Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά

Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 1ος



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο

σε όλους εκείνους που θέλουν

να προσπαθήσουν

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 1ος

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:
Δαμιανός Μωραΐτης
© copyright για την παρούσα έκδοση:
Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς»**

ISBN SET: 9786188485730
ISBN 1^{ου} τόμου: 9786188485754

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρόλογος

Το βιβλίο, είναι ο 1ος Τόμος της σειράς που αφορά την **εξεταστέα ύλη** της Γ! Λυκείου και περιέχει τη θεωρία, παραδείγματα και ασκήσεις στα κεφάλαια :

α. ***Μιγαδικοί αριθμοί.***

β. ***Μονοτονία – όριο – συνέχεια συνάρτησης***.

Στην διάρκεια της συγγραφής αυτού του βιβλίου κατά νου είχα το μαθητή ο οποίος ενδιαφέρεται να μάθει και ταυτόχρονα αγωνιά για την επιτυχία του στις **Πανελλήνιες Εξετάσεις**, έτσι λοιπόν στην ύλη του βιβλίου περιλαμβάνονται πολλές παρατηρήσεις, υποδείξεις και μεθοδολογίες οι οποίες αποτελούν το απόσταγμα γνώσης από την τριακονταετή και πλέον ενασχόλησή μου με τα θέματα των Πανελληνίων Εξετάσεων.

Το βιβλίο αυτό αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, συμπλήρωμα της προσπάθειας που έγινε με τα άλλα δυο βιβλία με τίτλο «***Το Θέμα***», στα οποία και σας παραπέμπω για πλήρη γνώση **μιας *μοναδικής, στην κυριολεξία, συλλογής. Μιας συλλογής που περιλαμβάνει όλα τα των θέματα που τέθηκαν στις τακτικές και επαναλληπτικές Πανελλήνιες εξετάσεις των Ημερησίων, Εσπερινών Λυκείων και Τ. Ε. Λ. από το 1975 μέχρι σήμερα***.

Τα θέματα των εξετάσεων είναι τακτοποιημένα κατά κεφάλαιο ύλης της Γ Λυκείου (Μιγαδικοί – Συνέχεια – Παράγωγος – Ολοκλήρωμα) ***και έχουν απαντηθεί με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο***

Φεβρουάριος 2022

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα

Τα «***Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ ! Λυκείου***» χωρίζονται σε δυο μέρη, το ***Α Μέρος*** περιλαμβάνει τους ***Μιγαδικούς*** και το ***Β Μέρος*** περιλαμβάνει τις ***Συναρτήσεις***.

Ο πρώτος τόμος περιέχει δυο κεφάλαια :

- ✓ Το **1ο Κεφάλαιο** αναφέρεται στους **Μιγαδικούς**
- ✓ Το **2ο Κεφάλαιο** αναφέρεται στις συναρτήσεις και συγκεκριμένα περιλαμβάνει τα θέματα : **Όριο – Συνέχεια συνάρτησης**

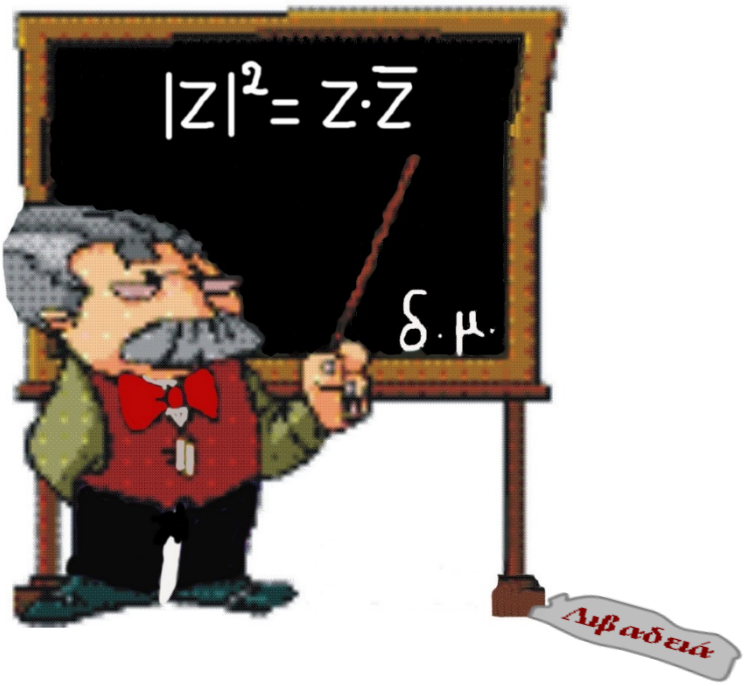
Για μια αναλυτική παρουσίαση των περιεχομένων δες τα περιεχόμενα του κάθε κεφαλαίου ξεχωριστά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μιγαδικοί

Θεωρία – υποδείξεις – παρατηρήσεις.



Παραδείγματα λυμένα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Μεθοδολογία – Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

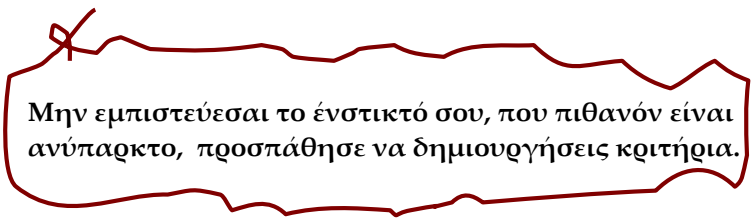
Τμήμα Α

Θεματική ενότητα	σελίδα
Εισαγωγή στους μιγαδικούς	15
Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών	21
Πράξεις μιγαδικών	23
Δυνάμεις μιγαδικών	13
Παραδείγματα – Παρατηρήσεις	29
Συζυγείς μιγαδικοί – Ιδιότητες συζυγών	34
Παραδείγματα – Παρατηρήσεις	36
Επίλυση εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$	40
Μέτρο μιγαδικών και ιδιότητες του μέτρου	42
Παραδείγματα – Επισημάνσεις	46
Εξισώσεις στις οποίες συνυπάρχουν τα $z, \lvert z \rvert, \overline{z}$	47
Ασκήσεις Σωστού – Λάθους	63
Ασκήσεις Πολλαπλής επιλογής	65
Ασκήσεις πλήρους ανάπτυξης	66

Τμήμα Β

Θεματική ενότητα	σελίδα
Εξισώσεις – Ανισώσεις με μέτρα μιγαδικών Γεωμετρικοί Τόποι μιγαδικών	69
«Προβλήματα» με μέγιστα και ελάχιστα	104
Ασκήσεις Σωστού – Λάθους	113
Ασκήσεις Πολλαπλής επιλογής	114
Ασκήσεις πλήρους ανάπτυξης	115
Ασκήσεις με μέγιστα και ελάχιστα	122

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περί μιγαδικών ο λόγος

Το Σύνολο των Μιγαδικών Αριθμών

Οι άνθρωποι, πριν από πολλές εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια, έφτιαξαν το πρώτο σύνολο αριθμών, για να μπορέσουν να επικοινωνήσουν και να μιλήσουν για πράγματα που συναντούσαν καθημερινά **γύρω τους στη φύση**.
Για αυτό και το ονόμασαν **Σύνολο των φυσικών αριθμών ,** συμβολικά Ν (Natura = Φύση).

Αργότερα προσπαθώντας να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες των συναλλαγών τους έκαναν επεκτάσεις, σε αυτό το σύνολο, φτιάχνοντας τα σύνολα :

- **Σύνολο των ακεραίων αριθμών,** συμβολικά Z.
- **Σύνολο των ρητών αριθμών,** συμβολικά Q.
- **Σύνολο των άρρητων αριθμών,** δηλαδή **των αριθμών που δεν είναι ρητοί.**
- **Σύνολο των πραγματικών αριθμών,** συμβολικά **R .**

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους.

Υπέθεσαν λοιπόν ότι συμπεριλαμβάνοντας τους ρητούς και τους άρρητους σε ένα σύνολο, τότε αυτό θα περιέχει **όλους τους αριθμούς που υπάρχουν στην πραγματικότητα**, έτσι ονόμασαν το σύνολο που περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους σύνολο των **Πραγματικών αριθμών**.

Βέβαια έτσι θεώρησαν ότι κάθε άλλος αριθμός που θα δημιουργείτο, στο μέλλον θα βρίσκεται μόνο στην φαντασία κάποιων ανθρώπων.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όταν αργότερα διαπιστώθηκε ότι υπάρχει και τρίτη κατηγορία αριθμών, οι οποίοι δεν είναι ρητοί ούτε άρρητοι, τους ονόμασαν **Φανταστικούς** και **Μιγαδικούς** (μισός πραγματικός – μισός φανταστικός).

Από την άλλη, στην Α' Λυκείου μάθαμε πως η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ όταν έχει αρνητική διακρίνουσα $\left(\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0\right)$, δεν έχει λύση στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Όμοια η εξίσωση $\chi^2=-1$ και γενικότερα η $\chi^2=\kappa$ με $\kappa<0$ δεν έχουν λύση στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών, μιας και τα **τετράγωνα** των **πραγματικών** αριθμών είναι **μη αρνητικοί αριθμοί**.

Για να ξεπεράσουμε την "αδυναμία" αυτή και να «αποκτήσουν» και οι εξισώσεις $\chi^2=-1$, $\chi^2=\kappa$ με $\kappa<0$ **λύση**, «κατασκευάζουμε» ένα νέο αριθμό, εισάγοντας ένα νέο σύμβολο το **i** με την ιδιότητα :

$$\underbrace{i^2=-1}_{\text{ορισμού}} \Leftrightarrow_{\text{ορισμού}} \underbrace{i=\sqrt{-1}}_{\text{ορισμού}}$$

- ✓ Σύμφωνα με τον ορισμό είναι $i^2=-1\Leftrightarrow i^2+1=0$ άρα το **i** είναι **μια** λύση της εξίσωσης $\chi^2+1=0$
- ✓ Επειδή και $(-i)^2+1=i^2+1=0$ άρα **και** το $-i$ είναι **μια** λύση της εξίσωσης $\chi^2+1=0$

Επομένως η εξίσωση $\chi^2+1=0$ έχει **δυο** λύσεις τις : i και $-i$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ορισμός

- **Ορίζουμε** ένα νέο σύνολο το οποίο περιέχει όλους τους αριθμούς της μορφής : $2i,\ -5i,\ \sqrt{3}\cdot i = i\sqrt{3}$ και γενικότερα τους αριθμούς $\beta\cdot i = i\cdot\beta$ όπου $\beta \in R$ και το συμβολίζουμε με **I**, από τη λέξη Imagine και το ονομάζουμε ακριβώς : **Σύνολο των Φανταστικών αριθμών**.

✓ Μετά τον ορισμό του νέου συνόλου αποκτούν νόημα πια **και** οι τετραγωνικές ρίζες των **αρνητικών αριθμών.**

Πράγματι $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$, $\sqrt{-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}(-1)} = \frac{3}{5}\sqrt{-1} = \frac{3}{5}i$ κλπ.

Και ***γενικότερα*** $\sqrt{-|\alpha|} = \sqrt{|\alpha|(-1)} = \sqrt{|\alpha|}\sqrt{-1} = \sqrt{|\alpha|}\cdot i = i\sqrt{|\alpha|}$

- Στο νέο σύνολο των ***Φανταστικών αριθμών ανήκει εξ' ορισμού*** ο αριθμός **0** και δεχόμαστε ότι : $0 = i\cdot 0 = 0\cdot i$

Μετά από τους πιο πάνω ορισμούς ορίζουμε το σύνολο των Μιγαδικών αριθμών :

Ορισμός

Το **Σύνολο των Μιγαδικών αριθμών** συμβολίζεται με C και περιέχει

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha \in R$.
- Όλους τους Φανταστικούς αριθμούς $\beta i \in I$.
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha + \beta i$, με α και β πραγματικούς αριθμούς ($\alpha, \beta \in R$).

Δηλαδή το C περιέχει κάθε αριθμό που είναι ή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\alpha + \beta i$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Αλγεβρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός **z = α + βi,** η μορφή **α + βi**, α, β∈ R ονομάζεται **αλγεβρική** ή **κανονική** μορφή του **z** και **απλοποιεί** πάρα πολύ **τις πράξεις μιγαδικών**.

Στο σύνολο των Μιγαδικών αριθμών C

- ✓ Ορίζονται οι πράξεις της **πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού**, έτσι ώστε να έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο R.
- ✓ Το **μηδέν** είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της **πρόσθεσης , αφαίρεσης**.
- ✓ Το **ένα** είναι το **ουδέτερο στοιχείο** του **πολλαπλασιασμού**.
- ✓ Κάθε στοιχείο **z** του **C** γράφεται κατά **μοναδικό τρόπο** στην αλγεβρική του μορφή **α + βi** , με α, β ∈ R.
- ✓ Κάθε **πραγματικός** αριθμός **α ∈ R** γράφεται στη μορφή **α + 0i**,
- ✓ Κάθε **φανταστικός** αριθμός **βi ∈ I** γράφεται στη μορφή **0 + βi**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός **z = α + βi .**

- ✓ Ο **α** λέγεται **πραγματικό μέρος** του **z** και συμβολίζεται με **α = Re(z)**
- ✓ Ο **β** λέγεται **φανταστικό μέρος** του **z** και συμβολίζεται με **β = Im(z)**

π.χ. Για τον z = 3 + 2i είναι Re(z) = 3 και Im(z) = 2.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Αν χρησιμοποιήσεις την αλγεβρική μορφή για τους μιγαδικούς, τότε ισχύει :

Ορισμός

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ θα λέγονται ίσοι και θα γράφουμε $z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2)$ και $Im(z_1) = Im(z_2)$.

Δηλαδή ισχύει : $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού :

✓ $z = \alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **και** $\beta = 0 \Leftrightarrow$ **Re(z) = 0 και Im(z) = 0.**

Για να **είναι μηδέν** ένας μιγαδικός πρέπει να **είναι μηδέν** το πραγματικό **και το** φανταστικό του μέρος **.**

✓ $z = \alpha + \beta i \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ **ή** $\beta \neq 0 \Leftrightarrow$ **Re(z) ≠ 0 ή Im(z) ≠ 0** .

Για να **μην είναι** μηδέν ένας μιγαδικός αρκεί να **μην είναι** μηδέν **ή** το πραγματικό **ή το** φανταστικό μέρος, (<u>ένα από τα δυο</u>) **.**

✓ $z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow \alpha \neq \gamma$ **ή** $\beta \neq \delta \Leftrightarrow Re(z_1) \neq Re(z_2)$ **ή** $Im(z_1) \neq Im(z_2)$.

Για να **είναι** διαφορετικοί δυο μιγαδικοί αρκεί να **είναι** διαφορετικά τα πραγματικά **ή τα** φανταστικά **τους** μέρη (<u>ένα από τα δυο</u>) **.**

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

1. Αν $(\lambda-2)+(\lambda^2-4)i=0$ να βρεθεί το λ.

$$(\lambda-2)+(\lambda^2-4)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-2=0\\ \lambda^2-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=\pm 2\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}$$

2. Να βρεθεί το λ αν $(\lambda-2)+(2\lambda-1)i\neq 0$.

Απάντηση : $(\lambda-2)+(2\lambda-1)i\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-2\neq 0\\ \textbf{ή}\\ 2\lambda-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\neq 2\\ \textbf{ή}\\ \lambda\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ οπότε

αρκεί $\left(\lambda\neq 2 \text{ ή } \lambda\neq\frac{1}{2}\right)$ ή ισοδύναμα $\lambda\in R-\left\{\frac{1}{2},2\right\}$.

3. Προφανώς είναι $2-3i\neq 2-i$, αφού $-3\neq -1$ και $5+i\neq 2+i$,αφού $5\neq 2$, επίσης αν $2-\lambda i\neq 2-4i$ τότε **$\lambda\neq 4$.**

Προσοχή

Το σύνολο των μιγαδικών C δεν είναι διατεταγμένο σύνολο, δηλαδή : οι ***ανισότητες*** και ***οι ιδιότητες*** τους ***δεν έχουν νόημα*** μέσα στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών C. **Δεν μπορείς** δηλαδή να βάλεις σε θέση μεγέθους δύο **καθαρά μιγαδικούς αριθμούς** (δηλαδή μιγαδικούς με **$\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$**).

Για δύο καθαρά μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2, δηλαδή όταν **$\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ μπορείς να έχεις μόνο : $z_1=z_2$ ή $z_1\neq z_2$.**

π.χ. **δεν μπορείς** να γράφεις : $2+3i>4-9i$ αλλά μόνο $2+3i\neq 4-9i$.

- Αν σε κάποιο σημείο **αναφέρεται** ότι **πρέπει $\alpha+\beta i>0$** τότε θα είναι υποχρεωτικά : **$\alpha>0$** και **$\beta=0$**, ενώ αν **αναφέρεται** ότι **πρέπει $\alpha+\beta i>\gamma+\delta i$** τότε θα είναι **$\alpha>\gamma$** και **$\beta=\delta$.**

Λιβαδειά

Προσοχή στα παραδείγματα γιατί αποτελούν ***ΜΕΘΟΔΟ***.

1. Αν πρέπει $\chi + (\psi - 2)i > 0$ τότε πρέπει $(\chi > 0$ και $\psi - 2 = 0) \Leftrightarrow$ $\chi > 0$ και $\psi = 2$.

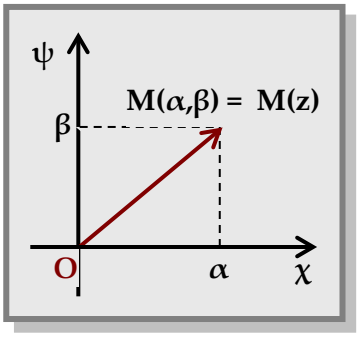
2. Αν πρέπει $5\chi + (\psi - 2)i > (\chi - 1) + 3\psi i \Leftrightarrow \begin{cases} 5\chi > \chi - 1 \\ \psi - 2 = 3\psi \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4\chi > -1 \\ 2\psi = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi > -\frac{1}{4} \\ \psi = -1 \end{cases}$$

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών Αριθμών

Έστω ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Ορίζουμε μια **σχέση** ανάμεσα στους **Μιγαδικούς** αριθμούς του συνόλου **C** και στα **σημεία** του Καρτεσιανού επιπέδου :

Σε **κάθε** μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ αντιστοιχούμε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου και **αντιστρόφως.**

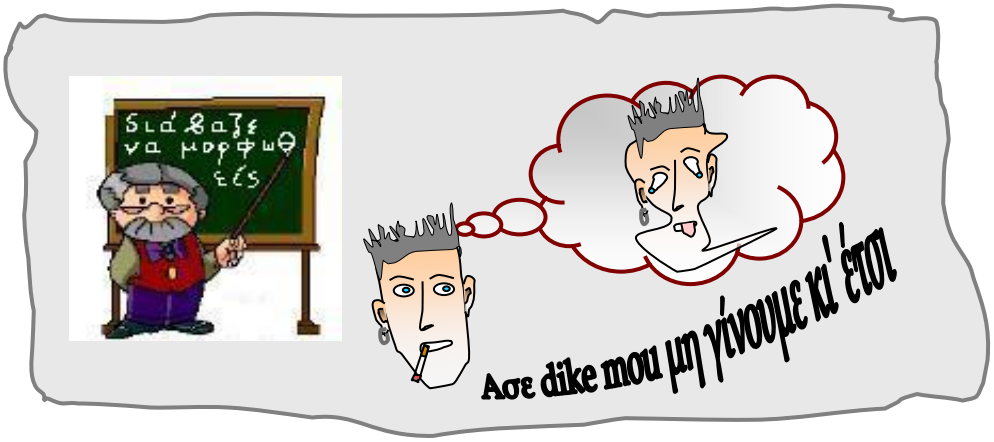


- ✓ Το σημείο $M(\alpha,\beta) = M(z)$ και λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού $z = \alpha + \beta i$.
- ✓ Το καρτεσιανό επίπεδο σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο**.
- ✓ Ο άξονας χ΄χ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού σ' αυτόν απεικονίζονται οι αριθμοί $\alpha = Re(z)$ (πραγματικό μέρος)

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

- ✓ Ο άξονας ψ΄ψ λέγεται **φανταστικός άξονας**, αφού σ' αυτόν απεικονίζονται οι αριθμοί **β·i = Im(z)·i** (φανταστικό μέρος)
- ✓ Αν **β = 0** είναι **z = α ∈ R** (ο z ταυτίζεται με πραγματικό αριθμό) και η εικόνα του βρίσκεται στον άξονα χ΄χ .
- ✓ Αν **α = 0** είναι **z = βi ∈ I** (ο z ταυτίζεται με φανταστικό αριθμό) και η εικόνα του βρίσκεται στον άξονα ψ΄ψ.
- ✓ Αν **α = 0 = β** είναι **z = 0 + 0i = 0** (ο **z** ταυτίζεται με το **O**) και η εικόνα του είναι το **O(0,0)** .
- ✓ Ένα μιγαδικό **z = α + βi** **τον παριστάνεις** επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου **M(α,β)** ,που λέγεται εικόνα του μιγαδικού.

