chi-1)^{-5}(\chi+1)d\chi$.

Απάντηση :

i) Θέτεις $u=\chi+2$ άρα $du=(\chi+2)'\,d\chi$ άρα $du=d\chi$ και

$u=\chi+2 \Leftrightarrow \chi=u-2 \Leftrightarrow 3\chi-1=3(u-2)-1=3u-7$ άρα

$$\int (3\chi-1)(\chi+2)^6\,d\chi = \int (3u-7)u^6\,du = \int \left(3u^7-7u^6\right)du =$$

$$3\int u^7\,du - 7\int u^6\,du = 3\frac{u^{7+1}}{7+1} - 7\frac{u^{6+1}}{6+1} = \frac{3}{8}u^8 - u^7 + c \text{ άρα}$$

$$\int (3\chi-1)(\chi+2)^6\,d\chi = \frac{3}{8}(\chi+2)^8 - (\chi+2)^7 + c,\ c\in R.$$

ii) Είναι $\int \frac{2\chi-1}{(\chi-2)^6}d\chi = \int (2\chi-1)(\chi-2)^{-6}\,d\chi$, και $1<\left|-6\right|$ οπότε θέτεις

$u=\chi-2$ άρα $du=(\chi-2)'\,d\chi$ άρα $du=d\chi$, άρα

$u=\chi-2 \Leftrightarrow \chi=u+2 \Leftrightarrow 2\chi-1=2(u+2)-1=2u+3$ άρα

$$\int \frac{2\chi-1}{(\chi-2)^6}d\chi = \int (2\chi-1)(\chi-2)^{-6}\,d\chi = \int (2u+3)u^{-6}\,du =$$

$$\int \left(2u^{-5}+3u^{-6}\right)du = 2\int u^{-5}\,du + 3\int u^{-6}\,du = 2\frac{u^{-5+1}}{-5+1} + 3\frac{u^{-6+1}}{-6+1} + c =$$

$$-\frac{1}{2}u^{-4} - \frac{3}{5}u^{-5} + c \text{ άρα}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \frac{2\chi-1}{(\chi-2)^6}d\chi = -\frac{1}{2}(\chi-2)^{-4}-\frac{3}{5}(\chi-2)^{-5}+c\,,\ c\in R.$$

iii) Θέτεις $u=\chi+3$ άρα $du=(\chi+3)'d\chi$ άρα $du=d\chi$ και

$u=\chi+3 \Leftrightarrow \chi=u-3 \Leftrightarrow 3\chi-2=3(u-3)-2=3u-11$ άρα

$$\int(\chi+3)^5(3\chi-2)d\chi = \int u^5(3u-11)du = \int\left(3u^6-11u^5\right)du =$$

$$3\int u^6\,du-11\int u^5\,du = 3\frac{u^{6+1}}{6+1}-11\frac{u^{5+1}}{5+1} = \frac{3}{7}u^7-\frac{11}{6}u^6+c \text{ άρα}$$

$$\int(\chi+3)^5(3\chi-2)d\chi = \frac{3}{7}(\chi+3)^7-\frac{11}{6}(\chi+3)^6+c\,,\ c\in R.$$

iv) Είναι $|-5|>1$ οπότε θέτεις $u=\chi-1$ άρα $du=(\chi-1)'d\chi$ άρα $du=d\chi$,

άρα $u=\chi-1 \Leftrightarrow \chi=u+1 \Leftrightarrow \chi+1=u+2$ άρα

$$\int(\chi-1)^{-5}(\chi+1)d\chi = \int u^{-5}(u+2)du = \int\left(u^{-4}+2u^{-5}\right)du =$$

$$\int u^{-4}\,du+2\int u^{-5}\,du = \frac{u^{-4+1}}{-4+1}+2\frac{u^{-5+1}}{-5+1}+c = -\frac{1}{3}u^{-3}-\frac{1}{2}u^{-4}+c \text{ άρα}$$

$$\int(\chi-1)^{-5}(\chi+1)d\chi = -\frac{1}{3}(\chi-1)^{-3}-\frac{1}{2}(\chi-1)^{-4}+c\,,\ c\in R.$$

Δες περίπτωση **27**

9. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\chi}+1}{\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{\chi}}d\chi$ **ii)** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{\chi+2}}{\sqrt[3]{\chi+2}+\sqrt{\chi+2}}d\chi$

iii) $\displaystyle\int\frac{\chi\sqrt{\chi}}{1+\sqrt{\chi}}d\chi$ **iv)** $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{\chi+1}-1}{\sqrt[3]{\chi+1}+\sqrt{\chi+1}}d\chi$.

Απάντηση :

i) Βρίσκεις το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 2 και 3, που είναι το 6 και

θέτεις $u=\sqrt[6]{\chi} \Leftrightarrow \chi=u^6 \Leftrightarrow d\chi=\left(u^6\right)'du \Leftrightarrow d\chi=6u^5du$ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\chi = u^6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\chi} = \sqrt{u^6} = u^3 \\ \sqrt[3]{\chi} = \sqrt[3]{u^6} = u^2 \end{cases}, \text{ επομένως είναι :}$$

$$\int \frac{\sqrt{\chi}+1}{\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{\chi}}d\chi = \int \frac{u^3+1}{u^2+u^3}6u^5du = 6\int \frac{u^5(u^3+1)}{u^2(1+u)}du = 6\int u^5\left(1-u+u^2\right)du$$

$$= 6\int\left(u^5-u^6+u^7\right)du = \frac{6u^6}{6}-\frac{6u^7}{7}+\frac{6u^8}{8}+c \quad \text{άρα}$$

$$\int \frac{\sqrt{\chi}+1}{\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{\chi}}d\chi = \left(\sqrt[6]{\chi}\right)^6-\frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{\chi}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[6]{\chi}\right)^8+c = \chi-\frac{6}{7}\chi^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{4}\chi^{\frac{8}{6}}+c$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\sqrt{\chi}+1}{\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{\chi}}d\chi = \chi-\frac{6}{7}\chi^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{4}\chi^{\frac{8}{6}}+c\,,\ c\in R.$$

ii) Βρίσκεις το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 2 και 3, που είναι το 6 και

θέτεις $u=\sqrt[6]{\chi+2} \Leftrightarrow \chi+2=u^6 \Leftrightarrow \chi=u^6-2 \Leftrightarrow d\chi=\left(u^6\right)'du \Leftrightarrow d\chi=6u^5du$

και $\chi+2=u^6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\chi+2}=\sqrt{u^6}=u^3 \\ \sqrt[3]{\chi+2}=\sqrt[3]{u^6}=u^2 \end{cases}$, επομένως είναι :

$$\int \frac{\sqrt[3]{\chi+2}}{\sqrt[3]{\chi+2}+\sqrt{\chi+2}}d\chi = \int \frac{u^2}{u^2+u^3}6u^5du = 6\int \frac{u^2}{u^2(1+u)}du = 6\int \frac{1}{1+u}du =$$

$$6\cdot\ln\left|u+1\right|+c = 6\cdot\ln\left|\sqrt[6]{\chi+2}+1\right|+c = 6\cdot\ln\left|\sqrt[6]{\chi+2}+1\right|+c\,,\ c\in R.$$

iii) Είναι προφανές, επειδή είναι μια η ρίζα, ότι θέτεις

$u=\sqrt{\chi} \Leftrightarrow \chi=u^2 \Leftrightarrow d\chi=\left(u^2\right)'du \Leftrightarrow d\chi=2udu$ και

$\chi=u^2 \Leftrightarrow \sqrt{\chi}=\sqrt{u^2}=u$, επομένως είναι :

$$\int \frac{\chi\sqrt{\chi}}{1+\sqrt{\chi}}d\chi = \int \frac{u^2u}{1+u}2udu = 2\int \frac{u^4}{1+u}du = 2\int \frac{u^4-1+1}{1+u}du =$$

$$2\int \frac{u^4-1}{1+u}du+2\int \frac{1}{1+u}du = 2\int \frac{\left(u^2-1\right)\left(u^2+1\right)}{1+u}du+2\ln\left|u+1\right|+c =$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$2\int\frac{(u-1)(u+1)\left(u^2+1\right)}{1+u}du+2\ln|u+1|+c\ =$$

$$2\int(u-1)\left(u^2+1\right)du+2\ln|u+1|+c\ =\ 2\int\left(u^3+u-u^2-1\right)du+2\ln|u+1|+c$$

$$\frac{2u^4}{4}-\frac{2u^3}{3}+\frac{2u^2}{2}-2u+2\ln|u+1|+c=\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{3}u^3+u^2-2u+2\ln|u+1|+c$$

άρα $\displaystyle\int\frac{\chi\sqrt{\chi}}{1+\sqrt{\chi}}d\chi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\chi}\right)^4-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\chi}\right)^3+\left(\sqrt{\chi}\right)^2-2\sqrt{\chi}+2\ln\left|\sqrt{\chi}+1\right|+c\ \Leftrightarrow$

$$\int\frac{\chi\sqrt{\chi}}{1+\sqrt{\chi}}d\chi=\frac{1}{2}\chi^2-\frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}}+\chi-2\sqrt{\chi}+2\ln\left|\sqrt{\chi}+1\right|+c\ =$$

$$\frac{1}{2}\chi^2-\frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}}+\chi-2\sqrt{\chi}+2\ln\left(\sqrt{\chi}+1\right)+c\,,\ c\in R\ \text{αφού}\ \sqrt{\chi}+1>0\,.$$

iv) Βρίσκεις το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των 2 και 3, που είναι το 6

και θέτεις $u=\sqrt[6]{\chi+1}\Leftrightarrow\chi+1=u^6\Leftrightarrow\chi=u^6-1\Leftrightarrow d\chi=\left(u^6\right)'du$ άρα

$d\chi=6u^5du$ και $\chi+1=u^6\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\chi+1}=\sqrt{u^6}=u^3\\ \sqrt[3]{\chi+1}=\sqrt[3]{u^6}=u^2\end{cases}$, επομένως είναι :

$$\int\frac{\sqrt[3]{\chi+1}-1}{1+\sqrt{\chi+1}}d\chi\ =\ \int\frac{u^2-1}{u^2+u^3}6u^5du=6\int\frac{(u+1)(u-1)}{u^2(1+u)}du=6\int\frac{u-1}{u^2}du\ =$$

$$6\int\frac{1}{u}du-6\int\frac{1}{u^2}du\ =\ 6\cdot\ln|u|-6\int u^{-2}du+c\ =\ 6\cdot\ln|u|-6\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+c=$$

$$6\cdot\ln|u|+\frac{6}{u}+c\ =\ 6\cdot\ln\left|\sqrt[6]{\chi+1}\right|+\frac{6}{\sqrt[6]{\chi+1}}+c\ =\ 6\cdot\ln\sqrt[6]{\chi+1}+\frac{6}{\sqrt[6]{\chi+1}}+c\,,\ c\in R$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν έχεις ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int f(\chi)g'(\chi)d\chi$, όπου f, g, είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους, τότε μπορείς να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα με βάση την ισότητα :

$$\int f(\chi)g'(\chi)d\chi = f(\chi)g(\chi) - \int f'(\chi)g(\chi)d\chi,$$

όπως στις περιπτώσεις που ακολουθούν

Παρατήρηση Η μέθοδος εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα στο 2ο μέλος είναι πιο «εύκολο» από αυτό του 1ου μέλους

28. $\int e^{\chi}\cdot f(\chi)d\chi$. Κάνεις την αντικατάσταση $e^{\chi} = \left(e^{\chi}\right)'$ και εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση οπότε έχεις :

$$\int e^{\chi}\cdot f(\chi)d\chi = \int \left(e^{\chi}\right)' f(\chi)d\chi = e^{\chi}\cdot f(\chi) - \int e^{\chi}\cdot f'(\chi)d\chi,$$ στη συνέχεια υπολογίζεις το $\int e^{\chi}\cdot f'(\chi)d\chi$.

Γενίκευση 1 $\int e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\cdot f(\chi)d\chi$.

Είναι $\left(e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\right)' = e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\left(\alpha\cdot\chi+\beta\right)' = \alpha\cdot e^{\alpha\cdot\chi+\beta}$ άρα $e^{\alpha\cdot\chi+\beta} = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\right)'$ και

$$\int e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\cdot f(\chi)d\chi = \frac{1}{\alpha}\int \left(e^{\alpha\cdot\chi+\beta}\right)' f(\chi)d\chi = \cdots =$$

Γενίκευση 2 $\int e^{g(\chi)}\cdot g'(\chi)\cdot f(\chi)d\chi$. Είναι $e^{g(\chi)}\cdot g'(\chi) = \left(e^{g(\chi)}\right)'$ άρα

$$\int e^{g(\chi)}\cdot g'(\chi)\cdot f(\chi)d\chi = \int \left(e^{g(\chi)}\right)' f(\chi)d\chi = \cdots$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int e^{\chi}\chi^2\,d\chi$, **ii)** $\int e^{2\chi+3}\chi\,d\chi$,

iii) $\int e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)d\chi$, **iv)** $\int e^{\chi^2+3}\cdot 2\chi\left(\chi^2+1\right)d\chi$.

Απάντηση :

i) $\int e^{\chi}\chi^2\,d\chi = \int\left(e^{\chi}\right)'\chi^2 d\chi = e^{\chi}\cdot\chi^2 - \int e^{\chi}\left(\chi^2\right)'d\chi = e^{\chi}\cdot\chi^2 - 2\int e^{\chi}\cdot\chi\,d\chi$,

στη συνέχεια υπολογίζεις το $\int e^{\chi}\cdot\chi\,d\chi$ με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή :

$\int e^{\chi}\cdot\chi\,d\chi = \int\left(e^{\chi}\right)'\chi\,d\chi = e^{\chi}\cdot\chi - \int e^{\chi}\chi'd\chi = e^{\chi}\cdot\chi - \int e^{\chi}d\chi =$

$e^{\chi}\cdot\chi - \int\left(e^{\chi}\right)'d\chi =$ άρα $\int e^{\chi}\cdot\chi\,d\chi = e^{\chi}\cdot\chi - e^{\chi}$ άρα :

$$\int e^{\chi}\chi^2\,d\chi = e^{\chi}\cdot\chi^2 - 2\left(e^{\chi}\cdot\chi - e^{\chi}\right) + c = e^{\chi}\cdot\chi^2 - 2e^{\chi}\cdot\chi + 2e^{\chi} + c\,,\ c\in R$$

ii) Είναι $\left(e^{2\chi+3}\right)' = e^{2\chi+3}\left(2\chi+3\right)' = 2e^{2\chi+3}$ άρα $e^{2\chi+3} = \frac{1}{2}\left(e^{2\chi+3}\right)'$ και

$\int e^{2\chi+3}\chi\,d\chi = \frac{1}{2}\int\left(e^{2\chi+3}\right)'\chi d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\cdot\chi - \frac{1}{2}\int e^{2\chi+3}\chi'd\chi =$

$\frac{1}{2}e^{2\chi+3}\cdot\chi - \frac{1}{2}\int e^{2\chi+3}d\chi$, στη συνέχεια υπολογίζεις το

$\int e^{2\chi+3}d\chi = \frac{1}{2}\int\left(e^{2\chi+3}\right)'d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}$ άρα :

$$\int e^{2\chi+3}\chi\,d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\cdot\chi - \frac{1}{2}\int e^{2\chi+3}d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\cdot\chi - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2\chi+3} + c =$$

$$\frac{1}{4}e^{2\chi+3}\left(2\chi-1\right) + c\ ,\ c\in R.$$

iii) Είναι $\left(e^{2\chi+3}\right)' = e^{2\chi+3}\left(2\chi+3\right)' = 2e^{2\chi+3}$ άρα $e^{2\chi+3} = \frac{1}{2}\left(e^{2\chi+3}\right)'$ και

$\int e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)d\chi = \frac{1}{2}\int\left(e^{2\chi+3}\right)'\left(\chi^2+3\right)d\chi =$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)-\frac{1}{2}\int e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)'d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)-\frac{1}{2}2\int e^{2\chi+3}\cdot\chi\, d\chi$$

$\frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)-\int e^{2\chi+3}\cdot\chi\, d\chi$. Στη συνέχεια υπολογίζεις το

$\int e^{2\chi+3}\cdot\chi\, d\chi$ με τον ίδιο τρόπο (δες και περίπτωση **ii)** και είναι

$\int e^{2\chi+3}\chi\, d\chi = \frac{1}{4}e^{2\chi+3}(2\chi-1)$ οπότε

$$\int e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)-\int e^{2\chi+3}\cdot\chi\, d\chi =$$

$$\frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)-\frac{1}{4}e^{2\chi+3}(2\chi-1) = \frac{1}{4}e^{2\chi+3}\left(2\chi^2+3-2\chi+1\right)$$ άρα

$$\int e^{2\chi+3}\left(\chi^2+3\right)d\chi = \frac{1}{2}e^{2\chi+3}\left(\chi^2-\chi+2\right)+c,\ c\in R.$$

iv) Είναι $\left(e^{\chi^2+3}\right)' = e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+3\right)' = e^{\chi^2+3}\cdot 2\chi$ άρα

$$\int e^{\chi^2+3}\cdot 2\chi\left(\chi^2+1\right)d\chi = \int\left(e^{\chi^2+3}\right)'\left(\chi^2+1\right)d\chi =$$

$$e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+1\right)-\int e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+1\right)'d\chi = e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+1\right)-\int e^{\chi^2+3}\cdot 2\chi\, d\chi =$$

$$e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+1\right)-\int\left(e^{\chi^2+3}\right)'d\chi = e^{\chi^2+3}\left(\chi^2+1\right)-e^{\chi^2+3}$$ άρα

$$\int e^{\chi^2+3}\cdot 2\chi\left(\chi^2+1\right)d\chi = e^{\chi^2+3}\cdot\chi^2+c,\ c\in R.$$

29. $\int \eta\mu\chi\cdot f(\chi)d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int \eta\mu\chi\cdot f(\chi)d\chi = \int(-\sigma\upsilon\nu\chi)'\cdot f(\chi)d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi\cdot f(\chi)+\int\sigma\upsilon\nu\chi\cdot f'(\chi)d\chi.$$

Γενίκευση $\int \eta\mu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)d\chi$.

$$\left(\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)\right)' = -\eta\mu(\alpha\chi+\beta)(\alpha\chi+\beta)' = -\alpha\cdot\eta\mu(\alpha\chi+\beta)$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \eta\mu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)d\chi = \frac{1}{\alpha}\int(-\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta))' f(\chi)d\chi =$$

$$-\frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)+\frac{1}{\alpha}\int\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)\cdot f'(\chi)d\chi$$

30. $\int \sigma\upsilon\nu\chi\cdot f(\chi)d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις

$$\int \sigma\upsilon\nu\chi\cdot f(\chi)d\chi = \int(\eta\mu\chi)'\cdot f(\chi)d\chi = \eta\mu\chi\cdot f(\chi)-\int\eta\mu\chi\cdot f'(\chi)d\chi.$$

Γενίκευση $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)d\chi$.

$$(\eta\mu(\alpha\cdot\chi+\beta))' = \sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)(\alpha\cdot\chi+\beta)' = \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)$$

$$\int \sigma\upsilon\nu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)d\chi = \frac{1}{\alpha}\int(\eta\mu(\alpha\chi+\beta))' f(\chi)d\chi =$$

$$\frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha\chi+\beta)\cdot f(\chi)-\frac{1}{\alpha}\int\eta\mu(\alpha\chi+\beta)\cdot f'(\chi)d\chi$$

Παρατήρηση Στις περιπτώσεις **29** και **30** στο 2ο μέλος υπάρχει $f'(\chi)$, αυτό σημαίνει ότι αν το $f(\chi)$ είναι πολυώνυμο τότε ο βαθμός του αυτόματα γίνεται κατά 1 μικρότερος.

Παραδείγματα :

Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση τα ολοκληρώματα.

i) $\int \chi^2\eta\mu\chi\, d\chi$, **ii)** $\int \chi\eta\mu(2\chi+3)d\chi$,

iii) $\int \chi^2\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi$, **iv)** $\int \chi\sigma\upsilon\nu(2\chi+3)d\chi$.

Απάντηση :

i) Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int \chi^2\eta\mu\chi\, d\chi = \int \chi^2(-\sigma\upsilon\nu\chi)' d\chi = -\chi^2\sigma\upsilon\nu\chi+\int\sigma\upsilon\nu\chi(\chi^2)' d\chi =$$

$$-\chi^2\sigma\upsilon\nu\chi+2\int\chi\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi = -\chi^2\sigma\upsilon\nu\chi+2\int\chi(\eta\mu\chi)' d\chi =$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$-\chi^2\,\text{συν}\chi+2\chi\,\text{ημ}\chi-2\int\text{ημ}\chi\,(\chi)'\,d\chi\;=\;-\chi^2\,\text{συν}\chi+2\chi\,\text{ημ}\chi-2\int\text{ημ}\chi\,d\chi\;=$$

$$-\chi^2\,\text{συν}\chi+2\chi\,\text{ημ}\chi-2\int(-\text{συν}\chi)'\,d\chi\;\;\text{άρα}$$

$$\int\chi^2\,\text{ημ}\chi\,d\chi\;=\;-\chi^2\,\text{συν}\chi+2\chi\,\text{ημ}\chi+2\text{συν}\chi+c\,,\;c\in R.$$

ii) Είναι $\left(\text{συν}(2\chi+3)\right)'=-\text{ημ}(2\chi+3)(2\chi+3)'=-2\cdot\text{ημ}(2\chi+3)$.

Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int\chi\,\text{ημ}(2\chi+3)\,d\chi\;=\;\frac{1}{2}\int\chi\left(-\text{συν}(2\chi+3)\right)'\,d\chi\;=$$

$$-\frac{1}{2}\chi\,\text{συν}(2\chi+3)+\frac{1}{2}\int\text{συν}(2\chi+3)(\chi)'\,d\chi\;=$$

$$-\frac{1}{2}\chi\,\text{συν}(2\chi+3)+\frac{1}{2}\int\text{συν}(2\chi+3)\,d\chi\;=$$

$$-\frac{1}{2}\chi\,\text{συν}(2\chi+3)+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\left(\text{ημ}(2\chi+3)\right)'\,d\chi\;=$$

$$-\frac{1}{2}\chi\,\text{συν}(2\chi+3)+\frac{1}{4}\text{ημ}(2\chi+3)+c\,,\;c\in R.$$

iii) Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int\chi^2\text{συν}\chi\,d\chi=\int\chi^2(\text{ημ}\chi)'\,d\chi=\chi^2\,\text{ημ}\chi-\int\text{ημ}\chi\left(\chi^2\right)'\,d\chi\;=$$

$$\chi^2\,\text{ημ}\chi-2\int\chi\,\text{ημ}\chi\,d\chi\;=\;\chi^2\,\text{ημ}\chi-2\int\chi(-\text{συν}\chi)'\,d\chi\;=$$

$$\chi^2\,\text{ημ}\chi+2\chi\,\text{συν}\chi-2\int\text{συν}\chi(\chi)'\,d\chi\;=\;\chi^2\,\text{ημ}\chi+2\chi\,\text{συν}\chi-2\int\text{συν}\chi\,d\chi\;=$$

$$\chi^2\,\text{ημ}\chi+2\chi\,\text{συν}\chi-2\int(\text{ημ}\chi)'\,d\chi\;\;\text{άρα}$$

$$\int\chi^2\text{συν}\chi\,d\chi\;=\;\chi^2\,\text{ημ}\chi+2\chi\,\text{συν}\chi-2\text{ημ}\chi+c\,,\;c\in R.$$

iv) Είναι $\left(\text{ημ}(2\chi+3)\right)'=\text{συν}(2\chi+3)(2\chi+3)'=2\text{συν}(2\chi+3)$.

Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\int \chi\,\text{συν}(2\chi+3)\,d\chi = \frac{1}{2}\int \chi\left(\text{ημ}(2\chi+3)\right)'\,d\chi$$

$$\frac{1}{2}\chi\,\text{ημ}(2\chi+3)-\frac{1}{2}\int \text{ημ}(2\chi+3)(\chi)'\,d\chi =$$

$$\frac{1}{2}\chi\,\text{ημ}(2\chi+3)-\frac{1}{2}\int \text{ημ}(2\chi+3)\,d\chi =$$

$$\frac{\chi\,\text{ημ}(2\chi+3)}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int\left(-\text{συν}(2\chi+3)\right)'\,d\chi =$$

Άρα $\int \chi\,\text{συν}(2\chi+3)\,d\chi = \dfrac{\chi\,\text{ημ}(2\chi+3)}{2}+\dfrac{\text{συν}(2\chi+3)}{4}+c\,,\ c\in R.$

Πολλές φορές έχοντας να υπολογίσεις ένα ολοκλήρωμα $I=\int f(\chi)g(\chi)\,d\chi$, εφαρμόζοντας την κατά παράγοντες ολοκλήρωση καταλήγεις σε ισότητα της μορφής $I=\int f(\chi)g(\chi)\,d\chi = \cdots = \alpha\cdot I+\int h(\chi)\,d\chi$ όπου **α ≠ 1**, τότε αντιμετωπίζεις την τελευταία ισότητα ως **εξίσωση του I** οπότε

$I=\alpha\cdot I+\int h(\chi)\,d\chi \Leftrightarrow (1-\alpha)I=\int h(\chi)\,d\chi \Leftrightarrow I=\dfrac{1}{1-\alpha}\int h(\chi)\,d\chi$.