Προσοχή : Οι μιγαδικοί αριθμοί δεν είναι διανύσματα, όμως με βάση την τελευταία παρατήρηση **μπορείς να τα χρησιμοποιείς τις εικόνες των μιγαδικών** και αυτά που **έμαθες για τα διανύσματα** για να **ερμηνεύσεις** ή και να **αποδείξεις κάποιες σχέσεις μεταξύ μιγαδικών,** όπως θα δεις και πιο κάτω, στις πράξεις μιγαδικών για παράδειγμα.



Λιβαδειά

Πράξεις μεταξύ Μιγαδικών Αριθμών

- Σύμφωνα με τον ορισμό του C , η **πρόσθεση,** η **αφαίρεση** και ο **πολλαπλασιασμός** δύο μιγαδικών αριθμών **γίνονται ακριβώς όπως** και οι αντίστοιχες **πράξεις** στο **R** και ***ισχύουν ακριβώς οι ίδιες ιδιότητες.***
- Θα πρέπει επίσης να θυμάσαι ότι : **Οι μιγαδικοί αριθμοί** όταν είναι γραμμένοι στην αλγεβρική τους μορφή : **α + β· i**, μέσα στις πράξεις συμπεριφέρονται σαν να ήσαν πολυώνυμα (**διώνυμα**) ως προς i συμπεριφέρονται δηλαδή σαν διώνυμα της μορφής **α + βχ** όπου βέβαια αντί για **χ** έχεις το **i** .

Για αυτό όταν έχεις να κάνεις πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς θα τους αντικαθιστάς (τις πιο πολλές φορές) με την αλγεβρική τους μορφή **α + βi** .

Χρησιμοποιώντας την αλγεβρική μορφή, για την ισότητα και τις πράξεις στο C, έχεις :

1. Για την πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών α + βi και γ + δi :

$$(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i$$

Παραδείγματα :

4. Αν $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 5 + 7i$, τότε $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (5 + 7i) = (2 + 5) + (-3 + 7)i = 7 + 4i$.

5. Αν $z_1 = \chi + 3i, z_2 = 5 + (\psi - 1)i$, τότε $z_1 + z_2 = (\chi + 3i) + (5 + (\psi - 1)i) = (\chi + 5) + (3 + \psi - 1)i = (\chi + 5) + (\psi + 2)i$.

Προσοχή :
Η ***εργασία*** προκαλεί ιδρώτα, ο ιδρώτας είναι υγρασία και είναι γνωστά τα αποτελέσματα της υγρασίας. Άσε που άμα είναι ανοιχτό και κανένα παράθυρο και κάνει ρεύμα, μπορεί να πλευριτώσεις.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ισχύουν οι ιδιότητες

I) **Αντιμεταθετική** : για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

II) **Προσεταιριστική** : για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in C$ ισχύει :

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

III) **Ουδέτερο στοιχείο** το $0 = 0 + 0i$ που είναι τέτοιο ώστε $0 + z = z + 0 = z$ για κάθε $z \in C$.

IV) **Αντίθετο στοιχείο** : για κάθε $z = \alpha + \beta i \in C$ υπάρχει ο $-z = -\alpha - \beta i \in C$ για τον οποίο ισχύει : $z + (-z) = (\alpha + \beta i) + (-\alpha - \beta i) = 0 + 0i = 0 \in C$

Προφανώς :

- ✓ $Re(z_1 + z_2) = \alpha + \gamma = Re(z_1) + Re(z_2)$ και
- ✓ $Im(z_1 + z_2) = \beta + \delta = Im(z_1) + Im(z_2)$.

2. Για την αφαίρεση του μιγαδικού αριθμού $\gamma + \delta i$ από τον $\alpha + \beta i$:

$$(\alpha + \beta i) - (\gamma + \delta i) = (\alpha + \beta i) + (-\gamma - \delta i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

Δηλαδή αντί να αφαιρέσεις, προσθέτεις τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Παράδειγμα : Αν $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 5 + 7i$, τότε :

$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (5 + 7i) = (2 - 3i) + (-5 - 7i) = (2 - 5) + (-3 - 7)i = -3 - 10i$.

ΠΡΟΕΙΔΟΠΟΙΗΣΗ : Η εργασία βλάπτει σοβαρά την … τεμπελιά

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

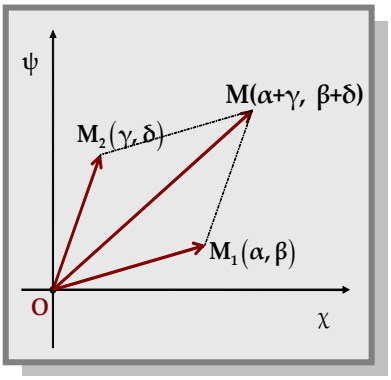
Η εικόνα του αθροίσματος και της διαφοράς δυο μιγαδικών

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα :

$$z_1+z_2=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $\mathbf{M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)}$

και είναι : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή :



Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

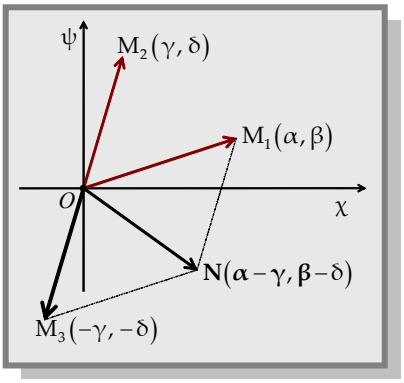
Επίσης, η διαφορά

$$z_1-z_2=(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $\mathbf{N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)}$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$,

δηλαδή :



Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δυο μιγαδικών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους.



Δαμιανός Μωραΐτης

άλλα μου λεν τα μάτια σου
και άλλα η μιλιά σου

3. Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών **α + βi** και **γ + δi** ισχύει :

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

I. **Αντιμεταθετική** : για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

II. **Προσεταιριστική** : για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in C$ ισχύει $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

III. **Ουδέτερο στοιχείο** το $1 = 1 + 0i$ που είναι τέτοιο ώστε $1 \cdot z = z \cdot 1$ για κάθε $z \in C$.

IV. **Αντίστροφο στοιχείο** : για κάθε $z = \alpha + \beta i \in C$, $z \neq 0$ υπάρχει ο $\frac{1}{z} \neq 0$ για τον οποίο ισχύει : $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

V. **Απορροφητικό στοιχείο** : για κάθε $z = \alpha + \beta i \in C$ ισχύει: $0 \cdot z = z \cdot 0 = 0$.

VI. **Επιμεριστική** ως προς την **πρόσθεση** και την **αφαίρεση** :
για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in C$ ισχύει $(z_1 \pm z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 \pm z_2 \cdot z_3$.

Παράδειγμα : Αν $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-6i$, τότε :

$$z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(5-6i) = 15-18i+20i-24i^2 = (15+24)+(20-18)i = 39+2i.$$

Παρατηρήστε ότι :

Αν $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \alpha-\beta i$ τότε
$z_1 \cdot z_2 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) = \alpha^2-(\beta i)^2 = \alpha^2+\beta^2$

οπότε :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Για να εκφράσεις το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, στην **αλγεβρική** μορφή **κ + λi,**

πολλαπλασιάζεις τους όρους του κλάσματος με το **γ – δi ≠ 0**, και έχεις :

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Παραδείγματα :

6. Να γράψεις στην αλγεβρική του μορφή τον μιγαδικό $z=\dfrac{1+3i}{2-5i}$

Είναι $z=\dfrac{1+3i}{2-5i}=\dfrac{(1+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\dfrac{2+5i+6i+15i^2}{4+25}=\dfrac{-13+11i}{29}=-\dfrac{13}{29}+\dfrac{11}{29}i$.

7. Να γράψεις στην αλγεβρική του μορφή τον μιγαδικό $w=\dfrac{5-2i}{3i}$.

Είναι $w=\dfrac{5-2i}{3i}=\dfrac{(5-2i)i}{3i\cdot i}=\dfrac{5i-2i^2}{3i^2}=\dfrac{2+5i}{-3}=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}i$.

Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών

Οι δυνάμεις ενός **μιγαδικού αριθμού z** με εκθέτη **φυσικό μεγαλύτερο του 1,** ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή

$z^\nu=\underbrace{z\cdot z\cdot z\cdots z}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$ με **ν ∈ N** και **ν > 1 .**

Ορίζουμε : $z^1=z$ και αν $z\neq 0+0i$ τότε $z^0=1$, $z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$

Προσοχή στο 0^0 και στο $0^{-\nu}$ που δεν ορίζονται και στα z^1, z^0, $z^{-\nu}$ **που μοιάζουν με δυνάμεις αλλά δεν είναι,** γιατί δεν νοούνται γινόμενα με 1 παράγοντα ή με 0 παράγοντες ή με – 5 π. χ. παράγοντες.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση : Είναι $1^{\nu} = 1$, **για κάθε ν** και $0^{\nu} = 0$ **για κάθε** $\nu \neq 0$

- ✓ **Οι ιδιότητες των δυνάμεων** καθώς και οι πιο πάνω ορισμοί ισχύουν και με έκθετες ακεραίους.
- ✓ Οι **ιδιότητες των δυνάμεων** με ακέραιους εκθέτες καθώς και **όλες οι βασικές ταυτότητες** που γνωρίζεις για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν και στο C.

Δυνάμεις του i.

Για τις δυνάμεις του **i** ισχύουν τα εξής :

- ✓ $i^0 = 1$
- ✓ $i^1 = i$
- ✓ $i^2 = -1$
- ✓ $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- ✓ $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$,

  δηλαδή **μετά το i^3 οι τιμές του i^{ν} επαναλαμβάνονται .**

Άρα, για να υπολογίσεις μια δύναμη του i την i^{ν}, γράφεις τον εκθέτη **ν** στη μορφή $\nu = 4\kappa + \upsilon$, όπου **κ** το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχεις :

$$i^{\nu} = i^{4\kappa+\upsilon} = i^{4\kappa} i^{\upsilon} = \left(i^4\right)^{\kappa} i^{\upsilon} = 1^{\kappa} i^{\upsilon} = i^{\upsilon} = \begin{cases} 1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 0 \\ i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 1 \\ -1 & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 2 \\ -i & , \ \alpha\nu \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

Παράδειγμα :

$$i^{18} = i^{4\cdot 4+2} = i^2 = -1, \quad i^{19} = i^{4\cdot 4+3} = i^3 = -i,$$

$$i^{28} = i^{4\cdot 7+0} = i^0 = 1, \quad i^{65} = i^{4\cdot 16+1} = i^1 = i.$$

Λιβαδειά

Παραδείγματα :

8. Αν $z_1 = 3+5i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = -1+i$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α. $z_1+z_2+z_3$ **β.** $z_1-z_2+z_3$ **γ.** $z_1^2-z_2^2$ **δ.)** $z_1^2-z_2z_3$ **ε.** $z_1\cdot z_2\cdot z_3$

α. $z_1+z_2+z_3 = (3+5i)+(2-i)+(-1+i) = (3+2-1)+(5-1+1)i =$

$4+5i$

β. $z_1-z_2+z_3 = (3+5i)-(2-i)+(-1+i) = (3-2-1)+(5+1+1)i = 7i$

γ. $z_1^2-z_2^2 = (z_1+z_2)(z_1-z_2) = [(3+5i)+(2-i)]\,[(3+5i)-(2-i)] =$

$(5+4i)(1+6i) = 5+4i+30i+24i^2 = -19+34i.$

δ. $z_1^2-z_2z_3 = (3+5i)^2+(2-i)(-1+i) = 3^2+2\cdot3\cdot5i+(5i)^2+(-2+i+2i-i^2)$

$= 9+30i-25-2+3i+1 = -17+33i.$

ε. $z_1\cdot z_2\cdot z_3 = (3+5i)(2-i)(-1+i) = (6+10i-3i-5i^2)(-1+i) =$

$(11+7i)(-1+i) = -11-7i+11i-7 = -18+4i.$

9. Να γράψεις στην μορφή **α + βi** τους μιγαδικούς :

α. $(1+i)^2$ **β.** $(1-i)^2$ **γ.** $(1+i)^3$ **δ.** $\dfrac{3+i}{2-4i}$.

α. $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$

β. $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i.$

γ. Είναι : $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = -2+2i$

δ. $\dfrac{3+i}{2-4i} = \dfrac{(3+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \dfrac{6+2i+12i+4i^2}{2^2-(4i)^2} = \dfrac{2+14i}{20} = \dfrac{2}{20}+\dfrac{14}{20}i = \dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}i$

10. Να βρεθούν τα $\chi, \psi \in R$ ώστε : $(\chi+\psi)+(-2\chi+3\psi)i = 2+3i$.

$(\chi+\psi)+(-2\chi+3\psi)i = 2+3i \Leftrightarrow \begin{cases}\chi+\psi=2\\-2\chi+3\psi=3\end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \chi=\dfrac{3}{5}$ **και** $\psi=\dfrac{7}{5}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Όταν στην άσκηση θα ζητάει τα χ , ψ ή τα α , β έτσι ώστε · · · τότε να ξέρεις ότι μετά από πράξεις θα φτάνεις σε μια ισότητα μιγαδικών η οποία θα σε οδηγεί σε σύστημα 2 εξισώσεων.

11. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί χ, ψ, που είναι τέτοιοι ώστε : $(\chi + \psi i)^2 = 5 - 12i$.

$(\chi + \psi i)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi\psi i + \psi i^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 + 2\chi\psi i = 5 - 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - \psi^2 = 5 \\ 2\chi\psi = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - \psi^2 = 5 \\ \chi\psi = -6 \end{cases} \overset{\chi \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \chi^2 - \psi^2 = 5 \\ \psi = -\dfrac{6}{\chi} \end{cases} .$$

Οπότε η $\chi^2 - \psi^2 = 5$ γίνεται : $\chi^2 - \dfrac{36}{\chi^2} = 5 \Leftrightarrow \chi^4 - 5\chi^2 - 36 = 0$ θέτεις $\chi^2 = \omega$,

$\omega > 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \omega = 9$ ή $\omega = -4$ (απορρίπτεται) άρα $\chi^2 = 9 \Leftrightarrow \chi = \pm 3$.

Τότε $\psi = -2$ ή $\psi = 2$ αντίστοιχα, δηλαδή λύσεις τα ζεύγη $(3 , -2)$ και $(-3 , 2)$.

12. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R - \{0\}$ και $\dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{5}{\beta} = -\dfrac{\gamma}{2}$ (1)

να δειχθεί ότι : $(\alpha - \gamma) + (3\gamma - 2\alpha)\beta i = \dfrac{3}{2}\alpha - 70i$.

Επειδή στο 2ο μέλος υπάρχει μόνο το α, στο 1ο μέλος της (1) αντικαθιστάς τα β και γ με $\beta = \dfrac{20}{\alpha}$, $\gamma = -\dfrac{\alpha}{2}$ οπότε :

$$(\alpha - \gamma) + (3\gamma - 2\alpha)\beta i = \left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) + \left(-\frac{3\alpha}{2} - 2\alpha\right) \cdot \frac{20}{\alpha} i = \cdots = \frac{3}{2}\alpha - 70i .$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Αν χ, ψ, z ∈R και $(\chi - zi) - 2(\psi + zi) = (z + \chi i) + \psi i$ να δειχθεί ότι: $5\psi = 4\chi$.

Είναι: $(\chi - zi) - 2(\psi + zi) = (z + \chi i) + \psi i \Leftrightarrow (\chi - 2\psi) - 3zi = z + (\chi + \psi)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi - 2\psi = z \\ -3z = \chi + \psi \end{cases}$. Από το σύστημα απαλείφεις το z και παίρνεις :

$-3(\chi - 2\psi) = \chi + \psi \Leftrightarrow -3\chi + 6\psi = \chi + \psi \Leftrightarrow -4\chi = -5\psi \Leftrightarrow 4\chi = 5\psi$

14. Να υπολογισθεί η παράσταση: $A = i^0 + i^3 + i^5 + i^8 + i^{12}$

$A = i^0 + i^3 + i^5 + i^8 + i^{12} = 1 + i^2 \cdot i + i^4 \cdot i + (i^4)^2 + (i^4)^3 = 1 - i + i + 1 + 1 = 3$

15. Να υπολογισθεί η παράσταση : $A = (1 + i^{2\nu})(1 - i^{3\nu})$, $\nu \in N$.

Διακρίνεις τις περιπτώσεις :

α. $\nu = 4\kappa$, $\kappa \in N$, τότε: $A = (1 + i^{8\kappa})(1 - i^{12\kappa}) = 2 \cdot 0 = 0$.

β. $\nu = 4\kappa + 1$, $\kappa \in N$, τότε: $A = (1 + i^{8\kappa + 2})(1 - i^{12\kappa + 3}) = (1 - 1)(1 + i) = 0$.

γ. $\nu = 4\kappa + 2$, $\kappa \in N$, τότε: $A = (1 + i^{8\kappa + 4})(1 - i^{12\kappa + 6}) = 2.2 = 4$.

δ. $\nu = 4\kappa + 3$, $\kappa \in N$, τότε: $A = (1 + i^{8\kappa + 6})(1 - i^{12\kappa + 9}) = (1 - 1)(1 + i) = 0$.

16. Να δειχθεί ότι : $(1 + i)^{4\nu} = (-4)^{\nu}$, $\nu \in N$

Έχεις $(1 + i)^{4\nu} = [(1 + i)^2]^{2\nu} = (1 + 2i + i^2)^{2\nu} = (2i)^{2\nu} = (4i^2)^{\nu} = (-4)^{\nu}$, $\nu \in N$.

17. Να δειχθεί ότι $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + \nu i^{\nu-1} = \dfrac{-(\nu+1)i^{\nu+1} - \nu i^{\nu} + i}{2}$, $\nu \in N^*$

1ος τρόπος :

Αν θέσεις $S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (\nu - 1)i^{\nu-2} + \nu i^{\nu-1} \Leftrightarrow$

$iS = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + (\nu - 1)i^{\nu-1} + \nu i^{\nu}$.

Οπότε αφαιρώντας κατά μέλη παίρνεις :

$S - i \cdot S = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{\nu-1} - \nu i^{\nu} \Leftrightarrow$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$(1-i)S = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{\nu-1} - \nu i^{\nu}$.

Όμως το $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{\nu-1}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$

και $\lambda = i$ άρα $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{\nu-1} = 1 \cdot \frac{i^{\nu}-1}{i-1} = \frac{1-i^{\nu}}{1-i}$ άρα

$$(1-i)S = \frac{1-i^{\nu}}{1-i} - \nu i^{\nu} = \frac{1-(\nu+1)i^{\nu}+\nu i^{\nu+1}}{1-i}.$$

Άρα : $S = \frac{\frac{1-(\nu+1)i^{\nu}+\nu i^{\nu+1}}{1-i}}{1-i} = \frac{1-(\nu+1)i^{\nu}+\nu i^{\nu+1}}{(1-i)^2} = \frac{1-(\nu+1)i^{\nu}+\nu i^{\nu+1}}{-2i} =$

$$\frac{\left(1-(\nu+1)i^{\nu}+\nu i^{\nu+1}\right)i}{-2i\cdot i} = \frac{i-(\nu+1)i^{\nu+1}+\nu i^{\nu+2}}{-2i^2} = \frac{-(\nu+1)i^{\nu+1}-\nu i^{\nu}+i}{2}$$

2ος τρόπος : Εφαρμόζεις τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

- Για **ν = 1** είναι $1 = \frac{-2i^2 - i + i}{2}$ που αληθεύει.
- **Έστω ότι η σχέση αληθεύει για ν = κ**, δηλ. ότι :

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + \kappa i^{\kappa-1} = \frac{-(\kappa+1)i^{\kappa+1} - \kappa i^{\nu} + i}{2} \quad (1)$$

- **θα δείξεις ότι ισχύει και για ν = κ + 1**

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (\kappa+1)i^{\kappa} = \frac{-(\kappa+2)i^{\kappa+2} - (\kappa+1)\,i^{\kappa+1} + i}{2}$$

Έχεις ότι :

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (\kappa+1)i^{\kappa} = \left(1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots \kappa i^{\kappa-1}\right) + (\kappa+1)i^{\kappa}$$

Οπότε λόγω της (1) θα είναι :

$$1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + (\kappa+1)i^{\kappa} = \frac{-(\kappa+1)i^{\kappa+1} - \kappa\, i^{\kappa} + i}{2} + (\kappa+1)i^{\kappa} =$$

$$\frac{-(\kappa+1)i^{\kappa+1} - \kappa\, i^{\kappa} + i + 2(\kappa+1)i^{\kappa}}{2} = \frac{(\kappa+2)i^{\kappa} - (\kappa+1)\,i^{\kappa+1} + i}{2} =$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\dfrac{-(\kappa+2)i^{\kappa+2}-(\kappa+1)\,i^{\kappa+1}+i}{2}$ γιατί $(\kappa+2)i^{\kappa}=-(\kappa+2)i^{\kappa}i^{2}=-(\kappa+2)i^{\kappa+2}$.

Άρα η ισχύει για κάθε $\nu\in N^*$.

18. Να υπολογισθεί η παράσταση : $A=\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}+\left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}$

1ος τρόπος :

✓ $\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}=\left[\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2}\right]^{\nu}=\left[\dfrac{(\alpha+i)^2}{(1-\alpha i)^2}\right]^{\nu}=\left(\dfrac{\alpha^2+2\alpha i-1}{1^2-2\alpha i+\alpha^2 i^2}\right)^{\nu}=$

$\left(\dfrac{\alpha^2+2\alpha i-1}{1^2-2\alpha i-\alpha^2}\right)^{\nu}=\left(\dfrac{\alpha^2+2\alpha i-1}{-(\alpha^2+2\alpha i-1)}\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}$.

✓ $\left(\dfrac{\alpha-i}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=\left[\left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2}\right]^{\nu}=\left[\dfrac{(i-\alpha)^2}{(1+\alpha i)^2}\right]^{\nu}=\left(\dfrac{i^2-2\alpha i+\alpha^2}{1^2+2\alpha i+\alpha^2 i^2}\right)^{\nu}=$

$\left(\dfrac{\alpha^2-2\alpha i-1}{1+2\alpha i-\alpha^2}\right)^{\nu}=\left(\dfrac{\alpha^2-2\alpha i-1}{-(\alpha^2-2\alpha i-1)}\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}$.

Οπότε

$A=\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}+\left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu}=2(-1)^{\nu}=\begin{cases}2 & \text{αν } \nu=\text{άρτιος}\\ -2 & \text{αν } \nu=\text{περιττός}\end{cases}$.

2ος τρόπος :

✓ $\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{i(\alpha+i)}{i(1-\alpha i)}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{\alpha i-1}{-i(\alpha i-1)}\right)^{2\nu}=\left(-\dfrac{1}{i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{1}{i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{1^2}{i^2}\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}$

✓ $\left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{i(i-\alpha)}{i(1+\alpha i)}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{-(i+\alpha i)}{i(1+\alpha i)}\right)^{2\nu}=\left(-\dfrac{1}{i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{1}{i}\right)^{2\nu}=\left(\dfrac{1^2}{i^2}\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}$

Οπότε :

$A=\left(\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}+\left(\dfrac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu}=2(-1)^{\nu}=\begin{cases}2 & \text{αν } \nu=\text{άρτιος}\\ -2 & \text{αν } \nu=\text{περιττός}\end{cases}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\mathbf{z = \alpha + \beta i}$, $\alpha, \beta \in R$.

Ονομάζουμε **συζυγή** του z και τον συμβολίζουμε με $\overline{z}$, τον μιγαδικό αριθμό που έχει το ***ίδιο πραγματικό μέρος*** και ***αντίθετο φανταστικό μέρος με τον z*** δηλαδή τον $\overline{z} = \alpha - \beta i$ για τον οποίο ισχύει :

$\mathbf{z \cdot \overline{z} = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2}$.

* * Άρα το $\alpha^2 + \beta^2$ παραγοντοποιείται (στους μιγαδικούς) και γράφεται ως γινόμενο 2 συζυγών μιγαδικών $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$

Παραδείγματα :

19. Ο συζυγής του $z = 3 + 5i$ είναι ο $\overline{z} = 3 - 5i$ και του $z = 2 - 7i$ είναι ο $\overline{z} = 2 + 7i$.

20. Επίσης : $\overline{124} = 124$ γιατί $\overline{124} = \overline{124 + 0i} = 124 - 0i = 124$.
Όμοια $\overline{i} = -i$ γιατί $\overline{i} = \overline{0 + i} = 0 - i = -i$.

21. Αν $z = \chi + 3i$ τότε $\overline{z} = \chi - 3i$ και $z \cdot \overline{z} = (\chi + 3i)(\chi - 3i) = \chi^2 + 9$
επομένως : $\chi^2 + 9 = \chi^2 + 3^2 = (\chi + 3i)(\chi - 3i)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών.

1. $\overline{\overline{z}} = z$

2. $z + \overline{z} = 2\alpha = 2Re(z) \Leftrightarrow Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

3. $z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2 \in R$

4. $z - \overline{z} = 2\beta i = 2Im(z) \cdot i \Leftrightarrow Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2 \cdot i}$

5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

6. $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_\nu}$, $\nu \in N^*$.

7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

8. $\overline{\alpha \cdot z} = \alpha \cdot \overline{z}$, $\alpha \in R$ και $z \in C$

9. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \cdots \cdot \overline{z_\nu}$, $\nu \in N^*$.

10. $\overline{z^\nu} = \left(\overline{z}\right)^\nu$, $\nu \geq 2$

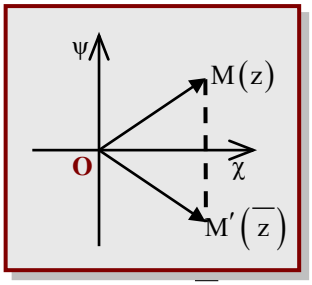
11. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Παρατήρηση :

Το **άθροισμα** και το **γινόμενο** συζυγών είναι **πραγματικός** ενώ η **διαφορά** συζυγών είναι **φανταστικός** αριθμός.

$z + \overline{z}$ και $z \cdot \overline{z} \in R$, ενώ $z - \overline{z} \in I$.

Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες **M(α , β)** και **M΄(α , – β)** δύο συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\overline{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με αντικατάσταση του **z** και του $\overline{z}$ με την αλγεβρική τους μορφή ($z = \chi + \psi i$, $\overline{z} = \chi - \psi i$) και εκτέλεση των πράξεων. **Παράδειγμα :**

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i =$
$(\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Δαμιανός Μωραΐτης

Παραδείγματα :

22. **Να δειχθεί ότι:** $\overline{z^{-1}} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$

$$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$$

** SOS

23. **Αν** $z = \alpha + \beta i,\ z \neq 0$ **να δειχθεί ότι :** $\frac{1}{z} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta i}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Παρατήρηση :

Αν θέλεις να θέσεις την παράσταση $\frac{z_1}{z_2}$ με την μορφή $\alpha + \beta i$ ή διαφορετικά, αν θες να βρεις το πηλίκο του z_1 δια του z_2, τότε πολλαπλασιάζεις αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με τον συζυγή του z_2 και κάνεις τις πράξεις $\left(\text{δηλαδή } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\right)$.

24. Αν $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, τότε επειδή $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$ θα είναι :

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i+3i-6i^2}{1^2+2^2} = \frac{2-i+6}{1^2+2^2} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i.$$

25. Να γράψεις στην μορφή $\kappa + \lambda i$ τους μιγαδικούς :

α. $\frac{\alpha}{\beta i}$ **β.** $\frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i}$ **γ.** $\frac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i}$ **δ.** $\frac{\alpha + \alpha i}{\alpha - \alpha i}$ **ε.** $\frac{\alpha - \alpha i}{\alpha + \alpha i}$

α. Είναι $\frac{\alpha}{\beta i} = \frac{\alpha \cdot i}{\beta i \cdot i} = \frac{\alpha \cdot i}{\beta i^2} = \frac{\alpha}{-\beta} i = -\frac{\alpha}{\beta} i$ όμοια απαντάς και σε παραστάσεις της μορφής $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma i} = \frac{(\alpha + \beta i) i}{\gamma i^2} = \ldots$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Είναι $\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta i)(\alpha+\beta i)}=\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=$

$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}i=\kappa+\lambda i$ όπου $\kappa=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ και $\lambda=\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

γ. Είναι $\frac{\alpha-\beta i}{\alpha+\beta i}=\frac{(\alpha-\beta i)(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=\frac{(\alpha-\beta i)^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=$

$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}i=\kappa+\lambda i$ όπου $\kappa=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ και $\lambda=-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

δ. Είναι $\frac{\alpha+\alpha i}{\alpha-\alpha i}=\frac{(\alpha+\alpha i)(\alpha+\alpha i)}{(\alpha-\alpha i)(\alpha+\alpha i)}=\frac{(\alpha+\alpha i)^2}{\alpha^2+\alpha^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha^2 i-\alpha^2}{2\alpha^2}=\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2}i=i$.

ε. Είναι $\frac{\alpha-\alpha i}{\alpha+\alpha i}=\frac{(\alpha-\alpha i)(\alpha-\alpha i)}{(\alpha+\alpha i)(\alpha-\alpha i)}=\frac{(\alpha-\alpha i)^2}{\alpha^2+\alpha^2}=\frac{\alpha^2-2\alpha^2 i-\alpha^2}{2\alpha^2}=-\frac{2\alpha^2}{2\alpha^2}i=-i$

26. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β που είναι τέτοιοι ώστε :

$$\frac{\alpha}{3+2i}+\frac{\beta}{1+2i}=\frac{5+6i}{-1+8i}$$

$$\frac{\alpha}{3+2i}+\frac{\beta}{1+2i}=\frac{5+6i}{-1+8i}\Leftrightarrow\frac{\alpha(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}+\frac{\beta(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{(5+6i)(-1-8i)}{(-1+8i)(-1-8i)}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3\alpha-2\alpha i}{13}+\frac{\beta-2\beta i}{5}=\frac{43-46i}{65}\Leftrightarrow 5(3\alpha-2\alpha i)+13(\beta-2\beta i)=43-46i\ \Leftrightarrow$$

$$15\alpha+13\beta-(10\alpha+26\beta)i=43-46i\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}15\alpha+13\beta=43\\10\alpha+26\beta=46\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15\alpha+13\beta=43\\5\alpha+13\beta=23\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}10\alpha=20\\5\alpha+13\beta=23\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \alpha=2\ \text{και}\ \beta=1.$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. Να βρεθούν οι χ, ψ που είναι τέτοιοι ώστε : $\chi+\psi i=\dfrac{1}{2+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}$

Είναι $\chi+\psi i=\dfrac{1}{2+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}=\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}{(2+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)(2+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta)}=$

$\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}{(2+\sigma\upsilon\nu\theta)^2+\eta\mu^2\theta}=\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}-\dfrac{\eta\mu\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}i$ οπότε :

$$\boldsymbol{\chi=\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}\ \text{και}\ \psi=-\dfrac{\eta\mu\theta}{5+4\sigma\upsilon\nu\theta}}$$

28. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2\nu}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2\nu}$, $\nu\in N^*$

Είναι $\dfrac{1+i}{1-i}=i$ και $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$ (δες σε προηγούμενο παράδειγμα) άρα

$$A=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2\nu}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2\nu}=(i)^{2\nu}+(-i)^{2\nu}=\left(i^2\right)^{\nu}+\left((-i)^2\right)^{\nu}=$$

$(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu}=2(-1)^{\nu}$ άρα $A=\begin{cases}2 & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -2 & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

29. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\varphi(\chi)$ με **πραγματικούς συντελεστές**.

Να δειχθεί ότι οι αριθμητικές του τιμές για τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς z και $\overline{z}$ είναι επίσης συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Δηλαδή κ, λ ∈R και $\varphi(z)=\kappa+\lambda i$ τότε $\varphi\left(\overline{z}\right)=\kappa-\lambda i=\overline{\varphi(z)}$.

Έστω $\varphi(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_0$ με $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu\in R$.

Είναι : $\varphi(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0=\kappa+\lambda i$ και

$\varphi\left(\overline{z}\right)=\alpha_\nu\left(\overline{z}\right)^\nu+\alpha_{\nu-1}\left(\overline{z}\right)^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\overline{z}+\alpha_0=$

$\overline{\alpha_\nu}\cdot\overline{z^\nu}+\overline{\alpha_{\nu-1}}\cdot\overline{z^{\nu-1}}+\cdots+\overline{\alpha_1}\cdot\overline{z}+\overline{\alpha_0}=\overline{\alpha_\nu z^\nu}+\overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}}+\cdots+\overline{\alpha_1 z}+\overline{\alpha_0}=$

$\overline{\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0}=\overline{\kappa+\lambda i}=\kappa-\lambda i$ δηλ. $\varphi\left(\overline{z}\right)=\kappa-\lambda i=\overline{\varphi(z)}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις :

Κάθε πολυώνυμο $\varphi(\chi)$ ν βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει ***ακριβώς*** ν ρίζες όχι απαραίτητα πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους

Αν $\varphi(z)=0$ τότε από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι :

$\varphi(\overline{z})=\overline{\varphi(z)}=\overline{0}=0$.

π.χ. αν θεωρήσεις το πολυώνυμο : $\varphi(\chi)=\chi^4-5\chi^3+5\chi^2+25\chi-26$, επειδή : $\varphi(3+2i)=(3+2i)^4-5(3+2i)^3+5(3+2i)^2+25(3+2i)-26=$

$\ldots = 0$, θα έχεις και $\varphi(3-2i)=0$.

Αυτό σημαίνει ότι αν ένα πολυώνυμο **με πραγματικούς συντελεστές** έχει για ρίζα τον μη πραγματικό αριθμό **z**, θα έχει για ρίζα του και τον συζυγή του $\overline{z}$, οπότε **αν υπάρχουν μιγαδικές λύσεις τότε το πλήθος τους θα είναι άρτιο.** Επίσης κάθε πολυώνυμο ***περιττού βαθμού θα έχει οποσδήποτε μια του τουλάχιστον πραγματική ρίζα***

Προσοχή

Τα πιο πάνω **δεν ισχύουν** για πολυώνυμα με **μιγαδικούς συντελεστές.**

30. Δίνεται το πολυώνυμο $\varphi(\chi)=\chi^3-(\alpha-\beta)\chi^2+(2\alpha+\beta-1)\chi+\alpha-1$.

Να προσδιορισθούν τα α, β $\in$R ώστε το $\varphi(\chi)$ να έχει για ρίζα του τον αριθμό 1 – i.

Είναι $\varphi(1-i)=(1-i)^3-(\alpha-\beta)(1-i)^2+(2\alpha+\beta-1)(1-i)+\alpha-1=$

$(1^3-3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2-i^3)-(\alpha-\beta)(1^2-2\cdot1\cdot i+i^2)+(2\alpha+\beta-1)(1-i)+\alpha-1=$

$1-3i-3+i-(\alpha-\beta)(1-2i-1)+(2\alpha+\beta-1)(1-i)+\alpha-1=$

$1-3i-3+i+2\alpha i-2\beta i+2\alpha+\beta-1-2\alpha i-\beta i+i+\alpha-1=$

$(3\alpha+\beta-4)+(-1-3\beta)i=0 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta-4=0$ και $-1-3\beta=0 \Leftrightarrow$

$\alpha=\frac{13}{9}$ και $\beta=-\frac{1}{3}$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

31. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(\chi)=\alpha\chi^{2004}+\beta\chi^{2003}+\alpha\chi^{2002}+\beta\chi^{2001}$.

Να αποδειχθεί ότι το i είναι ρίζα του $P(\chi)$ και να βρεθεί μια $2^{η}$ ρίζα του $P(\chi)$.

Είναι $P(i)=\alpha i^{2004}+\beta i^{2003}+\alpha i^{2002}+\beta i^{2001}=$

$\alpha\left(i^4\right)^{501}+\beta\left(i^4\right)^{500}i^3+\alpha\left(i^4\right)^{500}i^2+\beta\left(i^4\right)^{500}i=\alpha+\beta(-i)+\alpha(-1)+\beta\cdot i=0$

Αφού το P(χ) έχει ρίζα το i θα έχει ως ρίζα και τον συζυγή του δηλ το – i.

Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$. α, β, γ ∈ R και α ≠ 0.

Όπως είδες και στην αρχή του κεφαλαίου : $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$, άρα η εξίσωση $\chi^2=-1$ έχει στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $\chi_1=i$ και $\chi_2=-i$.

Όμοια, η εξίσωση $\chi^2=-4$ έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις $\chi_1=2i$ και $\chi_2=-2i$, αφού $z^2=-4\Leftrightarrow z^2=i^2\cdot 4\Leftrightarrow z^2=(2i)^2\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=2i\\z_2=-2i\end{cases}$

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με **α, β, γ ∈ R και α ≠ 0 (1).**

Εργάζεσαι όπως στο R και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή :

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha\left(z^2+2\frac{\beta}{2\alpha}z+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$z^2+2\frac{\beta}{2\alpha}z+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ **(1)**, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έτσι, έχεις τις εξής περιπτώσεις:

- ✓ **Αν $\Delta > 0$,** τότε η εξίσωση **(1)** έχει **δύο λύσεις πραγματικές και άνισες τις:** $z_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $z_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

- ✓ **Αν $\Delta = 0$,** τότε η εξίσωση **(1)** έχει μια **διπλή πραγματική λύση:** $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

- ✓ **Αν $\Delta < 0$,** επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2} = \dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \dfrac{i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{(2\alpha)^2} = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, τότε η εξίσωση **(1)** $\left(z + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$ γράφεται $\left(z + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

Άρα οι λύσεις της είναι : $z_1 = \dfrac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$ και $z_2 = \dfrac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι **συζυγείς** μιγαδικοί αριθμοί.

Παρατήρηση :

Η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με **$\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$** έχει **πάντα δυο λύσεις** τώρα πια.

Αν **$\Delta \geq 0$** τότε οι **λύσεις** είναι **πραγματικές** και

Αν **$\Delta < 0$** τότε οι **λύσεις** είναι **συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.**

Για παράδειγμα, η εξίσωση $z^2 - 4z + 3 = 0$ έχει $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ και οι λύσεις της είναι: $z_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3,\ z_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$.

Όμως, η εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$ έχει $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i,\ z_2 = \dfrac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i$.

Λαμιανός Μωραΐτης

Μέτρο (*απόλυτη τιμή*) μιγαδικού αριθμού.

Ορισμός

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\mathbf{z=\alpha+\beta i}$ με $\alpha, \beta \in R$.
Ονομάζουμε μέτρο ή απόλυτη τιμή του z και συμβολίζουμε με $|z|$, τον μη αρνητικό αριθμό $|z|=|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

π.χ. αν $z=3+7i$ τότε $|z|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$,
αν $z=-2+i$ τότε $|z|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

Παρατηρήσεις :

- ✓ Από τον τρόπο που ορίστηκε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z, είναι φανερό ότι ισχύει : Για κάθε $z \in C$, $|z| \geq 0$, $(|z|=0 \Leftrightarrow z=0)$.

- ✓ Οι μιγαδικοί αριθμοί: $z, -z, \overline{z}, -\overline{z}$ έχουν το ίδιο μέτρο, δηλ. : $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$.

π.χ. Αν $z=3+4i$, οπότε, $-z=-3-4i$, $\overline{z}=3-4i$, $-\overline{z}=-3+4i$, τότε από τη θεωρία θα είναι : $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

- ✓ Το τετράγωνο του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού: $z=\alpha+\beta i$ $\alpha, \beta \in R$ ισούται με το γινόμενο **αυτού επί τον συζυγή του δηλαδή** για κάθε $z \in C$ είναι : $|z|^2=z\cdot\overline{z}$.

Γιατί $z\cdot\overline{z}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-(\beta i)^2=\alpha^2-(-\beta^2)=\alpha^2+\beta^2$ και

$|z|^2=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2=\alpha^2+\beta^2$.

Δες τις υπόλοιπες παρατηρήσεις στην επόμενη σελίδα

Λιβαδειά

✓ $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{z}=\dfrac{1}{z}\\ z=\dfrac{1}{\overline{z}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi^2+\psi^2=1\\ \text{δηλαδή η εικόνα του z}\\ \text{ανήκει στον κύκλο } (O,\,1)\end{cases}$

✓ Αν $\beta=0 \Leftrightarrow z=\alpha\in R \Leftrightarrow |z|=\sqrt{\alpha^2} \Leftrightarrow |z|^2=|\alpha|^2=\alpha^2=z^2$.

Δηλαδή $|z|^2=z^2 \Leftrightarrow z\in R$.

✓ Αν $\alpha=0\,,\ \beta\neq 0 \Leftrightarrow z=\beta i\in I \Leftrightarrow |z|^2=|\beta i|^2=\beta^2=-(\beta i)^2=-z^2$.

Δηλαδή $|z|^2=-z^2 \Leftrightarrow z\in I$.

Είναι γνωστό ότι ***στους πραγματικούς αριθμούς*** για την απόλυτη τιμή ισχύει η σχέση $|\chi|^2=\chi^2$, για κάθε $\chi\in R$.

Προσοχή

Η ιδιότητα $|\chi|^2=\chi^2$ **δεν ισχύει** για καθαρά μιγαδικούς ή φανταστικούς αριθμούς.

Γενικά : Αν $z=\alpha+\beta i\in\leq$ με $\alpha,\beta\in R$, $\beta\neq 0$, είναι $|z|^2\neq z^2$.

Ιδιότητες του μέτρου.

Το βιβλίο πολλοί αγάπησαν . . . . .
για το διάβασμα . . . . .
θα σε γελάσω και δε θέλω
(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή)

✓ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \Leftrightarrow |z_1\cdot z_2|^2=(|z_1|\cdot|z_2|)^2 \Leftrightarrow$

$(z_1\cdot z_2)\overline{(z_1\cdot z_2)}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2})=(z_1\cdot\overline{z_1})(z_2\cdot\overline{z_2}) \Leftrightarrow$

$z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}$ που ισχύει.