Αυτό συμβαίνει κυρίως όταν μέσα στο ολοκλήρωμα **συνυπάρχουν**, δυο από τα $\text{ημ}\chi$, $\text{συν}\chi$, e^{χ}. Στην περίπτωση που στο ολοκλήρωμα συνυπάρχει το e^{χ}, με το $\text{ημ}\chi$ ή με το $\text{συν}\chi$ τότε να προτιμάς να γράφεις το e^{χ} ως $\left(e^{\chi}\right)'$ όπως στις περιπτώσεις : **31** και **32** πιο κάτω

31. $\int e^{\chi}\text{ημ}\chi\,d\chi$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int e^{\chi}\text{ημ}\chi\,d\chi=\int\left(e^{\chi}\right)'\text{ημ}\chi\,d\chi=e^{\chi}\text{ημ}\chi-\int e^{\chi}(\text{ημ}\chi)'\,d\chi =$$

$$e^{\chi}\text{ημ}\chi-\int e^{\chi}\text{συν}\chi\,d\chi = e^{\chi}\text{ημ}\chi-\int\left(e^{\chi}\right)'\text{συν}\chi\,d\chi =$$

$$e^{\chi}\text{ημ}\chi-\left(e^{\chi}\text{συν}\chi-\int e^{\chi}(\text{συν}\chi)'\,d\chi\right)=e^{\chi}\text{ημ}\chi-\left(e^{\chi}\text{συν}\chi-\int e^{\chi}(-\text{ημ}\chi)\,d\chi\right)$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\Leftrightarrow \int e^{\chi}\eta\mu\chi\, d\chi = e^{\chi}\eta\mu\chi - \left(e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + \int e^{\chi}\eta\mu\chi\, d\chi\right) \Leftrightarrow$$

$$2\int e^{\chi}\eta\mu\chi\, d\chi = e^{\chi}\eta\mu\chi - e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \boxed{\int e^{\chi}\eta\mu\chi d\chi = \frac{e^{\chi}\eta\mu\chi - e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi}{2} + c}$$

Γενίκευση $\boxed{\int e^{\alpha\chi+\beta}\eta\mu\chi\, d\chi}$. Είναι

$$\int e^{\alpha\chi+\beta}\eta\mu\chi d\chi = \frac{1}{\alpha}\int\left(e^{\alpha\chi+\beta}\right)'\eta\mu\chi d\chi = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha\chi+\beta}\eta\mu\chi - \int e^{\alpha\chi+\beta}(\eta\mu\chi)'\, d\chi\right) = \cdots$$

32. $\boxed{\int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi}$. Εφαρμόζεις την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και έχεις :

$$\int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \int\left(e^{\chi}\right)'\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi - \int e^{\chi}(\sigma\upsilon\nu\chi)'\, d\chi =$$

$$e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + \int e^{\chi}\eta\mu\chi d\chi = e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + \int\left(e^{\chi}\right)'\eta\mu\chi d\chi =$$

$$e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + e^{\chi}\eta\mu\chi - \int e^{\chi}(\eta\mu\chi)'\, d\chi \Leftrightarrow$$

$$\int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + e^{\chi}\eta\mu\chi - \int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi \Leftrightarrow$$

$$2\int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + e^{\chi}\eta\mu\chi \Leftrightarrow \boxed{\int e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \frac{e^{\chi}\eta\mu\chi + e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi}{2} + c}.$$

Γενίκευση $\boxed{\int e^{\alpha\chi+\beta}\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi}$. Είναι

$$\int e^{\alpha\chi+\beta}\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi = \frac{1}{\alpha}\int\left(e^{\alpha\chi+\beta}\right)'\sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha\chi+\beta}\sigma\upsilon\nu\chi - \int e^{\alpha\chi+\beta}(\sigma\upsilon\nu\chi)'\, d\chi\right) = \cdots$$

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int e^{3\chi-1}\eta\mu\chi d\chi$.

Είναι $I = \int e^{3\chi-1}\eta\mu\chi d\chi = \frac{1}{3}\int\left(e^{3\chi-1}\right)'\eta\mu\chi d\chi =$

$$\frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\eta\mu\chi - \int e^{3\chi-1}(\eta\mu\chi)'\, d\chi\right) = \frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\eta\mu\chi - \int e^{3\chi-1}\sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi\right)$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όμως $\int e^{3\chi-1}\text{συν}\chi\, d\chi = \frac{1}{3}\int\left(e^{3\chi-1}\right)'\text{συν}\chi\, d\chi =$

$\frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\text{συν}\chi - \int e^{3\chi-1}(\text{συν}\chi)'\, d\chi\right) = \frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\text{συν}\chi - \int e^{3\chi-1}(-\text{ημ}\chi)\, d\chi\right) =$

$\frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\text{συν}\chi + \int e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi\, d\chi\right) = \frac{1}{3}e^{3\chi-1}\text{συν}\chi + \frac{1}{3}\cdot I$

Άρα $I = \int e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi d\chi = \frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi - \int e^{3\chi-1}\text{συν}\chi\, d\chi\right) =$

$\frac{1}{3}\left(e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi - \frac{1}{3}e^{3\chi-1}\text{συν}\chi - \frac{1}{3}\cdot I\right) = \frac{1}{3}e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi - \frac{1}{9}e^{3\chi-1}\text{συν}\chi - \frac{1}{9}\cdot I \Leftrightarrow$

$I + \frac{1}{9}I = \frac{10}{9}I = \frac{1}{3}e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi - \frac{1}{9}e^{3\chi-1}\text{συν}\chi \Leftrightarrow$

$$I = \frac{9}{10}\left(\frac{1}{3}e^{3\chi-1}\text{ημ}\chi - \frac{1}{9}e^{3\chi-1}\text{συν}\chi\right) + c,\ c \in R.$$

33. $\int f(\chi)\cdot\ln[g(\chi)]d\chi$. Βρίσκεις μια παράγουσα F της f και έχεις

$\int f(\chi)\cdot\ln g(\chi)d\chi = \int F'(\chi)\cdot\ln[g(\chi)]d\chi =$

$F(\chi)\cdot\ln g(\chi) - \int F(\chi)[\ln g(\chi)]'\, d\chi = F(\chi)\cdot\ln g(\chi) - \int\frac{F(\chi)g'(\chi)}{g(\chi)}d\chi = \cdots$.

Παράδειγμα :

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\chi^2\ln\chi\, d\chi$.

Είναι $\int\chi^2\ln\chi\, d\chi = \frac{1}{3}\int\left(\chi^3\right)'\ln\chi\, d\chi = \frac{1}{3}\left(\chi^3\ln\chi - \int\chi^3(\ln\chi)'\, d\chi\right) =$

$\frac{1}{3}\left(\chi^3\ln\chi - \int\chi^3\frac{1}{\chi}d\chi\right) = \frac{1}{3}\left(\chi^3\ln\chi - \int\chi^2\, d\chi\right) = \frac{1}{3}\left(\chi^3\ln\chi - \frac{1}{3}\chi^3\right) + c$ άρα

$\int\chi^2\ln\chi\, d\chi = \frac{1}{9}\chi^3(3\ln\chi - 1) + c,\ c \in R.$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

34. $\int f(\chi)d\chi$. Απλά γράφεις $\int f(\chi)d\chi = \int 1\cdot f(\chi)d\chi = \int (\chi)'\cdot f(\chi)d\chi \Leftrightarrow$

$\int f(\chi)d\chi = \chi\cdot f(\chi) - \int \chi\left[f(\chi)\right]' d\chi = \cdots$.

Κλασικό παράδειγμα Να βρείτε το $\int \ln\chi d\chi$.

$\int \ln\chi d\chi = \int 1\cdot\ln\chi d\chi = \int (\chi)'\ln\chi d\chi = \chi\cdot\ln\chi - \int \chi(\ln\chi)' d\chi = \chi\cdot\ln\chi - \int \chi\frac{1}{\chi}d\chi \Leftrightarrow$

$\chi\cdot\ln\chi - \int 1\cdot d\chi \Leftrightarrow \int \ln\chi d\chi = \chi\cdot\ln\chi - \chi + c$, $c \in R$.

Προβλήματα με την εύρεση της f

Τι κάνεις όταν ζητάει να βρεις την συνάρτηση f;

<u>Αρχικά πρέπει να ξέρεις ότι :</u> ***Τα προβλήματα*** που μπορεί να συναντήσεις και στα οποία θα σου ζητά να βρεις τον τύπο της f, χωρίζονται σε δυο κατηγορίες,

α. προβλήματα όπου **δίνεται** η f' $\left(\text{ή } f'', f''' = f^{(3)}\right)$ και η τιμή της f σε κάποιο χ_0 (ή κάποια χ_0) και

β. προβλήματα όπου **δίνεται** μια σχέση στην οποία υπάρχει ταυτόχρονα η f, η f' και η τιμή της f σε κάποιο χ_0 $\left[f(\chi_0) = \kappa\right]$.

Προσοχή Όταν η άσκηση λέει «***Να βρεθεί η συνάρτηση*** που $\cdots$ » πρέπει να βρίσκεις και το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης, αν όμως λέει «***Να βρεθεί ο τύπος*** της συνάρτησης που $\cdots$ » τότε δεν είναι απαραίτητο το Π Ο.

α. Στα προβλήματα όπου δίνεται η f' $\left[f'(\chi) = P(\chi)\right]$ $\left(\text{ή } f'', f''' = f^{(3)}\right)$ και η $f(\chi_0) = \kappa$ ξεκινάς από την ισότητα $f'(\chi) = P(\chi)$ και με ολοκλήρωση και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

στα δυο μέλη έχεις : $f'(\chi)=P(\chi) \Leftrightarrow \int f'(\chi)d\chi=\int P(\chi)d\chi=G(\chi)$ άρα

$f(\chi)=G(\chi)+c$, όπου $G(\chi)$ το ολοκλήρωμα της $P(\chi)$ και $c \in R$.

Από τη σχέση $f(\chi)=G(\chi)+c$ για $\chi=\chi_0$ βρίσκεις το c:

$f(\chi_0)=G(\chi_0)+c \Leftrightarrow \quad c=\kappa-G(\chi_0)$ άρα $f(\chi)=G(\chi)+\kappa-G(\chi_0)$

Παραδείγματα :

i) Να βρείτε τη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f'(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ και $f(9)=1$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(\chi)=3$, $f(1)=6$ και $f(0)=4$.

iii) Μια βιομηχανία όταν παράγει χ εξαρτήματα την εβδομάδα έχει οριακό κόστος $\chi^2+5\chi$ (χιλιάδες Ευρώ ανά μονάδα προϊόντος).

Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας, όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα, είναι 100 (χιλιάδες Ευρώ).

Απάντηση

i) Το πεδίο ορισμού δίνεται και είναι το $A=(0,+\infty)$ και $f'(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\chi}} \Leftrightarrow$

$\int f'(\chi)d\chi=\int \frac{1}{\sqrt{\chi}}d\chi \Leftrightarrow f(\chi)=2\int \frac{1}{2\sqrt{\chi}}d\chi=2\sqrt{\chi}+c$, άρα $f(\chi)=2\sqrt{\chi}+c$,

άρα $f(9)=1 \Rightarrow 2\sqrt{9}+c=1 \Leftrightarrow c=-6+1=-5$, άρα $f(\chi)=2\sqrt{\chi}-5$.

ii) Είναι $f''(\chi)=3$ άρα $\int f''(\chi)d\chi=\int 3d\chi=3\chi+c_1 \Leftrightarrow f'(\chi)=3\chi+c_1$ άρα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\int f'(\chi)d\chi = \int (3\chi + c_1)d\chi = 3\frac{\chi^2}{2} + c_1 \cdot \chi$ άρα $f(\chi) = 3\frac{\chi^2}{2} + c_1 \cdot \chi + c_2$, έτσι

$$\begin{cases} f(1) = 6 \\ f(0) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\frac{1^2}{2} + c_1 \cdot 1 + c_2 = 6 \\ 3\frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 6 \\ c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} c_1 = 6 - 3\frac{1}{2} - 4 \\ c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = 4 \end{cases}$ επομένως η f έχει τύπο $f(\chi) = 3\frac{\chi^2}{2} + \frac{1}{2}\chi + 4$

και πεδίο ορισμού το R.

iii) Αν με $K(\chi)$ συμβολίσεις την συνάρτηση κόστους τότε το οριακό κόστος

είναι $K'(\chi) = \chi^2 + 5\chi \Rightarrow \int K'(\chi)d\chi = \int (\chi^2 + 5\chi)d\chi = \frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} + c$ άρα

$K(\chi) = \frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} + c$. Επειδή όταν η βιομηχανία δεν παράγει κανένα

εξάρτημα είναι $\chi = 0$ και έχει κόστος 100 (χιλιάδες Ευρώ) άρα

$K(0) = 100 \Rightarrow \frac{0^3}{3} + 5\frac{0^2}{2} + c = 100$ άρα $c = 100$ επομένως

$K(\chi) = \frac{\chi^3}{3} + 5\frac{\chi^2}{2} + 100$

β. Στα προβλήματα όπου **δίνεται** μια σχέση στην οποία υπάρχει ταυτόχρονα η f, η f' και η τιμή της f σε κάποιο χ_0 $[f(\chi_0) = \kappa]$ θα πρέπει να θυμάσαι ότι :

Κάθε εξίσωση της μορφής $f'(\chi) + \alpha(\chi)f(\chi) = \beta(\chi)$, όπου $f(\chi)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και $\alpha(\chi)$, $\beta(\chi)$ συναρτήσεις του χ είναι:

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.

Οι διαφορικές εξισώσεις στο σύνολό τους είναι εκτός ύλης, όμως τα προβλήματα της μορφής που εξετάζουμε εδώ δεν είναι εκτός ύλης, είναι κατά κάποιο τρόπο στα «***όρια της νομιμότητας***» και αυτό γιατί ***στην ουσία***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

λύνονται (όπως και οι διαφορικές εξισώσεις) ***με χρήση των παραγώγων*** και ειδικότερα ***με βάση*** το θεώρημα :

Αν μια συνάρτηση f :

- Είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
- Και $f'(\chi)=0$, **για κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ**, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Αναπτύσσω, πιο κάτω, μια μεθοδολογία («τυφλοσούρτη») για την επίλυση ασκήσεων .

Για να λύσεις την εξίσωση $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ ***κάνεις τα εξής :***

✓ Φέρνεις την εξίσωση στη μορφή : $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$.

✓ Βρίσκεις μια παράγουσα $A(\chi)$ της συνάρτησης $\alpha(\chi)$, $\left[A'(\chi)=\alpha(\chi)\right]$.

✓ Πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{A(\chi)}$ και έχεις :

$$f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)\Leftrightarrow e^{A(\chi)}f'(\chi)+e^{A(\chi)}\alpha(\chi)f(\chi)=e^{A(\chi)}\beta(\chi)\ .$$

Αντικαθιστάς το $\alpha(\chi)$ με $A'(\chi)$, οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$e^{A(\chi)}f'(\chi)+e^{A(\chi)}A'(\chi)f(\chi)=e^{A(\chi)}\beta(\chi)\ \Leftrightarrow$$

$$e^{A(\chi)}f'(\chi)+\left(e^{A(\chi)}\right)'f(\chi)=e^{A(\chi)}\beta(\chi)\Leftrightarrow\left(e^{A(\chi)}\cdot f(\chi)\right)'=e^{A(\chi)}\beta(\chi)\ \Leftrightarrow$$

$\int\left(e^{A(\chi)}\cdot f(\chi)\right)'d\chi=\int e^{A(\chi)}\beta(\chi)d\chi$ και αν υποτεθεί πως το

$\int e^{A(\chi)}\beta(\chi)d\chi=B(\chi)$ τότε $e^{A(\chi)}\cdot f(\chi)=B(\chi)+c\ \Leftrightarrow$ $\boxed{f(\chi)=\dfrac{B(\chi)}{e^{A(\chi)}}+c}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

i) Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(\chi)=f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$.

Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0)=1$.

ii) Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(\chi)=3-2f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0)=1$.

iii) Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(\chi)=\chi-2\chi\cdot f(\chi)$ και για κάθε $\chi \in R$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ να βρεθεί ο τύπος της f.

iv) Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ικανοποιεί την εξίσωση $I'(t)+I(t)=\eta\mu t$.

Αν $I(0)=0$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

Απάντηση :

i) Η $f'(\chi)=f(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi)-f(\chi)=0$ **(1).**

Η **(1)** είναι της μορφής $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=-1$ και $\beta(\chi)=0$, μια παράγουσα της $\alpha(\chi)=-1$ είναι η $A(\chi)=-\chi$,

πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{-\chi}$ και έχεις :

$f'(\chi)-f(\chi)=0 \Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=0\cdot e^{-\chi}=0$.

Επειδή $\left(e^{-\chi}\right)'=e^{-\chi}(-\chi)'=-e^{-\chi}$ αντικαθιστάς το $-e^{-\chi}$ με $\left(e^{-\chi}\right)'$, οπότε η εξίσωση γίνεται : $e^{-\chi}f'(\chi)+\left(e^{-\chi}\right)'f(\chi)=0 \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'=0 \Leftrightarrow$

$\int\left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'d\chi=\int 0\,d\chi=0+c \Leftrightarrow f(\chi)e^{-\chi}=c \Leftrightarrow f(\chi)=c\cdot e^{\chi}$ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

επειδή $f(0)=1$ άρα $c\cdot e^0=1$ άρα $c=1$, επομένως $f(\chi)=e^{\chi}$.

*** Επίσης $f(\chi)=e^{\chi}+c$ άρα $f'(\chi)=e^{\chi}$.

Να θυμάσαι λοιπόν ότι $f'(\chi)=f(\chi) \Leftrightarrow f(\chi)=e^{\chi}+c$, $c\in R$.

ii) Η $f'(\chi)=3-2f(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi)+2f(\chi)=3$ και είναι της μορφής

$f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=2$ και $\beta(\chi)=3$, μια παράγουσα της

$\alpha(\chi)=2$ είναι η $A(\chi)=2\chi$, πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της

εξίσωσης με $e^{2\chi}$ και έχεις :

$$f'(\chi)+2f(\chi)=3 \Leftrightarrow e^{2\chi}f'(\chi)+2e^{2\chi}f(\chi)=3\cdot e^{2\chi}.$$

Επειδή $\left(e^{2\chi}\right)'=e^{2\chi}(2\chi)'=2e^{2\chi}$ αντικαθιστάς το $2e^{2\chi}$ με $\left(e^{2\chi}\right)'$, οπότε

η εξίσωση γίνεται : $e^{2\chi}f'(\chi)+\left(e^{2\chi}\right)'f(\chi)=3e^{2\chi} \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{2\chi}\right)'=3\cdot e^{2\chi}$

$$\Leftrightarrow \int\left(f(\chi)e^{2\chi}\right)'d\chi=\int 3e^{2\chi}d\chi=\frac{3}{2}\int\left(e^{2\chi}\right)'d\chi \text{ άρα } f(\chi)e^{2\chi}=\frac{3}{2}e^{2\chi}+c$$

επειδή $f(0)=1$ άρα $f(0)e^0=\frac{3}{2}e^0+c \Rightarrow c=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, επομένως

$$f(\chi)e^{2\chi}=\frac{3}{2}e^{2\chi}-\frac{1}{2} \Rightarrow f(\chi)=\frac{\frac{3}{2}e^{2\chi}-\frac{1}{2}}{e^{2\chi}} \Rightarrow f(\chi)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2\chi}.$$

iii) Η $f'(\chi)=\chi-2\chi\cdot f(\chi) \Leftrightarrow f'(\chi)+2\chi\cdot f(\chi)=\chi$ και είναι της μορφής

$f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=2\chi$ και $\beta(\chi)=\chi$, μια παράγουσα

της $\alpha(\chi)=2\chi$ είναι η $A(\chi)=\chi^2$, πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη με

e^{χ^2} και έχεις : $f'(\chi)+2f(\chi)=\chi \Leftrightarrow e^{\chi^2}f'(\chi)+2\chi e^{\chi^2}f(\chi)=\chi\cdot e^{\chi^2}$.

Επειδή $\left(e^{\chi^2}\right)'=e^{\chi^2}\left(\chi^2\right)'=2\chi\cdot e^{\chi^2}$ αντικαθιστάς το $2\chi e^{\chi^2}$ με $\left(e^{\chi^2}\right)'$,

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

οπότε εξίσωση γίνεται : $e^{\chi^2} f'(\chi) + \left(e^{\chi^2}\right)' f(\chi) = \chi \cdot e^{\chi^2} \Leftrightarrow$

$\left(f(\chi) e^{\chi^2}\right)' = \chi \cdot e^{\chi^2} \Leftrightarrow \int \left(f(\chi) e^{\chi^2}\right)' d\chi = \int \chi \cdot e^{\chi^2} d\chi = \frac{1}{2} \int \left(e^{\chi^2}\right)' d\chi$ άρα

$f(\chi) e^{\chi^2} = \frac{1}{2} e^{\chi^2} + c$ και επειδή η C_f περνάει από το σημείο $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

άρα $f(1) e^1 = \frac{1}{2} e^1 + c \Rightarrow \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} e^1 + c$ άρα $c = 0$, επομένως

$f(\chi) e^{\chi^2} = \frac{1}{2} e^{\chi^2}$, $e^{\chi^2} \neq 0$ άρα $\boxed{f(\chi) = \frac{1}{2}}$.

iv) Η $I'(t) + I(t) = \eta\mu t$ είναι της μορφής $f'(t) + \alpha(t) f(t) = \beta(t)$ με $\alpha(t) = 1$ και $\beta(t) = \eta\mu t$, μια παράγουσα της $\alpha(t) = 1$ είναι η $A(t) = t$, πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη με e^t και έχεις : $I'(t) + I(t) = \eta\mu t \Leftrightarrow$

$e^t \cdot I'(t) + e^t \cdot I(t) = e^t \cdot \eta\mu t$.

Επειδή $\left(e^t\right)' = e^t$ αντικαθιστάς το e^t με $\left(e^t\right)'$, οπότε εξίσωση γίνεται:

$e^t \cdot I'(t) + \left(e^t\right)' I(t) = e^t \cdot \eta\mu t \Leftrightarrow \left(I(t) e^t\right)' = e^t \cdot \eta\mu t \Leftrightarrow$

$\int \left(I(t) e^t\right)' d\chi = \int e^t \cdot \eta\mu t \, d\chi$ **(1)**.

Υπολογίζεις το $J = \int e^t \cdot \eta\mu t \, d\chi = \int \left(e^t\right)' \eta\mu t \, d\chi = e^t \eta\mu t - \int e^t (\eta\mu t)' d\chi =$

$e^t \eta\mu t - \int e^t \sigma\upsilon\nu t \, d\chi = e^t \eta\mu t - \int \left(e^t\right)' \sigma\upsilon\nu t \, d\chi = e^t \eta\mu t - \int \left(e^t\right)' \sigma\upsilon\nu t \, d\chi =$

$e^t \eta\mu t - \left(e^t \sigma\upsilon\nu t - \int e^t (\sigma\upsilon\nu t)' d\chi\right) = e^t \eta\mu t - \left(e^t \sigma\upsilon\nu t + \int e^t \eta\mu t \, d\chi\right)$ άρα

$J = \int e^t \cdot \eta\mu t \, d\chi = e^t \eta\mu t - e^t \sigma\upsilon\nu t - J \Leftrightarrow 2J = e^t \eta\mu t - e^t \sigma\upsilon\nu t$ άρα

$J = \frac{e^t (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t)}{2}$ επομένως η **(1)** γίνεται $I(t) e^t = \frac{e^t (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t)}{2} + c$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

και επειδή η $I(0)=0$, θα είναι $I(0)e^{0}=\dfrac{e^{0}(\eta\mu 0-\sigma\upsilon\nu 0)}{2}+c$

άρα $0=-\dfrac{1}{2}+c \Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$ επομένως

$I(t)e^{t}=\dfrac{e^{t}(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)}{2}+\dfrac{1}{2}$, $e^{t}\neq 0$ άρα $I(t)=\dfrac{\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f.