Λαμιανός Μωραΐτης

✔ $\left|z^{\nu}\right|=\left|z\right|^{\nu}$

$$\left|z^{\nu}\right|=\left|z\cdot z\cdot z\cdot\cdots z\right|=\left|z\right|\cdot\left|z\right|\cdot\left|z\right|\cdot\cdots\left|z\right|=\left|z\right|^{\nu}$$

✔ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$ $\quad z_2\neq 0$.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}\Leftrightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\left(\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\left|z_1\right|^2}{\left|z_2\right|^2}\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_1}}{z_2\cdot\overline{z_2}}.$$

✔ $\begin{cases}\left|z^{-\nu}\right|=\left|z\right|^{-\nu}\\ \left|z^{-1}\right|=\left|z\right|^{-1}\end{cases}$ $\quad z\neq 0$

$$\left|z^{-\nu}\right|=\left|\frac{1}{z^{\nu}}\right|=\left|\frac{1}{z\cdot z\cdot z\cdot\cdots z}\right|=\frac{1}{\left|z\right|\cdot\left|z\right|\cdot\left|z\right|\cdot\cdots\left|z\right|}=\frac{1}{\left|z\right|^{\nu}}=\left|z\right|^{-\nu}$$

Εφαρμογή για $\nu=1$: $\boxed{\left|z^{-1}\right|=\left|z\right|^{-1}=\frac{1}{\left|z\right|}}$

✔ $\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|\leq\left|z_1+z_2\right|\leq\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$,

Πότε ισχύουν οι ισότητες $\begin{cases}1.\ \left|z_1+z_2\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\\ 2.\ \left|z_1+z_2\right|=\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|\\ 3.\ \left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|=\left|z_1+z_2\right|=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\end{cases}$.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\chi_1+\psi_1\cdot i$ και $z_2=\chi_2+\psi_2\cdot i$ που παριστάνονται γεωμετρικά από τις διανυσματικές τους ακτίνες $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ αντίστοιχα.

Εξ ορισμού, το άθροισμα $z_1+z_2=\chi_1+\chi_2+(\psi_1+\psi_2)\cdot i$ των μιγαδικών, αντιστοιχεί στο άθροισμα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ δηλαδή στο διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο έχει συντεταγμένες $(\chi_1+\chi_2\ ,\ \psi_1+\psi_2)$.

Λιβαδειά

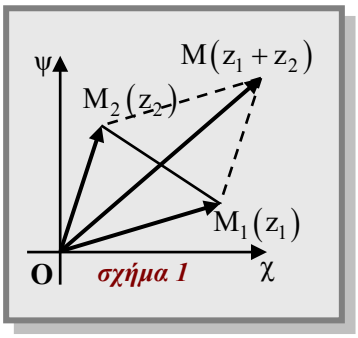
1ον Αν τα σημεία **O**, $\mathbf{M_1(z_1)}$, $\mathbf{M_2(z_2)}$, **δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.**

(***σχήμα 1*** , δες πιο κάτω πότε συμβαίνει αυτό).

Σ' αυτή την περίπτωση είναι φανερό, από τον τρόπο που υπολογίζεται το άθροισμα και λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OM_2M ότι : $|(OM_2)-(M_2M)|<(OM)<(OM_2)+(M_2M)$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{M_2M}\right|<\left|\overrightarrow{OM}\right|<\left|\overrightarrow{OM_2}\right|+\left|\overrightarrow{M_2M}\right| \Leftrightarrow$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|<|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|.$$

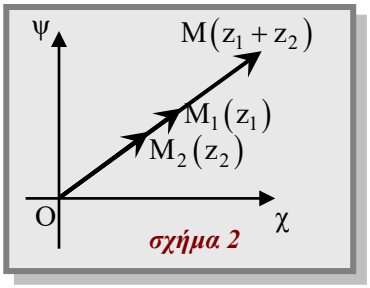


2ον Αν τα σημεία **O**, $\mathbf{M_1(z_1)}$, $\mathbf{M_2(z_2)}$, **βρίσκονται στην ίδια ευθεία.**

πράγμα που σημαίνει ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ θα είναι παράλληλα, επομένως από την Β΄ Λυκείου είναι γνωστά τα εξής : $\overrightarrow{OM_1}$ // $\overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM_1} = \kappa\cdot\overrightarrow{OM_2}$, άρα και για τους μιγαδικούς z_1 και z_2 θα ισχύει η ίδια σχέση $z_1 = \kappa\cdot z_2$, πιο συγκεκριμένα :

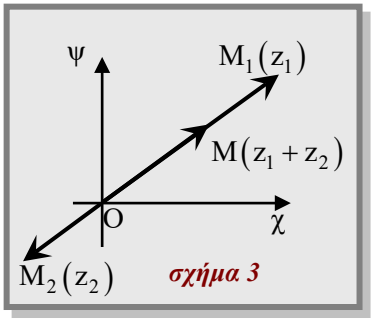
α) Αν **κ > 0** τα διανύσματα $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ θα είναι **ομόρροπα** και τα M_1 και M_2 θα βρίσκονται από το **ίδιο μέρος του O** (***σχήμα 2***), πράγμα που σημαίνει ότι $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|+\left|\overrightarrow{OM_2}\right| \Leftrightarrow$

$$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$$



β) Αν **κ < 0** τα διανύσματα $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ θα είναι **αντίρροπα** και τα M_1 και M_2 θα βρίσκονται εκατέρωθεν του O (***σχήμα 3***), πράγμα που σημαίνει ότι $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\left|\overrightarrow{OM_1}\right|-\left|\overrightarrow{OM_2}\right|\right| \Leftrightarrow$

$$|z_1+z_2|=\big||z_1|-|z_2|\big|$$



Λαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Οπότε σε κάθε περίπτωση : $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

Και

$$\begin{cases} 1.\ |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \\ 2.\ |z_1+z_2|=\big||z_1|-|z_2|\big| \end{cases} \text{ όταν } z_1=\kappa\cdot z_2\ ,\ \kappa>0 \text{ ή } \kappa<0 \text{ αντίστοιχα}$$

$$3.\ \big||z_1|-|z_2|\big|=|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \text{ όταν } z_1=0 \text{ ή } z_2=0$$

✓ $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ και γενικότερα

$$|z_1+z_2+\cdots+z_\nu| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_\nu|$$

Είναι

$$|z_1+z_2+\cdots+z_\nu| \le |z_1+z_2+\cdots+z_{\nu-1}|+|z_\nu| \le \cdots \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_\nu|$$

Παραδείγματα

32. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=(2+3i)^3$, $z_2=(1-i)^3(2-5i)^2$, $z_3=\dfrac{2-3i}{2+3i}$

Να βρεθεί το μέτρο τους με τους εξής δύο τρόπους :

α. γράφοντας τους στη μορφή α + βi και

β. με εφαρμογή των ιδιοτήτων του μέτρου των μιγαδικών.

1ος τρόπος :

i) $z_1=2^3+3\cdot 2^2\cdot 3i+3\cdot 2(3i)^2+(3i)^3=8+36i-54-27i=-46+9i$

οπότε: $|z_1|=\sqrt{(-46)^2+9^2}=13\sqrt{13}$

ii) $z_2=(1-3i+3\cdot i^2-i^3)(4-20i+25i^2)=(1-3i-3+i)(4-20i-25)$

$=(-2-2i)(-21-20i)=42+42i+40i+40i^2=42+42i+40i-40$

$=2+82i$ οπότε: $|z_2|=\sqrt{2^2+82^2}=58\sqrt{2}$.

Λιβαδειά

iii) $z_3=\dfrac{2-3i}{2+3i}=\dfrac{(2-3i)^2}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{4-12i-9}{4+9}=\dfrac{-5-12i}{13}=-\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$

άρα $|z_3|=\sqrt{\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25}{169}+\dfrac{144}{169}}=\sqrt{\dfrac{169}{169}}=\sqrt{1}=1$

2ος τρόπος :

i) $|z_1|=\left|(2+3i)^3\right|=\left|(2+3i)\right|^3=\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)^3=\left(\sqrt{13}\right)^3=13\sqrt{13}$.

ii) $|z_2|=\left|(1-i)^3(2-5i)^2\right|=\left|(1-i)^3\right|\left|(2-5i)^2\right|=\left|(1-i)\right|^3\left|(2-5i)\right|^2$

$=\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^3\left(\sqrt{2^2+(-5)^2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\sqrt{29}\right)^2=2\sqrt{2}\cdot 29=58\sqrt{2}$.

iii) $|z_3|=\left|\dfrac{2-3i}{2+3i}\right|=\dfrac{|2-3i|}{|2+3i|}=\dfrac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{2^2+3^2}}=1$.

Σχόλιο

Από το πιο πάνω θέμα γίνεται φανερό ότι για να βρούμε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού δοσμένου σε αναπτυγμένη μορφή, **συμφέρει** αντί να τον φέρουμε στην αλγεβρική του μορφή**, να εφαρμόσουμε** (αν βέβαια είναι δυνατόν) κατ' ευθείαν γνωστές **ιδιότητες του μέτρου και των συζυγών.**

33. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού $z=\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}$

Είναι $|z|=\left|\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu}\right|=\left|\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right|^{\nu}=\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{\nu}$

$=\left(\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^{\nu}=\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}\right)^{\nu}=\mathbf{1^{\nu}=1}$.

Λαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

34. Να βρεθεί το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z, που είναι τέτοιος ώστε :

$$z=\frac{(\alpha-\beta i)^{\nu}}{(\alpha+\beta i)^{\nu}}$$

1ος τρόπος Είναι $|z|=\left|\frac{(\alpha-\beta i)^{\nu}}{(\alpha+\beta i)^{\nu}}\right|=\frac{|(\alpha-\beta i)|^{\nu}}{|(\alpha+\beta i)|^{\nu}}=\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^{\nu}=1^{\nu}=1$

2ος τρόπος Αν θέσεις $z_1=\alpha-\beta i$ τότε $\alpha+\beta i=\overline{z_1}$ και θα έχεις :

$$\left|\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right|=\left|\frac{z_1^2}{\overline{z_1}z_1}\right|=\frac{|z_1^2|}{|\,|z_1|^2\,|}=\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2}=1 \text{ οπότε } |z|=1$$

Επισήμανση :

Για να **αποδείξεις** ότι ένας μιγαδικός αριθμός **z =α + βi ≠ 0** **ταυτίζεται με πραγματικό**, μπορείς να εργαστείς **με έναν από τους εξής τρόπους** :

α. **Να δείξεις ότι ο z είναι ίσος με τον συζυγή του** ακολουθώντας την «διαδρομή» $z=\overline{z} \Leftrightarrow z-\overline{z}=0 \Leftrightarrow \beta=\text{Im}(z)=0$ δηλαδή η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα χ΄χ.

β. **Να δείξεις ότι το φανταστικό του μέρος είναι ίσο με το μηδέν,** δηλαδή **να δείξεις ότι β = Im(z) = 0,** αφού πρώτα γράψεις τον z στην κανονική του μορφή α + βi ,αν δεν είναι.

γ. **Να δείξεις ότι :** $z^2=|z|^2$, ακολουθώντας την «διαδρομή»

$$z^2=|z|^2 \Leftrightarrow z^2=z\cdot\overline{z} \Leftrightarrow z(z-\overline{z})=0 \Leftrightarrow z=\overline{z} \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta i=\alpha-\beta i \Leftrightarrow 2\beta i=0 \Leftrightarrow \beta=\text{Im}(z)=0, \Leftrightarrow z\in R .$$

δ) **Να δείξεις ότι ο z είναι άθροισμα ή γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.**

Είναι φανερό ότι τις ίδιες ακριβώς διαδικασίες πρέπει να ακολουθήσεις και όταν σου ζητά να βρεις **πότε** ένας μιγαδικός **z = α + βi ≠ 0** είναι πραγματικός.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα

35. Αν $z_1, z_2 \in C$ να δειχθεί ότι ο αριθμός $w = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2$ είναι πραγματικός.

1ος τρόπος : αρκεί να δείξεις ότι : $w = \overline{w}$.

Είναι : $w = \overline{w} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = \overline{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2} \Leftrightarrow$

$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} + \overline{\overline{z_1}} \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \overline{z_2}$ που

είναι προφανής άρα $w = \overline{w} \Leftrightarrow w - \overline{w} = 0 \Leftrightarrow \beta = \text{Im}(w) = 0$

2ος τρόπος: αρκεί να δείξεις ότι :

ο w είναι άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Πράγματι $w = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2}$ άρα $w \in R$.

3ος τρόπος : Αφού γράψεις τον w στη μορφή α + βi, θα τον αντικαταστήσεις στην σχέση $w = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2$ και με πράξεις · · · θα δείξεις ότι **β = 0**.

36. Αν $z_1, z_2 \in C$ και $\alpha \in R$, να δειχτεί ότι ο αριθμός

$w = z_1 \cdot \overline{z_1} + \alpha(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) + z_2 \cdot \overline{z_2}$ είναι πραγματικός.

Αρκεί να δείξεις ότι : $w = \overline{w}$.

$\overline{w} = \overline{z_1 \cdot \overline{z_1} + \alpha(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) + z_2 \cdot \overline{z_2}} =$

$\overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_1}} + \overline{\alpha}(\overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} + \overline{\overline{z_1}} \cdot \overline{z_2}) + \overline{z_2} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_1 + \alpha(\overline{z_1} \cdot z_2 + z_1 \cdot \overline{z_2}) + \overline{z_2} \cdot z_2 = w$,

άρα $w \in R$.

37. Αν $|z+i| = |z-i|$ να δειχτεί ότι ο z είναι πραγματικός.

Αρκεί να δείξεις ότι : $z = \overline{z}$.

Λαμιανός Μωραΐτης

Έστω $|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |z+i|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow (z+i)\overline{(z+i)}=(z-i)\overline{(z-i)}$

$\Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i)=(z-i)(\overline{z}+i) \Leftrightarrow z\overline{z}-iz+i\overline{z}-i^2=z\overline{z}+iz-i\overline{z}-i^2 \Leftrightarrow$

$2iz=2i\overline{z} \Leftrightarrow z=\overline{z}$, άρα $z \in R$.

Επισήμανση :

Για να **αποδείξεις** ότι ένας μιγαδικός αριθμός **z =α + βi ≠ 0** **ταυτίζεται με φανταστικό**, μπορείς να εργαστείς **με έναν από τους εξής τρόπους** :

α. **Να δείξεις ότι ο z είναι ίσος με τον αντίθετο του συζυγή του** ακολουθώντας την «διαδρομή» $z=-\overline{z} \Leftrightarrow z+\overline{z}=0 \Leftrightarrow \alpha = Re(z) = 0$ δηλαδή η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα ψψ΄.

β. **Να δείξεις ότι το πραγματικό του μέρος είναι ίσο με το μηδέν,** δηλαδή **να δείξεις ότι α = Re(z) = 0,** αφού πρώτα γράψεις τον z στην κανονική του μορφή α + βi ,αν δεν είναι.

γ. **Να δείξεις ότι :** $z^2=-|z|^2$, ακολουθώντας την «διαδρομή»

$z^2=-|z|^2 \Leftrightarrow z^2=-z\cdot\overline{z} \Leftrightarrow z(z+\overline{z})=0 \Leftrightarrow z=-\overline{z} \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta i=-\alpha+\beta i \Leftrightarrow 2\alpha=0 \Leftrightarrow$ **α = Re(z) = 0, ⇔ z ∈ I .**

δ) **Να δείξεις ότι ο z είναι διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών.**

Είναι φανερό ότι τις ίδιες ακριβώς διαδικασίες πρέπει να ακολουθήσεις και όταν σου ζητά να βρεις **πότε** ένας μιγαδικός **z = α + βi ≠ 0** είναι φανταστικός.

Σε ***όλες*** τις παραπάνω περιπτώσεις, αν η άσκηση ***μιλάει*** για τον **z = α + βi ≠ 0** , **στο τέλος** θα πρέπει να αντικαταστήσεις τις λύσεις που βρήκες στον μιγαδικό και να **απορρίψεις εκείνες που μηδενίζουν** (πιθανόν) **ταυτόχρονα το Re(z) και το Im(z),** δηλαδή οδηγούν στο μιγαδικό της μορφής **0 + 0i.**

Λιβαδειά

38. Αν $z_1, z_2 \in C$ και $|z_1| = |z_2|$, $z_1 \neq z_2$ να δειχθεί ότι ο αριθμός $z = \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ είναι φανταστικός.

Αρκεί να δείξεις ότι : $z = -\overline{z}$.

Έστω $z = -\overline{z} \Leftrightarrow \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = -\overline{\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = -\dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} = -z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow 2|z_1|^2 - 2|z_2|^2 = 0$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2$ που προφανώς ισχύει άρα $z = -\overline{z}$ επομένως

$\alpha + \beta i = -(\alpha - \beta i) \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow 2\cdot\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ άρα z φανταστικός.

39. Αν $|z| = 1$ $(z \neq 1)$, να δειχτεί ότι ο αριθμός $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$ είναι φανταστικός.

Αρκεί να δείξεις ότι : $z' = -\overline{z'}$. Είναι $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

Ταυτόχρονα είναι $-\overline{z'} = -\overline{\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)} = -\dfrac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -\dfrac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -\dfrac{\frac{z+1}{z}}{\frac{z-1}{z}} = -\dfrac{z+1}{z-1} = z'$

άρα z' φανταστικός .

Επισήμανση *SOS* :

Για να λύσεις προβλήματα που ζητούν ένα από τα εξής :

- ✓ Να βρεις τον z ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες . . .
- ✓ Να επιλυθεί η εξίσωση . . . κ. λ. π.
- ✓ Να αποδείξεις ότι ισχύει η σχέση . . . και στη σχέση που σου ζητά να δείξεις εμφανίζεται ο z, ο συζυγής του $\overline{z}$ ή το μέτρο του $|z|$.

έχεις δυο επιλογές :

- ✓ ή θέτεις $z = \chi + \psi i$, με $\chi, \psi \in R$ οπότε όλες οι σχέσεις γίνονται σχέσεις πραγματικών αριθμών.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ ή δεν αντικαθιστάς $z=\chi+\psi i$, αλλά ***εφαρμόζεις τις κατάλληλες ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών και του μέτρου*** .

Η πρώτη «κίνηση φαίνεται εύκολη και κυρίως οικεία αλλά πολλές φορές οδηγεί σε υπερβολικά πολλές πράξεις, με αποτέλεσμα να χάνεται κυριολεκτικά ο «μπούσουλας», επομένως να δοκιμάζεις στην αρχή με ***ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών και του μέτρου*** και αν δεν … τότε προχωράς σε αντικατάσταση, όλων των μιγαδικών που εμφανίζονται, με την αλγεβρική τους μορφή.

Μην ανησυχείς . . . από την επόμενη εβδομάδα
στα καφέ θα σπέρνουνε φραπέ και θα φυτρώνουν Ευρώ

Σύλλογος προστασίας του δικαιώματος στην τεμπελιά ο **«Αραχτός»**



40. Να βρεις τον $z\in C$ έτσι ώστε οι μιγαδικοί $z,\ \frac{1}{z},\ z-1$ να έχουν το ίδιο μέτρο . $\left(\text{Υπόδειξη θέσε : } |z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1| \text{ και } z=\chi+\psi i\right)$

Αν έχουν το ίδιο μέτρο οι μιγαδικοί $z,\ \frac{1}{z},\ z-1$ τότε $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$ **(1)**

οπότε :

1ον : $|z|=\left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$ και αν θέσεις $z=\chi+\psi i$

με $\chi,\psi\in R$ θα έχεις $|z|=1 \Leftrightarrow |\chi+\psi i|=1 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2=1$ **(2)**

Λιβαδειά

2ον : Από την **(1)** θα είναι και $|z-1|=|z|=1 \Leftrightarrow |\chi+\psi i-1|=1 \Leftrightarrow$

$|(\chi-1)+\psi i|=1 \Leftrightarrow (\chi-1)^2+\psi^2=1$ **(3)**

Οι **(2)** και **(3)** αποτελούν σύστημα : $\begin{cases}\chi^2+\psi^2=1\\(\chi-1)^2+\psi^2=1\end{cases}$ το οποίο λύνεις εύκολα

με μια αφαίρεση κατά μέλη : $\begin{cases}\chi^2+\psi^2=1\\(\chi-1)^2+\psi^2=1\end{cases}$ άρα $(\chi-1)^2-\chi^2=0 \Leftrightarrow$

$(\chi-1+\chi)(\chi-1-\chi)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2\chi=1\\-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\chi=\frac{1}{2}}$. Οπότε από την

$\chi^2+\psi^2=1$ με αντικατάσταση έχεις : $\frac{1}{4}+\psi^2=1 \Leftrightarrow \psi^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \boxed{\psi_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Άρα λύσεις οι μιγαδικοί : $\boxed{z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ και } z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

41. Να βρεις το μέτρο του μιγαδικού : $z=\left[\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)i\right]^{2\kappa}$

Εφαρμογές :

α. $z=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)i\right]^{12}$

β. $z=\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)i\right]^{10}$

Είναι $|z|=\left|\left[\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)i\right]^{2\kappa}\right| \Leftrightarrow |z|=\left|\left[\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)+\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)i\right]\right|^{2\kappa}=$

$\left[\sqrt{\left(\alpha+\sqrt{\beta}\right)^2+\left(\alpha-\sqrt{\beta}\right)^2}\right]^{2\kappa}=\left[\sqrt{\alpha^2+2\alpha\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2+\alpha^2-2\alpha\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2}\right]^{2\kappa}=$

$\left[\sqrt{2\alpha^2+2\beta}\right]^{2\kappa}=\left[\left(\sqrt{2\alpha^2+2\beta}\right)^2\right]^{\kappa}=\left[2\left(\alpha^2+\beta\right)\right]^{\kappa}=2^{\kappa}\left(\alpha^2+\beta\right)^{\kappa}$.

Λαμιανός Μωραΐτης

Εφαρμογές :

α. Είναι $|z|=\left|\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)i\right]^{12}\right| \Leftrightarrow |z|=\left|\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)i\right]\right|^{12} =$

$$\left[\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}\right]^{12} \Leftrightarrow \left[\sqrt{1^2+2\cdot1\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right]^{12}$$

$$=\left[\sqrt{2\cdot1+2\cdot2}\right]^{12}=\left[\left(\sqrt{6}\right)^2\right]^6=6^6=\mathbf{46.656}.$$

β. Είναι $|z|=\left|\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right]^{10}\right| \Leftrightarrow |z|=\left|\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right]\right|^{10} =$

$$\left[\sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}\right]^{10} \Leftrightarrow \left[\sqrt{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}\right]^{10}=\left[\sqrt{4}\right]^{10}=\mathbf{2^{10}=1.024}$$

42. Αν $|z|=\alpha$, να αποδείξετε ότι : $\overline{z}=\dfrac{\alpha^2}{z}$

$|z|=\alpha \Leftrightarrow |z|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow z=\dfrac{\alpha^2}{\overline{z}}$.

43. Αν $|z+\alpha^2|=\alpha|z+1|$, $\alpha>1$ να αποδείξετε ότι : $|z|=\alpha$

$$|z+\alpha^2|=\alpha|z+1| \Leftrightarrow |z+\alpha^2|^2=\alpha^2|z+1|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(z+\alpha^2\right)\cdot\overline{\left(z+\alpha^2\right)}=\alpha^2\left(z+1\right)\cdot\overline{\left(z+1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\left(z+\alpha^2\right)\cdot\left(\overline{z}+\alpha^2\right)=\alpha^2\left(z+1\right)\cdot\left(\overline{z}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z}+z\alpha^2+\alpha^2\overline{z}+\alpha^4=\alpha^2z\overline{z}+\alpha^2z+\alpha^2\overline{z}+\alpha^2 \Leftrightarrow z\overline{z}-\alpha^2z\overline{z}=\alpha^2-\alpha^4 \Leftrightarrow$$

$z\overline{z}\left(1-\alpha^2\right)=\alpha^2\left(1-\alpha^2\right)$ και επειδή $\alpha>1$ άρα $\alpha^2-1\neq0$,

θα είναι $z\overline{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow |z|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow |z|=\alpha$.

Λιβαδειά

44. Έστω ο «καθαρά» μιγαδικός z (δηλαδή $z \in C - R$) με $|2z-1| = |z-2|$ **(1)** να δείξεις ότι : $|z| = 1$.

Έστω $z = \chi + \psi i$ **(1)** $\Leftrightarrow$

$|2(\chi+\psi i)-1| = |(\chi+\psi i)-2| \Leftrightarrow |(2\chi-1)+2\psi i| = |(\chi-2)+\psi i| \Leftrightarrow$

$|(2\chi-1)+2\psi i|^2 = |(\chi-2)+\psi i|^2 \Leftrightarrow (2\chi-1)^2+4\psi^2 = (\chi-2)^2+\psi^2 \Leftrightarrow \cdots$

$3\chi^2+3\psi^2 = 3 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| = 1}$.

Η άσκηση ισχύει και για $z \in R$, μόνο που τότε τα μέτρα ταυτίζονται με τα απόλυτα οπότε λύνεται με πιο εύκολο τρόπο.

45. Να δείξεις ότι αν για τον $z \in C$ είναι $|z-9| = 3|z-1|$ τότε $|z| = 3$.

Ξεκινάς από τη σχέση $|z-9| = 3|z-1|$, χρησιμοποιείς τις ιδιότητες των μέτρων οπότε:

$|z-9| = 3|z-1| \Leftrightarrow |z-9|^2 = (3|z-1|)^2 \Leftrightarrow (z-9)\overline{(z-9)} = 9(z-1)\overline{(z-1)} \Leftrightarrow$

$(z-9)(\overline{z}-\overline{9}) = 9(z-1)(\overline{z}-\overline{1}) \Leftrightarrow (z-9)(\overline{z}-9) = 9(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$

$z\cdot\overline{z} - 9z - 9\overline{z} + 81 = 9(z\cdot\overline{z} - z - \overline{z} + 1) \Leftrightarrow$

$z\cdot\overline{z} - 9z - 9\overline{z} + 81 = 9z\cdot\overline{z} - 9z - 9\overline{z} + 9 \Leftrightarrow$

$8z\cdot\overline{z} = 72 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z} = 9 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$.

** Ένας άλλος τρόπος είναι να ακολουθήσεις τον «τυφλοσούρτη» δηλαδή στην σχέση $|z-9| = 3|z-1|$ να θέσεις όπου $z = \chi + \psi i$ με $\chi, \psi \in R$ και με πράξεις θα καταλήξεις στην εξίσωση $\chi^2+\psi^2 = 9 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$.

46. Αν για τον $z \in C$ είναι $|z-12| = 3|z-4|$ τότε να βρείτε το $|z-3|$.

Μπορείς (για να διευκολύνεις τις πράξεις) να θέσεις $\mathbf{w = z - 3}$ οπότε $|\mathbf{z-3}| = |\mathbf{w}|$ και $\mathbf{z = w + 3}$, άρα η σχέση : $|z-12| = 3|z-4| \Leftrightarrow$

Λαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$|w+3-12|=3|w+3-4| \Leftrightarrow |w-9|=3|w-1|$ και αν χρησιμοποιήσεις τις ιδιότητες των μέτρων : $|w-9|=3|w-1| \Leftrightarrow |w-9|^2=(3|w-1|)^2$

$\Leftrightarrow (w-9)\overline{(w-9)}=9(w-1)\overline{(w-1)} \Leftrightarrow (w-9)(\overline{w}-\overline{9})=9(w-1)(\overline{w}-\overline{1})$

$\Leftrightarrow (w-9)(\overline{w}-9)=9(w-1)(\overline{w}-1)$

$\Leftrightarrow w\cdot\overline{w}-9w-9\overline{w}+81=9(w\cdot\overline{w}-w-\overline{w}+1)\Leftrightarrow$

$w\cdot\overline{w}-9w-9\overline{w}+81=9w\cdot\overline{w}-9w-9\overline{w}+9 \Leftrightarrow$

$8w\cdot\overline{w}=72 \Leftrightarrow w\cdot\overline{w}=9 \Leftrightarrow |w|^2=9 \Leftrightarrow |w|=3 \Leftrightarrow$ **$|z-3|=3$**.

47. Αν για τον $z\in C$ είναι $|z-1+2i|=3$ τότε $2\le|z-4+6i|\le 8$.

** ***Μέθοδος.***

Έστω μιγαδικός $\kappa+\lambda i$ τέτοιος ώστε: $z-4+6i=z-1+2i+(\kappa+\lambda i) \Leftrightarrow$

$\kappa+\lambda i=-3+4i$, οπότε $|z-4+6i|=|z-1+2i+(-3+4i)|$, άρα :

$||z-1+2i|-|-3+4i||\le|z-1+2i+(-3+4i)|\le|z-1+2i|+|-3+4i| \Leftrightarrow$

$\left|3-\sqrt{(-3)^2+4^2}\right|\le|z-4+6i|\le 3+\sqrt{(-3)^2+4^2} \Leftrightarrow 2\le|z-4+6i|\le 8$.

48. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 με $|z_1|=\alpha, |z_2|=\beta, |z_3|=\gamma$, να δείξετε ότι : $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{|\alpha^2 z_2\cdot z_3+\beta^2 z_3\cdot z_1+\gamma^2 z_1\cdot z_2|}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$.

$|z_1|=\alpha \Leftrightarrow |z_1|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=\alpha^2 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\dfrac{\alpha^2}{z_1}$, όμοια $\overline{z_2}=\dfrac{\beta^2}{z_2}$ και $\overline{z_3}=\dfrac{\gamma^2}{z_3}$,

επίσης ισχύει η γνωστή ιδιότητα των μέτρων : $|z|=|\overline{z}|$, οπότε

$|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|=\left|\dfrac{\alpha^2}{z_1}+\dfrac{\beta^2}{z_2}+\dfrac{\gamma^2}{z_3}\right|=$

$\dfrac{|\alpha^2 z_2\cdot z_3+\beta^2 z_3\cdot z_1+\gamma^2 z_1\cdot z_2|}{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$.

Λιβαδειά

49. Αν ο $z=\chi+\psi i$, είναι ρίζα της $|2z|=|2z+1|$ να δείξετε ότι : $4\,\mathrm{Re}(z)+1=0$.

$|2\chi+2\psi i|=|2(\chi+\psi i)+1| \Leftrightarrow |2\chi+2\psi i|^2=|(2\chi+1)+2\psi i|^2 \Leftrightarrow$

$4\chi^2+4\psi^2=(2\chi+1)^2+4\psi^2 \Leftrightarrow (2\chi+1)^2=4\chi^2 \Leftrightarrow$

$4\chi^2+4\chi+1=4\chi^2 \Leftrightarrow 4\chi+1=0 \Leftrightarrow \boxed{4\,\mathrm{Re}(z)+1=0}$.

50. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ **(1)** και $z_1+z_2+z_3=1$ **(2)** . Να δείξετε ότι : $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$.

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \Leftrightarrow z_1=\frac{1}{\overline{z_1}},\ z_2=\frac{1}{\overline{z_2}},\ z_3=\frac{1}{\overline{z_3}}$ οπότε η **(2)** γίνεται

$z_1+z_2+z_3=1 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{z_1}}+\frac{1}{\overline{z_2}}+\frac{1}{\overline{z_3}}=1 \Leftrightarrow$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}+\overline{z_2}\cdot\overline{z_3}+\overline{z_3}\cdot\overline{z_1}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\overline{z_3} \Leftrightarrow \overline{z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1}=\overline{z_1\cdot z_2\cdot z_3} \Leftrightarrow$

$z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1=z_1\cdot z_2\cdot z_3 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1}$.

Εξισώσεις στις οποίες συνυπάρχουν : z , $|z|$, $\overline{z}$, κλπ.

Στις εξισώσεις αυτής της μορφής προσπαθείς κατ' αρχάς να χρησιμοποιήσεις τις ιδιότητες του μέτρου, των συζυγών κ λ π, για να τις φέρεις σε απλούστερη μορφή .

Αν όμως όλα αυτά δεν «καρποφορήσουν» τότε υπάρχει πάντα ο «τυφλοσούρτης» δηλαδή η αντικατάσταση του **z** με την αλγεβρική του μορφή **$z=\chi+\psi i$** .

Λαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

51. Να λυθεί η εξίσωση $|z|^2 + \overline{z} = 0$.

$|z|^2 + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z} + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}(z+1) = 0$ άρα $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow$ **z = 0** ή $z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ **z = – 1**.

52. Να λυθεί η εξίσωση $|z|^3 - \overline{z} = 0$.

$|z|^3 - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow |z|\cdot|z|^2 - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow |z|z\cdot\overline{z} - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}\left(|z|z-1\right) = 0 \Leftrightarrow$

α) $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow$ **z = 0** ή

β) $|z|z - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|z = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{|z|}$, επειδή το $|z| \in R$ άρα ο z είναι

πραγματικός δηλαδή $z = \chi \in R$ άρα $|z| = |\chi|$ οπότε $z = \dfrac{1}{|z|} \Leftrightarrow \chi = \dfrac{1}{|\chi|} \Rightarrow$

$\chi^2 = \dfrac{1}{|\chi|^2} \Leftrightarrow \chi^2 = \dfrac{1}{\chi^2} \Leftrightarrow \chi^4 = 1 \Leftrightarrow \chi = \pm 1$, δεκτή μόνο η $\chi = 1$ γιατί η $\chi = -1$

δεν επαληθεύει την $\chi = \dfrac{1}{|\chi|}$ άρα **z = 1**.

Προσοχή στα *παραδείγματα* που ακολουθούν

53. Να λύσεις στο C την εξίσωση $z^2 + 2\cdot\overline{z}\cdot z - \overline{z} - \dfrac{9}{4} = 0$.

θέσε $z = \chi + \psi i$ με $\chi, \psi \in R$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$(\chi + \psi i)^2 + 2(\chi + \psi i)\cdot(\chi - \psi i) - (\chi - \psi i) - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - \psi^2 + 2x\psi i + 2(\chi^2 + \psi^2) - \chi + \psi i - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

Λιβαδειά

$$\chi^2-\psi^2+2x\psi i+2\chi^2+2\psi^2-\chi+\psi i-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(3\chi^2-\chi+\psi^2-\frac{9}{4}\right)+\psi(2\chi+1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3\chi^2-\chi+\psi^2-\frac{9}{4}=0 & (1)\\ \psi(2\chi+1)=0 & (2)\end{cases}.$$

$$(2)\Leftrightarrow \psi(2\chi+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=-\frac{1}{2}\\ \psi=0\end{cases}.$$

Αν $\chi=-\frac{1}{2}$ τότε η (1) γίνεται $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\psi^2-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \psi^2=\frac{4}{4}=1 \Leftrightarrow \psi=\pm1$

οπότε λύσεις είναι : $z_1=-\frac{1}{2}+i$ ή $z_2=-\frac{1}{2}-i$

Αν $\psi=0$ τότε η (1) γίνεται $3\chi^2-\chi-\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow 12\chi^2-4\chi-9$, $\Delta=448$ άρα

λύσεις $\chi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{448}}{6}=\frac{1\pm4\sqrt{112}}{6}$, οπότε λύσεις της αρχικής

$z_3=\frac{1+4\sqrt{112}}{6}+0\cdot i=\frac{1+4\sqrt{112}}{6}$ και $z_4=\frac{1-4\sqrt{112}}{6}-0\cdot i=\frac{1-4\sqrt{112}}{6}$

54. Να λύσεις στο C την εξίσωση $|z|+z=3+4i$.

θέσε $z=\chi+\psi i$ με $\chi,\psi\in R$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$|\chi+\psi i|+\chi+\psi i=3+4i \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2+\psi^2}+\chi+\psi i=3+4i \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\chi^2+\psi^2}+\chi\right)+\psi i=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\chi^2+\psi^2}+\chi=3 & (1)\\ \psi=4 & (2)\end{cases}$$

$$(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\sqrt{\chi^2+16}=3-\chi\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2+16=(3-\chi)^2\\ \textbf{εάν } 3-\chi\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2+16=9-6\chi+\chi^2\\ \textbf{εάν } 3-\chi\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}6\chi=-7\\ \textbf{εάν } \chi\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\chi=-\frac{7}{6}$$ **δεκτή** γιατί $-\frac{7}{6}\leq 3$ άρα λύση ο μιγαδικός $\mathbf{z=-\frac{7}{6}+4i}$

Δαμιανός Μωραΐτης

55. Να λύσεις στο C την εξίσωση $4z^2+8|z|^2-3=0$.

θέσε $z=\chi+\psi i$ με $\chi, \psi \in R$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$4(\chi+\psi i)^2+8|\chi+\psi i|^2-3=0 \Leftrightarrow 4(\chi^2-\psi^2+2\chi\psi i)+8\left(\sqrt{\chi^2+\psi^2}\right)^2-3=0 \Leftrightarrow$$

$$4(\chi^2-\psi^2+2\chi\psi i)+8(\chi^2+\psi^2)-3=0 \Leftrightarrow (4\chi^2-4\psi^2+8\chi^2+8\psi^2-3)+8\chi\psi i=0$$

$$\Leftrightarrow (12\chi^2+4\psi^2-3)+8\chi\psi i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}12\chi^2+4\psi^2-3=0\\ 8\chi\psi=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\Sigma_1)\begin{cases}12\chi^2+4\psi^2-3=0\\ \chi=0\end{cases} \text{ ή } (\Sigma_2)\begin{cases}12\chi^2+4\psi^2-3=0\\ \psi=0\end{cases}.$$

(Σ_1) : Αν $\chi=0$ τότε $4\psi^2-3=0 \Leftrightarrow \psi^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \psi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε λύσεις οι αριθμοί : $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(Σ_2) : Αν $\psi=0$ τότε $12\chi^2-3=0 \Leftrightarrow \chi^2=\frac{3}{12} \Leftrightarrow \chi^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \chi=\pm\frac{1}{2}$ οπότε λύσεις οι αριθμοί $z_3=\frac{1}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}$.

πανελλήνιες 1977

56. Να λύσεις στο C την εξίσωση $|z|^2-2\cdot i\cdot z+2\alpha(1+i)=0$ με $\alpha\geq 0$.

θέσε $z=\chi+\psi i$ με $\chi, \psi \in R$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$|\chi+\psi i|^2-2i(\chi+\psi i)+2\alpha(1+i)=0 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2\chi\cdot i-2\psi\cdot i^2+2\alpha+2\alpha i=0.$$

$$\chi^2+\psi^2-2\chi i+2\psi+2\alpha+2\alpha i=0 \Leftrightarrow (\chi^2+\psi^2+2\psi+2\alpha)-2(\chi-\alpha)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\chi^2+\psi^2+2\psi+2\alpha=0\\ \chi-\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha^2+\psi^2+2\psi+2\alpha=0\\ \chi=\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi^2+2\psi+\alpha^2+2\alpha=0\\ \chi=\alpha\end{cases} \quad \textbf{(Σ)}$$

και επειδή από την υπόθεση είναι $\chi, \psi \in R$ άρα η $1^η$ εξίσωση :

$\psi^2+2\psi+\alpha^2+2\alpha=0$ πρέπει να έχει λύση στο R επομένως θα έχει $\boldsymbol{\Delta\geq 0} \Leftrightarrow$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$2^2-4\cdot 1(\alpha^2+2\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow 4-4\cdot 1(\alpha^2+2\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow -4(\alpha^2+2\alpha-1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha-1\leq 0$ (1).

Η **(1)** είναι ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού και θα λυθεί σύμφωνα με τα γνωστά :

Διακρίνουσα $\Delta_1=4-4\cdot 1\cdot(-1)=8$.

Άρα ρίζες $\alpha_{1,2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha_1=-1-\sqrt{2}$, $\alpha_2=-1+\sqrt{2}$ άρα πίνακας

προσήμου για το $\alpha^2+2\alpha-1$

$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\varphi(-1-\sqrt{2})=0$ $\varphi(-1+\sqrt{2})=0$

Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\alpha^2+2\alpha-1\leq 0 \Leftrightarrow$

$-1-\sqrt{2}\leq\alpha\leq-1+\sqrt{2}$ και επειδή $\alpha\geq 0$ άρα $0\leq\alpha\leq-1+\sqrt{2}$.

Για τις τιμές αυτές του α το αρχικό σύστημα **(Σ)** έχει λύσεις

$\chi=\alpha$ και ψ_1 , ψ_2 .

Άρα λύσεις της εξίσωσης οι μιγαδικοί: $z_1=\alpha+\psi_1 i$ και $z_1=\alpha+\psi_2 i$

σ' αυτούς που σου λένε πως
«η τεμπελιά είναι μια πάρα πολύ κακή συνήθεια»
να απαντάς ότι «. . . κάποιος έπρεπε στη ζωή να . . .
αναλάβει τα άσχημα»

Σύλλογος προστασίας του δικαιώματος στην τεμπελιά ο **«Αραχτός»**

Λαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όλα τα παραδείγματα και, κυρίως, οι παρατηρήσεις που διάβασες στην προηγούμενη παράγραφο, έχουν **άμεση** εφαρμογή και στις . . . .





Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλεις √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.	☐	☐
2.	Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$	☐	☐
3.	Αν $z = \lambda i + \kappa$ $\kappa, \lambda \in R$, τότε $Re(z) = \lambda$ και $Im(z) = \kappa$.	☐	☐
4.	Αν $z = \chi + (\psi - 1) i$ τότε: $Im(z) = 0 \Leftrightarrow \psi = 1$.	☐	☐
5.	Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$	☐	☐
6.	Αν $Re(z_1 \cdot z_2) = 0$ τότε ισχύει πάντα $Re(z_1) \cdot Re(z_2) = 0$.	☐	☐
7.	Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα χ΄χ.	☐	☐
8.	Αν $Im(z) = 0$ τότε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στον άξονα χ΄χ.	☐	☐
9.	Ισχύει η ισότητα $i^{2003} = i$.	☐	☐
10.	Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα χ΄χ.	☐	☐
11.	Οι εικόνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα χ΄χ.	☐	☐
12.	Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ είναι εξ ορισμού $\mathbf{z^0 = 1}$.	☐	☐

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Αν Μ, Μ΄ είναι οι εικόνες του z και του $\overline{z}$ αντίστοιχα τότε ο άξονας χ΄χ είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΜ΄.

14. Αν $z = \alpha + \beta i$, $z' \in C$, και $z + z' = 2\alpha$, τότε $z' = \overline{z}$.

15. Αν $z \in C$ με $Re(z) = 2$, τότε η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι πάνω στην ευθεία $\chi = 2$.

16. Αν $Im(z + 2i) = 8$ τότε η εικόνα του $z = \chi + \psi i$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι πάνω στην ευθεία $\psi = 4$.

17. Η εξίσωση $\chi^2 - 2\chi + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, **μπορεί** να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$.

18. Αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$.

19. Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C.

20. Αν $z \in C$ και $\kappa \in R^+$ τότε ισχύει $|\kappa \cdot z| = \sqrt{\kappa} \cdot |z|$.

21. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |\overline{z}|$.

22. Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Να βρεις τη σωστή απάντηση :

1. Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $z^2 + w^2 = 0$, τότε

α. $z = 0$ **β.** $w = 0$

γ. $z = w = 0$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ο αριθμός $z = (3+5i)^{63} + (3-5i)^{63}$ είναι:

α. Φανταστικός **β.** Μηδέν

γ. Πραγματικός **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα.

3. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z.

α. $|z^2| = |z|^2$ **β.** $|z^2| = z^2$ **γ.** $z \cdot \overline{z} = z^2$ **δ.** $z \cdot \overline{z} = |z|$ **ε.** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$



Τα είπαμε και τα ξαναείπαμε αυτά... αμάν πια

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αλγεβρική μορφή μιγαδικού – Συζυγείς μιγαδικοί

Παραδείγματα **1 – 9**

1. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

α) $(2+3i)(5+i)$ **β)** $(5-2i)(5+2i)$ **γ)** $(-3+2i)^2$.

2. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

α) $(1+i)^4$ **β)** $(1-i)^{-4}$ **γ)** $\left(-4-i\sqrt{2}\right)^3$ **δ)** $(4+i)^2(4-i)^2$.

3. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

α) $(1+2i)^3$ **β)** $\left(-4+i\sqrt{2}\right)^3$ **γ)** $(3-2i)^2(-3+2i)$ **δ)** $(4+i)(16-5i)$.

4. Αν $z_1=2-3i$, $z_2=2+i$, $z_3=1-i$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $z_1+z_2+z_3$ **β)** $z_1-z_2+z_3$ **γ)** $z_1^2-z_2^2$ **δ)** $z_1^2-z_2z_3$ **ε)** $z_1\cdot z_2\cdot z_3$.

5. Αν $z_1=-\dfrac{i}{2-2i\sqrt{3}}$, $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, $z_3=1-i\sqrt{3}$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α) $z_1+z_2+z_3$ **β)** $z_1-z_2+z_3$ **γ)** $z_1^2-z_2^2$ **δ)** $z_1^2-z_2z_3$ **ε)** $\dfrac{z_1}{z_2}$.

6. Αν $z=-1+i\sqrt{3}$ να υπολογισθεί η παράσταση : $A=\dfrac{2+z}{(2-i)^2}-\dfrac{2-z}{(2+i)^2}$.

7. Να γράψεις στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς :

α) $3i\,(-5i)$ **β)** $(2+i)\,(-i+3)$ **γ)** $\dfrac{3}{4i}$

δ) $\dfrac{1}{1-i}$ **ε)** $\dfrac{1-i}{-i+1}$ **στ)** $\dfrac{(2\ +\ 3i)\ (-i+1)}{1-2i}$.

8. Να γράψεις στην μορφή κ + λi τους μιγαδικούς :

α) $(2-2i)^2$ **β)** $(1+i)^2(i-1)^2$ **γ)** $\dfrac{1+i}{1-i}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Να γράψεις στην μορφή $\kappa + \lambda i$ τους μιγαδικούς :

α) $\dfrac{1+5i}{2-i}$ **β)** $\dfrac{2+3i}{3-2i}+\dfrac{3+2i}{2-3i}$ **γ)** $\dfrac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}+\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{1}{3}+i$.

10. Αν $z=\dfrac{1+i}{2-i}$ να γράψεις στη μορφή $\kappa + \lambda i$ τον αριθμό : $\dfrac{z^2-1}{z}$.

11. Να γράψεις στη μορφή $\alpha + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς :

α) $z_1=\dfrac{5-2i}{1-2i}$ **β)** $z_2=\dfrac{i-1}{i}-\dfrac{2}{(1-i)^2}$.

12. Να γράψεις στη μορφή $\alpha + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς :

α) $(2-3i)(4-5i)+7i-1$ **β)** $\dfrac{1-2i}{i+3}\cdot\dfrac{2i+1}{3i+1}$ **γ)** $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^2$

δ) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}$ **ε)** $(1-i)^{-3}$.

13. Να γράψεις στην μορφή $\kappa + \lambda i$ τους μιγαδικούς :

α) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2004}$ **β)** $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}+\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$ **γ)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{-2004}$.

14. Αν $\alpha+\beta i=\dfrac{2+i}{z+3}$, $z=\chi+\psi i$ και $\alpha, \beta, \chi, \psi \in R$, να εκφράσεις τα α, β σε συνάρτηση των χ και ψ.

15. Έστω $z=\chi+\psi i$ και $w=\alpha+\beta i$, με $\alpha, \beta, \chi, \psi \in R$, αν $w=\dfrac{i+z}{i-z}$ να δείξεις ότι :

i) $\chi=\dfrac{-2\beta}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$ και $\psi=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$

ii) Αν ο z είναι πραγματικός τότε ο w θα ανήκει σε κύκλο του οποίου να βρεις το κέντρο και την ακτίνα .

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Να βρεις τους πραγματικούς αριθμούς χ και ψ ώστε να ισχύουν οι ισότητες : Παραδείγματα **10 – 11**

α) $\chi - 2 + 2\psi i = -2i + 2 - \psi i$ **β)** $\psi + 2i = 3 - (2 + i)\chi$

γ) $4\psi - 3\psi i - 2\chi = 2 - 5\chi i + 9$ **δ)** $(\chi^2 + 1)i + 2\chi = \chi^2 - 2\chi i - 3$.

17. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \chi^2 - \chi - 9i$ και $w = 2 - \psi^2 i$, $\chi, \psi \in R$.

Αφού βρεις τα ζεύγη (χ, ψ), $\chi, \psi \in R$ ώστε $z = w$, στη συνέχεια να βρεις τον z.

18. Να βρεις τα ζεύγη (χ, ψ), $\chi, \psi \in R$ έτσι ώστε : $(\chi + \psi i)^2 = \dfrac{1+5i}{2-i}$.

19. Να βρεις τα $\chi, \psi \in R$ έτσι ώστε : $\dfrac{\chi - \psi i}{2-i} = \dfrac{2-3i}{3-i}$.

20. Να βρεις τα $\chi, \psi \in R$ έτσι ώστε :

α) $(1+2i)\chi + (3-5i)\psi = 1-3i$ **β)** $\dfrac{\chi - 2}{1-i} + \dfrac{(\psi - 3)i}{1+i} = 1+i$.

21. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει :

$(\alpha + \beta i)^2 = \dfrac{12+5i}{i}$.

22. Να υπολογίσεις το $\chi \in R$ έτσι ώστε να ισχύει : $1 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{2} = 3\dfrac{1 + \chi \cdot i}{1 - \chi \cdot i}$.

23. Να βρεις τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι μιγαδικοί :

$z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{12+8i}{2-3i} + \dfrac{52+13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

24. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις : Παραδείγματα **12 – 18**

α) $(1-i)^{2004} - (1+i)^{2004}$ **β)** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{4\nu} - \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4\nu}$ $\nu \in N$.

$\left[\text{Υποδ είναι } (1-i)^2 = \cdots = -2i \text{ και } \dfrac{1-i}{1+i} = \cdots - i\right]$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

25. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$f(\nu)=\frac{1-i^{\nu+1}}{1-i}$$

26. Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

α) $A=\left(1+i^{2\nu}\right)\left(1+i^{\nu}\right)$ **β)** $B=(1+i)^{\nu}-(1-i)^{\nu}$.

27. Να αποδείξεις ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $(1+i)^{20\nu}=(1-i)^{20\nu}$.

28. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\left(\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}-\left(\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}$ $\nu \in N$, $\alpha \in R$.

29. Να δείξεις ότι : $(1-i)^{4\nu}=(-4)^{\nu}$.

30. Να βρεις τα $\chi, \psi \in R$ έτσι ώστε :

$\chi^2+\psi+4i=\overline{-3+\chi^2\psi i}$.

Παραδείγματα **19 – 31**

31. Αν $z_1=\alpha+\beta i$, $z_2=\gamma+\delta i$, να βρεις τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ έτσι ώστε ο $z_1 \cdot z_2$ να είναι πραγματικός αριθμός.

32. Να βρεις τον $\chi \in R$ έτσι ώστε ο $w=(1-\chi i)(\chi+i)$ να είναι :

α) πραγματικός $(\text{υπ. } \text{Im}(w)=0)$

β) φανταστικός $(\text{υπ. } \text{Re}(w)=0 \text{ και } \text{Im}(w)\neq 0)$

33. Να βρεις τις συνθήκες έτσι ώστε ο $w=\left(\chi+\psi^2 i\right)^2$ να είναι :

α) πραγματικός $(\text{υπ. } \text{Im}(w)=0)$

β) φανταστικός $(\text{υπ. } \text{Re}(w)=0 \text{ και } \text{Im}(w)\neq 0)$.

34. Να δείξεις ότι ο αριθμός : $w=\frac{(\chi+\psi i)^2}{\chi-\psi i}+\frac{(\chi-\psi i)^2}{\chi+\psi i}$, $\chi, \psi \in R$, είναι πραγματικός.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

35. Δίνεται ο $z = 6i - (3 - 4i)\chi - 3\psi i - (3i - 2)\chi + (4 - 2\psi i)$, $\chi, \psi \in R$.

α) Να γράψεις τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$

β) Να λύσεις τις εξισώσεις :

i) $Re(z) = 0$ **ii)** $Im(z) = 0$ **iii)** $Re(z) = Im(z)$ **iv)** $z = 0$.

36. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\chi + (\psi - 1)i - 5$, $\chi, \psi \in R$.

α) Να γράψεις τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$

β) Να γράψεις τον z συναρτήσει του χ, αν $Im(z) = 0$.

γ) Να βρεις τη σχέση που συνδέει τα χ και ψ, αν $Re(z) = Im(z)$.

37. Να δείξεις ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του και αντιστρόφως.

38. Να βρεις τα $\chi, \psi \in R$ ώστε οι μιγαδικοί :

$z_1 = \chi + 2\psi i$ και $z_2 = 11 - (4\chi - \psi)i$ να είναι συζυγείς.

39. Να δείξεις ότι ο αριθμός $w = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2$ με $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 \neq z_2$ είναι πραγματικός .

40. Να δείξεις ότι ο αριθμός $w = z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2$ με $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 \neq z_2$ είναι φανταστικός.

41. Να δείξεις ότι ο $w = \frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}$, $z \neq 0$ είναι φανταστικός .

42. Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \lambda + (\lambda - 1)i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $\psi = 4\chi + 1$, να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

43. Να βρεθούν οι μιγαδικοί **z** ώστε :

α) $(3 - i)z + 9\overline{z} + 12 + i = 0$

β) $i \cdot z + \overline{z} + 2 = 0$

Υπόδειξη

α) πράξεις … $z = \frac{73}{71} + \frac{24}{71}i$

β) αδύνατη

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

44. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση : $\alpha\cdot z+\beta\cdot\overline{z}+\gamma=0$, με **α, β, γ ∈ C**

παριστάνει ευθεία, αν και μόνον αν $\begin{cases}\alpha=\overline{\beta},\ \gamma\in R\\ \quad\text{ή}\\ \alpha=-\overline{\beta},\ \gamma\in I\end{cases}$

θέσε $z=\chi+\psi\,i$ πράξεις

45. Αν $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{1}{\gamma}$, να δείξεις ότι : $\gamma(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma\cdot i=5\alpha+i$.

Θέσε $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{1}{\gamma}=\lambda$

46. Να βρεθούν τα χ και ψ έτσι ώστε οι μιγαδικοί : $z_1=-\chi+(2\psi-\chi)i$ και $z_2=-3+5(\chi-3\psi)i$ να είναι συζυγείς.

47. Να βρεθούν τα χ και ψ έτσι ώστε οι μιγαδικοί : $z_1=-2\chi^2+(2\psi+3\chi)i$ και $z_2=5+(\chi-\psi)i$ να είναι συζυγείς.

48. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ και $z_2=\frac{\alpha-\beta i}{\gamma-\delta i}$ με α, β, γ , δ ∈ R .

Να αποδειχθεί ότι είναι συζυγείς.

49. Αν $z, z_1, z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι :

α) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

β) $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)=\frac{z_1\cdot z_2+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{2}$, $\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)=\frac{z_1\cdot z_2-\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{2\cdot i}$.

γ) $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2}{2\cdot z_2\cdot\overline{z_2}}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2}{2\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\cdot i}$.

Θέσε $z=z_1\cdot z_2$ ή $z=\frac{z_1}{z_2}$ αντίστοιχα

50. Αν οι $z_1, z_2 \in C$, είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2+4z+8=0$, να αποδείξεις ότι : $w=\frac{z_1+z_2+4i}{z_1\cdot z_2+8i}\in I$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

51. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(\chi)=\chi^{2004}+4\chi^{2001}+2\chi^{7}+4\chi^{6}-2\chi+3$

Να αποδειχθεί ότι το i είναι ρίζα του $P(\chi)$ και να βρεθεί μια 2η ρίζα του $P(\chi)$.

Είναι $P(i)=i^{2004}+4i^{2001}+2i^{7}+4i^{6}-2i+3=$

$(i^4)^{501}+4(i^4)^{500}i+2(i^4)i^3+4(i^4)i^2-2i+3=$

$1^{501}+4\cdot 1^{500}i+2\cdot 1\cdot(-i)+4\cdot 1\cdot(-1)-2i+3=1+4i-2i-4-2i+3=0$

Αφού το $P(\chi)$ έχει ρίζα το i θα έχει ως ρίζα και τον συζυγή του δηλ το $-i$.

Μέτρο μιγαδικού

52. Να βρεις το μέτρο των μιγαδικών : Παραδείγματα **32 – 51**

i) $z_1=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^4}$ **ii)** $z_1=\dfrac{(1-i)^{\kappa}}{(1+i)^{\lambda}}$, $\kappa, \lambda \in N$

iii) $z_1=\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{10}}{(-1-i)^{11}}$ **iv)** $z_1=\left(-\dfrac{i+1}{2}\right)^{2004}$

53. Να δείξεις ότι $|\kappa\cdot z|=\kappa\cdot|z|$, όπου $\kappa \in R^+$ και z μιγαδικός .

54. Αν $z_1, z_2 \in C$ με $|z_1|=|z_2|$ και $z_1+z_2\neq 0$ τότε να δείξεις ότι ο αριθμός $w=\dfrac{z_1-z_2}{z_1+z_2}$ είναι φανταστικός.

55. Αν z **φανταστικός** αριθμός με $z\neq -i$ να αποδείξεις ότι ο αριθμός :

$\omega=\dfrac{z^3-i}{z+i}$ είναι **αρνητικός πραγματικός** αριθμός.

(υποδ. Είναι $i^3=-i$ . . . απλοποίηση και $z=\psi i$)

56. Αν $z_1, z_2 \in C$ με $|z_2|=1$ και $z_2\neq 1$ τότε να δείξεις ότι αριθμός

$w=\dfrac{z_1-\overline{z_1}\cdot z_2}{1-z_2}$ είναι πραγματικός.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

57. Αν $\left|\dfrac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right|=1$ με $z_1, z_2 \in C$, z_1 και $z_2 \neq 0$, να δείξεις ότι αριθμός $\dfrac{i\cdot z_1}{z_2}$ είναι πραγματικός.

58. Αν $|z-10|=3|z-2|$ να δειχτεί ότι $|z-1|=3$.

59. Να δείξεις ότι αν για τον $z \in C$ είναι $|z-25|=5|z-1|$ τότε $|z|=5$

60. Να δείξεις ότι αν για τον $z \in C$ είναι $|z+16|=4|z+1|$ τότε $|z|=4$.

61. Αν $|z-1-2i|\leq 2$ να δειχτεί ότι $|z|\leq 5$.

62. Να δείξεις ότι αν $\omega=\dfrac{z}{z+i}$, $z\neq -i$ και $\omega \in R$ τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.

63. Αν $|z-2-i|\leq 2$ να δειχτεί ότι $8\leq |z-14-7i| \leq 18$.

64. Αν οι $z_1, z_2 \in C$, με $z_1\cdot z_2 \neq -1$ και $|z_1|=|z_2|=1$, να αποδείξεις ότι : $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}\in R$.

65. Αν $z_1, z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι :

α) $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)=2\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)$.

β) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$.

γ) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}\left(\overline{z_1}\cdot z_2\right)$.

δ) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$.

Υπ. $\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=\overline{z_1}\cdot z_2$, $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=\cdots$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

66. Αν $z_1, z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=0 \ .$$

67. Αν $z_1, z_2 \in C$, να αποδείξεις ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$|z_1+\overline{z_2}|=|\overline{z_1}-z_2| \Leftrightarrow z_1\cdot z_2+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=0 \ .$$

68. Αν οι $z_1, z_2 \in C$, τότε να αποδείξεις ότι : $|\overline{z_1}+z_2|=|z_1+\overline{z_2}|$.

69. Αν για τους $z_1, z_2 \in C$, ισχύει : $z_1\cdot|z_2|+|z_1|\cdot z_2=0$ **(1)** και

$z_1\cdot|z_2|-|z_1|\cdot z_2=0$ **(2)** να αποδείξεις ότι: $|z_1\cdot z_2|=0$.

Πρόσθεσε κατά μέλη τις **(1) και (2)** και κάνε διερεύνηση

70. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1 και z_2, να δείξεις ότι :

α) $$\frac{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}{2}=|z_1|^2+|z_2|^2.$$

β) $$\left(|z_1|+|z_2|\right)^2=\frac{1}{2}\left(|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2\right)+2|z_1\cdot z_2| .$$

71. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1 και z_2 να δείξεις ότι :

α) $$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)=0 .$$

β) $$|z_1+\overline{z_2}|=|\overline{z_1}-z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\cdot z_2\right)=0 .$$

γ) $$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2| .$$

72. Αν $|z+\alpha\cdot i|=|z+\beta\cdot i|$, $z \in C$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \neq \beta$, να δείξεις ότι

$$\mathrm{Im}(z)=-\frac{\alpha+\beta}{2} \ .$$

73. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στον ίδιο κύκλο με αρχή το Ο να αποδείξεις ότι : $w=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \in I$.

Υπόδειξη : $|z_1|=|z_2|=\rho$ και $w \in I \Leftrightarrow w=-\overline{w}$.

Λιβαδειά

74. Να δείξεις ότι η εξίσωση $\chi^3+\alpha\chi^2+\beta=0$ έχει μιγαδική ρίζα της μορφής $z=\alpha+\beta\cdot i$ εάν και μόνον εάν $2\alpha^3+\beta=0$.

75. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 να δείξεις ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$\left.\begin{array}{l} z_1=\alpha\cdot z_2 \\ \alpha\in R,\ \alpha>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \ .$$

76. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1|=2,\ |z_2|=3$ και $|z_1+z_2|=3$, να δείξεις ότι $|z_1-z_2|=\sqrt{17}$.

77. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\kappa$, να δείξεις ότι : $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{\kappa}|z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1+z_1\cdot z_2|$.

78. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, να δείξεις ότι : $|z_1+z_2+z_3|=|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$.

79. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3, να δείξεις ότι

$$|z_1+z_2+z_3|=\left|\frac{|z_1|^2}{z_1}+\frac{|z_2|^2}{z_2}+\frac{|z_3|^2}{z_3}\right| .$$

80. Αν τα $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$, είναι σημεία του κύκλου με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=1$, να δείξεις ότι : $|z_1+z_2+z_3|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$.

Παρατήρηση : Η άσκηση θα μπορούσε να «λέει» ότι οι μιγαδικοί ικανοποιούν την εξίσωση $\chi^2+\psi^2=1$ ή ακόμη πιο πιθανό : Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

81. **α)** Αν $|z|=\alpha$, $\alpha \in R$ με $\alpha>0$, να δείξεις ότι $\overline{z}=\dfrac{\alpha^2}{z}$.

β) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \cdots, z_\kappa$ ισχύει

$|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_\kappa|=1$, να αποδείξεις ότι:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_\kappa|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_\kappa}\right|.$$

82. Δίνονται οι μιγαδικοί z, z_1 και z_2 να δείξεις ότι :

α) $|z|=|z+1|=1 \Leftrightarrow z^2+z+1=0$.

β) **i)** $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le\sqrt{2}|z|$ (ή αλλιώς $|\chi|+|\psi|\le\sqrt{2}|z|$).

ii) Να εξετάσεις πότε ισχύει το « = ».

γ) **i)** $||\chi|-|\psi||\le\sqrt{2}|z|$ (ή αλλιώς $||\mathrm{Re}(z)|-|\mathrm{Im}(z)||\le\sqrt{2}|z|$).

ii) Να εξετάσεις πότε ισχύει το « = ».

83. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1-z_2|=2$ και ο z για τον οποίο ισχύει : $(z-z_1)(\overline{z}-\overline{z_1})+(z-z_2)(\overline{z}-\overline{z_2})=4$.

α) Αν $A(z), B(z_1), \Gamma(z_2)$ είναι οι εικόνες των z, z_1, z_2 να δείξεις ότι :

$\hat{A}=90^0$ (ή $\widehat{BA\Gamma}=90^0$)

β) Να βρεις την μέγιστη τιμή της παράστασης $|z_1-z_2|$.

Εξισώσεις

Παραδείγματα **52 – 57**

84. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς που είναι τέτοιοι ώστε : $z^2=\overline{z}$.

85. Να βρεις τον μιγαδικό αριθμό z έτσι ώστε ο : $w=(z-3)(\overline{z}-i)$ να είναι πραγματικός

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

86. Δίνεται ότι η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρεις την άλλη ρίζα. **β)** Να βρεις τα α και β.