Αν θεωρήσεις τα σημεία $\alpha=\chi_0,\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_\nu=\beta$, τότε έχεις χωρίσει το $[\alpha,\beta]$ σε ν τμήματα με μήκος (το καθένα) $\Delta_\chi=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Κάθε τμήμα έχει την μορφή $[\chi_\kappa,\chi_{\kappa+1}]$ και αν θεωρήσεις ένα τυχαίο αριθμό $\xi_\kappa\in[\chi_\kappa,\chi_{\kappa+1}]$ σε κάθε ένα από αυτά τότε, μπορείς να σχηματίσεις το άθροισμα : $S_\nu=f(\xi_1)\Delta_\chi+f(\xi_2)\Delta_\chi+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta_\chi=$

$(f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_\nu))\Delta_\chi \Leftrightarrow S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta_\chi$.

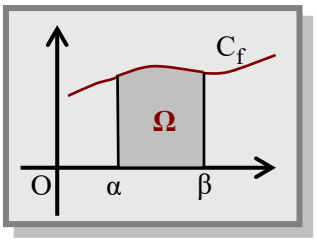
Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{\nu\to+\infty}S_\nu=\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta_\chi\right)$ υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και **δεν εξαρτάται** από την επιλογή του $\xi_\kappa\in[\chi_\kappa,\chi_{\kappa+1}]$.

Το όριο αυτό ονομάζεται **ολοκλήρωμα της f από το α ως το β** και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$, δηλαδή είναι $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi=\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta_\chi\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος.

Αν για την **συνεχή** συνάρτηση **f** ισχύει $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ εκφράζει το ***εμβαδόν του χωρίου Ω*** που ***περικλείεται*** από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.



Παρατηρήσεις :

- ✓ Στο σύμβολο $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$, τα α και β καλούνται **άκρα ή όρια της ολοκλήρωσης**.
- ✓ Το **χ** που εμφανίζεται στο dχ ονομάζεται **μεταβλητή ολοκλήρωσης** και είναι μια απλή μεταβλητή, με την έννοια ότι **δεν επηρεάζει** καθόλου το τελικό αποτέλεσμα, επομένως μπορείς να αλλάζεις χωρίς πρόβλημα τη μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα. Έτσι έχεις το πιο κάτω αποτέλεσμα :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du.$$

- ✓ Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ **είναι σταθερός πραγματικός αριθμός** και ***εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση*** **f** ***και από τα άκρα*** **α** και **β**.

Ιδιότητες.

i. **Ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι ολοκληρώσιμη μια συνάρτηση f σε ένα διάσημα $[\alpha, \beta]$, είναι να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

ii. **Όταν χρησιμοποιείς το σύμβολο** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ εννοείται ότι **α < β**.

iii. **Αν α = β τότε** $\int_{\alpha}^{\alpha} f(\chi)d\chi = 0$.

iv. **Αν α > β τότε** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = -\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

v. Αν **f συνεχής** συνάρτηση και ισχύει $f(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ τότε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \geq 0$. Το ίσον ισχύει ***μόνον*** αν $f(\chi) = 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

Αν ***επιπλέον*** για την συνάρτηση f εξασφαλιστεί ότι ***δεν είναι*** παντού μηδέν δηλαδή ***αν υπάρχει έστω και ένα*** $\chi_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) \neq 0$ τότε

$f(\chi) \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi > 0$.

vi. Αν **f** και **g** είναι **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και λ, μ ∈ R τότε :

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot f(\chi)d\chi = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ και

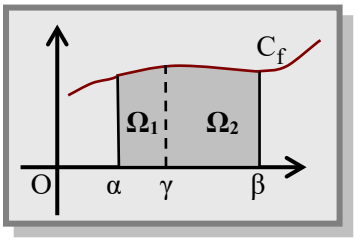
β. $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda \cdot f(\chi) + \mu \cdot g(\chi))d\chi = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi$

vii. Αν **f συνεχής** συνάρτηση σε διάστημα Δ και **α, β, γ ∈ Δ** τότε

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi + \int_{\gamma}^{\beta} f(\chi)d\chi$.

Προσοχή το Δ είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

Γεωμετρική ερμηνεία της ιδιότητας **vii.**



Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $f(\chi) \geq 0$, **α, β, γ ∈ Δ** με **α < γ < β** και **Ω** είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_f, τον χ΄χ και τις ευθείες **χ = α, χ = β** , **Ω1** και **Ω2** τα χωρία στα οποία η **χ = γ** χωρίζει το **Ω,** δες σχήμα πιο πάνω, τότε η σχέση :

$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi + \int_{\gamma}^{\beta} f(\chi)d\chi$ γεωμετρικά σημαίνει ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2).$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

i) Έστω μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\int_2^4 f(\chi)d\chi = -5$,

$\int_1^4 f(\chi)d\chi = 3$ και $\int_1^7 f(\chi)d\chi = 6$ να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_4^7 f(t)dt$ **β)** $\int_2^1 f(u)du$.

ii) Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει :

$\int_\alpha^\beta f(t)dt = 3$ και $\int_\alpha^\beta g(t)dt = -5$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \neq \beta$.

Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $\int_\alpha^\beta (3f(t) - 4g(t))dt$.

iii) Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει :

$\int_\alpha^\beta (2f(\chi) - g(\chi))d\chi = 3$ και $\int_\alpha^\beta (f(\chi) + g(\chi))d\chi = 0$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \neq \beta$.

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$ και $\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$ **β)** $\int_2^1 (-f(t) + 3g(t))dt$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln\chi\, d\chi = \int_e^1 \ln\frac{1}{\chi}d\chi$.

Απάντηση :

Δες **Ορισμό**, **Παρατηρήσεις, Ιδιότητες**

i) **α)** Είναι $\int_4^7 f(t)dt = \int_4^7 f(\chi)d\chi$ (δες τις ***παρατηρήσεις***).

Επίσης $\int_4^7 f(\chi)d\chi = \int_4^1 f(\chi)d\chi + \int_1^7 f(\chi)d\chi$ (δες επίσης ιδιότητα **vii).**

Άρα $\int_4^7 f(t)dt = \int_4^1 f(\chi)d\chi + \int_1^7 f(\chi)d\chi = -\int_1^4 f(\chi)d\chi + \int_1^7 f(\chi)d\chi \Rightarrow$

$\int_4^7 f(t)dt = -3 + 6 = 3.$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Είναι $\int_2^1 f(u)du = -\int_1^2 f(u)du = -\int_1^2 f(\chi)d\chi$, επίσης

$$\int_1^4 f(\chi)d\chi = \int_1^2 f(\chi)d\chi + \int_2^4 f(\chi)d\chi \Rightarrow 3 = \int_1^2 f(\chi)d\chi - 5 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f(\chi)d\chi = 3 + 5 = 8 \text{ άρα } \int_2^1 f(u)du = -\int_1^2 f(\chi)d\chi = -8.$$

ii) Είναι $\int_\alpha^\beta (3f(t) - 4g(t))dt = \int_\alpha^\beta 3f(t)dt + \int_\alpha^\beta (-4g(t))dt =$

$$3\int_\alpha^\beta f(t)dt - 4\int_\alpha^\beta g(t)dt = 3\cdot 3 - 4(-5) = 29$$

iii) Είναι $\int_\alpha^\beta (2f(\chi) - g(\chi))d\chi = 3 \Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi - \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi = 3 \quad (1)$ και

$$\int_\alpha^\beta (f(\chi) + g(\chi))d\chi = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi + \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi = 0 \quad (2).$$

Για να διευκολυνθείς μπορείς να θέσεις $I = \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$, $J = \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$,

οπότε οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται : $\begin{cases} 2I - J = 3 & (3) \\ I + J = 0 & (4) \end{cases}$ και είναι φανερό

ότι αποτελούν σύστημα, το οποίο εύκολα λύνεις και βρίσκεις $\begin{cases} I = 1 \\ J = -1 \end{cases}$ άρα

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = 1 \text{ και } \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi = -1.$$

iv)

1ος τρόπος $\int_1^e \ln\chi\, d\chi = -\int_e^1 \ln\chi\, d\chi = \int_e^1 -\ln\chi\, d\chi = \int_e^1 \ln\chi^{-1}\, d\chi = \int_e^1 \ln\frac{1}{\chi}d\chi$.

2ος τρόπος $\int_e^1 \ln\frac{1}{\chi}d\chi = \int_e^1 (\ln 1 - \ln\chi)d\chi = \int_e^1 (0 - \ln\chi)d\chi =$

$$\int_e^1 0\, d\chi - \int_e^1 \ln\chi\, d\chi = -\int_e^1 \ln\chi\, d\chi = \int_1^e \ln\chi\, d\chi.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$.

Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$ τότε αποδεικνύεται το Θεώρημα :

Η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή

$$F'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi).$$

Παρατηρήσεις.

i. **Το** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ είναι **αριθμός** ενώ το $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι **συνάρτηση**.

ii. **Το** $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι **συνάρτηση με μεταβλητή το χ,** ενώ το **t** που εμφανίζεται στο **dt είναι και λέγεται μεταβλητή ολοκλήρωσης** με αποτέλεσμα κάθε άλλο γράμμα που εμφανίζεται **μέσα** στο ολοκλήρωμα θεωρείται (και λειτουργεί) ως σταθερά, Πχ αν έχεις :

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \kappa\cdot f(\lambda\cdot t)dt$ τότε τα κ και λ είναι σταθερές και το χ επίσης είναι σταθερό, αν εκτός από άκρο στο $\int_{\alpha}^{\chi}$ υπάρχει και μέσα στο $\int_{\alpha}^{\chi}$ πχ στην $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \chi\cdot f(t)dt$, το χ θεωρείται σταθερό και επομένως

$$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \chi\cdot f(t)dt=\chi\cdot\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$$

iii. Στο $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ αν $\boldsymbol{\alpha\le\beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\le\chi\le\beta}$**,** ενώ αν $\boldsymbol{\alpha\ge\beta}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = -\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi$ οπότε $\boldsymbol{\beta\le\chi\le\alpha}$**.** Στο σύμβολο $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ θα πρέπει να κάνεις υποθέσεις αν $\chi>\alpha$ τότε $\boldsymbol{\alpha\le t\le\chi}$ ενώ αν $\chi<\alpha$ τότε

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = -\int_{\chi}^{\alpha} f(t)dt$ και επομένως $\boldsymbol{\chi \le t \le \alpha}$ και προφανώς αν $\boldsymbol{\chi = \alpha}$

τότε $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$ οπότε δεν χρειάζεται να εξετάσεις το t.

Παραδείγματα :

i) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων :

α) $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ **β)** $G(t) = \int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi$ **γ)** $H(\chi) = \int_{-\pi}^{\chi} \text{συν}3t\,dt$.

Απάντηση :

α) $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ άρα $F'(\chi) = \left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = f(\chi)$

β) $G(t) = \int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi$ άρα $G'(t) = \left(\int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi\right)' = \ln t + 1$

γ) $H(\chi) = \int_{-\pi}^{\chi} \text{συν}3t\,dt$ άρα $H'(\chi) = \left(\int_{-\pi}^{\chi} \text{συν}3t\,dt\right)' = \text{συν}3\chi$

Όπως ήδη ξέρεις από τον ορισμό, τις παρατηρήσεις και τα παραδείγματα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι συνάρτηση, επομένως για την F ισχύουν όλα όσα έμαθες στα προηγούμενα κεφάλαια.

Δηλαδή πρέπει να βρίσκεις πεδίο ορισμού ***πάντα,*** μπορείς να βρίσκεις πρώτη, δεύτερη παράγωγο, γενικότερα μπορείς να μελετάς την F (μονοτονία κλπ) και επομένως οι ασκήσεις που θα συναντήσεις στα επόμενα θα περιστρέφονται γύρω από αυτά και είναι ***ουσιαστικά*** απλές, με την έννοια ότι ήδη έχεις λύσει τέτοιες πάρα πολλές, το μόνο που αλλάζει είναι ότι η F δεν δίνεται απευθείας μέσω κάποιου τύπου αλλά έμμεσα , ως αρχική μιας άλλης συνάρτησης .

Δες με προσοχή τις επόμενες παρατηρήσεις και παραδείγματα :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***Τύπος συνάρτησης*** $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Για να βρεις το Π Ο της F βρίσκεις το Π Ο της f, το D_f.

Το Π Ο της F (D_F) θα είναι εκείνο το διάστημα $\Delta \subseteq D_f$ το οποίο ικανοποιεί τις εξής δυο προϋποθέσεις :

α) η f είναι συνεχής και **β)** $\alpha \in \Delta$

ii) ***Μελέτη της F*** :

Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi)$, για την δεύτερη παράγωγο της F ισχύει $F'(\chi)=f(\chi)$ άρα $F''(\chi)=f'(\chi)$ και πρέπει να προσέξεις ότι υπάρχει μόνον όταν η f είναι παραγωγίσιμη.

Επομένως για να μελετήσεις τις ιδιότητες της F μελετάς τις ιδιότητες της $F'(\chi)=f(\chi)$ και τις ιδιότητες της $F''(\chi)=f'(\chi)$

iii) ***Όριο της*** F ***στο*** χ_0 $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0} F(\chi)\right)$.

Η $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο D_F, άρα συνεχής σε αυτό, επομένως $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} F(\chi)=F(\chi_0)=\int_{\alpha}^{\chi_0} f(t)dt$ δηλαδή αντικαθιστάς απλώς το χ με χ_0 στον τύπο της F και υπολογίζεις το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** που προκύπτει.

Παραδείγματα :

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to 3} F(\chi)$, αν $F(\chi)=\int_{1}^{\chi}\left(3t^2+2\right)dt$

Απάντηση :

Η $f(\chi)=3\chi^2+2$, ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $R=(-\infty,+\infty)$ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$1 \in R = (-\infty, +\infty)$ άρα $D_F = R$ και επομένως έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi \to 3} F(\chi)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi \to 3} F(\chi) = F(3) = \int_1^3 \left(3t^2 + 2\right)dt = \left[3\frac{t^3}{3} + 2t\right]_1^3 = \left[t^3 + 2t\right]_1^3 =$

$\left(3^3 + 2\cdot 3\right) - \left(1^3 + 2\cdot 1\right) = (27-6) - (1-2) = 21 + 1$ άρα $\lim\limits_{\chi \to 3} F(\chi) = 22$.

iv) ***Ολοκλήρωμα της*** F :

Αν χρειαστεί να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα της F χρησιμοποιείς την παραγοντική ολοκλήρωση «κλέβοντας» λίγο την περίπτωση, δηλαδή :

Έστω $F(\chi) = \int_\alpha^\chi f(t)dt$ και έστω ότι θες να βρεις το $\int_\kappa^\lambda F(\chi)d\chi$,

βρίσκεις πρώτα το $\int F(\chi)d\chi$ με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\int F(\chi)d\chi = \int (\chi)' F(\chi)d\chi = \chi \cdot F(\chi) - \int \chi \cdot F'(\chi)d\chi = \chi \cdot F(\chi) - \int \chi \cdot f(\chi)d\chi$$

υπολογίζεις στη συνέχεια το $\int \chi \cdot f(\chi)d\chi$ και κατόπιν υπολογίζεις το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παραδείγματα :

i) Να μελετηθεί η μονοτονία της $F(\chi) = \int_3^\chi \left(e^t + 2\right)dt$.

Απάντηση :

✓ Προφανώς είναι $f(\chi) = e^\chi + 2$, άρα $D_f = R = (-\infty, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο R ως άθροισμα πολυωνυμικής και σταθερής και $3 \in R$,, άρα $D_F = R$.

✓ Είναι $F(\chi) = \int_3^\chi \left(e^t + 2\right)dt$ άρα $F'(\chi) = \left(\int_3^\chi \left(e^t + 2\right)dt\right)' = e^\chi + 2$.

Επειδή $e^\chi > 0$ για κάθε $\chi \in R$, άρα $F'(\chi) = e^\chi + 2 > 0$, για κάθε $\chi \in R$.

Επομένως η $F(\chi) = \int_3^\chi \left(e^t + 2\right)dt$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\chi \in R$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Να μελετηθεί η μονοτονία της $F(\chi)=\int_3^{\chi}\left(e^t+2\right)dt$ στο $[-2,1)\cup(2,5]$ και να βρεθούν τα ακρότατα της αν υπάρχουν.

Απάντηση :

✓ Προφανώς είναι $f(\chi)=e^{\chi}+2$ και $D_f=[-2,1)\cup(2,5]$ και η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $[-2,1)$ και $(2,5]$ αλλά $3\in(2,5]$, άρα $D_F=\Delta=(2,5]$.

✓ Είναι $F(\chi)=\int_3^{\chi}\left(e^t+2\right)dt$ άρα $F'(\chi)=\left(\int_3^{\chi}\left(e^t+2\right)dt\right)'=e^{\chi}+2$.

Επειδή $e^{\chi}>0$ για κάθε $\chi\in\Delta$, άρα $F'(\chi)=e^{\chi}+2>0$, για κάθε $\chi\in\Delta$.

Επομένως η $F(\chi)=\int_3^{\chi}\left(e^t+2\right)dt$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\chi\in\Delta$.

Επειδή η F γνησίως αύξουσα στο $(2,5]$ και μόνο το $5\in(2,5]$ άρα θα έχει μέγιστο (ΜΌΝΟ), το $F(5)=\int_3^{5}\left(e^t+2\right)dt$ το οποίο θα δεις πιο κάτω πως υπολογίζεται.

2. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)}f(t)dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Αν θεωρήσεις την συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$ είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)}f(t)dt=F\left(g(\chi)\right)$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της F και της g.

Άρα για να βρεις το Π Ο της Φ, βρίσκεις το διάστημα Δ στο οποίο

α) η f είναι συνεχής και **β)** $\alpha\in\Delta$ και

κατόπιν βρίσκεις το D_g και στη συνέχεια δουλεύεις σύμφωνα με αυτά που ξέρεις από το 1ο Κεφάλαιο.

Επομένως είναι: $D_{\Phi}=\left\{\chi\in\Delta\cap D_g \text{ και } g(\chi)\in\Delta\right\}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) ***Όριο της Φ στο χ₀*** $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\Phi(\chi)\right)$

Η $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο D_{Φ}, άρα συνεχής σε αυτό,

επομένως $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\Phi(\chi)=\Phi(\chi_0)=\int_{\alpha}^{g(\chi_0)} f(t)dt$ δηλαδή αντικαθιστάς

απλώς το χ με χ_0 στον τύπο της Φ και υπολογίζεις το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** που προκύπτει.

iii) ***Μελέτη της Φ*** :

Αν $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ τότε η Φ είναι παραγωγίσιμη με :

$$\Phi'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt\right)'=\left[F(g(\chi))\right]'=F'(g(\chi))g'(\chi)=f(g(\chi))g'(\chi).$$

Πρέπει να προσέξεις ότι η Φ είναι παραγωγίσιμη μόνον όταν η f είναι συνεχής και η g παραγωγίσιμη.

Για την δεύτερη παράγωγο της Φ λειτουργείς ανάλογα.

3. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi)=\int_{g(\chi)}^{h(\chi)} f(t)dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Βρίσκεις το διάστημα στο οποίο η f ορίζεται και είναι συνεχής, έστω το διάστημα Δ, τότε :

$$D_{\Phi}=\left\{\chi\in\Delta\cap D_g\cap D_h \text{ και } g(\chi)\in\Delta \text{ και } h(\chi)\in\Delta\right\}.$$

ii) ***Όριο της Φ στο χ₀*** $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\Phi(\chi)\right)$

Για το όριο ισχύει ότι και στην προηγούμενη περίπτωση.

iii) ***Μελέτη της Φ*** :

Για να βρεις την παράγωγο της Φ επιλέγεις ένα αριθμό $\alpha\in D_{\Phi}$ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γράφεις :

$$\Phi(\chi)=\int_{g(\chi)}^{h(\chi)} f(t)\,dt=\int_{g(\chi)}^{\alpha} f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)\,dt=\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)\,dt$$

τότε με την προϋπόθεση ότι :

η* f *είναι συνεχής και οι* g *και* h *είναι παραγωγίσιμες η Φ είναι

παραγωγίσιμη με : $\Phi'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)\,dt\right)'-\left(\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)\,dt\right)'$ άρα

$$\Phi'(\chi)=f(h(\chi))h'(\chi)-f(g(\chi))g'(\chi).$$

Στη συνέχεια μελετάς κατά τα γνωστά !!! την Φ μελετώντας την Φ'.

** Από ότι βλέπεις, εκείνο που είναι «λίγο περίεργο» είναι το Π Ο, αλλά μην ανησυχείς, στις περισσότερες ασκήσεις ***δίνεται*** ή αναφέρεται η «πονηρή» έκφραση: ***«με την προϋπόθεση ότι όλα τα σύμβολα έχουν νόημα»***, που σημαίνει ότι δεν ψάχνεις το Π Ο.

Παραδείγματα :

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $\Phi(\chi)=\int_{3}^{\chi^2+1}(3t-2)\,dt$.

Απάντηση :

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Θεωρείς την συνάρτηση $F(\chi)=\int_{3}^{\chi}(3t-2)\,dt$, είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi)=\int_{3}^{\chi^2+1}(3t-2)\,dt=F(\chi^2+1)$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της

$F(\chi)=\int_{3}^{\chi}(3t-2)\,dt$ και της $g(\chi)=\chi^2+1$. Έστω $f(\chi)=3\chi-2$, το

διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta=(-\infty,+\infty)=R$, $3\in\Delta$

και g είναι παραγωγίσιμη στο R. Άρα για το Π Ο της Φ απαιτείς

$g(\chi)\in R \Rightarrow \chi^2+1\in R$ που ισχύει, άρα $D_{\Phi}=R$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

$$\Phi'(\chi)=F'\left(\chi^2+1\right)=f\left(\chi^2+1\right)\left(\chi^2+1\right)'=\left(3\left(\chi^2+1\right)-2\right)\cdot 2\chi=\left(3\chi^2+1\right)2\chi$$

άρα $\Phi'(\chi)=6\chi^3+2\chi$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}\sqrt{t^2-4}\,dt$.

Απάντηση :

Θεωρείς την συνάρτηση $F(\chi)=\int_3^{\chi}\sqrt{t^2-4}\,dt$, είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}\sqrt{t^2-4}\,dt=F\left(\chi^2+1\right)$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της

$F(\chi)=\int_3^{\chi}\sqrt{t^2-4}\,dt$ και της $g(\chi)=\chi^2+1$

Έστω $f(\chi)=\sqrt{t^2-4}$, το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής θα προκύψει από τη λύση της ανίσωσης $t^2-4\geq 0$. Ρίζες είναι $\rho_1=-2$ και $\rho_2=2$, πίνακας προσήμου για το t^2-4

$-\infty$		-2		2		$+\infty$
	$+$	|	$-$	|	$+$	

Άρα το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

Όμως $3\in[2,+\infty)$ άρα $D_\Phi=[2,+\infty)$.

** Καταλαβαίνεις πόσο εύκολο είναι να βρεις μονοτονία κλπ. για την Φ.

4. ***Συνάρτηση*** $\Phi(\chi)=\int_\alpha^{\chi}h(\chi)f(t)dt$ ή $\Phi(\chi)=\int_\alpha^{g(\chi)}h(\chi)f(t)dt$.

Και στις δυο περιπτώσεις η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι μέσα στο ολοκλήρωμα είναι dt άρα ότι υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα και δεν εξαρτάται από το t , είναι σταθερή ποσότητα επομένως «βγαίνει» έξω από το ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι :

$\Phi(\chi)=\int_\alpha^{\chi}h(\chi)f(t)dt=h(\chi)\int_\alpha^{\chi}f(t)dt$ και

$\Phi(\chi)=\int_\alpha^{g(\chi)}h(\chi)f(t)dt=h(\chi)\int_\alpha^{g(\chi)}f(t)dt$ αντίστοιχα

Λιβαδειά

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Για το Π Ο ισχύουν όλα όσα είπαμε πιο πάνω, δεν υπάρχει κάτι ξεχωριστό.

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

α) Αν $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ τότε η Φ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο της $h(\chi)$ με την $F(\chi)$ και παραγωγίζεται ανάλογα.

$$\Phi'(\chi)=\left(h(\chi)\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)'=h'(\chi)F(\chi)+h(\chi)F'(\chi)=h'(\chi)F(\chi)+h(\chi)f(\chi)$$

ή $\Phi'(\chi)=\left(h(\chi)\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt\right)'=h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)\left[F(g(\chi))\right]'=$

$h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)F'(g(\chi))g'(\chi)$ άρα :

$$\Phi'(\chi)=h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)f(g(\chi))g'(\chi).$$

Πρέπει να προσέξεις ότι η Φ ***είναι παραγωγίσιμη μόνον όταν η*** **f** ***είναι συνεχής και οι*** **g, h** ***είναι παραγωγίσιμες.***

Για την δεύτερη παράγωγο της Φ λειτουργείς ανάλογα.

5. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} h(\chi,t)f(g(\chi,t))dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση.

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

Για να μπορέσεις να βρεις την παράγωγο θα πρέπει να κάνεις αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $u=g(\chi,t)$, βρίσκεις το $du=g'(\chi,t)dt$.

Προσοχή στην $g'(\chi,t)$ όπου ***το χ είναι σταθερός αριθμός*** όπως πχ αν είναι : $u=3\chi^2+\chi\cdot t^2$ τότε

$$du=\left(3\chi^2+\chi\cdot t^2\right)'dt=\left[\left(3\chi^2\right)'+\left(\chi\cdot t^2\right)'\right]dt=\left(0+2\chi\cdot t\right)'dt=2\chi\cdot t\,dt.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού(ΘΘΟΛ)

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = G(\beta) - G(\alpha)$.

Απόδειξη :

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Αν η G είναι επίσης μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in R$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{G(\chi) = F(\chi) + c}$ **(1)**

Από την **(1)**, για $\chi = \alpha$, έχεις $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = 0 + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως $\mathbf{G(\chi) = F(\chi) + c = F(\chi) + G(\alpha)}$, οπότε, για $\chi = \beta$, έχεις $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Rightarrow F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha)$ και επειδή $F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$

άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = G(\beta) - G(\alpha)$.

Εφαρμογή :

Να αποδειχθεί ότι για την σταθερή συνάρτηση $f(\chi) = c$ ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} c\,d\chi = c(\beta - \alpha)$$

Απόδειξη :

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(\chi) = c$, μια παράγουσά της είναι η

$F(\chi) = c \cdot \chi$ $\left(\text{είναι } F'(\chi) = (c \cdot \chi)' = c\right)$ οπότε από το Θ.Θ.Ο.Λ. θα είναι

$\int_{\alpha}^{\beta} c\,d\chi = F(\beta) - F(\alpha) = c \cdot \beta - c \cdot \alpha = c(\beta - \alpha)$.

Λιβαδειά

Παρατηρήσεις :

i. Πολλές φορές, για να απλοποιηθούν οι εκφράσεις με ολοκληρώματα, συμβολίζεις τη διαφορά $G(\beta)-G(\alpha)$ με $\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}=\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)dt\right]_{\alpha}^{\beta}$.

ii. Το θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει και όταν $\alpha>\beta$.

Έστω $\alpha>\beta$, είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=-\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi=-\left[G(\chi)\right]_{\beta}^{\alpha}=$

$-\left(G(\alpha)-G(\beta)\right)=G(\beta)-G(\alpha)$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}$.

iii. Σε διάφορα βιβλία, μέσα σε ασκήσεις, αλλά και σε θέματα πανελλήνιων εξετάσεων χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός :

$\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=\left[F(t)\right]_{\alpha}^{\chi}$, όπου $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ μια παράγουσα της f.

Το «σκεπτικό» είναι το εξής : Για $\chi=\alpha$ είναι $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0$ άρα

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt+0=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt+F(\alpha)$ άρα $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=F(\chi)-F(\alpha)\Rightarrow$

$\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=\left[F(t)\right]_{\alpha}^{\chi}$.

iv. $f(\chi)=g(\chi)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi$. **Το αντίστροφο δεν ισχύει**.

Πχ $\int_{0}^{1} 2\chi d\chi=\left[\chi^2\right]_{0}^{1}=1^2-0^2=1$, $\int_{0}^{1} 4\chi^3 d\chi=\left[\chi^4\right]_{0}^{1}=1^4-0^4=1$, δηλαδή

$\int_{0}^{1} 2\chi d\chi=\int_{0}^{1} 4\chi^3 d\chi$ προφανώς όμως $2\chi\neq 4\chi^3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αρχική συνάρτηση F(χ) και εύρεση της f

Υπάρχουν ασκήσεις όπου, ξέροντας μια αρχική συνάρτηση, χρειάζεται να βρεις την συνάρτηση f, είτε γιατί την ζητά η άσκηση, είτε γιατί χρειάζεται στους υπόλοιπους υπολογισμούς. Αυτές οι περιπτώσεις ενώ φαίνονται δύσκολες στην πραγματικότητα δεν είναι.

Μπορεί κανείς να διακρίνει τις ακόλουθες περιπτώσεις :

Περίπτωση 1η : Δίνεται ότι f συνεχής και $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = g(\chi) \quad (1)$.

Να βρεθεί η f.

Απάντηση :

Αφού η f συνεχής άρα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) είναι $\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = g'(\chi)$ άρα $f(\chi) = g'(\chi)$.

Εφαρμογή : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = 2\chi^3 - \chi^2 + 2$.

Απάντηση :

Αφού η f συνεχής άρα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα είναι

$\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = \left(2\chi^3 - \chi^2 + 2\right)'$ άρα $f(\chi) = 6\chi^2 - 2\chi$.

Περίπτωση 2η : Να βρεθεί η f όταν $f(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} g(t)dt \quad (1)$.

Απάντηση :

Αρχικά θα δείχνεις ότι η g συνεχής και επομένως η $f(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) είναι $f(\chi) = \left[G(t)\right]_{\alpha}^{\chi} = G(\chi) - G(\alpha)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εφαρμογή : Να βρεθεί η f όταν $f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt$.

Απάντηση :

Η $g(\chi)=3\eta\mu\chi+1$ είναι συνεχής γιατί είναι ημιτονοειδούς μορφής.

Άρα η $f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt$ είναι παραγωγίσιμη, και επειδή η

$G(\chi)=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi$ είναι μια παράγουσα της g, θα είναι :

$$f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt=\left[-3\sigma\upsilon\nu t+t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}=(-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi)-\left(-3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi-\left(-3\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ άρα } f(\chi)=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi+\frac{3}{2}-\frac{\pi}{3}$$

Περίπτωση 3η : **α)** Δίνεται ότι f συνεχής και $f(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt \quad (1)$.

β) Δίνεται ότι f συνεχής, g παραγωγίσιμη και

$f(\chi)=g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt \quad (2)$.

Να βρεθεί η f.

Απάντηση :

α) Αφού η f συνεχής άρα η $f(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από

την (1) είναι $f'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\right)'=f(\chi)$ άρα $f'(\chi)-f(\chi)=0$.

β) Αφού η f συνεχής και g παραγωγίσιμη άρα η $f(\chi)=g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη άρα από την (2) είναι :

$$f'(\chi)=\left(g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\right)'=g'(\chi)+f(\chi) \text{ άρα } f'(\chi)-f(\chi)=g'(\chi) .$$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για το υπόλοιπο της άσκησης πρέπει να ακολουθήσεις τις διαδικασίες της παραγράφου με τίτλο «***Προβλήματα με την εύρεση της* f»** και υπότιτλο : «***Τι κάνεις όταν ζητάει να βρεις την συνάρτηση* f;**», δες και παραδείγματα.

Εφαρμογή 1 : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν

$$f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)\,dt .$$

Απάντηση :

Αφού η f συνεχής άρα η $f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα

είναι $f'(\chi)=\left(3+\int_1^{\chi} f(t)\,dt\right)'=f(\chi)$ άρα $f'(\chi)-f(\chi)=0$ **(1)**.

Η **(1)** είναι της μορφής $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=-1$ και $\beta(\chi)=0$, μια παράγουσα της $\alpha(\chi)=-1$ είναι η $A(\chi)=-\chi$ οπότε πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{-\chi}$ και έχεις :

$f'(\chi)-f(\chi)=0 \Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=0\cdot e^{-\chi}=0$.

Επειδή $\left(e^{-\chi}\right)'=e^{-\chi}(-\chi)'=-e^{-\chi}$ αντικαθιστάς το $-e^{-\chi}$ με $\left(e^{-\chi}\right)'$, οπότε η εξίσωση γίνεται : $e^{-\chi}f'(\chi)+\left(e^{-\chi}\right)'f(\chi)=0 \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'=0 \Leftrightarrow$

$\int\left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'d\chi=\int 0\,d\chi=0+c \Leftrightarrow f(\chi)e^{-\chi}=c \Leftrightarrow \boxed{f(\chi)=c\cdot e^{\chi}}$ **(2)**.

Από την σχέση $f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)\,dt$ για $\chi=1$ έχεις $f(1)=3+\int_1^{1} f(t)\,dt \Rightarrow$

$f(1)=3$. Από την **(2)** για $\chi=1$ έχεις $f(1)=c\cdot e$ άρα $c\cdot e=3 \Leftrightarrow c=\frac{3}{e}$

επομένως $f(\chi)=\frac{3}{e}e^{\chi}$ άρα $f(\chi)=3\cdot e^{\chi-1}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εφαρμογή 2 : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν

$$f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt .$$

Απάντηση :

Αφού η f συνεχής και η $g(\chi)=2\chi$ παραγωγίσιμη άρα η

$f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα είναι

$$f'(\chi)=\left(2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi)+2 \text{ άρα } f'(\chi)-f(\chi)=2 \qquad \textbf{(1)}.$$

Η **(1)** είναι της μορφής $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=-1$ και $\beta(\chi)=2$, μια παράγουσα της $\alpha(\chi)=-1$ είναι η $A(\chi)=-\chi$ οπότε πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{-\chi}$ και έχεις :

$$f'(\chi)-f(\chi)=2 \Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=2\cdot e^{-\chi} .$$

Επειδή $\left(e^{-\chi}\right)'=e^{-\chi}(-\chi)'=-e^{-\chi}$ αντικαθιστάς το $-e^{-\chi}$ με $\left(e^{-\chi}\right)'$, οπότε η εξίσωση γίνεται : $e^{-\chi}f'(\chi)+\left(e^{-\chi}\right)'f(\chi)=2\cdot e^{-\chi} \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'=2\cdot e^{-\chi}$

$$\Leftrightarrow \int\left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'d\chi=\int 2\cdot e^{-\chi}d\chi=2\int(-\chi)'e^{-\chi}d\chi=2\cdot e^{-\chi}+c \Leftrightarrow$$

$$f(\chi)e^{-\chi}=2e^{-\chi}+c \Leftrightarrow f(\chi)=2+c\cdot e^{\chi} \quad \textbf{(2)}.$$

Από την σχέση $f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt$ για $\chi=0$ έχεις $f(0)=0+\int_0^{0} f(t)dt \Rightarrow$ $f(0)=0$. Από την **(2)** για $\chi=0$ έχεις $f(0)=2+c\cdot e^0=2+c$ άρα $2+c=0$ άρα $c=-2$, επομένως $f(\chi)=2-2e^{\chi}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μέθοδοι υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Όταν έχεις να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ θεωρείται δεδομένο το διάστημα στο οποίο «λειτουργεί» η f, είναι το $[\alpha, \beta]$, άρα δεν χρειάζεται να βρεις το Π Ο της f, όμως πρέπει να «εξασφαλίσεις» ότι η f ***είναι συνεχής στο*** $[\alpha, \beta]$. Με αυτή την προϋπόθεση έχεις τις εξής μεθόδους υπολογισμού.

1η μέθοδος (βασική)

Υπολογίζεις το $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ ***χρησιμοποιώντας το Θ. Θ. Ο. Λ.***

Για να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ βρίσκεις πρώτα μια παράγουσα F της f υπολογίζοντας το $\int f(\chi)d\chi$ χρησιμοποιώντας όλα όσα έμαθες για το αόριστο ολοκλήρωμα και τότε θα είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \left[F(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Παραδείγματα :

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα

α) $I = \int_{2}^{5} (3\chi - 2)d\chi$ **β)** $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}\chi \, d\chi$.

Απάντηση :

α) Η συνάρτηση $f(\chi) = 3\chi - 2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 5]$ ως πολυωνυμική.

Υπολογίζεις το $\int (3\chi - 2)d\chi = 3\frac{\chi^2}{2} - 2\chi$ και είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$I=\int_2^5(3\chi-2)d\chi=\left[3\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_2^5=\left(3\frac{5^2}{2}-2\cdot5\right)-\left(3\frac{2^2}{2}-2\cdot2\right)=$$

$$\left(3\frac{25}{2}-10\right)-\left(3\frac{4}{2}-4\right)=\frac{75-20}{2}-2=27,5-2 \text{ άρα } I=25,5$$

β) Η συνάρτηση $f(\chi)=\text{συν}\chi$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Υπολογίζεις το $\int \text{συν}\chi\, d\chi=\text{ημ}\chi$ και είναι :

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{συν}\chi\, d\chi=[\text{ημ}\chi]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)-(\text{ημ}0)=1-0=1$$

2η μέθοδος

Με αλλαγή μεταβλητής

Όταν το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσεις έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $I=\int_\alpha^\beta f(g(\chi))g'(\chi)d\chi$, όπου f, g΄ συνεχείς συναρτήσεις, τότε όπως και στο αόριστο ολοκλήρωμα, θα κάνεις αλλαγή μεταβλητής, με την επί πλέον **υποχρέωση** να βρίσκεις **τα νέα άκρα (όρια) ολοκλήρωσης**

δηλαδή έστω το $I=\int_\alpha^\beta f(g(\chi))g'(\chi)d\chi$, θέτεις $u=g(\chi)$ οπότε

$du=g'(\chi)d\chi \Leftrightarrow d\chi=\frac{du}{g'(\chi)}$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$ οπότε

$I=\int_\alpha^\beta f(g(\chi))g'(\chi)d\chi=\int_{u_1}^{u_2}f(u)g'(\chi)\frac{du}{g'(\chi)} \Leftrightarrow I=\int_{u_1}^{u_2}f(u)du$ και αν F είναι μια παράγουσα της f τότε :

$$I=\int_{u_1}^{u_2}f(u)du=[F(\chi)]_{u_1}^{u_2}=F(u_2)-F(u_1).$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράδειγμα :

Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1\left(3\chi^2+1\right)^2\cdot\chi\,d\chi$.

Απάντηση :

Η παράσταση $\left(3\chi^2+1\right)^2\cdot\chi$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

θέτεις $u=3\chi^2+1$ οπότε $du=\left(3\chi^2+1\right)'d\chi=6\chi\,d\chi\Rightarrow d\chi=\frac{du}{6\chi}$ και

$u_1=3\cdot0^2+1=1$, $u_2=3\cdot1^2+1=4$ οπότε

$$I=\int_0^1\left(3\chi^2+1\right)^2\cdot\chi\,d\chi=\int_1^4 u^2\cdot\chi\frac{du}{6\chi}=\frac{1}{6}\int_1^4 u^2\,du \text{ άρα}$$

$$I=\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^4=\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{63}{3}=21\,.$$

3η μέθοδος

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν οι συναρτήσεις f, g ***είναι συνεχείς*** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με ***συνεχείς πρώτες παραγώγους*** f΄, g΄ στο ίδιο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)g'(\chi)d\chi=\left[f(\chi)g(\chi)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(\chi)g(\chi)d\chi$$

***** Παρατήρηση :***

Με βάση τις πιο πάνω μεθόδους και το ***Θ. Θ. Ο. Λ.*** μπορείς να υπολογίζεις ορισμένα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις 34 κατηγορίες υπολογισμού των αορίστων ολοκληρωμάτων.

Υπάρχουν επιπλέον 2 περιπτώσεις υπολογισμού που εφαρμόζονται ***μόνο*** στα ορισμένα ολοκληρώματα.

Περίπτωση 1η $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ όπου $f(\chi)=\begin{cases} f_1(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ f_2(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$

δηλαδή ***ολοκλήρωμα συνάρτησης πολλαπλού τύπου***.

α. Αν το $\gamma \notin [\alpha, \beta]$, πχ $\alpha < \beta < \gamma$, αυτό σημαίνει ότι ο τύπος της f είναι ο $f_1(\chi)$ οπότε, αν η f_1 είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_{\alpha}^{\beta} f_1(\chi)d\chi$ με ένα από τους γνωστούς, πλέον, τρόπους.

Όμοια αν $\gamma < \alpha < \beta$ και f_2 είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_{\alpha}^{\beta} f_2(\chi)d\chi$.

β. Αν το $\gamma \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή $\alpha < \gamma < \beta$, τότε, αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ από τον τύπο :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\gamma} f_1(\chi)d\chi + \int_{\gamma}^{\beta} f_2(\chi)d\chi .$$

* ***Ειδικά :*** Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\chi)|d\chi$ αντιμετωπίζονται με βάση αυτή την κατηγορία γιατί θεωρείς την συνάρτηση $g(\chi)=|f(\chi)|$ η οποία μετατρέπεται σε πολλαπλού τύπου όταν απαλλάξεις την παράσταση $|f(\chi)|$ από το απόλυτο οπότε $g(\chi)=\begin{cases} f(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ -f(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$ ή ανάποδα

$g(\chi)=\begin{cases} -f(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ f(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\chi)|d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi = \cdots$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα

α) $I=\int_1^3 f(\chi)d\chi$, όταν $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\chi & \text{όταν } \chi\le -2\\ 2\chi+1 & \text{όταν } \chi>-2\end{cases}$

β) $J=\int_1^4 |\chi-2|d\chi$.

Απάντηση :

α) Επειδή $-2<1<3$ άρα ο τύπος της f στο διάστημα $[1,3]$ είναι

$f(\chi)=2\chi+1$ άρα $I=\int_1^3 f(\chi)d\chi = \int_1^3 (2\chi+1)d\chi = \left[2\frac{\chi^2}{2}+\chi\right]_1^3 =$

$\left[\chi^2+\chi\right]_1^3 = (3^2+3)-(1^2+1)=12-2$ άρα $I=\int_1^3 f(\chi)d\chi = 10$.

β) Είναι $\chi-2\ge 0 \Leftrightarrow \chi\ge 2$ άρα η $f(\chi)=|\chi-2|$ γίνεται :

$f(\chi)=\begin{cases}\chi-2 & \text{όταν } \chi\ge 2\\ -\chi+2 & \text{όταν } \chi<2\end{cases}$ και επειδή $1<2<4$ άρα το

$J=\int_1^4 |\chi-2|d\chi = \int_1^2 (-\chi+2)d\chi + \int_2^4 (\chi-2)d\chi =$

$-\int_1^2 (\chi-2)d\chi + \int_2^4 (\chi-2)d\chi = -\left[\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_1^2 + \left[\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_2^4 =$

$-\left[\left(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right)\right] + \left[\left(\frac{4^2}{2}-2\cdot 4\right)-\left(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)\right] =$

$-\left[(2-4)-(1-2)\right] + \left[(8-8)-(2-4)\right] = 1+2$ άρα

$J=\int_1^4 |\chi-2|d\chi = 3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περίπτωση 2η $\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\kappa^2-\chi^2}\,d\chi$, όπου $\kappa>0$.

Προφανώς το $D_f=[-\kappa,\kappa]$ οπότε το ολοκλήρωμα έχει νόημα αν $[\alpha,\beta]\subseteq[-\kappa,\kappa]$.

Κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $\chi=\rho\cdot\eta\mu u$, οπότε

$d\chi=(\rho\cdot\eta\mu u)'\,du=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu u\,du$, οπότε για

✓ $\chi=\alpha$ θα είναι $\alpha=\kappa\cdot\eta\mu u_1\Leftrightarrow\eta\mu u_1=\dfrac{\alpha}{\kappa}$ και βρίσκεις το u_1 λύνοντας την απλή, βασική τριγωνομετρική εξίσωση στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

✓ $\chi=\beta$ θα είναι $\beta=\kappa\cdot\eta\mu u_2\Leftrightarrow\eta\mu u_2=\dfrac{\beta}{\kappa}$ και βρίσκεις το u_2 λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\kappa^2-\chi^2}\,d\chi=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\kappa^2-\kappa^2\eta\mu^2u}\,\sigma\upsilon\nu u\,du=$

$$\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\kappa^2\left(1-\eta\mu^2u\right)}\,\sigma\upsilon\nu u\,du=\int_{u_1}^{u_2}\kappa\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2u}\,\sigma\upsilon\nu u\,du=\kappa\int_{u_1}^{u_2}|\sigma\upsilon\nu u|\,\sigma\upsilon\nu u\,du.$$

Όμως στο διάστημα $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ το $\sigma\upsilon\nu u\geq 0$, οπότε «φεύγει» το απόλυτο και καταλήγεις σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής :

$$\kappa\int_{u_1}^{u_2}\sigma\upsilon\nu^2u\,du=\kappa\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2u}{2}du=\cdots.$$

Παραδείγματα :

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\chi^2}\,d\chi$.

Απάντηση :

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για το Π Ο : $1-\chi^2 \geq 0 \Rightarrow \chi^2 - 1 \leq 0$ άρα ρίζες είναι $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$,

πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 1$

$-\infty$	-1		1	$+\infty$
+		−		+

Άρα το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta = [-1, 1]$.

Είναι και $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq [-1, 1]$ άρα έχει νόημα το ολοκλήρωμα.

Κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $\chi = 1 \cdot \eta\mu u = \eta\mu u$, οπότε

$d\chi = (\eta\mu u)' \, du = \sigma\upsilon\nu u \, du$, οπότε για

✓ $\chi = 0$ θα είναι $0 = \eta\mu u_1 \Leftrightarrow u_1 = 0$.

✓ $\chi = \frac{1}{2}$ θα είναι $\frac{1}{2} = \eta\mu u_2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{\pi}{6}$

Επομένως θα είναι $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\chi^2} \, d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\eta\mu^2 u} \, \sigma\upsilon\nu u \, du =$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} |\sigma\upsilon\nu u| \, \sigma\upsilon\nu u \, du$ και επειδή στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ το $\sigma\upsilon\nu u > 0$, το

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^2 u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2u}{2} du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu 2u \, du =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} du + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2u)' \, \sigma\upsilon\nu 2u \, du = \frac{1}{2}[u]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\eta\mu 2u)' \, du =$$

$$\frac{1}{2}[u]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{2}[\eta\mu 2u]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + \frac{1}{4}\left[\eta\mu 2\frac{\pi}{6} - \eta\mu 0\right] =$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}$$ άρα $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-\chi^2} \, d\chi = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{8}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Ανίσωση

Περίπτωση 1η Όταν έχεις να αποδείξεις ανισοτική σχέση της μορφής :

$A \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le B$, όπου f συνεχής συνάρτηση και A, B $\in$ R, βρίσκεις το πεδίο τιμών, με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ ή βρίσκεις την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$, ανάλογα με το τι είναι πιο εύκολο ή ανάλογα με το τι έχεις υπολογίσει πιο πριν και στην συνέχεια ακολουθείς την «πορεία» Αν $[m, M]$ είναι το πεδίο τιμών ή m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε, σε κάθε περίπτωση θα είναι $m \le f(\chi) \le M$ άρα

$\int_{\alpha}^{\beta} m\,d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} M\,d\chi$ **(1)** και επειδή, όπως έχεις δει σε εφαρμογή μετά το **Θ.Θ.Ο.Λ.** είναι $\int_{\alpha}^{\beta} m\,d\chi = m(\beta-\alpha)$ και

$\int_{\alpha}^{\beta} M\,d\chi = M(\beta-\alpha)$ άρα η **(1)** γίνεται $m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le M(\beta-\alpha)$

Ήταν το 3ο Θέμα το 1993 Πανελλήνιες Δ Δέσμης.

Περίπτωση 2η Όταν έχεις να αποδείξεις ανισοτική σχέση της μορφής :

$\int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$, όπου f, g, h συνεχείς συναρτήσεις.

Όλο το βάρος της απόδειξης «πέφτει» στην απόδειξη της ανισότητας :

$g(\chi) \le f(\chi) \le h(\chi)$ **(1)**, όπου μπορεί να χρειαστείς, μεθόδους που έχεις μάθει προηγούμενα, πχ τριώνυμο, παραγώγους, πχ μπορεί να χρειαστεί να θεωρήσεις την συνάρτηση $\varphi(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ και να την μελετήσεις κλπ.