87. Να βρεις τους μιγαδικούς $z = \chi + \psi i$, $\chi, \psi \in R$, για τους οποίους ισχύει :

$$z^2 + 2\cdot\overline{z} + 1 = 0$$

88. Αν $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha\cdot\beta \neq 0$, να επιλύσεις στο σύνολο των μιγαδικών την εξίσωση : $z^2 + \alpha\cdot z + \beta = 0$

89. Να επιλύσεις στο σύνολο των μιγαδικών την εξίσωση :

α) $z^2 - 6z + 13 = 0$ **β)** $z^2 - 6z + 5 = 0$.

γ) $z^2 + 6z + 13 = 0$ **δ)** $z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$.

90. Να επιλύσεις στο σύνολο των μιγαδικών τις εξισώσεις :

α) $\overline{z} = z$ **β)** $\overline{z} + z = 0$ **γ)** $z = -\frac{1}{4}\overline{z}$

δ) $\overline{z} + z - 2 = 0$ **ε)** $\overline{z} = -z^2$ **στ)** $\overline{z} - z^2 = 0$

91. Να επιλύσεις στο σύνολο των μιγαδικών την εξίσωση :

α) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$ **β)** $z^2 + 2\overline{z}^2 = \overline{z} - 9$.

γ) $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$ **δ)** $z^2 - 3\cdot i\cdot z = z + 6 + 6\cdot i$.

92. Να βρεις τον z όταν ισχύει : $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

93. Να βρεις τον z όταν ισχύει : $|z| = -z^2$.

94. Να βρεις τον z όταν ισχύει : $8|z| = -4z^2 + 3$

95. Να βρεις τον z όταν ισχύει : $2\cdot z\cdot\overline{z} + \left(z - \overline{z}\right) + 1 = 5 - 6\cdot i$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

96. Να βρεις τον z σε συνάρτηση των α, β όταν ισχύει :

$\alpha z^2 + \beta z = \alpha \overline{z}^2 + \beta \overline{z}$, με $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha \neq 0$.

97. Αν $z = \chi + \psi i$, να βρεις τη σχέση των χ και ψ όταν ισχύει :
$|z - i| = |z - 2|$.

98. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις :

α) $z = (1+i)\overline{z} + 3 - 2i$ **β)** $\overline{z} = 2 \cdot \overline{z}$.

99. Να λυθούν στο C οι εξισώσεις :

α) $z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$ **β)** $z\overline{z} + (z + \overline{z}) = 3 + 2i$

γ) $z^2 + 2\overline{z}^2 = -z + \overline{z} - 9$.

100. Να λυθεί στο C η εξίσωση $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

101. Να λυθεί στο C η εξίσωση $2z^2 + 4|z| - 5 = 0$.

102. Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z| - z = 2 - i$.

103. Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z| + z = 1 + i$.

104. Να λυθεί στο C η εξίσωση $|z + 1| + z + i = 0$.



Μην κάνεις «χάρες», όπως διάβασμα, ντύσιμο, μαλλιά, στους γονείς και στους καθηγητές σου, γιατί τους καλομαθαίνεις και ζητάνε κι άλλα ύστερα. Καλλίτερα να είσαι αυστηρός μαζί τους.



Από το δεκάλογο του **«ξύπνιου»** μαθητή

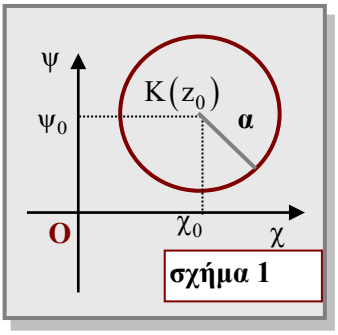
Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εξισώσεις – Ανισώσεις με μέτρα μιγαδικών Γεωμετρικού Τόπου.

1. Εξίσωση $|z-z_0|=\alpha \in R,\ \alpha>0.$

** Αν $\alpha \in R,\ \alpha>0,\ z_0=\chi_0+\psi_0 i$, συγκεκριμένος μιγαδικός με $\chi_0, \psi_0 \in R$, τότε η σχέση $|z-z_0|=\alpha$ στο μιγαδικό επίπεδο, **είναι εξίσωση κύκλου** με **κέντρο** $K(z_0)=K(\chi_0, \psi_0)$ και **ακτίνα α**



σχήμα 1

** Αντίστροφα, αν ο z ανήκει στον **κύκλο,** του μιγαδικού επιπέδου, με **κέντρο** $K(z_0)=K(\chi_0, \psi_0)$ και **ακτίνα α** τότε είναι $|z-z_0|=\alpha$ (η απόσταση του z από τον z_0 είναι α).

δηλαδή :

Αν $z=\chi+\psi i$ τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$|z-z_0|=\alpha \Leftrightarrow (\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\alpha^2 .$$

* Το $|z-z_0|$ παριστάνει(συμβολίζει) την απόσταση του z από τον z_0

Παραδείγματα :

1. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης $|z-3+2i|=5$.

Είναι $|z-3+2i|=5 \Leftrightarrow \left|z-\underbrace{(3-2i)}_{z_0}\right|=5$.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι σημεία του κύκλου με κέντρο **Κ(3 , −2) και ακτίνα ρ = 5.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

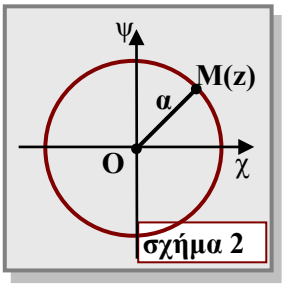
2. Να βρεθούν οι μιγαδικοί που είναι λύσεις της εξίσωσης : $|z+5i|=-7$.

Η εξίσωση $|z+5i|=-7$ είναι αδύνατη γιατί $|z+5i|>0$, ως μέτρο, ενώ $-7<0$

Παρατηρήσεις :

I. Αν $z_0=0$ τότε η $|z-z_0|=\alpha$ παίρνει τη μορφή:

$|z|=\alpha$, $\alpha>0$ και παριστάνει **κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων** και **ακτίνα** ίση με **α**, αντίστροφα κάθε **κύκλος** με κέντρο το **Ο(0 , 0)** και ακτίνα **α** έχει εξίσωση $|z|=\alpha$.



σχήμα 2

Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία : Αν $z=\chi+\psi i$ τότε $|z|=\alpha \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2=\alpha^2$.

που σημαίνει ότι : **Όλοι** οι μιγαδικοί με μέτρο **α** βρίσκονται **σε κύκλο** κέντρου **Ο(0 , 0)** και ακτίνας **α** .

ειδικά

Αν **α = 1** τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $|z|=1$ και παριστάνει κύκλο με κέντρο **Ο(0 , 0),** ακτίνα **1** και αναλυτική εξίσωση : $\chi^2+\psi^2=1$.

Παράδειγμα :

3. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης $|z|=3,75$.

Είναι $|z|=3,75$, οπότε λύσεις είναι : Οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το **Ο(0 , 0) και ακτίνα ρ = 3,75**

II. Η σχέση $|z-\kappa z_0|=\alpha \in R$, **α > 0** και **κ ∈ R παριστάνει** επίσης **κύκλο** στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο $M(\kappa z_0)$ και **ακτίνα α**.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

III. Πρέπει να προσέξεις ότι η εξίσωση $|z - z_0| = \alpha$ στο **R** έχει δύο **λύσεις όταν α > 0, μία όταν α = 0 και καμία όταν α < 0** , ενώ η $|z - z_0| = \alpha$ στο C έχει άπειρες λύσεις με **α > 0** , τους μιγαδικούς των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στον κύκλο $(M(z_0), \alpha)$ **μία λύση όταν α = 0 (τον μιγαδικό z_0) και καμία όταν α < 0** .

2. Ανίσωση $|z - z_0| > \alpha$ ή $|z - z_0| \geq \alpha$ ή $|z - z_0| < \alpha$ ή $|z - z_0| \leq \alpha$ με $\alpha \in R$, $\alpha > 0$

Η Ανίσωση π.χ. $|z - z_0| \geq \alpha$ με $\alpha > 0$ **(1)** επιλύεται ως εξής :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση που προκύπτει από την (1) δηλαδή την $|z - z_0| = \alpha$ (2).

Η (2) παριστάνει ως γνωστό κύκλο με κέντρο $M(z_0)$ και **ακτίνα α** .

Εδώ θα πρέπει να ξέρεις ότι

Το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών χωρίζεται από έναν κύκλο σε 3 «κομμάτια» Τα **σημεία του κύκλου**, τα **εσωτερικά σημεία** και τα **εξωτερικά σημεία** .

Τα **εσωτερικά σημεία** ικανοποιούν την ανίσωση $|z - z_0| < \alpha$, τα **εξωτερικά σημεία** ικανοποιούν την ανίσωση $|z - z_0| > \alpha$ και τα **σημεία του κύκλου** ικανοποιούν την εξίσωση $|z - z_0| = \alpha$,

Αν υπάρχει και « = » στην ανίσωση τότε στις λύσεις θα περιλαμβάνονται και τα σημεία της γραμμής, δηλαδή αν η ανίσωση είναι $\leq$ **τότε λύσεις είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα σημεία της γραμμής,** ενώ αν η ανίσωση είναι $\geq$ **τότε λύσεις θα είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα σημεία της γραμμής .**

οπότε στο παράδειγμά (1), πιο πάνω, που είναι $|z - z_0| \geq \alpha$ θα απαντούσες ότι

Λύσεις είναι τα εξωτερικά σημεία μαζί με τα σημεία του κύκλου.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

4. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης $|z-3+2i|\geq 5$ **(1)**

Η αντίστοιχη εξίσωση είναι $|z-3+2i|=5 \Leftrightarrow |z-(3-2i)|=5$ η οποία παριστάνει κύκλο με κέντρο **Κ(3 , −2) και ακτίνα ρ = 5**.

Λύσεις λοιπόν είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι : τα εξωτερικά μαζί με τα σημεία του κύκλου που έχει κέντρο Κ(3 , −2) και ακτίνα ρ = 5.

***

5. Να βρεθούν οι μιγαδικοί που είναι λύσεις της ανίσωσης $|z+7|\geq -5$ **(1).**

Επειδή το $|z+7|\geq -5$ για κάθε $z \in C$ άρα λύσεις της **(1)** είναι όλο το σύνολο C.

6. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z έτσι ώστε $|z-1|<\sqrt{17}$.

Η αντίστοιχη εξίσωση είναι $|z-1|=\sqrt{17}$ η οποία παριστάνει κύκλο με κέντρο **Κ(1 , 0) και ακτίνα ρ =** $\sqrt{17}$.

Λύσεις λοιπόν είναι οι μιγαδικοί, που οι εικόνες τους είναι τα εσωτερικά χωρίς τα σημεία του κύκλου που έχει κέντρο Κ(1 , 0) και ακτίνα ρ = $\sqrt{17}$.

7. Να βρεθούν οι μιγαδικοί που είναι λύσεις της ανίσωσης $|z+7|\leq -5$ **(1).**

Επειδή το $|z+7|\geq 0$ για κάθε $z \in C$ άρα δεν υπάρχουν λύσεις για την (1).

Συμπέρασμα :

Ανισώσεις της μορφής : $|z-z_0|>\alpha$ ή $|z-z_0|\geq\alpha$ ή $|z-z_0|<\alpha$ ή $|z-z_0|\leq\alpha$ με $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ έχουν ως λύσεις τους μιγαδικούς, με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο, τα εσωτερικά ή τα εξωτερικά σημεία του κύκλου που προκύπτει από την αντίστοιχη εξίσωση, με ή χωρίς τα σημεία του κύκλου ανάλογα με το αν υπάρχει και = στην ανίσωση.

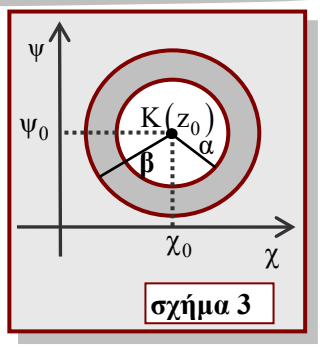
Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Ανίσωση : $\alpha \le |z - z_0| \le \beta$ με $\alpha, \beta \in R$ και $\alpha, \beta > 0$. (διπλή ανίσωση)

Η Ανίσωση $\alpha \le |z - z_0| \le \beta$ με $\alpha, \beta \in R$ και **$\alpha, \beta > 0$, $\alpha < \beta$ (1)** επιλύεται ως εξής :

Θεωρείς τις αντίστοιχες εξισώσεις που προκύπτουν από την (1) δηλαδή την $|z - z_0| = \alpha$ **(2)** και $|z - z_0| = \beta$ **(3)**. Η **(2)** παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα **α** και η **(3)** παριστάνει επίσης κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα **β**.



σχήμα 3

Πρόκειται προφανώς για δυο ομόκεντρους κύκλους όπως στο σχήμα 3 και λύσεις είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος του επιπέδου που ονομάζεται δακτύλιος .

*** **Προσοχή** στο **$\alpha < \beta$** και αν υπάρχει και = σε κάποια από τις δυο ανισώσεις**.**

Παραδείγματα :

8. Να βρεθούν οι μιγαδικοί που είναι λύσεις της ανίσωσης :

$2 < |z - 2 - 3i| < 5$ **(1)**

Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι $\begin{cases} |z-2-3i| = 5 \Leftrightarrow |z-(2+3i)| = 5 \quad (2) \\ |z-2-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-(2+3i)| = 2 \quad (3) \end{cases}$.

Η (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο **Κ(2 , 3) και ακτίνα 5** και η (3) παριστάνει κύκλο **με κέντρο Κ(2 , 3) και ακτίνα 2**. **Πρόκειται προφανώς για δυο ομόκεντρους κύκλους.**

Η ανίσωση $|z - 2 - 3i| < 5$ έχει ως λύσεις τα εσωτερικά σημεία του κύκλου **κέντρου Κ(2 , 3)** και **ακτίνας 5**, ενώ η $|z - 2 - 3i| > 2$ έχει ως λύσεις τα εξωτερικά σημεία του κύκλου **κέντρου Κ(2 , 3) και ακτίνας 2** .

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους βρίσκονται στο δακτύλιο των δύο κύκλων χωρίς τα σημεία των κύκλων.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης:

$1 \le |z+3i| < 7$ (1)

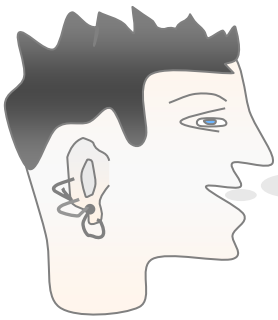
Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι $\begin{cases} |z+3i| = 7 \Leftrightarrow |z-(-3i)| = 7 & (2) \\ |z+3i| = 1 \Leftrightarrow |z-(-3i)| = 1 & (3) \end{cases}$

Η (2) παριστάνει κύκλο με **κέντρο Κ(0,– 3)** και **ακτίνα 7** και η (3) παριστάνει κύκλο με **κέντρο Κ(0,– 3)** και **ακτίνα 1**.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους βρίσκονται στο δακτύλιο των δύο κύκλων χωρίς τα σημεία του εξωτερικού κύκλου μαζί με τα σημεία του εσωτερικού κύκλου.

Συμπέρασμα :

Ανισώσεις της μορφής **:** $\alpha < |z-z_0| < \beta$ ή $\alpha \le |z-z_0| \le \beta$ με $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ έχουν ως λύσεις τους μιγαδικούς, με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία του δακτυλίου, που δημιουργούν οι δύο κύκλοι, με ή χωρίς τα σημεία των κύκλων ανάλογα με το αν υπάρχει και = στην αντίστοιχη ανίσωση.



Τι θα γίνει ρε μεγάλε ….
Θα γράψεις κι' άλλα ;
Εσύ, μου φαίνεται θες να μας καταντήσεις σαν και σένα

Άντε τελείωνε γιατί έχουμε να πάμε και καφέ

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Εξίσωση $P(|z-z_0|)=0$ ή $P(|z|)=0$.

Εξισώσεις των πιο πάνω μορφών αντιμετωπίζονται πρώτα αλγεβρικά και αφού οδηγηθούν στην μορφή $|z-z_0|=\alpha$ ή $|z|=\alpha$, $\alpha>0$, επιλύονται όπως πιο πάνω.

Παραδείγματα :

10. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης

$3(|z+5i|-2)=|z+5i|+1$ **(1)**

Είναι $3(|z+5i|-2)=|z+5i|+1 \Leftrightarrow 3|z+5i|-6=|z+5i|+1 \Leftrightarrow$

$2|z+5i|=7 \Leftrightarrow |z-(-5i)|=\frac{7}{2}$.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι σημεία του κύκλου με κέντρο **Κ(0 , − 5) και ακτίνα** $\rho=\frac{7}{2}$

Παρατήρηση :

Μπορείς στην **(1)** να αντικαταστήσεις το $|z+5i|$ με ω για να διευκολυνθείς στις πράξεις , όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

11. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $|z-2+3i|^2+|z-2+3i|-2=0$ **(1)**

Αν θέσεις $|z-2+3i|=\omega$ στην (1) γίνεται $\omega^2+\omega-2=0 \Leftrightarrow$

$\cdots \omega_1=-2,\ \omega_2=1$ άρα

α) $|z+2-3i|=-2$ που είναι **αδύνατη** ή

β) $|z+2-3i|=1 \Leftrightarrow |z-(-2+3i)|=1$.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι σημεία του κύκλου με κέντρο **Κ(– 2 , 3) και ακτίνα ρ** = 1

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Ανίσωση $P(|z-z_0|)>0$ ή $P(|z-z_0|)\geq 0$ κλπ.

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $P(|z-z_0|)=0$, την αντιμετωπίζεις πρώτα αλγεβρικά **και αφού καταλήξεις σε μια από τις μορφές** $|z-z_0|>\alpha$ ή $|z-z_0|<\alpha$ κ.λ.π. με $\alpha>0$ την επιλύεις όπως σε προηγούμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα :

12. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης

$$3(|z+5i|-2)<|z+5i|+1 \quad (1)$$

Αν θέσεις στην (1) $|z+5i|=\omega$ έχεις $3(\omega-2)<\omega+1 \Leftrightarrow 3\omega-6<\omega+1 \Leftrightarrow$

$$\omega<\frac{7}{2}\Leftrightarrow |z+5i|<\frac{7}{2}\Leftrightarrow |z-(-5i)|<\frac{7}{2} \ .$$

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο **K(0 , − 5)** και ακτίνα $\rho=\frac{7}{2}$, χωρίς τα σημεία του κύκλου

13. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

$$-|z-1+5i|+2(3+|z-1+5i|)\geq 3(5-|z-1+5i|) \quad \textbf{(1)}$$

Αν θέσεις στην (1) $|z-1+5i|=\omega$ έχεις $-\omega+2(3+\omega)\geq 3(5-\omega) \Leftrightarrow \cdots$

$$4\omega\geq 9 \Leftrightarrow \omega\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow |z-1+5i|\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow |z-(1-5i)|\geq\frac{9}{4}$$

.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες είναι τα εξωτερικά, μαζί με τα σημεία του κύκλου με κέντρο **K(1 , − 5) και ακτίνα** $\rho=\frac{9}{4}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή

Στις ανισώσεις που περιέχουν $|z-z_0|^2$.

Παραδείγματα :

14. Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης $|z+2-3i|^2-4|z+2-3i|+3<0$ **(1)**

Αν θέσεις στην (1) $|z+2-3i|=\omega$ έχεις $\omega^2-4\omega+3<0$ τότε ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης είναι $\omega_1=1,\ \omega_2=3$.

Είναι $\alpha=1>0$ άρα πίνακας πρόσημου:

$-\infty$		1		3		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\omega^2-4\omega+3<0 \Leftrightarrow 1<\omega<3$.

Οι αριθμοί 1 και 3 **δεν** συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις γιατί είναι λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{\omega^2-4\omega+3=0}$ αλλά όχι της ανίσωσης $\boldsymbol{\omega^2-4\omega+3<0}$ (γιατί δεν υπάρχει το ίσον).

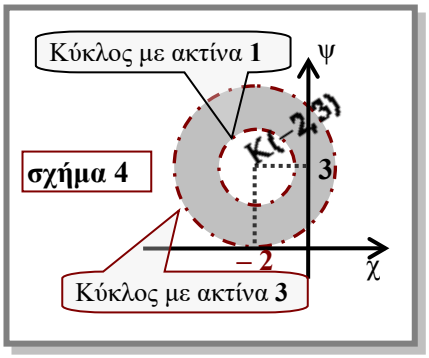
Άρα $\boldsymbol{1<\omega<3} \Leftrightarrow 1<|z+2-3i|<3 \Leftrightarrow$

$1<|z-(-2+3i)|<3$.

Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι

$|z-(-2+3i)|=3$ και $|z-(-2+3i)|=1$

που έχουν ως εικόνες τους κύκλους με κέντρο **Κ(− 2 , 3)** και **ακτίνα ρ = 1** και **Κ(− 2 , 3)** και **ακτίνα ρ = 3** αντίστοιχα.