Οπότε μετά την απόδειξη της **(1)** και με βάση το γνωστό θεώρημα θα είναι:

$g(\chi) \le f(\chi) \le h(\chi) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

i) $2 \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5$ **i)** $\int_1^2 \ln\chi\, d\chi < \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi$

Απάντηση :

i) Η $f(\chi)=\ln\left(\chi^2+1\right)$ στο διάστημα $[1,\,2]$ είναι συνεχής και

$f'(\chi)=\left(\ln\left(\chi^2+1\right)\right)'=\frac{1}{\chi^2+1}\left(\chi^2+1\right)'=\frac{2\chi}{\chi^2+1}>0$ για κάθε $\chi \in [1,\,2]$ άρα

πεδίο τιμών το $\left[f(1),\,f(2)\right]=[2,\,5]$ άρα $2 \le \ln\left(\chi^2+1\right) \le 5$ επομένως

$\int_1^2 2\, d\chi \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le \int_1^2 5\, d\chi \Rightarrow 2(2-1) \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5(2-1)$

άρα $2 \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5$

ii) Οι $f(\chi)=\ln\chi$ και $g(\chi)=\ln\left(\chi^2+1\right)$ στο διάστημα $[1,\,2]$ είναι συνεχείς .

και για να δείξεις την σχέση που θέλεις αρκεί να δείξεις ότι

$\ln\chi < \ln\left(\chi^2+1\right) \Leftrightarrow \ln\left(\chi^2+1\right)-\ln\chi>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\chi^2+1}{\chi}\right)>0=\ln 1$ και

επειδή η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξεις ότι

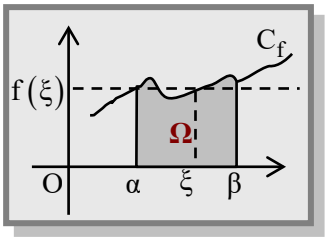
$\frac{\chi^2+1}{\chi}>0$ πράγμα που ισχύει για κάθε $\chi \in [1,\,2]$ άρα $\ln\chi < \ln\left(\chi^2+1\right) \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \ln\chi\, d\chi < \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.Ο.Λ.)

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = f(\xi)(\beta - \alpha)$.



Γεωμετρική ερμηνεία.

Αν για την **συνεχή** συνάρτηση **f** ισχύει $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.

Το Θ.Μ.Τ.Ο.Λ. «λέει» ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ έτσι ώστε το ορθογώνιο με διαστάσεις $f(\xi)$, $\beta - \alpha$, να έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο **Ω** δηλαδή είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = f(\xi)(\beta - \alpha)$.

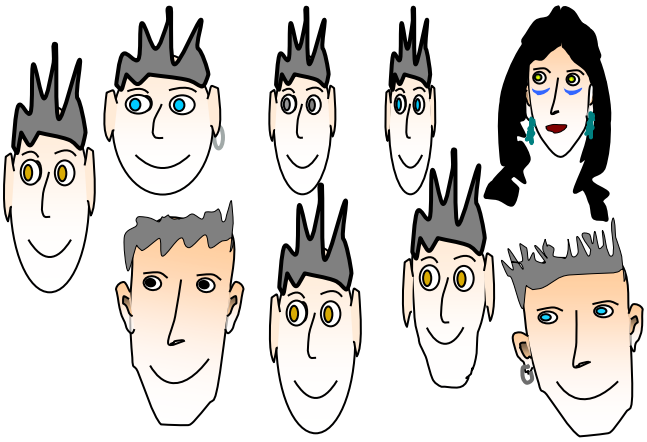
Το ύψος $f(\xi)$ του ορθογωνίου **ονομάζεται μέση τιμή της f στο** $[\alpha, \beta]$ συμβολίζεται με $\overline{\xi}$ και δίνεται από τον τύπο $f(\xi) = \overline{\xi} = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi}{\beta - \alpha}$.

Συμβουλή

Όταν δεις το φίλο σου που ξεκουράζεται . . . . .
βοήθησέ τον , μην τον αφήνεις μόνο του . . . .
οι φίλοι άλλωστε στα δύσκολα φαίνονται !
(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγουσες – Ορισμένο ολοκλήρωμα

με τις ΝΕΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ του ΥΠΑΙΠΘ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράγουσες

Ορισμός :

Έστω μια συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού ένα διάστημα **Δ**. Ονομάζεται ***αρχική συνάρτηση*** ή ***παράγουσα της*** f, κάθε συνάρτηση **F** παραγωγίσιμη στο **Δ** για την οποία ισχύει $F'(\chi)=f(\chi)$ για κάθε $\chi \in$ **Δ**.

Παράδειγμα :

Έστω οι $F(\chi)=\frac{\chi^4}{2}+5$, $G(\chi)=\frac{\chi^4}{2}-11$, $f(\chi)=2\chi^3$. Παρατήρησε ότι :

✓ $F'(\chi)=\left(\frac{\chi^4}{2}+5\right)'=\frac{4\chi^3}{2}=2\chi^3=f(\chi)$, άρα η F είναι μια παράγουσα της f.

✓ $G'(\chi)=\left(\frac{\chi^4}{2}-11\right)'=\frac{4\chi^3}{2}=2\chi^3=f(\chi)$, άρα η G είναι, ***επίσης*** μια παράγουσα της f

Θεώρημα :

Αν **F** είναι μία αρχική συνάρτηση της **f,** τότε κάθε συνάρτηση **G** της μορφής $\mathbf{G(\chi)=F(\chi)+c}$ είναι επίσης μια αρχική συνάρτηση της **f** και αντίστροφα κάθε αρχική συνάρτηση **G** της **f** θα είναι οπωσδήποτε της μορφής $\mathbf{G(\chi)=F(\chi)+c}$.

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

1. Η συνάρτηση $(F+G)(\chi)$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $(f+g)(\chi)$

2. Η συνάρτηση $\lambda\cdot F(\chi)$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $\lambda\cdot f(\chi)$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις :

α. Η διαδικασία, για να βρεις την παράγουσα μιας συνάρτησης είναι αντίστροφη διαδικασία από αυτή της παραγώγισης.

β. Αν η συνάρτηση **f** είναι ***συνεχής στο διάστημα*** **Δ** τότε υπάρχει ***πάντα*** η **F,** (η παράγουσα της f).

** ***Προσοχή :*** ***Η παράγουσα F*** μια συνεχούς συνάρτησης **f** , αυτή που πάντα υπάρχει, ***δεν εκφράζεται***

πάντα με βάση απλές, γνωστές μας συναρτήσεις.

Παραδείγματα συναρτήσεων που οι παράγουσες τους δεν εκφράζονται με βάση στοιχειώδεις

συναρτήσεις (πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές κλπ) είναι : όταν η $f(\chi)=e^{f(\chi)}$,

$f(\chi)=\frac{\eta\mu\alpha\chi}{\beta\chi}$,

$f(\chi)=\frac{1}{\ln\chi}$ και άλλες.

Με άλλα λόγια, όπως θα δεις και πιο κάτω, ***μπορούμε να βρίσκουμε μόνο τις παράγουσες για τις οποίες έχουμε αναπτύξει τρόπους*** για τον υπολογισμό τους.

Αυτό φίλε μαθητή δεν πρέπει να σε ανησυχεί καθόλου, το αντίθετο, ***οι παράγουσες που θα σου ζητήσουν να υπολογίσεις, θα υπολογίζονται οπωσδήποτε και θα υπολογίζονται με βάση έναν από τους τρόπους (μεθόδους) που ακολουθούν.***

Πίνακες παραγουσών

Όταν έχεις να υπολογίσεις μια παράγουσα **F** της **f**, χρησιμοποιώντας τις πάνω ιδιότητες 1) και 2) καθώς και τις γνώσεις σου από τις παραγώγους.

Ο πιο κάτω πίνακας συνδέει τις βασικές συναρτήσεις με τις παράγουσες τους.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αόριστη συνάρτηση	
Συνάρτηση	**Παράγουσα**
$f(\chi)=0$	$F(\chi)=c\,,\ \chi\in R$
$f(\chi)=1$	$F(\chi)=\chi+c$
$f(\chi)=\chi^{\alpha}$	$F(\chi)=\dfrac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$f(\chi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\chi}}$	$F(\chi)=\sqrt{\chi}+c$
$f(\chi)=\alpha^{\chi}$	$F(\chi)=\dfrac{\alpha^{\chi}}{\ln\alpha}+c$
$f(\chi)=\text{συν}\chi$	$F(\chi)=\text{ημ}\chi+c$
$f(\chi)=\text{ημ}\chi$	$F(\chi)=-\text{συν}\chi+c$
$f(\chi)=\dfrac{1}{\text{συν}^2\chi}$	$F(\chi)=\text{εφ}\chi+c$
$f(\chi)=-\dfrac{1}{\text{ημ}^2\chi}$	$F(\chi)=-\text{σφ}\chi+c$
$f(\chi)=e^{\chi}$	$F(\chi)=e^{\chi}+c$
$f(\chi)=\dfrac{1}{\chi}$	$F(\chi)=\ln\lvert\chi\rvert+c$

✓ Οι πιο πάνω ***τύποι ισχύουν σε κάθε κατάλληλο διάστημα*** που οι συναρτήσεις και ***οι παραστάσεις*** που εμφανίζονται να ***έχουν νόημα***.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Όπως και με τις παραγώγους έτσι και στις παράγουσες, οι πιο πολλές περιπτώσεις δεν αφορούν απλές συναρτήσεις, όπως αυτές του πιο πάνω πίνακα, αλλά σύνθετες συναρτήσεις δηλαδή έχεις να υπολογίσεις παράγουσες παραστάσεων της μορφής $f(g(\chi))g'(\chi)$ πχ αντί για την παράγουσα της $f(\chi)=\chi^{\alpha}$, έχεις να υπολογίσεις την παράγουσα της $f(\chi)=[g(\chi)]^{\alpha}\cdot g'(\chi)$.

Ο πιο κάτω πίνακας συνδέει μερικές σύνθετες συναρτήσεις με τις παράγουσες τους.

Σύνθετη συνάρτηση	
Συνάρτηση	**Παράγουσα**
$f(\chi)=g'(\chi)h(\chi)+g(\chi)h'(\chi)$	$F(\chi)=g(\chi)h(\chi)+c$
$f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)h(\chi)-g(\chi)h'(\chi)}{[h(\chi)]^2}$	$F(\chi)=\dfrac{g(\chi)}{h(\chi)}+c$
$f(\chi)=[g(\chi)]^{\alpha}g'(\chi)$	$F(\chi)=\dfrac{g(\chi)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ \chi\in R$
$f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{2\sqrt{g(\chi)}}$ με $g(\chi)>0$	$F(\chi)=\sqrt{g(\chi)}+c$
$f(\chi)=\alpha^{g(\chi)}g'(\chi)\quad \alpha>0$	$F(\chi)=\dfrac{\alpha^{g(\chi)}}{\ln\alpha}+c$
$f(\chi)=[\text{συν}(g(\chi))]g'(\chi)$	$F(\chi)=\text{ημ}(g(\chi))+c$
$f(\chi)=[g(\text{συν}\chi)]\cdot\text{ημ}\chi$	$F(\chi)=G(\text{συν}\chi)+c$, όπου G η παράγουσα της g
$f(\chi)=[\text{ημ}(g(\chi))]g'(\chi)$	$F(\chi)=-\text{συν}(g(\chi))+c$
$f(\chi)=[g(\text{ημ}\chi)]\cdot\text{συν}\chi$	$F(\chi)=G(\text{ημ}\chi)+c$, όπου G η παράγουσα της g

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2(g(\chi))}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(g(\chi))}\cdot g'(\chi)$	$F(\chi)=\varepsilon\varphi(g(\chi))+c$
$f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{\eta\mu^2(g(\chi))}=\dfrac{1}{\eta\mu^2(g(\chi))}\cdot g'(\chi)$	$F(\chi)=-\sigma\varphi(g(\chi))+c$
$f(\chi)=e^{g(\chi)}\cdot g'(\chi)$	$F(\chi)=e^{g(\chi)}+c$
$f(\chi)=g'(e^{\chi})\cdot e^{\chi}$	$F(\chi)=G(e^{\chi})+c$, όπου G η παράγουσα της g
$f(\chi)=\dfrac{1}{g(\chi)}g'(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{g(\chi)}$	$F(\chi)=\ln\lvert g(\chi)\rvert+c$
$f(\chi)=g'(\ln\chi)\cdot\dfrac{1}{\chi}$	$F(\chi)=G(\ln\chi)+c$, όπου G η παράγουσα της g

Υπολογισμός - εύρεση παράγουσας.

Στις ασκήσεις θα ακολουθείς την εξής διαδικασία :

Προσδιορίζεις πάνω – κάτω την παράγουσα, από την οποία προέρχεται η (βασική όχι η σύνθετη) συνάρτηση, δηλαδή προσδιορίζεις με βάση την εμπειρία σου, την συνάρτηση F από την οποία υπολογίζεις ότι «θα πρέπει» να έχει προκύψει η f οπότε **γράφεις :**

Παρατηρώ ότι : $(F(\chi))'=\cdots f(\chi)$.

Προσοχή : Παρακάτω αναφέρονται πολλές περιπτώσεις υπολογισμού παραγουσών οι οποίες δεν αναφέρονται στον «κλασικό» πίνακα με τις παράγουσες βασικών (απλών) συναρτήσεων, όμως οι διαδικασίες αυτές ***καταλήγουν πάντα σε τύπο*** που υπάρχει στον πιο πάνω πίνακα και αποτελούν ***μέθοδο***. Πρέπει να σου επισημάνω ότι όταν τις χρησιμοποιείς θα πρέπει να

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γράφεις με ακρίβεια ολόκληρη τη διαδικασία, όπως θα δεις και στα παραδείγματα πιο κάτω, χωρίς περικοπές και παραλείψεις, αλλιώς δεν θα θεωρείται πλήρως «τεκμηριωμένη» η απάντηση σου.

Ακολουθούν οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις αναλυτικά, με απλά παραδείγματα.

1. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi) = 2\chi\eta\mu\chi + \chi^2\sigma\upsilon\nu\chi$.

Απάντηση :

Η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi\eta\mu\chi + \chi^2\sigma\upsilon\nu\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από το γινόμενο $\chi^2\eta\mu\chi$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\chi^2\eta\mu\chi\right)' = \left(\chi^2\right)'\eta\mu\chi + \chi^2\left(\eta\mu\chi\right)' = 2\chi\eta\mu\chi + \chi^2\sigma\upsilon\nu\chi$ άρα η παράγουσα της

$f(\chi) = 2\chi\eta\mu\chi + \chi^2\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι η $F(\chi) = \chi^2\eta\mu\chi + c$, $c \in R$.

2. Η παράσταση $\dfrac{f'(\chi)g(\chi) - f(\chi)g'(\chi)}{\left[g(\chi)\right]^2}$ έχει παράγουσα την

$$F(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)} + c,\ c \in R.$$

Ειδικά Η $f(\chi) = \dfrac{-g'(\chi)}{\left[g(\chi)\right]^2}$ έχει παράγουσα την $F(\chi) = \dfrac{1}{g(\chi)} + c$, $c \in R$

– Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων.

i) $f(\chi) = \dfrac{2\chi - \chi^2}{e^\chi}$ **ii)** $f(\chi) = \dfrac{-2\chi}{\left(\chi^2 + 3\right)^2}$.

Απάντηση :

i) Η συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{2\chi - \chi^2}{e^\chi}$ πρέπει να έχει προκύψει από το πηλίκο $\dfrac{\chi^2}{e^\chi}$ μετά από απλοποιήσεις,

οπότε γράφεις :

Λιβαδειά

Παρατηρώ

ότι $\left(\frac{\chi^2}{e^\chi}\right)' = \frac{\left(\chi^2\right)' e^\chi - \chi^2\left(e^\chi\right)'}{\left(e^\chi\right)^2} = \frac{2\chi e^\chi - \chi^2 e^\chi}{e^{2\chi}} = \frac{e^\chi\left(2\chi - \chi^2\right)}{e^{2\chi}} = \frac{2\chi - \chi^2}{e^\chi}$ άρα η παράγουσα της $f(\chi) = \frac{2\chi - \chi^2}{e^\chi}$ είναι η $F(\chi) = \frac{\chi^2}{e^\chi} + c$, $c \in R$.

ii) Η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2}$ πρέπει να έχει προκύψει από το πηλίκο $\frac{1}{\chi^2+3}$, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\frac{1}{\chi^2+3}\right)' = \frac{-\left(\chi^2+3\right)'}{\left(\chi^2+3\right)^2} = \frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2}$ άρα η παράγουσα της

$f(\chi) = \frac{-2\chi}{\left(\chi^2+3\right)^2}$ είναι η

$$F(\chi) = \frac{1}{\chi^2+3} + c,\ c \in R.$$

3. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων
i) $f(\chi) = 3\chi^7$, **ii)** $f(\chi) = 3\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$.

Απάντηση :

i) Η παράσταση χ^7 πρέπει να έχει προκύψει από την χ^8, ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι : $\left(\chi^8\right)' = 8\chi^7 \Leftrightarrow 3\chi^7 = \left(\frac{3\chi^8}{8}\right)'$, άρα η παράγουσα της

$f(\chi) = 3\chi^7$ είναι η $F(\chi) = \frac{3\chi^8}{8} + c$, $c \in R$.

ii) Η παράσταση $\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ πρέπει να έχει προκύψει από την $\eta\mu^3\chi$, ***οπότε γράφεις***: **Παρατηρώ** ότι : $\left(\eta\mu^3\chi\right)' = 3\eta\mu^2\chi \cdot (\eta\mu\chi)' = 3\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\left(\dfrac{\eta\mu^3\chi}{3}\right)'$ άρα η παράγουσα της $f(\chi)=3\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι η

$F(\chi)=\dfrac{\eta\mu^3\chi}{3}+c,\ c\in R.$

4. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων

i) $f(\chi)=\sqrt[4]{\chi^7}$, **ii)** $f(\chi)=\sqrt[5]{\left(\chi^3+2\right)^2}\chi^2$.

Απάντηση :

i) $f(\chi)=\sqrt[4]{\chi^7}=\chi^{\frac{7}{4}}$ άρα παράγουσα η $F(\chi)=\dfrac{\chi^{\frac{7}{4}+1}}{\frac{7}{4}+1}=\dfrac{\chi^{\frac{11}{4}}}{\frac{11}{4}}=\dfrac{4}{11}\chi^{\frac{11}{4}}+c$

ii) Σύμφωνα με αυτά που «λέγαμε» πριν ***γράφεις :***

Είναι : $f(\chi)=\sqrt[5]{\left(\chi^3+2\right)^2}\chi^2=\left(\chi^3+2\right)^{\frac{2}{5}}\dfrac{1}{3}3\chi^2$ δηλαδή η f είναι της μορφής

$f(\chi)=\left[g(\chi)\right]^{\alpha}g'(\chi)$ με $g(\chi)=\chi^3+2$ άρα με βάση τον «ανεπίσημο» πίνακα σύνθετων συναρτήσεων πρέπει να έχει προκύψει από την

$F(\chi)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\left(\chi^3+2\right)^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}=\dfrac{5}{21}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}}$ ***οπότε γράφεις :***

Παρατηρώ ότι :

$$\left[\frac{5}{21}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}}\right]'=\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{21}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}-1}\left(\chi^3+2\right)'=\frac{1}{3}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7-5}{5}}3\chi^2=\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7-5}{5}}\chi^2$$

άρα η παράγουσα της $f(\chi)=\sqrt[5]{\left(\chi^3+2\right)^2}\chi^2$ είναι η $F(\chi)=\dfrac{5}{21}\left(\chi^3+2\right)^{\frac{7}{5}}+c$,

$c\in R.$

5. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων

i) $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu^2\chi$, **ii)** $f(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\ln\chi)}{\chi}$ **ii)** $f(\chi)=\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\right)\eta\mu\chi$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

i) Για την $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu^2\chi$ θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο του διπλασίου τόξου :

$\sigma\upsilon\nu^2\chi=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi+1}{2}$ άρα

$f(\chi)=\sigma\upsilon\nu^2\chi=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi+1}{2}=\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi+\dfrac{1}{2}$, επομένως έχει να βρεις την παράγουσα του $\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi$ και

την παράγουσα του $\dfrac{1}{2}$. ***Οπότε γράφεις :*** Παρατηρώ ότι :

$(\eta\mu 2\chi)'=(\sigma\upsilon\nu 2\chi)(2\chi)'=2\sigma\upsilon\nu 2\chi$ άρα

$\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi=\dfrac{\eta\mu 2\chi}{4}$ και $\left(\dfrac{1}{2}\chi\right)'=\dfrac{1}{2}$ επομένως παράγουσα της $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu^2\chi$ είναι η

$F(\chi)=\dfrac{\eta\mu 2\chi}{4}+\dfrac{1}{2}\chi+c,\ c\in R$.

ii) Η $f(\chi)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\ln\chi)}{\chi}$ έχει προκύψει από την $\eta\mu(\ln\chi)$ οπότε «πράττεις» αναλόγως.

iii) Η $f(\chi)=\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\right)\eta\mu\chi=\sigma\upsilon\nu^2\chi\cdot\eta\mu\chi+2\eta\mu\chi$ οπότε βρίσκεις την παράγουσα της $\sigma\upsilon\nu^2\chi\cdot\eta\mu\chi$ που είναι η $-\dfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu^3\chi$ και την παράγουσα της $2\eta\mu\chi$ που είναι η $-2\sigma\upsilon\nu\chi$, μόνο που πρέπει να τα γράψεις και με τον τρόπο που σου έχω υποδείξει.

6. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων

i) $f(\chi)=\eta\mu^2\chi$, **ii)** $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu(\eta\mu\chi)\sigma\upsilon\nu\chi$ **ii)** $f(\chi)=\left(\eta\mu\left(\chi^3+1\right)\right)\chi^2$.

Απάντηση :

i) Για την $f(\chi)=\eta\mu^2\chi$ θα χρησιμοποιήσεις τον τύπο του διπλασίου τόξου :

$\eta\mu^2\chi=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2}$ άρα . . .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) Η $f(\chi)=\text{συν}(\text{ημ}\chi)\text{συν}\chi$ έχει προκύψει από την $\text{ημ}(\text{ημ}\chi)$ οπότε «πράττεις» αναλόγως.

iii) Η $f(\chi)=\left(\text{ημ}\left(\chi^3+1\right)\right)\chi^2$ έχει προκύψει από την $\left[-\frac{1}{3}\text{συν}\left(\chi^3+1\right)\right]$ οπότε «πράττεις» αναλόγως.

7. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων

i) $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\text{συν}^2\left(\chi^2+3\right)}$, **ii)** $f(\chi)=\dfrac{1}{\text{ημ}^2 3\chi}$.

Απάντηση :

i) Η $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\text{συν}^2\left(\chi^2+3\right)}$ είναι της μορφής $f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{\text{συν}^2\left(g(\chi)\right)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

ii) Η $f(\chi)=\dfrac{1}{\text{ημ}^2 3\chi}$ είναι της μορφής $f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{\text{ημ}^2\left(g(\chi)\right)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

8. Να υπολογισθούν σε κάθε περίπτωση οι παράγουσες των συναρτήσεων

i) $f(\chi)=\alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda}$, **ii)** $f(\chi)=\dfrac{2^{2\chi+3}}{9^{\chi}}$.

Απάντηση :

i) Η $f(\chi)=\alpha^{\kappa\cdot\chi+\lambda}$ είναι της μορφής $f(\chi)=\alpha^{g(\chi)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

ii) Η $f(\chi)=\dfrac{2^{2\chi+3}}{9^{\chi}}=\dfrac{2^{2\chi}\cdot 2^3}{\left(3^2\right)^{\chi}}=8\dfrac{2^{2\chi}}{3^{2\chi}}=8\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\chi}$ είναι της μορφής

$f(\chi)=8\cdot\alpha^{g(\chi)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{\chi^3}{\chi^4+2}$.

Απάντηση :

Είναι $\dfrac{\chi^3}{\chi^4+2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\left(\chi^4+2\right)'}{\chi^4+2}$ άρα είναι της μορφής $f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{g(\chi)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα
σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

10. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\varepsilon\varphi\chi$.

Απάντηση :

Η $f(\chi)=\varepsilon\varphi\chi=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}=\dfrac{(-\sigma\upsilon\nu\chi)'}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ άρα είναι της μορφής $f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{g(\chi)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

11. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\sigma\varphi\chi$.

Απάντηση :

Η $f(\chi)=\sigma\varphi\chi=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}=\dfrac{(\eta\mu\chi)'}{\eta\mu\chi}$ άρα είναι της μορφής $f(\chi)=\dfrac{g'(\chi)}{g(\chi)}$ οπότε χρησιμοποιείς τον πίνακα σύνθετων συναρτήσεων και γράφεις αναλόγως.

12. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi^\mu}}$.

Απάντηση :

Αρχικά γράφεις το $\sqrt[\nu]{\chi^\mu}=\chi^{\frac{\mu}{\nu}}$ $\sqrt[\nu]{\chi^\mu}=\chi^{\frac{\mu}{\nu}}$ οπότε $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{\chi^\mu}}=P(\chi)\chi^{-\frac{\mu}{\nu}}$,

στη συνέχεια εφαρμόζεις την επιμεριστική ιδιότητα κάνοντας πράξεις (ανοίγεις την παρένθεση) και . . . τα γνωστά

Π. χ. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{\left(\chi^4-2\chi^3+5\chi-2\right)}{\sqrt[3]{\chi^4}}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση : $f(\chi)=\dfrac{\left(\chi^4-2\chi^3+5\chi-2\right)}{\sqrt[3]{\chi^4}}=f(\chi)=\left(\chi^4-2\chi^3+5\chi-2\right)\chi^{-\frac{4}{3}}=$

$\chi^{\frac{8}{3}}-2\chi^{\frac{5}{3}}+5\chi^{-\frac{1}{3}}-2\chi^{-\frac{4}{3}}$

οπότε τα γνωστά . . .

13. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$.

Ότι ακολουθεί αφορά περιπτώσεις που δεν έχουν προαναφερθεί σε προηγούμενη διαδικασία και το $Q(\chi)$ παραγοντοποιείται και γράφεται

$Q(\chi)=(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)\cdots(\chi-\chi_\nu)$

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μικρότερου βαθμού από το $Q(\chi)$, μέσα από την ισότητα $\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\dfrac{\alpha_1}{\chi-\chi_1}+\dfrac{\alpha_2}{\chi-\chi_2}+\cdots+\dfrac{\alpha_\nu}{\chi-\chi_\nu}$, βρίσκεις τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ οπότε : η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ προκύπτει ως άθροισμα των παραγουσών των :

$f_1(\chi)=\dfrac{\alpha_1}{\chi-\chi_1}, f_2(\chi)=\dfrac{\alpha_2}{\chi-\chi_2}, \cdots, f_\nu(\chi)=\dfrac{\alpha_\nu}{\chi-\chi_\nu}$ πχ η παράγουσα της

$f_1(\chi)=\dfrac{\alpha_1}{\chi-\chi_1}$ είναι

(σύμφωνα με τον πίνακα παράγουσες σύνθετων συναρτήσεων) είναι η $F_1(\chi)=\alpha_1\ln|\chi-\chi_1|$.

✓ Αν το $P(\chi)$ είναι μεγαλύτερου βαθμού από το $Q(\chi)$ τότε <u>πρώτα εκτελείς τη διαίρεση</u> $P(\chi):Q(\chi)$ και βρίσκεις τα $\pi(\chi)$ και $\upsilon(\chi)$ οπότε θα είναι $P(\chi)=Q(\chi)\pi(\chi)+\upsilon(\chi)\Leftrightarrow\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\pi(\chi)+\dfrac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}$ άρα το

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

πρόβλημα μετατίθεται στην εύρεση της παράγουσας της $g(\chi)=\pi(\chi)$ και

της $f(\chi)=\dfrac{\upsilon(\chi)}{Q(\chi)}$ δηλαδή ξαναγυρνάς στο προηγούμενο «πρόβλημα».

Π. χ. Να υπολογισθεί η παράγουσα της $f(\chi)=\dfrac{3\chi-13}{\chi^2-4\chi+3}$

Απάντηση : Είναι $\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$ άρα

$\dfrac{3\chi-13}{\chi^2-4\chi+3}=\dfrac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}$, βρίσκεις τους

αριθμούς : α_1 , α_2 από την ισότητα $\dfrac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}=\dfrac{\alpha_1}{\chi-1}+\dfrac{\alpha_2}{\chi-3}\Leftrightarrow$

$$\frac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{\alpha_1\cdot\chi-3\alpha_1+\alpha_2\cdot\chi-\alpha_2}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\chi-3\alpha_1-\alpha_2}{(\chi-1)(\chi-3)}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3\\-3\alpha_1-\alpha_2=-13\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1-3\alpha_1+13=3\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\alpha_1=-10\\\alpha_2=-3\alpha_1+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=5\\\alpha_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\frac{3\chi-13}{(\chi-1)(\chi-3)}=\frac{5}{\chi-1}-\frac{2}{\chi-3}$$

Άρα η παράγουσα της f προκύπτει ως άθροισμα των παραγουσών των :

$f_1(\chi)=\dfrac{5}{\chi-1}$, $f_2(\chi)=-\dfrac{2}{\chi-3}$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός

Έστω μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f. Αν θεωρήσεις τα σημεία $\alpha = \chi_0, \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu = \beta$, τότε έχεις χωρίσει το $[\alpha, \beta]$ σε ν τμήματα με μήκος (το καθένα) $\Delta_\chi = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.

Κάθε τμήμα έχει την μορφή $[\chi_\kappa, \chi_{\kappa+1}]$ και αν θεωρήσεις ένα τυχαίο αριθμό $\xi_\kappa \in [\chi_\kappa, \chi_{\kappa+1}]$, σε κάθε ένα από αυτά τότε μπορείς να σχηματίσεις το άθροισμα : $S_\nu = f(\xi_1)\Delta_\chi + f(\xi_2)\Delta_\chi + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta_\chi =$

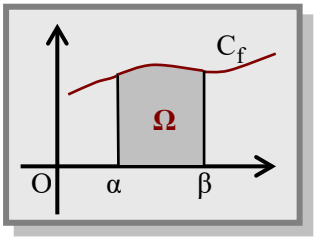
$$\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu)\right)\Delta_\chi \Leftrightarrow \boxed{S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta_\chi}.$$

Αποδεικνύεται ότι το $\boxed{\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu = \lim\limits_{\nu \to +\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta_\chi\right)}$ υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και **δεν εξαρτάται** από την επιλογή του $\xi_\kappa \in [\chi_\kappa, \chi_{\kappa+1}]$.

Το όριο αυτό ονομάζεται **ολοκλήρωμα της f από το α ως το β** και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$, δηλαδή είναι $\boxed{\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = \lim\limits_{\nu \to +\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta_\chi\right)}$.

Γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος.

Αν για την **συνεχή** συνάρτηση **f** ισχύει $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ τότε το $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$ εκφράζει το ***εμβαδόν του χωρίου Ω*** που ***περικλείεται*** από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.



Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις :

- ✓ Στο σύμβολο $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$, τα α και β καλούνται **άκρα ή όρια της ολοκλήρωσης**.
- ✓ Το **χ** που εμφανίζεται στο dχ ονομάζεται **μεταβλητή ολοκλήρωσης** και είναι μια απλή μεταβλητή, με την έννοια ότι **δεν επηρεάζει** καθόλου το τελικό αποτέλεσμα, επομένως μπορείς να αλλάζεις χωρίς πρόβλημα τη μεταβλητή μέσα στο ολοκλήρωμα έτσι έχεις το πιο κάτω αποτέλεσμα :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du.$$

- ✓ Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ **είναι σταθερός πραγματικός αριθμός** και ***εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση* f *και από τα άκρα*** **α** και **β**.

Ιδιότητες.

i. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ολοκληρώσιμη μια συνάρτηση f σε ένα διάσημα $[\alpha, \beta]$ είναι να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Όταν χρησιμοποιείς το σύμβολο $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ εννοείται ότι **α < β**.

iii. Αν α = β τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(\chi)d\chi = 0$.

iv. Αν α > β τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = -\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi$.

v. Αν **f συνεχής** συνάρτηση και ισχύει $f(\chi) \geq 0$, για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \geq 0$.

Το ίσον ισχύει ***μόνον*** αν $f(\chi) = 0$ ***για κάθε*** $\chi \in [\alpha, \beta]$.

Αν ***επιπλέον*** για την συνάρτηση f εξασφαλιστεί ότι δεν είναι παντού μηδέν (δηλαδή αν βρεις ένα τουλάχιστον χ_0 ώστε $f(\chi_0) \neq 0$) δηλαδή ***αν υπάρχει***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

έστω και ένα $\chi_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) \neq 0$ τότε $f(\chi) \geq 0 \Rightarrow$

$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi > 0$.

vi. Αν **f** και **g** είναι **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και λ, μ ∈ R τότε :

α. $\int_\alpha^\beta \lambda \cdot f(\chi)d\chi = \lambda \cdot \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$ και

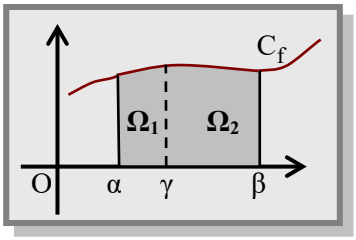
β. $\int_\alpha^\beta (\lambda \cdot f(\chi) + \mu \cdot g(\chi))d\chi = \lambda \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi + \mu \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$

vii. Αν **f συνεχής** συνάρτηση σε διάστημα **Δ** και **α, β, γ ∈ Δ** τότε

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = \int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi + \int_\gamma^\beta f(\chi)d\chi .$$

Προσοχή το Δ είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

Γεωμετρική ερμηνεία της ιδιότητας **vii**.



Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $f(\chi) \geq 0$,

α, β, γ ∈ Δ με **α < γ < β** και **Ω** είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_f, τον χ΄χ και τις ευθείες **χ = α, χ = β** , **Ω1** και **Ω2** τα χωρία στα οποία η **χ = γ** χωρίζει το **Ω,** δες σχήμα πιο πάνω, τότε η σχέση :

$\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = \int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi + \int_\gamma^\beta f(\chi)d\chi$ γεωμετρικά σημαίνει ότι

$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$.

Η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt \geq 0$.

Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α ∈ Δ τότε αποδεικνύεται το Θεώρημα :

Η συνάρτηση $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή

$$F'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi).$$

Παρατηρήσεις.

i. **Το** $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ είναι **αριθμός** ενώ το $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι **συνάρτηση**.

ii. **Το** $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι **συνάρτηση με μεταβλητή το χ,** ενώ το **t** που εμφανίζεται στο **dt** **είναι και λέγεται μεταβλητή ολοκλήρωσης** με αποτέλεσμα κάθε άλλο γράμμα που εμφανίζεται **μέσα** στο ολοκλήρωμα θεωρείται (και λειτουργεί) ως σταθερά, Πχ αν έχεις : $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \kappa\cdot f(\lambda\cdot t)dt$ τότε τα κ και λ είναι σταθερές και το χ επίσης είναι σταθερό, αν εκτός από άκρο στο $\int_{\alpha}^{\chi}$ υπάρχει και μέσα στο $\int_{\alpha}^{\chi}$ πχ στην $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \chi\cdot f(t)dt$, το χ θεωρείται σταθερό και επομένως $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} \chi\cdot f(t)dt=\chi\cdot\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$

iii. Στο $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ αν $\boldsymbol{\alpha\leq\beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\leq\chi\leq\beta}$**,** ενώ αν $\boldsymbol{\alpha\geq\beta}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = -\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi$ οπότε $\boldsymbol{\beta\leq\chi\leq\alpha}$**.** Στο σύμβολο $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ θα πρέπει να κάνεις υποθέσεις αν $\boldsymbol{\chi>\alpha}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\leq t\leq\chi}$ ενώ αν $\boldsymbol{\chi<\alpha}$ τότε $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = -\int_{\chi}^{\alpha} f(t)dt$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

και επομένως $\chi \le t \le \alpha$ και προφανώς αν $\chi = \alpha$ τότε $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$

οπότε δεν χρειάζεται να εξετάσεις το t.

Παραδείγματα :

i) Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων :

α) $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ **β)** $G(t) = \int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi$ **γ)** $H(\chi) = \int_{-\pi}^{\chi} \sigma\upsilon\nu 3t\, dt$.

Απάντηση :

α) $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ άρα $F'(\chi) = \left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = f(\chi)$

β) $G(t) = \int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi$ άρα $G'(t) = \left(\int_{2007}^{t} (\ln\chi + 1)d\chi\right)' = \ln t + 1$

γ) $H(\chi) = \int_{-\pi}^{\chi} \sigma\upsilon\nu 3t\, dt$ άρα $H'(\chi) = \left(\int_{-\pi}^{\chi} \sigma\upsilon\nu 3t\, dt\right)' = \sigma\upsilon\nu 3\chi$

Όπως ήδη ξέρεις από τον ορισμό, τις παρατηρήσεις και τα παραδείγματα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι συνάρτηση, επομένως για την F ισχύουν όλα όσα έμαθες στα προηγούμενα κεφάλαια. Δηλαδή πρέπει να βρίσκεις πεδίο ορισμού ***πάντα,*** μπορείς να βρίσκεις πρώτη, δεύτερη παράγωγο, γενικότερα μπορείς να μελετάς την F (μονοτονία κλπ) και επομένως οι ασκήσεις που θα συναντήσεις στα επόμενα θα περιστρέφονται γύρω από αυτά και είναι ***ουσιαστικά*** απλές, με την έννοια ότι ήδη έχεις λύσει τέτοιες πάρα πολλές, το μόνο που αλλάζει είναι ότι η F δεν δίνεται απευθείας μέσω κάποιου
τύπου αλλά έμμεσα , ως αρχική μιας άλλης συνάρτησης .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δες με προσοχή τις επόμενες παρατηρήσεις και παραδείγματα :

1. ***Τύπος συνάρτησης*** $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Για να βρεις το Π Ο της F βρίσκεις το Π Ο της f, το D_f .

Το Π Ο της F (D_F) θα είναι εκείνο το διάστημα $\Delta \subseteq D_f$ το οποίο ικανοποιεί τις εξής δυο

προϋποθέσεις : **α)** η f είναι συνεχής και **β)** $\alpha \in \Delta$

ii) ***Μελέτη της F*** :

Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi)$, για την δεύτερη παράγωγο της F ισχύει $F'(\chi)=f(\chi)$ άρα $F''(\chi)=f'(\chi)$ και πρέπει να προσέξεις ότι υπάρχει μόνον όταν η f είναι παραγωγίσιμη. Επομένως για να μελετήσεις τις ιδιότητες της F μελετάς τις ιδιότητες της $F'(\chi)=f(\chi)$ και τις ιδιότητες της $F''(\chi)=f'(\chi)$

iii) ***Όριο της*** F ***στο*** χ_0 $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0} F(\chi)\right)$.

Η $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο D_F, άρα συνεχής σε αυτό, επομένως $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} F(\chi)=F(\chi_0)=\int_{\alpha}^{\chi_0} f(t)dt$ δηλαδή αντικαθιστάς απλώς το χ με χ_0 στον τύπο της F και υπολογίζεις το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** που προκύπτει.

Παραδείγματα :

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to 3} F(\chi)$, αν $F(\chi)=\int_{1}^{\chi}\left(3t^2+2\right)dt$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

Η $f(\chi)=3\chi^2+2$, ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $R=(-\infty,+\infty)$ και $1\in R=(-\infty,+\infty)$ άρα $D_F=R$ και επομένως έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 3}F(\chi)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 3}F(\chi)=F(3)=\int_1^3\left(3t^2+2\right)dt$ το οποίο θα δεις πιο κάτω πως υπολογίζεται.

iv) ***Ολοκλήρωμα της*** F :

Αν χρειαστεί να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα της F χρησιμοποιείς την παραγοντική ολοκλήρωση «κλέβοντας» λίγο την περίπτωση, δηλαδή :

Έστω $F(\chi)=\int_\alpha^\chi f(t)dt$ και έστω ότι θες να βρεις το $\int_\kappa^\lambda F(\chi)d\chi$, βρίσκεις πρώτα το $\int F(\chi)d\chi$ με τον ακόλουθο τρόπο

: $\int F(\chi)d\chi=\int(\chi)'F(\chi)d\chi=\chi\cdot F(\chi)-\int\chi\cdot F'(\chi)d\chi=\chi\cdot F(\chi)-\int\chi\cdot f(\chi)d\chi$

υπολογίζεις στη συνέχεια το $\int\chi\cdot f(\chi)d\chi$ και κατόπιν υπολογίζεις το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παραδείγματα :

i) Να μελετηθεί η μονοτονία της $F(\chi)=\int_3^\chi\left(e^t+2\right)dt$ στο $[-2,1)\cup(2,5]$ και να βρεθούν τα ακρότατα της αν υπάρχουν.

Απάντηση :

✓ Προφανώς είναι $f(\chi)=e^\chi+2$ και $D_f=[-2,1)\cup(2,5]$ και η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα $[-2,1)$ και $(2,5]$ αλλά $3\in(2,5]$, άρα $D_F=\Delta=(2,5]$.

✓ Είναι $F(\chi)=\int_3^\chi\left(e^t+2\right)dt$ άρα $F'(\chi)=\left(\int_3^\chi\left(e^t+2\right)dt\right)'=e^\chi+2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή $e^{\chi} > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$, άρα $F'(\chi) = e^{\chi} + 2 > 0$, για κάθε $\chi \in \Delta$.

Επομένως η $F(\chi) = \int_3^{\chi} \left(e^t + 2\right) dt$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\chi \in \Delta$.

Επειδή η F γνησίως αύξουσα στο $(2, 5]$ και μόνο το $5 \in (2, 5]$ άρα θα

έχει μέγιστο το $F(5) = \int_3^5 \left(e^t + 2\right) dt$ το οποίο θα δεις πιο κάτω πως υπολογίζεται.

2. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi) = \int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)\,dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Αν θεωρήσεις την συνάρτηση $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)\,dt$ είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi) = \int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)\,dt = F(g(\chi))$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της F και της g.

Άρα για να βρεις το Π Ο της Φ βρίσκεις το διάστημα Δ στο οποίο **α)** η f είναι συνεχής και **β)** $\alpha \in \Delta$

βρίσκεις το D_g και σύμφωνα με αυτά που ξέρεις από το 1ο Κεφάλαιο.

Επομένως είναι: $D_{\Phi} = \left\{\chi \in \Delta \cap D_g \text{ και } g(\chi) \in \Delta\right\}$.

ii) ***Όριο της Φ στο*** χ_0 $\left(\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \Phi(\chi)\right)$

Η $\Phi(\chi) = \int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο D_{Φ}, άρα συνεχής σε αυτό,

επομένως $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \Phi(\chi) = \Phi(\chi_0) = \int_{\alpha}^{g(\chi_0)} f(t)\,dt$ δηλαδή αντικαθιστάς

απλώς το χ με χ_0 στον τύπο της Φ και υπολογίζεις το ***ορισμένο ολοκλήρωμα*** που προκύπτει.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) ***Μελέτη της*** Φ :

Αν $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ τότε η Φ είναι παραγωγίσιμη με :

$$\Phi'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt\right)'=\left[F(g(\chi))\right]'=F'(g(\chi))g'(\chi)=f(g(\chi))g'(\chi).$$

Πρέπει να προσέξεις ότι η Φ ***είναι παραγωγίσιμη μόνον όταν η*** **f** ***είναι συνεχής και η*** **g** ***παραγωγίσιμη***.

Για την δεύτερη παράγωγο της Φ λειτουργείς ανάλογα.

3. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi)=\int_{g(\chi)}^{h(\chi)} f(t)dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Βρίσκεις το διάστημα στο οποίο η f ορίζεται και είναι συνεχής, έστω το διάστημα Δ, τότε :

$$D_{\Phi}=\left\{\chi\in\Delta\cap D_g\cap D_h \text{ και } g(\chi)\in\Delta \text{ και } h(\chi)\in\Delta\right\}.$$

ii) ***Όριο της*** Φ ***στο*** χ_0 $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\Phi(\chi)\right)$

Για το όριο ισχύει ότι και στην προηγούμενη περίπτωση.

iii) ***Μελέτη της*** Φ :

Για να βρεις την παράγωγο της Φ επιλέγεις ένα αριθμό $\alpha\in D_{\Phi}$ και γράφεις :

$$\Phi(\chi)=\int_{g(\chi)}^{h(\chi)} f(t)dt=\int_{g(\chi)}^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)dt=\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)dt-\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt$$

τότε με την προϋπόθεση ότι :***η*** **f** ***είναι συνεχής και οι*** **g** ***και*** **h** ***είναι παραγωγίσιμες*** η Φ είναι παραγωγίσιμη με:

$$\Phi'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{h(\chi)} f(t)dt\right)'-\left(\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt\right)' \quad \text{άρα}$$

$$\Phi'(\chi)=f(h(\chi))h'(\chi)-f(g(\chi))g'(\chi).$$

Λιβαδειά

Στη συνέχεια μελετάς κατά τα γνωστά !!! την Φ μελετώντας την Φ΄.

** Από ότι βλέπεις, εκείνο που είναι «λίγο περίεργο» είναι το Π Ο, αλλά μην ανησυχείς, στις περισσότερες ασκήσεις ***δίνεται*** ή αναφέρεται ή «πονηρή» έκφραση: ***«με την προϋπόθεση ότι όλα τα σύμβολα έχουν νόημα»*** που σημαίνει ότι δεν ψάχνεις το Π Ο.

Παραδείγματα :

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}(3t-2)dt$.

Απάντηση :

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Θεωρείς την συνάρτηση $F(\chi)=\int_3^{\chi}(3t-2)dt$, είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}(3t-2)dt=F(\chi^2+1)$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της

$F(\chi)=\int_3^{\chi}(3t-2)dt$ και της $g(\chi)=\chi^2+1$. Έστω $f(\chi)=3\chi-2$, το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta=(-\infty,+\infty)=R$, το $3\in\Delta$ και g είναι παραγωγίσιμη στο R.

Άρα για το Π Ο της Φ απαιτείς $g(\chi)\in R \Rightarrow \chi^2+1\in R$ που ισχύει, άρα

$D_\Phi=R$.

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

$$\Phi'(\chi)=F'(\chi^2+1)=f(\chi^2+1)(\chi^2+1)'=(3(\chi^2+1)-2)\cdot 2\chi=(3\chi^2+1)2\chi$$

άρα $\Phi'(\chi)=6\chi^3+2\chi$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}\sqrt{t^2-4}\,dt$.

Απάντηση :

Θεωρείς την συνάρτηση $F(\chi)=\int_3^{\chi}\sqrt{t^2-4}\,dt$, είναι προφανές ότι η

$\Phi(\chi)=\int_3^{\chi^2+1}\sqrt{t^2-4}\,dt=F(\chi^2+1)$ δηλαδή η Φ είναι σύνθεση της

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$F(\chi)=\int_3^{\chi}\sqrt{t^2-4}\,dt$ και της $g(\chi)=\chi^2+1$

Έστω $f(\chi)=\sqrt{t^2-4}$, το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής θα προκύψει από τη λύση της ανίσωσης $t^2-4\geq 0$. Ρίζες είναι $\rho_1=-2$ και $\rho_2=2$, πίνακας προσήμου για το t^2-4

$-\infty$	-2		2	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$	

Άρα το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. Όμως $3\in[2,+\infty)$ άρα $D_{\Phi}=[2,+\infty)$.

** Καταλαβαίνεις πόσο εύκολο είναι να βρεις μονοτονία κλπ. για την Φ.

4. ***Συνάρτηση*** $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}h(\chi)f(t)dt$ ή $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)}h(\chi)f(t)dt$.

Και στις δυο περιπτώσεις η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t και αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι μέσα στο ολοκλήρωμα είναι dt άρα ότι υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα και δεν εξαρτάται από το t, είναι σταθερή ποσότητα επομένως «βγαίνει» έξω από το ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι :

$\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}h(\chi)f(t)dt=h(\chi)\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$ και

$\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{g(\chi)}h(\chi)f(t)dt=h(\chi)\int_{\alpha}^{g(\chi)}f(t)dt$ αντίστοιχα

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Για το Π Ο ισχύουν όλα όσα είπαμε πιο πάνω, δεν υπάρχει κάτι ξεχωριστό.

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

α) Αν $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$ τότε η Φ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο της $h(\chi)$ με την $F(\chi)$ και παραγωγίζεται ανάλογα.

$$\Phi'(\chi)=\left(h(\chi)\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\right)'=h'(\chi)F(\chi)+h(\chi)F'(\chi)=h'(\chi)F(\chi)+h(\chi)f(\chi)$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ή $\Phi'(\chi)=\left(h(\chi)\int_{\alpha}^{g(\chi)} f(t)dt\right)'=h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)\left[F(g(\chi))\right]'=$

$h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)F'(g(\chi))g'(\chi)$ άρα :

$$\Phi'(\chi)=h'(\chi)\left[F(g(\chi))\right]+h(\chi)f(g(\chi))g'(\chi).$$

***Πρέπει να προσέξεις ότι η Φ είναι παραγωγίσιμη μόνον όταν η* f *είναι συνεχής και οι* g, h *είναι παραγωγίσιμες*.**

Για την δεύτερη παράγωγο της Φ λειτουργείς ανάλογα.

5. ***Τύπος συνάρτησης*** $\Phi(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} h(\chi,t)f(g(\chi,t))dt$.

i) ***Πεδίο Ορισμού*** :

Τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση.

ii) ***Παράγωγος της*** Φ :

Για να μπορέσεις να βρεις την παράγωγο θα πρέπει να κάνεις αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $u=g(\chi,t)$, βρίσκεις το $du=g'(\chi,t)dt$.

Προσοχή στην $g'(\chi,t)$ όπου ***το χ είναι σταθερός αριθμός*** όπως πχ αν είναι : $u=3\chi^2+\chi\cdot t^2$ τότε

$$du=\left(3\chi^2+\chi\cdot t^2\right)'dt=\left[\left(3\chi^2\right)'+\left(\chi\cdot t^2\right)'\right]dt=\left(0+2\chi\cdot t\right)'dt=2\chi\cdot t\,dt.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού(ΘΘΟΛ)

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = G(\beta) - G(\alpha).$$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Αν η G είναι, επίσης μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in R$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{G(\chi) = F(\chi) + c}$ **(1)**

Από την **(1)**, για $\chi = \alpha$, έχεις $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = 0 + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως $\mathbf{G(\chi) = F(\chi) + c = F(\chi) + G(\alpha)}$, οπότε, για $\chi = \beta$, έχεις $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Rightarrow F(\beta) = G(\beta) - G(\alpha)$ και

επειδή $F(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = G(\beta) - G(\alpha)$.

Εφαρμογή :

Να αποδειχθεί ότι για την σταθερή συνάρτηση $f(\chi) = c$ ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \int_{\alpha}^{\beta} c\,d\chi = c(\beta - \alpha)$$

Απόδειξη :

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(\chi) = c$, μια παράγουσα της είναι η $F(\chi) = c \cdot \chi$ $\left(\text{είναι } F'(\chi) = (c \cdot \chi)' = c\right)$ οπότε από το Θ.Θ.Ο.Λ. θα είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,d\chi = F(\beta) - F(\alpha) = c \cdot \beta - c \cdot \alpha = c(\beta - \alpha).$$

Παρατηρήσεις :

i. Πολλές φορές, για να απλοποιηθούν οι εκφράσεις με ολοκληρώματα, συμβολίζεις τη διαφορά

$G(\beta)-G(\alpha)$ με $\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}=\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

ii. Το θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει και όταν $\alpha>\beta$.

Έστω $\alpha>\beta$, είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=-\int_{\beta}^{\alpha} f(\chi)d\chi=-\left[G(\chi)\right]_{\beta}^{\alpha}=$

$-\left(G(\alpha)-G(\beta)\right)=G(\beta)-G(\alpha)$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\left[G(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta}$.

iii. Σε διάφορα βιβλία, μέσα σε ασκήσεις, αλλά και σε θέματα πανελλήνιων εξετάσεων χρησιμοποιείται

και ο συμβολισμός : $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=\left[F(t)\right]_{\alpha}^{\chi}$, όπου $F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ μια παράγουσα της f.

Το «σκεπτικό» είναι το εξής : Για $\chi=\alpha$ είναι $F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0$ άρα

$F(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt+0=\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt+F(\alpha)$ άρα $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=F(\chi)-F(\alpha)\Rightarrow$

$\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt=\left[F(t)\right]_{\alpha}^{\chi}$.

iv. $f(\chi)=g(\chi)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi$. **<u>Το αντίστροφο δεν ισχύει</u>**.

Πχ $\int_{0}^{1} 2\chi d\chi=\left[\chi^{2}\right]_{0}^{1}=1^{2}-0^{2}=1$, $\int_{0}^{1} 4\chi^{3}d\chi=\left[\chi^{4}\right]_{0}^{1}=1^{4}-0^{4}=1$, δηλαδή $\int_{0}^{1} 2\chi d\chi=\int_{0}^{1} 4\chi^{3}d\chi$

προφανώς όμως $2\chi\neq 4\chi^{3}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αρχική συνάρτηση F(χ) και εύρεση της f

Υπάρχουν ασκήσεις όπου, ξέροντας μια αρχική συνάρτηση, χρειάζεται να βρεις την συνάρτηση f, είτε γιατί την ζητά η άσκηση, είτε γιατί χρειάζεται στου υπόλοιπους υπολογισμούς. Αυτές οι περιπτώσεις ενώ φαίνονται δύσκολες στην πραγματικότητα δεν είναι.

Μπορεί κανείς να διακρίνει τις ακόλουθες περιπτώσεις :

Περίπτωση 1η : Δίνεται ότι f συνεχής και $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = g(\chi) \quad (1)$. Να βρεθεί η f.

Απάντηση : Αφού η f συνεχής άρα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) είναι $\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = g'(\chi)$ άρα $f(\chi) = g'(\chi)$.

Εφαρμογή : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν $\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt = 2\chi^3 - \chi^2 + 2$.

Απάντηση : Αφού η f συνεχής άρα η $F(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα είναι

$\left(\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt\right)' = \left(2\chi^3 - \chi^2 + 2\right)'$ άρα $f(\chi) = 6\chi^2 - 2\chi$.

Περίπτωση 2η : Να βρεθεί η f όταν $f(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} g(t)dt \quad (1)$.

Απάντηση : Αρχικά θα δείχνεις ότι η g συνεχής και επομένως η $f(\chi) = \int_{\alpha}^{\chi} g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από την (1) είναι $f(\chi) = \left[G(t)\right]_{\alpha}^{\chi} = G(\chi) - G(\alpha)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εφαρμογή : Να βρεθεί η f όταν $f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt$.

Απάντηση : Η $g(\chi)=3\eta\mu\chi+1$ είναι συνεχής γιατί είναι ημιτονοειδούς μορφής.

Άρα η $f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt$ είναι παραγωγίσιμη, και επειδή η

$G(\chi)=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi$ είναι μια παράγουσα της g, θα είναι :

$$f(\chi)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}(3\eta\mu t+1)dt=\left[-3\sigma\upsilon\nu t+t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\chi}=(-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi)-\left(-3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi-\left(-3\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \text{ άρα } f(\chi)=-3\sigma\upsilon\nu\chi+\chi+\frac{3}{2}-\frac{\pi}{3}$$

Περίπτωση 3η : **α)** Δίνεται ότι f συνεχής και $f(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt \quad (1)$.

β) Δίνεται ότι f συνεχής, g παραγωγίσιμη και

$f(\chi)=g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt \quad (2)$.

Να βρεθεί η f.

Απάντηση :

α) Αφού η f συνεχής άρα η $f(\chi)=\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα από

την (1) είναι $f'(\chi)=\left(\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\right)'=f(\chi)$ άρα $f'(\chi)-f(\chi)=0$.

β) Αφού η f συνεχής και g παραγωγίσιμη άρα η $f(\chi)=g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη άρα από

την (2) είναι : $f'(\chi)=\left(g(\chi)+\int_{\alpha}^{\chi}f(t)dt\right)'=g'(\chi)+f(\chi)$ άρα

$f'(\chi)-f(\chi)=g'(\chi)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για το υπόλοιπο της άσκησης πρέπει να ακολουθήσεις τις διαδικασίες της παραγράφου με τίτλο «***Προβλήματα με την εύρεση της* f»** και υπότιτλο : «***Τι κάνεις όταν ζητάει να βρεις την συνάρτηση* f;**»,
δες και παραδείγματα.

Εφαρμογή 1 : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν $f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)dt$.

Απάντηση :

Αφού η f συνεχής άρα η $f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα

είναι $f'(\chi)=\left(3+\int_1^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi)$ άρα $f'(\chi)-f(\chi)=0$ **(1)**.

Η **(1)** είναι της μορφής $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=-1$ και $\beta(\chi)=0$, μια παράγουσα της $\alpha(\chi)=-1$ είναι η $A(\chi)=-\chi$ οπότε πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{-\chi}$ και έχεις :

$f'(\chi)-f(\chi)=0 \Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=0\cdot e^{-\chi}=0$.Επειδή

$\left(e^{-\chi}\right)'=e^{-\chi}(-\chi)'=-e^{-\chi}$ αντικαθιστάς το $-e^{-\chi}$ με $\left(e^{-\chi}\right)'$, οπότε η εξίσωση γίνεται : $e^{-\chi}f'(\chi)+\left(e^{-\chi}\right)'f(\chi)=0 \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'=0 \Leftrightarrow$

$\int\left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'d\chi=\int 0\,d\chi=0+c \Leftrightarrow f(\chi)e^{-\chi}=c \Leftrightarrow f(\chi)=c\cdot e^{\chi}$ **(2)**.

Από την σχέση $f(\chi)=3+\int_1^{\chi} f(t)dt$ για $\chi=1$ έχεις $f(1)=3+\int_1^{1} f(t)dt \Rightarrow$ $f(1)=3$.

Από την (2) για $\chi=1$ έχεις $f(1)=c\cdot e$ άρα $c\cdot e=3 \Leftrightarrow c=\frac{3}{e}$ επομένως $f(\chi)=\frac{3}{e}e^{\chi}$ άρα $f(\chi)=3\cdot e^{\chi-1}$.

Εφαρμογή 2 : Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f όταν $f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση : Αφού η f συνεχής και η $g(\chi)=2\chi$ παραγωγίσιμη άρα η $f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα είναι

$f'(\chi)=\left(2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt\right)'=f(\chi)+2$ άρα $f'(\chi)-f(\chi)=2$ **(1)**.

Η **(1)** είναι της μορφής $f'(\chi)+\alpha(\chi)f(\chi)=\beta(\chi)$ με $\alpha(\chi)=-1$ και $\beta(\chi)=2$, μια παράγουσα της $\alpha(\chi)=-1$ είναι η $A(\chi)=-\chi$ οπότε πολλαπλασιάζεις και τα δυο μέλη της εξίσωσης με $e^{-\chi}$ και έχεις :

$$f'(\chi)-f(\chi)=2 \Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=2\cdot e^{-\chi}.$$

Επειδή $\left(e^{-\chi}\right)'=e^{-\chi}(-\chi)'=-e^{-\chi}$ αντικαθιστάς το $-e^{-\chi}$ με $\left(e^{-\chi}\right)'$, οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$e^{-\chi}f'(\chi)+\left(e^{-\chi}\right)'f(\chi)=2\cdot e^{-\chi} \Leftrightarrow \left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'=2\cdot e^{-\chi} \Leftrightarrow$$

$$\int\left(f(\chi)e^{-\chi}\right)'d\chi=\int 2\cdot e^{-\chi}d\chi=\ 2\int(-\chi)'e^{-\chi}d\chi=2\cdot e^{-\chi}+c \Leftrightarrow$$

$$f(\chi)e^{-\chi}=2e^{-\chi}+c \Leftrightarrow f(\chi)=2+c\cdot e^{\chi} \quad \textbf{(2)}.$$

Από την σχέση $f(\chi)=2\chi+\int_0^{\chi} f(t)dt$ για $\chi=0$ έχεις $f(0)=0+\int_0^{0} f(t)dt \Rightarrow$ $f(0)=0$.

Από την **(2)** για $\chi=0$ έχεις $f(0)=2+c\cdot e^0=2+c$ άρα $2+c=0$ άρα $c=-2$, επομένως $f(\chi)=2-2e^{\chi}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μέθοδοι υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος

Όταν έχεις να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ θεωρείται δεδομένο το διάστημα στο οποίο «λειτουργεί» η f, είναι το $[\alpha, \beta]$, άρα δεν χρειάζεται να βρεις το Π Ο της f, όμως πρέπει να «εξασφαλίσεις» ότι η f ***είναι συνεχής στο*** $[\alpha, \beta]$. Με αυτή την προϋπόθεση έχεις τις εξής μεθόδους υπολογισμού.

1η μέθοδος (βασική)

Υπολογίζεις το $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ ***χρησιμοποιώντας το Θ. Θ. Ο. Λ.***

Για να υπολογίσεις το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$ βρίσκεις πρώτα μια παράγουσα F της f χρησιμοποιώντας όλα όσα έμαθες και τότε θα είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi = \left[F(\chi)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Π. χ. Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα $I = \int_{2}^{5} (3\chi - 2)d\chi$.

Απάντηση : Η συνάρτηση $f(\chi) = 3\chi - 2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 5]$ ως πολυωνυμική. Υπολογίζεις την παράγουσα της $3\chi - 2$ που είναι η $3\frac{\chi^2}{2} - 2\chi$ και είναι :

$$I = \int_{2}^{5} (3\chi - 2)d\chi = \left[3\frac{\chi^2}{2} - 2\chi\right]_{2}^{5} = \left(3\frac{5^2}{2} - 2\cdot 5\right) - \left(3\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) =$$

$$\left(3\frac{25}{2} - 10\right) - \left(3\frac{4}{2} - 4\right) = \frac{75-20}{2} - 2 = 27{,}5 - 2 \text{ άρα } I = 25{,}5$$

2η μέθοδος

Λιβαδειά

Με αλλαγή μεταβλητής

Όταν το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογίσεις έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $I=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(\chi)\right)g'(\chi)d\chi$, όπου f, g΄ συνεχείς συναρτήσεις, τότε , θα κάνεις αλλαγή μεταβλητής, με την επί πλέον **υποχρέωση** να βρίσκεις **τα νέα άκρα (όρια) ολοκλήρωσης** δηλαδή έστω το $I=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(\chi)\right)g'(\chi)d\chi$,

θέτεις $u=g(\chi)$ οπότε $du=g'(\chi)d\chi \Leftrightarrow d\chi=\dfrac{du}{g'(\chi)}$ και $u_1=g(\alpha)$,

$u_2=g(\beta)$ οπότε $I=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g(\chi)\right)g'(\chi)d\chi=\int_{u_1}^{u_2} f(u)g'(\chi)\dfrac{du}{g'(\chi)} \Leftrightarrow$

$I=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du$ και αν F

είναι μια παράγουσα της f τότε :

$$I=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du=\left[F(\chi)\right]_{u_1}^{u_2}=F(u_2)-F(u_1).$$

<u>Παράδειγμα</u> Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1\left(3\chi^2+1\right)^2\chi\, d\chi$.

Απάντηση : Η παράσταση $\left(3\chi^2+1\right)^2\chi$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

Θέτεις $u=3\chi^2+1$ οπότε $du=\left(3\chi^2+1\right)'d\chi=6\chi\, d\chi \Rightarrow d\chi=\dfrac{du}{6\chi}$ και

$u_1=3\cdot 0^2+1=1$, $u_2=3\cdot 1^2+1=4$ οπότε

$I=\int_0^1\left(3\chi^2+1\right)^2\cdot\chi\, d\chi=\int_1^4 u^2\cdot\chi\dfrac{du}{6\chi}=\dfrac{1}{6}\int_1^4 u^2\, du$ άρα $I=\dfrac{1}{6}\left[\dfrac{u^3}{3}\right]_1^4=$

$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4^3}{3}-\dfrac{1^3}{3}\right)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{63}{3}=\dfrac{21}{6}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3η μέθοδος

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Αν οι συναρτήσεις f, g ***είναι συνεχείς*** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με ***συνεχείς πρώτες παραγώγους*** f', g' στο ίδιο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε :

$$\int_\alpha^\beta f(\chi)g'(\chi)d\chi = [f(\chi)g(\chi)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(\chi)g(\chi)d\chi$$

***** Παρατήρηση :***

Με βάση τις πιο πάνω μεθόδους και το ***Θ. Θ. Ο. Λ.*** μπορείς να υπολογίζεις ορισμένα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις μέχρι τώρα γνώσεις σου

Υπάρχουν επιπλέον 2 περιπτώσεις υπολογισμού που ξεχωρίζουν.

Περίπτωση 1η $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$ όπου $f(\chi) = \begin{cases} f_1(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ f_2(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$

δηλαδή ***ολοκλήρωμα συνάρτησης πολλαπλού τύπου***.

α. Αν το $\gamma \notin [\alpha, \beta]$, πχ $\alpha < \beta < \gamma$, αυτό σημαίνει ότι ο τύπος της f είναι ο $f_1(\chi)$ οπότε, αν η f_1 είναι

συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_\alpha^\beta f_1(\chi)d\chi$ με ένα από τους γνωστούς, πλέον, τρόπους.

Όμοια αν $\gamma < \alpha < \beta$ και f_2 είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_\alpha^\beta f_2(\chi)d\chi$.

β. Αν το $\gamma \in [\alpha, \beta]$, δηλαδή $\alpha < \gamma < \beta$, τότε, αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, υπολογίζεις το $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$ από τον τύπο $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi = \int_\alpha^\gamma f_1(\chi)d\chi + \int_\gamma^\beta f_2(\chi)d\chi$.

* ***Ειδικά :*** Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$ αντιμετωπίζονται με

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

βάση αυτή την κατηγορία γιατί θεωρείς την συνάρτηση $g(\chi)=|f(\chi)|$ η οποία μετατρέπεται σε πολλαπλού τύπου όταν απαλλάξεις την παράσταση $|f(\chi)|$ από το απόλυτο οπότε $g(\chi)=\begin{cases} f(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ -f(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$ ή ανάποδα

$g(\chi)=\begin{cases} -f(\chi) & \text{όταν } \chi \le \gamma \\ f(\chi) & \text{όταν } \chi > \gamma \end{cases}$ άρα $\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi=\int_{\alpha}^{\beta}g(\chi)d\chi=\cdots$

Παραδείγματα :

Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα

α) $I=\int_1^3 f(\chi)d\chi$, όταν $f(\chi)=\begin{cases} \chi^2+\chi & \text{όταν } \chi \le -2 \\ 2\chi+1 & \text{όταν } \chi > -2 \end{cases}$

β) $J=\int_1^4 |\chi-2|d\chi$.

Απάντηση :

α) Επειδή $-2<1<3$ άρα ο τύπος της f στο διάστημα $[1,3]$ είναι $f(\chi)=2\chi+1$ άρα

$$I=\int_1^3 f(\chi)d\chi=\int_1^3(2\chi+1)d\chi=\left[2\frac{\chi^2}{2}+\chi\right]_1^3=\left[\chi^2+\chi\right]_1^3=$$

$(3^2+3)-(1^2+1)=12-2$ άρα

$$I=\int_1^3 f(\chi)d\chi=10 .$$

β) Είναι $\chi-2\ge 0 \Leftrightarrow \chi \ge 2$ άρα η $f(\chi)=|\chi-2|$ γίνεται :

$f(\chi)=\begin{cases} \chi-2 & \text{όταν } \chi \ge 2 \\ -\chi+2 & \text{όταν } \chi < 2 \end{cases}$ και επειδή

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$1 < 2 < 4$ άρα το $J = \int_1^4 |\chi - 2| d\chi = \int_1^2 (-\chi + 2) d\chi + \int_2^4 (\chi - 2) d\chi =$

$$-\int_1^2 (\chi - 2) d\chi + \int_2^4 (\chi - 2) d\chi = -\left[\frac{\chi^2}{2} - 2\chi\right]_1^2 + \left[\frac{\chi^2}{2} - 2\chi\right]_2^4 =$$

$$-\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2\cdot 1\right)\right] + \left[\left(\frac{4^2}{2} - 2\cdot 4\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)\right] =$$

$-[(2-4)-(1-2)] + [(8-8)-(2-4)] = 1 + 2$ άρα $J = \int_1^4 |\chi - 2| d\chi = 3.$

Περίπτωση 2η $\int_\alpha^\beta \sqrt{\kappa^2 - \chi^2}\, d\chi$, όπου $\kappa > 0$.

Προφανώς το $D_f = [-\kappa, \kappa]$ οπότε το ολοκλήρωμα έχει νόημα αν $[\alpha, \beta] \subseteq [-\kappa, \kappa]$.

Κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $\chi = \kappa \cdot \eta\mu u$, οπότε

$d\chi = (\kappa \cdot \eta\mu u)' du = \kappa \cdot \sigma\upsilon\nu u\, du$, οπότε για

- ✓ $\chi = \alpha$ θα είναι $\alpha = \kappa \cdot \eta\mu u_1 \Leftrightarrow \eta\mu u_1 = \frac{\alpha}{\kappa}$ και βρίσκεις το u_1 λύνοντας την βασική τριγωνομετρική εξίσωση στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- ✓ $\chi = \beta$ θα είναι $\beta = \kappa \cdot \eta\mu u_2 \Leftrightarrow \eta\mu u_2 = \frac{\beta}{\kappa}$ και βρίσκεις το u_2 λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως θα είναι $\int_\alpha^\beta \sqrt{\kappa^2 - \chi^2}\, d\chi = \int_{u_1}^{u_1} \sqrt{\kappa^2 - \kappa^2 \eta\mu^2 u}\, \sigma\upsilon\nu u\, du =$

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\kappa^2 (1 - \eta\mu^2 u)}\, \sigma\upsilon\nu u\, du = \int_{u_1}^{u_2} \kappa \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 u}\, \sigma\upsilon\nu u\, du = \kappa \int_{u_1}^{u_2} |\sigma\upsilon\nu u|\, \sigma\upsilon\nu u\, du.$$

Όμως στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ το $\sigma\upsilon\nu u \geq 0$, οπότε «φεύγει» το απόλυτο και καταλήγεις σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $\kappa \int_{u_1}^{u_2} \sigma\upsilon\nu^2 u\, du =$

$$\kappa \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2u}{2} du = \cdots .$$

Λιβαδειά

Παραδείγματα :

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\chi^2}\,d\chi$.

Απάντηση :

Για το Π Ο : $1-\chi^2\geq 0 \Rightarrow \chi^2-1\leq 0$ άρα ρίζες είναι $\rho_1=-1$ και $\rho_2=1$,

πίνακας προσήμου για το χ^2-1

$-\infty$	-1		1		$+\infty$
	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

Άρα το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής είναι $\Delta=[-1,1]$.

Είναι και $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subseteq[-1,1]$ άρα έχει νόημα το ολοκλήρωμα.

Κάνεις αλλαγή μεταβλητής θέτοντας ς $\chi=1\cdot\eta\mu u=\eta\mu u$, οπότε

$d\chi=(\eta\mu u)'\,du=\sigma\upsilon\nu u\,du$, οπότε για

✓ $\chi=0$ θα είναι $0=\eta\mu u_1 \Leftrightarrow u_1=0$.

✓ $\chi=\frac{1}{2}$ θα είναι $\frac{1}{2}=\eta\mu u_2 \Leftrightarrow u_2=\frac{\pi}{6}$

Επομένως θα είναι $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\chi^2}\,d\chi=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\eta\mu^2 u}\,\sigma\upsilon\nu u\,du=$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\sigma\upsilon\nu u|\,\sigma\upsilon\nu u\,du$ και επειδή στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ το $\sigma\upsilon\nu u>0$, το

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu^2 u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}du+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu 2u\,du=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}du+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2u)'\,\sigma\upsilon\nu 2u\,du=\frac{1}{2}[u]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\eta\mu 2u)'\,du=$$

$$\frac{1}{2}[u]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}[\eta\mu 2u]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)+\frac{1}{4}\left[\eta\mu 2\frac{\pi}{6}-\eta\mu 0\right]=$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\frac{1}{2}$$ άρα $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\chi^2}\,d\chi=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Ανίσωση

Περίπτωση 1η Όταν έχεις να αποδείξεις ανισοτική σχέση της μορφής :

$A \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le B$, όπου f συνεχής συνάρτηση και A, B $\in$ R, βρίσκεις το πεδίο τιμών, με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ ή βρίσκεις την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$, ανάλογα με το τι είναι πιο εύκολο ή ανάλογα με το τι έχεις υπολογίσει πιο πριν και στην συνέχεια ακολουθείς την «πορεία» Αν $[m, M]$ είναι το πεδίο τιμών ή m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε, σε κάθε περίπτωση θα είναι $m \le f(\chi) \le M$ άρα

$\int_{\alpha}^{\beta} m\,d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} M\,d\chi$ **(1)** και επειδή, όπως έχεις δει σε εφαρμογή μετά το **Θ.Θ.Ο.Λ.** είναι $\int_{\alpha}^{\beta} m\,d\chi = m(\beta-\alpha)$ και

$\int_{\alpha}^{\beta} M\,d\chi = M(\beta-\alpha)$ άρα η **(1)** γίνεται $m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le M(\beta-\alpha)$

Ήταν το 3ο Θέμα το 1993 Πανελλήνιες Δ Δέσμης.

Περίπτωση 2η Όταν έχεις να αποδείξεις ανισοτική σχέση της μορφής :

$\int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$, όπου f, g, h συνεχείς συναρτήσεις.

Όλο το βάρος της απόδειξης «πέφτει» στην απόδειξη της ανισότητας :

$g(\chi) \le f(\chi) \le h(\chi)$ **(1)**, όπου μπορεί να χρειαστείς, μεθόδους που έχεις μάθει προηγούμενα, πχ τριώνυμο, παραγώγους, πχ μπορεί να χρειαστεί να θεωρήσεις την συνάρτηση $\varphi(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ και να την μελετήσεις κλπ.

Οπότε μετά την απόδειξη της **(1)** και με βάση το γνωστό θεώρημα θα είναι:

$g(\chi) \le f(\chi) \le h(\chi) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} g(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi \le \int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

Να αποδειχθούν οι σχέσεις

i) $2 \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5$ **ii)** $\int_1^2 \ln\chi\, d\chi < \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi$

Απάντηση :

i) Η $f(\chi)=\ln\left(\chi^2+1\right)$ στο διάστημα $[1,\,2]$ είναι συνεχής και

$f'(\chi)=\left(\ln\left(\chi^2+1\right)\right)'=\frac{1}{\chi^2+1}\left(\chi^2+1\right)'=\frac{2\chi}{\chi^2+1}>0$ για κάθε $\chi \in [1,\,2]$ άρα

πεδίο τιμών το $\left[f(1),\,f(2)\right]=[2,\,5]$ άρα $2 \le \ln\left(\chi^2+1\right) \le 5$ επομένως

$\int_1^2 2\, d\chi \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le \int_1^2 5\, d\chi \Rightarrow 2(2-1) \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5(2-1)$

άρα $2 \le \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi \le 5$

ii) Οι $f(\chi)=\ln\chi$ και $g(\chi)=\ln\left(\chi^2+1\right)$ στο διάστημα $[1,\,2]$ είναι συνεχείς .

και για να δείξεις την σχέση που θέλεις αρκεί να δείξεις ότι

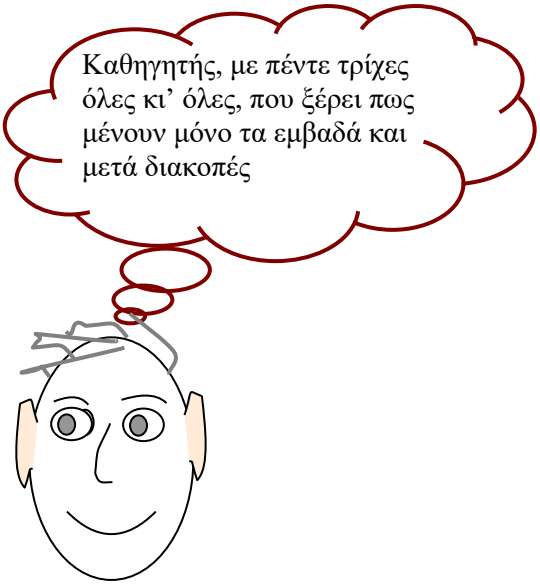
$\ln\chi < \ln\left(\chi^2+1\right) \Leftrightarrow \ln\left(\chi^2+1\right)-\ln\chi>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\chi^2+1}{\chi}\right)>0=\ln 1$ και

επειδή η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξεις ότι

$\frac{\chi^2+1}{\chi}>1$ πράγμα που ισχύει για κάθε $\chi \in [1,\,2]$ άρα $\ln\chi < \ln\left(\chi^2+1\right) \Leftrightarrow$

$\int_1^2 \ln\chi\, d\chi < \int_1^2 \ln\left(\chi^2+1\right)d\chi$

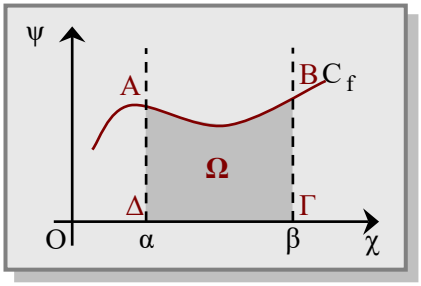
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εμβαδόν

Σου θυμίζω ότι ***χωρίο*** είναι το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από μια κλειστή γραμμή, που ένα τουλάχιστον τμήμα της είναι καμπύλη.



Παράδειγμα το γραμμοσκιασμένο τμήμα, στο διπλανό σχήμα, που περικλείεται από την γραμμή ΑΒΓΔ, της οποίας το τμήμα ΑΒ είναι τμήμα της καμπύλης C_f .

Τα χωρία, όπως και όλες οι επιφάνειες, έχουν εμβαδόν.

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με τα εμβαδά χωρίων στο σχηματισμό των οποίων συμμετέχει και η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f.

Ορισμός :

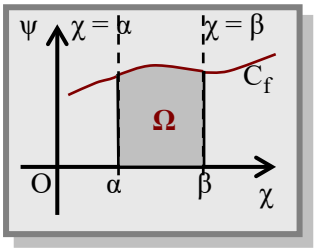
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το χωρίο Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$ έχει εμβαδόν : $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\chi)| d\chi$.

Παρατηρήσεις :

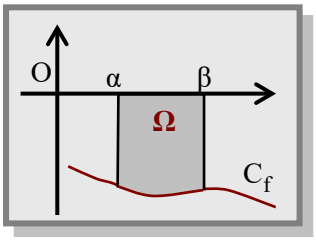
1. Επειδή το εμβαδόν $E(\Omega)$ προσδιορίζεται από ένα ορισμένο ***ολοκλήρωμα*** μας ***ενδιαφέρει*** πρώτα και κύρια η ***συνέχεια*** της f.
2. Επειδή μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει ***απόλυτο*** μας ***ενδιαφέρει*** το ***πρόσημο*** της f και συγκεκριμένα λύνεις την ανίσωση $f(\chi) \geq 0$ και αν για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ $f(\chi) \geq 0$, τότε «τα πράγματα» είναι όπως στο σχήμα και το εμβαδόν του **Ω** είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)\,d\chi$



✓ $f(\chi) < 0$, τότε «τα πράγματα» είναι όπως στο σχήμα και το εμβαδόν του Ω είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} -f(\chi)\,d\chi = -\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)\,d\chi$

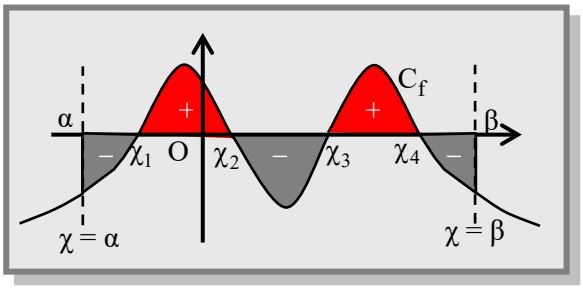


✓ Αν η f ***δεν έχει σταθερό πρόσημο*** στο $[\alpha, \beta]$.

Εσύ δεν ξέρεις ότι η f δεν έχει σταθερό πρόσημο, όμως όταν λύσεις την $f(\chi) = 0$, βρεις τις ρίζες $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_4$ και φτιάξεις τον πίνακα μεταβολής προσήμου για την f βλέπεις ότι η f αλλάζει πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

α	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	**β**
−	+	−	+	−	

οπότε «τα πράγματα» είναι όπως στο σχήμα (το οποίο δεν χρειάζεται να φτιάξεις)



Το εμβαδόν του Ω είναι :

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\chi_1} f(\chi)\,d\chi + \int_{\chi_1}^{\chi_2} f(\chi)\,d\chi - \int_{\chi_2}^{\chi_3} f(\chi)\,d\chi + \int_{\chi_3}^{\chi_4} f(\chi)\,d\chi - \int_{\chi_4}^{\beta} f(\chi)\,d\chi$$

Έτσι λοιπόν, σε πρακτικό επίπεδο, να θυμάσαι ότι ο υπολογισμός του εμβαδού ανάγεται στον υπολογισμό ***ενός ολοκληρώματος***, το οποίο πάντα υπολογίζεται, άρα πάντα η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα θα είναι συνεχής, το «πρόβλημα» είναι αν εσύ ξέρεις να «πεις» το ***γιατί*** είναι συνεχής.

Λιβαδειά

Επίσης το πρόσημο της f το βρίσκεις αν λύσεις την ανίσωση $f(\chi) \geq 0$ με τον περιορισμό $\chi \in [\alpha, \beta]$ και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται με έναν από τους γνωστούς από την προηγούμενη ενότητα, τρόπους.

Άρα δεν υπάρχει κάτι καινούργιο για να μάθεις, απλά πρέπει να ακολουθείς ***πιστά*** τη διαδικασία.

Ανάλογα με τον τρόπο που προσδιορίζεται το χωρίο Ω μπορεί κανείς να διακρίνει τις εξής περιπτώσεις υπολογισμού του εμβαδού του Ω :

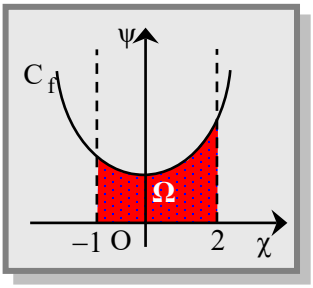
1. Το χωρίο Ω δημιουργείται ή περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.

Τότε το εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\chi)| d\chi$ (δες την παρατήρηση **2**.)

Παράδειγμα :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi) = \chi^2 + 1$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = -1$ και $\chi = 2$.

Απάντηση :



Να έχεις υπ' όψη σου ότι το σχήμα είναι εντελώς βοηθητικό και επομένως δεν χρειάζεται μεγάλη ακρίβεια.

Το χωρίο Ω είναι περίπου όπως στο σχήμα.

Η $f(\chi) = \chi^2 + 1$ είναι συνεχής στο R άρα και στο $[-1, 2]$. Είναι $f(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \chi^2 + 1 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\chi \in [-1, 2]$, επομένως $E(\Omega) = \int_{-1}^{2} f(\chi) d\chi = \int_{-1}^{2} (\chi^2 + 1) d\chi = \left[\frac{\chi^3}{3} + \chi\right]_{-1}^{2} =$

$$\left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = \left(\frac{8}{3} + \frac{6}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Το χωρίο Ω δημιουργείται ή περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f και τον άξονα χ΄χ.

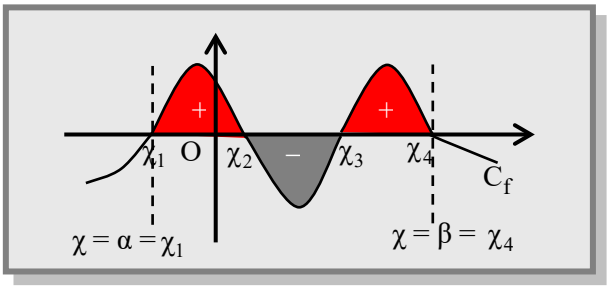
Τότε λύνεις την εξίσωση $f(\chi)=0$, βρίσκεις τις ρίζες έστω $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_4$ και θεωρείς $\chi=\alpha=\chi_1$, $\chi=\beta=\chi_4$ οπότε (δες πάλι την παρατήρηση **2**) φτιάχνεις πίνακα μεταβολής προσήμου

για την f, έστω

χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
+	−	+	

οπότε

«τα πράγματα» είναι όπως στο σχήμα



και το εμβαδόν του Ω είναι :

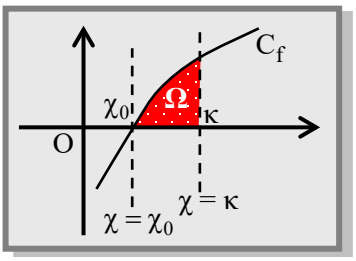
$$E(\Omega)=+\int_{\chi_1}^{\chi_2} f(\chi)d\chi-\int_{\chi_2}^{\chi_3} f(\chi)d\chi+\int_{\chi_3}^{\chi_4} f(\chi)d\chi$$

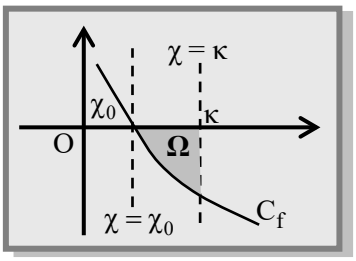
3. Το χωρίο Ω δημιουργείται ή περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, την ευθεία $\chi=\kappa$ και τον άξονα χ΄χ.

Όταν δίνεται μόνο μια ευθεία $\chi=\kappa$ τότε η άλλη ευθεία θα είναι η $\chi=\chi_0$, όπου χ_0 είναι η πιο «κοντινή» (προς το **κ**) ρίζα της $f(\chi)=0$.

Έχεις δυο περιπτώσεις :

α.

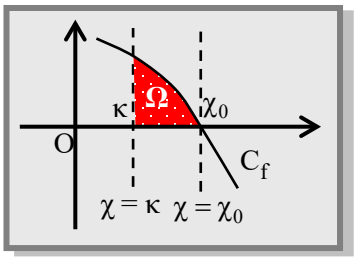


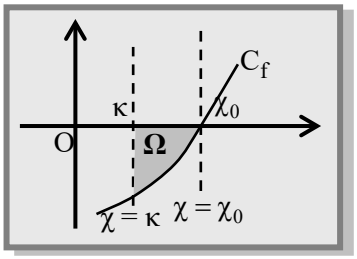


Προσοχή είναι $\chi_0<\kappa$, οπότε $E(\Omega)=\int_{\chi_0}^{\kappa}|f(\chi)|d\chi$

Λιβαδειά

β.





Προσοχή είναι $\chi_0 > \kappa$ οπότε $E(\Omega) = \int_{\kappa}^{\chi_0} |f(\chi)| d\chi$

Παρατηρήσεις :

i) Να ξέρεις ότι σε κάθε περίπτωση θα σου διευκρινίζει ακριβώς ποιο είναι το χωρίο.

ii) Αντί μιας από τις δυο ευθείες $\chi = \alpha$, $\chi = \beta$, μπορεί να δίνεται ο άξονας ψ΄ψ, μην ξεχνάς ότι ο άξονας ψ΄ψ έχει εξίσωση $\chi = 0$.

4. Το χωρίο Ω δημιουργείται ή περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δυο συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.

Τότε θεωρείς την συνάρτηση h με $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |h(\chi)| d\chi$ δηλαδή από δω και κάτω κάνεις για την h ότι έκανες για την f προηγούμενα στην περίπτωση **1.** (χωρίς να φτιάξεις σχήμα).

Παράδειγμα :

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $f(\chi) = \chi^2 + 2$ και $g(\chi) = 2\chi^2 + 3$.

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, την γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $\chi = -1$ και $\chi = 2$.

Απάντηση :

Έστω η συνάρτηση h με $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) = \chi^2 + 2 - (2\chi^2 + 3) = -\chi^2 - 1$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η $h(\chi)=-\chi^2-1$ είναι συνεχής στο R άρα και στο $[-1, 2]$.

Άρα $E(\Omega)=\int_{-1}^{2}|h(\chi)|d\chi=\int_{-1}^{2}|-\chi^2-1|d\chi=\int_{-1}^{2}(\chi^2+1)d\chi$, γιατί

$\chi^2+1\geq 0$ για κάθε $\chi\in[-1, 2]$.

Επομένως $E(\Omega)=\int_{-1}^{2}(\chi^2+1)d\chi=\left[\frac{\chi^3}{3}+\chi\right]_{-1}^{2}=$

$$\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right)=\left(\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{3}\right)=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=\frac{18}{3}$$

5. Το χωρίο Ω δημιουργείται ή περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δυο συναρτήσεων f και g.

Τότε θεωρείς την συνάρτηση h με $h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$, οπότε από δω και κάτω κάνεις για την h ότι έκανες για την f προηγούμενα στην περίπτωση **2.** .

Παρατήρηση :

Πολλές φορές ζητά το εμβαδόν του χωρίου Ω που δημιουργείται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, μιας ευθείας

$\varepsilon:\ \psi=\kappa\chi+\lambda$ και από τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.

Σε αυτή την περίπτωση θεωρείς την ευθεία ως γραφική παράσταση της $g(\chi)=\kappa\chi+\lambda$ και στη συνέχεια δουλεύεις όπως πιο πάνω, δηλαδή θεωρείς την $h(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$, $\cdots$.

6. ***Ειδικές περιπτώσεις*:**

i) Το χωρίο Ω δημιουργείται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, ***την εφαπτομένη της*** C_f σε ένα σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ενεργείς ***με τον ίδιο ακριβώς τρόπο***, όπως περιγράφεται στην παρατήρηση της περίπτωσης **5.** έχοντας υπόψη σου και τα εξής :

- ✓ Όταν η $f''(\chi) > 0$ τότε η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη επομένως η $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) \geq 0$ άρα το $|h(\chi)| = h(\chi)$ και δεν χρειάζεται να λύσεις την ανισότητα, άρα $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$.
- ✓ Όταν η $f''(\chi) < 0$ τότε η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη επομένως η $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) \leq 0$ και άρα $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} h(\chi)d\chi$

ii) Το χωρίο Ω δημιουργείται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, ***την εφαπτομένη της*** C_f σε ένα σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και την ευθεία $\chi = \alpha$.

Διακρίνεις δυο περιπτώσεις

- ✓ Όταν η $\chi_0 > \alpha$ τότε $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\chi_0} |h(\chi)|d\chi$
- ✓ Όταν η $\chi_0 < \alpha$ τότε $E(\Omega) = \int_{\chi_0}^{\alpha} |h(\chi)|d\chi$

Στη συνέχεια εξετάζεις το πρόσημο της h ή το πρόσημο της f'' όπως είδες προηγουμένως .

iii) Το χωρίο Ω δημιουργείται από την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, ***την εφαπτομένη της*** C_f σε ένα σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ και τον άξονα $\chi'\chi$.

Στην περίπτωση αυτή θεωρείς την $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$, βρίσκεις τις τετμημένες των σημείων στα οποία η C_f και ***η εφαπτομένη της*** τέμνουν τον $\chi'\chi$, έστω χ_1 και χ_2 και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- ✓ Όταν η $\chi_2 > \chi_1$ τότε $E(\Omega) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} |h(\chi)| d\chi$

- ✓ Όταν η $\chi_1 > \chi_2$ τότε η $E(\Omega) = \int_{\chi_2}^{\chi_1} |h(\chi)| d\chi$

Στη συνέχεια εξετάζεις το πρόσημο της h ή το πρόσημο της f'' όπως είδες προηγουμένως .

Παρατηρήσεις :

1. Στην περίπτωση που στο σχηματισμό του Ω συμμετέχουν δυο συναρτήσεις μας ***ενδιαφέρει*** η ***συνέχεια*** της f και της g και το πρόσημο της $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ και όχι το πρόσημο καθεμιάς από τις f και g.

2. Ο υπολογισμός του εμβαδού ενός χωρίου Ω περιλαμβάνει τρία στάδια

α. την εξέταση της συνέχειας

β. το πρόσημο της $f(\chi)$ $\left(\text{αντίστοιχα της } h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)\right)$

γ. τον υπολογισμό ενός ***ορισμένου ολοκληρώματος***.

Τα στάδια **α.** και **γ.** συνήθως δεν παρουσιάζουν δυσκολίες, εκείνο που πιθανόν να σε δυσκολέψει λίγο, είναι το πρόσημο της $f(\chi)$. Πολλές φορές το πρόσημο της f $\left(\text{αντίστοιχα της } h = f - g\right)$ δεν μπορεί να γίνει με τις μεθόδους της κλασικής άλγεβρας άλλα χρειάζεται να μελετήσεις την μονοτονία ή ακόμη και να βρεις το πεδίο τιμών της f. Ίσως πρέπει να επαναλάβεις όσα αναφέρονται στην αρχή αυτού του τόμου για τις παραγώγους, την μονοτονία και την επίλυση ανισώσεων μέσω της μονοτονίας.

Δες δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα από τα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 2005** **Τρίτη 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=e^{\lambda\chi}$, $\lambda>0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $\psi=\lambda\cdot e\cdot\chi$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

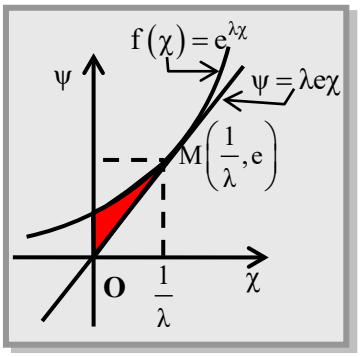
Απάντηση είναι $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ το σημείο επαφής.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα ψ΄ψ, είναι : $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

Απάντηση :



γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι $f'(\chi)=\lambda\cdot e^{\lambda\chi}>0$ η παράγωγος , $\psi=\lambda\cdot e\cdot\chi$ η εξίσωση της εφαπτομένης και $M\left(\frac{1}{\lambda},e\right)$ το σημείο επαφής.

Είναι $f''(\chi)=\lambda^2\cdot e^{\lambda\chi}>0$ άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη, όπως φαίνεται και στο σχήμα το οποίο δεν είναι απαραίτητο να το φτιάξεις .

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης C_f της f, της εφαπτομένης της στο σημείο $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ και του άξονα ψ΄ψ, είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

Έστω $g(\chi) = \lambda \cdot e \cdot \chi$ θεώρησε την $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) = e^{\lambda\chi} - \lambda e\chi$ αυτή είναι συνεχής στο R ως διαφορά συνεχών και επειδή η f είναι πάνω από την g θα είναι : $h(\chi) \geq 0$ άρα $|h(\chi)| = h(\chi)$. Επομένως

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} h(\chi)d\chi = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(e^{\lambda\chi} - \lambda e\chi\right)d\chi = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda\chi}d\chi - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e\chi d\chi =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda\chi}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{2}\lambda e\left[\chi^2\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e^{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}} - e^0}{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda e\left(\frac{1}{\lambda^2} - 0^2\right) = \frac{e-1}{\lambda} - \frac{1e}{2\lambda} \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

2. **Πανελλήνιες 2006 – Εξαιρετικές**

Τετάρτη 5 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = \chi^2 + \chi + \alpha$, $\alpha \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $\chi = 2$.

Μονάδες 7

Έχει απαντηθεί, δες την απάντηση στο κεφάλαιο περί μιγαδικών .

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $\chi = 2$ τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο $\psi_0 = -3$, τότε :

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

Δες την απάντηση στο κεφάλαιο περί παραγώγων $\alpha = +1$, $(\varepsilon)\ \ \psi = 5\chi - 3$.

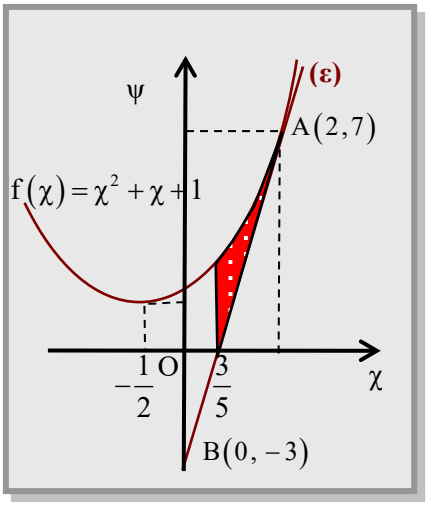
Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα χ΄χ και της ευθείας $\chi = \frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

Απάντηση :



β. ii. Όταν $\alpha = 1$ τότε η $f(\chi) = \chi^2 + \chi + 1$ και το σημείο $A(2, \alpha + 6) = A(2,7)$.

Η $\chi^2 + \chi + 1$ έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$ άρα $\psi = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$, η εφαπτομένη (ε) $\psi = 5\chi - 3$ τέμνει τον χ΄χ στο σημείο $\chi = \frac{3}{5}$.

Είναι $f'(\chi) = 2\chi + 1$ άρα $f''(\chi) = 2 > 0$ άρα C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη, όπως φαίνεται και στο σχήμα το οποίο δεν είναι απαραίτητο να το φτιάξεις . Επομένως το ζητούμενο χωρίο είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος, δηλαδή το χωρίο που περιέχεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις της f και της (ε). Έστω $g(\chi) = 5\chi - 3$ η εφαπτομένη, θεώρησε την $h(\chi) = (\chi^2 + \chi + 1) - (5\chi - 3) = \chi^2 - 4\chi + 4$, αυτή είναι συνεχής στο R ως διαφορά συνεχών και επειδή η f είναι πάνω από την g θα είναι : $h(\chi) \geq 0$ άρα $|h(\chi)| = h(\chi)$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (\chi - 2)^2 \, d\chi = \left[\frac{(\chi - 2)^3}{3}\right]_{\frac{3}{5}}^{2} = \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{\left(\frac{3}{5} - 2\right)^3}{3} = 0 - \frac{\left(-\frac{7}{5}\right)^3}{3} =$$

$$-\frac{-\frac{343}{125}}{3} \Leftrightarrow \boxed{E(\Omega) = \frac{343}{375}}.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Το Θέμα

στις συναρτήσεις
στη στατιστική
και στις πιθανότητες

παράγωγοι
ακρότατα
μέση τιμή
Πιθανότητα

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των εώων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 2000 μέχρι σήμερα, αιωνιστήνα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Δαμιανός Μωραΐτης
Μαθηματικός

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