σχήμα 4

Άρα λύσεις της (1) είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους βρίσκονται στο δακτύλιο των δύο κύκλων χωρίς τα σημεία των κύκλων όπως φαίνεται και στο **σχήμα 4.**

Προσοχή στο παράδειγμα που ακολουθεί

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης $|z+2-3i|^2-4|z+2-3i|+3>0$ **(1)**

Αν θέσεις στην (1) $|z+2-3i| = \omega$ έχεις $\omega^2-4\omega+3>0$, οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης είναι $\omega_1=1$, $\omega_2=3$.

Είναι $\alpha = 1 > 0$ άρα πίνακας πρόσημου:

$-\infty$		1		3		$+\infty$
	+	0	–	0	+	

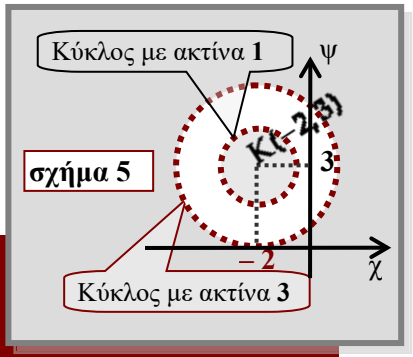
Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\omega^2-4\omega+3>0 \Leftrightarrow \omega<1$ ή $\omega>3$.

Οι αριθμοί 1 και 3 **δεν** συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις $\omega^2-4\omega+3>0$ γιατί είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2-4\omega+3=0$ αλλά όχι της ανίσωσης $\omega^2-4\omega+3>0$ (γιατί δεν υπάρχει το ίσον).

Άρα $\omega<1$ ή $\omega>3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z+2-3i|<1 \\ \text{ή} \\ |z+2-3i|>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-(-2+3i)|<1 \\ \text{ή} \\ |z-(-2+3i)|>3 \end{cases}$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι $|z-(-2+3i)|=3$ και $|z-(-2+3i)|=1$ που έχουν ως εικόνες τους κύκλους με κέντρο **Κ(– 2 , 3)** και **ακτίνα ρ = 1** και **Κ(– 2 , 3)** και **ακτίνα ρ = 3** αντίστοιχα.

Οι σχέσεις $|z+2-3i|<1$ ή $|z+2-3i|>3$ **αληθεύουν** για εκείνους τους μιγαδικούς **z** για τους οποίους **δεν αληθεύει** η αντίθετη σχέση $1 \le |z+2-3i| \le 3$.



Άρα λύσεις της

$|z+2-3i|^2-4|z+2-3i|+3>0$ **είναι οι**

μιγαδικοί που οι εικόνες τους βρίσκονται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία του δακτυλίου των δύο κύκλων χωρίς τα σημεία των κύκλων (επειδή στην ανίσωση δεν έχει και =)

Δηλαδή λύσεις είναι όλο το γραμμοσκιασμένο μέρος του μιγαδικού επιπέδου εκτός από το δακτύλιο και τα σημεία των δυο κύκλων. **Σχήμα 5**

Λιβαδειά

16. Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης $|z+2i|^2-3|z+2i|+2\le 0$ **(1)**

Αν θέσεις στην (1) $|z+2i|=\omega$ έχεις $\omega^2-3\omega+2\le 0$ τότε ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης είναι $\omega_1=1,\ \omega_2=2$.

Είναι $\alpha=1>0$ άρα πίνακας πρόσημου:

$-\infty$		**1**		**2**		$+\infty$
	+	**0**	−	**0**	+	

Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\omega^2-3\omega+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le\omega\le 2$.

Οι αριθμοί 1 και 2 συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις γιατί είναι λύσεις της εξίσωσης $\boldsymbol{\omega^2-3\omega+2=0}$ άρα και της ανίσωσης $\boldsymbol{\omega^2-2\omega+2\le 0}$.

Τελικά $\boldsymbol{1\le\omega\le 2} \Leftrightarrow 1\le|z+2i|\le 2 \Leftrightarrow 1\le|z-(-2i)|\le 2$.

Οι αντίστοιχες εξισώσεις είναι $|z-(-2i)|=2$ και $|z-(-2i)|=1$ που έχουν ως εικόνες τους κύκλους με κέντρο **Κ(0 , – 2)** και **ακτίνα ρ = 1** και **Κ(0 , – 2)** και **ακτίνα ρ = 2** αντίστοιχα.

Άρα λύσεις της (1) είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους βρίσκονται στο δακτύλιο των δύο κύκλων μαζί με τα σημεία των κύκλων (επειδή στις ανισώσεις έχει και =).

6. Εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$

Η **σχέση** $|z-z_1|=|z-z_2|$, όπου z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί παριστάνει την **εξίσωση της μεσοκάθετης** στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(z_1), B(z_2)$.

17. Παράδειγμα : Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $|z+2-3i|=|z+5+7i|$ **(1)**.

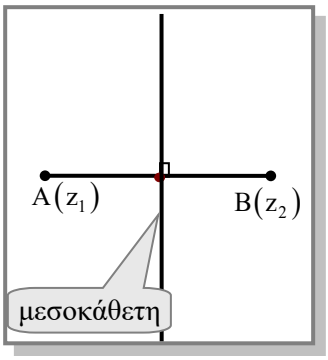
$|z+2-3i|=|z+5+7i| \Leftrightarrow |z-(-2+3i)|=|z-(-5-7i)|$.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί που βρίσκονται στην **μεσοκάθετη** του τμήματος με άκρα τα σημεία **Α(−2 , 3) και Β(−5 , −7).**

Δαμιανός Μωραΐτης

7. Ανίσωση $|z-z_1|>|z-z_2|$ ή $|z-z_1|<|z-z_2|$ κλπ.

Για να επιλύσεις ανισώσεις των πιο πάνω μορφών θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση : $|z-z_1|=|z-z_2|$ η οποία παριστάνει την εξίσωση της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(z_1)$, $B(z_2)$.



Η μεσοκάθετη χωρίζει το επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα, στο ένα από αυτά είναι το Α και στο άλλο το Β.

Στην συνέχεια αντικαθιστάς στην ανίσωση το z με ένα από τα z_1, z_2 πχ με το z_1.

Αν το z_1 επαληθεύει την ανίσωση , λύσεις είναι τα σημεία του επιπέδου από την ίδια μεριά με το $A(z_1)$ αλλιώς λύσεις είναι τα σημεία που βρίσκονται στο άλλο ημιεπίπεδο.

☆ Όπως θα δεις πάντα το z_1 ικανοποιεί την ανίσωση που έχει το < και το z_2 αυτήν που έχει το >.

18. Να βρεθεί ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει : $|z-2+i|\le|z+3-5i|$ **(1).**

Η αντίστοιχη εξίσωση της (1) είναι $|z-2+i|=|z+3-5i| \Leftrightarrow$ $|z-(2-i)|=|z-(-3+5i)|$. Αυτή είναι η εξίσωση της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα $A(z_1)B(z_2)$ όπου $z_1=2-i$ και $z_2=-3+5i$.

Αν θέσεις στην (1) όπου z το $z_1=2-i$, αυτή γίνεται $|2-i-2+i|\le|2-i+3-5i|$ $\Leftrightarrow 0\le|5-6i|$ **προφανής** γιατί το $|5-6i|$ είναι θετικός αριθμός ως μέτρο μιγαδικού.

Άρα λύσεις είναι οι μιγαδικοί που βρίσκονται στην ίδια «μεριά» με το Α(2 , − 1) ως προς την μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τα σημεία Α(2 , − 1) και Β(−3 , 5) μαζί με τα σημεία της μεσοκάθετης (επειδή στην ανίσωση έχει και =).

Λιβαδειά

8. Εξίσωση $|z-z_1|=\kappa|z-z_2|$, με $\kappa \in R$ και $\kappa>0$

Η σχέση $|z-z_1|=\kappa|z-z_2|$ όπου z_1, z_2 δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, παριστάνει **εξίσωση κύκλου (Απολλώνιος κύκλος)** και αντιμετωπίζεται (πιο εύκολα) με αντικατάσταση του z με την μορφή $\chi+\psi i$ και πράξεις.

19. Παράδειγμα : Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $|z-3i|=4|z-1+i|$ **(1)**

Έστω $z=\chi+\psi i$ τότε η (1) γίνεται $|\chi+\psi i-3i|=4|\chi+\psi i-1+i| \Leftrightarrow$

$|\chi+(\psi-3)i|=4|(\chi-1)+(\psi+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2+(\psi-3)^2}=4\sqrt{(\chi-1)^2+(\psi+1)^2}$

$\Leftrightarrow \chi^2+(\psi-3)^2=16(\chi-1)^2+16(\psi+1)^2 \Leftrightarrow$

$16(\chi-1)^2-\chi^2+16(\psi+1)^2-(\psi-3)^2=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$

$$\chi^2+\psi^2-\frac{32}{15}\chi+\frac{38}{15}\psi+\frac{8}{15}=0 .$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με

$$A=-\frac{32}{15},\ B=\frac{38}{15},\ \Gamma=\frac{8}{15} \text{ και } A^2+B^2-4\Gamma=\left(-\frac{32}{15}\right)^2+\left(\frac{38}{15}\right)^2-4\frac{8}{15}=$$

$$\frac{476}{3}>0 .$$

Άρα λύσεις οι μιγαδικοί οι εικόνες των οποίων είναι σημεία του κύκλου

με κέντρο το σημείο : $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(\frac{16}{15},-\frac{19}{15}\right)$ και ακτίνα $\rho=2\sqrt{\frac{119}{3}}$

9. Ανίσωση $|z-z_1|<\kappa|z-z_2|$, $|z-z_1|>\kappa|z-z_2|$, $\kappa \in R$ και $\kappa>0$ (κλπ)

Για να επιλύσεις ανισώσεις των πιο πάνω μορφών κάνεις τα εξής : **Θεωρείς** την αντίστοιχη εξίσωση $|z-z_1|=\kappa|z-z_2|$, οπότε ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω διαπιστώνεις ότι ή εξίσωση παριστάνει κύκλο τον οποίο βέβαια μέσω της διαδικασίας θα έχεις βρει.

Τότε αντικαθιστώντας στην ανίσωση τον μιγαδικό που αντιστοιχεί στο κέντρο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

αυτού του κύκλου θα δεις αν επαληθεύεται ή όχι η ανίσωση και απαντάς ανάλογα όπως στα παραδείγματα :

Παραδείγματα :

20. Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης $|z-3i| \geq 4|z-1+i|$ (1)

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση της (1) η οποία είναι :

$|z-3i| = 4|z-1+i|$ (2). Έστω $z = \chi + \psi i$ τότε η (1) γίνεται

$|\chi+\psi i-3i| = 4|\chi+\psi i-1+i| \Leftrightarrow |\chi+(\psi-3)i| = 4|(\chi-1)+(\psi+1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{\chi^2+(\psi-3)^2} = 4\sqrt{(\chi-1)^2+(\psi+1)^2} \Leftrightarrow \chi^2+(\psi-3)^2 = 16(\chi-1)^2+16(\psi+1)^2$

$\Leftrightarrow 16(\chi-1)^2-\chi^2+16(\psi+1)^2-(\psi-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$

$\chi^2+\psi^2-\frac{32}{15}\chi+\frac{38}{15}\psi+\frac{8}{15}=0$. Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής

$\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A=-\frac{32}{15}$, $B=\frac{38}{15}$, $\Gamma=\frac{8}{15}$ και

$A^2+B^2-4\Gamma = \left(-\frac{32}{15}\right)^2+\left(\frac{38}{15}\right)^2-4\frac{8}{15} = \frac{476}{3} > 0$.

Άρα λύσεις οι μιγαδικοί οι εικόνες των οποίων είναι σημεία του κύκλου

με κέντρο το σημείο : $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right) = K\left(\frac{16}{15},-\frac{19}{15}\right)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{\frac{119}{3}}$

Αν τώρα στην (1) θέσεις όπου $z = \frac{16}{15}-\frac{19}{15}i$ έχεις :

$\left|\frac{16}{15}-\frac{19}{15}i-3i\right| \geq 4\left|\frac{16}{15}-\frac{19}{15}i-1+i\right| \Leftrightarrow \left|\frac{16-19i-45i}{15}\right| \geq 4\left|\frac{16-19i-15+15i}{15}\right|$

$\Leftrightarrow |16-64i| \geq 4|1-4i| \Leftrightarrow \sqrt{16^2+64^2} \geq 4\sqrt{1^2+4^2} \Leftrightarrow \sqrt{4302} \geq 4\sqrt{17} \Leftrightarrow$

$4302 \geq 16\cdot 17 \Leftrightarrow 4302 \geq 272$ προφανής.

Άρα αφού ο μιγαδικός **z** που αντιστοιχεί στο κέντρο του κύκλου ικανοποιεί την ανίσωση $|z-3i| \geq 4|z-1+i|$ τότε λύσεις είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου μαζί με τα σημεία του κύκλου (επειδή στην ανίσωση έχει και =).

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης $2|z-3i|<|z+2-i|$ (1)

Απάντηση :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση της (1), την $2|z-3i|=|z+2-i|$ (2)

Έστω $z=\chi+\psi i$ τότε η (2) γίνεται $2|\chi+\psi i-3i|=|\chi+\psi i+2-i| \Leftrightarrow$

$2|\chi+(\psi-3)i|=|(\chi+2)+(\psi-1)i| \Leftrightarrow 2\sqrt{\chi^2+(\psi-3)^2}=\sqrt{(\chi+2)^2+(\psi-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4\chi^2+4(\psi-1)^2=(\chi+2)^2+(\psi-1)^2 \Leftrightarrow 4\chi^2+4(\psi-1)^2-(\chi+2)^2-(\psi-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \quad \cdots \Leftrightarrow 3\chi^2+3\psi^2-4\chi-6\psi-1=0 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-\frac{4}{3}\chi-2\psi-\frac{1}{3}=0.$

Άρα η (2) μετατρέπεται στη μορφή $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=-\frac{4}{3}$,

$B=-2,\ \Gamma=-\frac{1}{3}$ και επειδή είναι $A^2+B^2-4\Gamma=\frac{16}{9}+4-4\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{9}>0$

παριστάνει εξίσωση κύκλου κέντρο το σημείο $\mathbf{M\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=M\left(\frac{2}{3},1\right)}$ και

ακτίνα $\boldsymbol{\rho=\frac{4}{3}}$. Αν τώρα στην (1) θέσεις όπου z το $z_0=\frac{2}{3}+i$ έχεις

$2\left|\frac{2}{3}+i-3i\right|<\left|\frac{2}{3}+i+2-i\right| \Leftrightarrow 2\left|\frac{2-6i}{3}\right|<\left|\frac{2+6}{3}\right| \Leftrightarrow$

$2|2-6i|<|8| \Leftrightarrow 2\sqrt{2^2+6^2}<\sqrt{8^2} \Leftrightarrow 4\cdot 40<64$ **άτοπο.**

Άρα αφού ο μιγαδικός $\boldsymbol{z_0}$ που αντιστοιχεί στο κέντρο του κύκλου **δεν** ικανοποιεί την ανίσωση $2|z-3i|<|z+2-i|$, τότε **λύσεις είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου χωρίς τα σημεία του κύκλου (επειδή στην ανίσωση δεν έχει =).**

Παρατήρηση :

Εξισώσεις της μορφής $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\kappa$ λύνονται όπως οι πιο πάνω διότι

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\kappa \Leftrightarrow \frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=\kappa \Leftrightarrow |z-z_1|=\kappa|z-z_2|$$

Δαμιανός Μωραΐτης

Παράδειγμα :

22. Να λυθεί η εξίσωση $\left|\frac{z-2+5i}{z+1-1i}\right|=3$ **(1)**

Απάντηση:

Η **(1)** γίνεται $|z-2+5i|=3|z+1-1i|$ και αν θέσεις $z=\chi+\psi i$ όπως πιο πάνω μετά από πράξεις αποδεικνύεται ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο ⋯ και ακτίνα $\rho=\cdots$

Ανισώσεις της μορφής $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|>\kappa$ ή $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|<\kappa$ κλπ λύνονται όπως οι πιο πάνω διότι $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|>\kappa \Leftrightarrow |z-z_1|>\kappa|z-z_2|$ ⋯

Εξισώσεις της μορφής $|\mu\cdot z-z_1|=|\nu\cdot z-z_2|$ ή ανισώσεις της μορφής $|\mu\cdot z-z_1|>|\nu\cdot z-z_2|$ λύνονται όπως οι πιο πάνω διότι οδηγούνται στην μορφή : $|z-z_1|=\kappa|z-z_2|$ ή $|z-z_1|>\kappa|z-z_2|$ αντίστοιχα.

10. Εξίσωση $|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha$, $\alpha\in R$, $\alpha>0$, $z_1, z_2\in C$ και $2\alpha>|z_1-z_2|$ **(1).**

Αν **M** είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, όπως είναι γνωστό, είναι : $ME_1=|z-z_1|$ και $ME_2=|z-z_2|$.

Έτσι η (1) γίνεται $ME_1+ME_2=2\alpha$ (2)

Από την (2) συμπεραίνεις ότι ζητάς να βρεις το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων **το άθροισμα των αποστάσεων** από τα σταθερά σημεία E_1, E_2 του επιπέδου, είναι σταθερό και ίσο με **2α**.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι το ζητούμενο σύνολο σημείων είναι **έλλειψη** με εστίες τα σημεία $E_1(z_1)$, $E_2(z_2)$ και **μεγάλο ημιάξονα α** με την προϋπόθεση ότι $2\alpha>E_1E_2=|z_1-z_2|$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

23. Να λυθεί η εξίσωση $|z+2|+|z-2|=16$ (1)

ή Να βρεθεί ο Γ. Τ. των μιγαδικών **z** που ικανοποιούν τη σχέση $|z+2|+|z-2|=16$

Απάντηση :

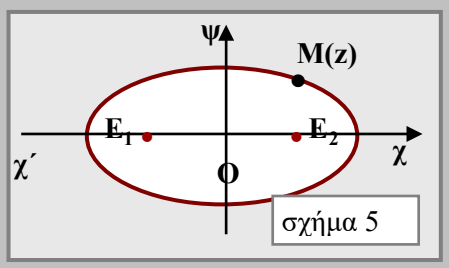
$|z+2|+|z-2|=16 \Leftrightarrow |z-(-2)|+|z-2|=16$.

Αν θέσεις $z_1=-2$ και $z_2=2$ και αν Μ είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(-2,0)$, $E_2(z_2)=E_2(2,0)$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, επειδή είναι

$16>|z_1-z_2|=|-2-2|=\sqrt{(-4)^2}=4$ **(2·α > 2·γ)** τότε η (1) παίρνει τη μορφή $\mathbf{ME_1+ME_2=16}$ και παριστάνει έλλειψη με εστίες $\mathbf{E_1(-2,0)}$ και $\mathbf{E_2(2,0)}$,

μεγάλο ημιάξονα **α = 8** και εστιακή απόσταση **2γ = 4**.

Παρατήρηση : Οι εστίες της έλλειψης προφανώς βρίσκονται πάνω στον άξονα χ΄χ και οι άξονες της έλλειψης ταυτίζονται με τους άξονες του συστήματος δες το σχήμα 5 δίπλα : Όμως δεν πρόκειται να σου ζητήσουν το σχήμα, ούτε παίζει κανένα ρόλο στη διαδικασία επίλυσης όπως είδες .



σχήμα 5

24. Να λυθεί η εξίσωση $|z+5i|+|z-5i|=28$ (1)

Απάντηση :

$|z+5i|+|z-5i|=28 \Leftrightarrow |z-(-5i)|+|z-5i|=28$.

Θέσε $z_1=-5i$, $z_2=5i$. Αν Μ είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(0,-5)$, $E_2(z_2)=E_2(0,5)$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, επειδή

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

είναι $28 > |z_1 - z_2| = |-5-5| = \sqrt{(-10)^2} = 10$, τότε η (1) παίρνει τη μορφή

$\mathbf{ME_1 + ME_2 = 28}$ και παριστάνει έλλειψη με εστίες $\mathbf{E_1(0,-5)}$ και $\mathbf{E_2(0,5)}$, μεγάλο ημιάξονα $\mathbf{\alpha = 14}$ και εστιακή απόσταση $\mathbf{2\gamma = 10}$.

Παρατήρηση : Οι εστίες της έλλειψης προφανώς βρίσκονται πάνω στον άξονα ψ΄ψ.

11. Ανίσωση με μορφή : $\begin{cases} |z-z_1|+|z-z_2| > 2\alpha \text{ ή} \\ |z-z_1|+|z-z_2| < 2\alpha \text{ κλπ} \end{cases}$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$,

$z_1, z_2 \in C$ και $2\alpha > |z_1 - z_2|$ **(1)**

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $|z-z_1|+|z-z_2| = 2\alpha$ (2).

Αν **M** είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, όπως είναι γνωστό η (2) παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathbf{E_1(z_1)}$, $\mathbf{E_2(z_2)}$ και **μεγάλο ημιάξονα α.**

Αν στην (1) θέσεις $\mathbf{z = z_1}$ ή $z = z_2$ (ή αν θέσεις $z = (0, 0)$ θα επισημάνεις τα σημεία που ικανοποιούν την ανίσωση.

Παραδείγματα :

25. Να λυθεί η ανίσωση $|z+2|+|z-2| \geq 16$ (1)

Απάντηση :

Θεωρείς την εξίσωση : $|z+2|+|z-2| = 16 \Leftrightarrow |z-(-2)|+|z-2| = 16$.

Αν θέσεις $z_1 = -2$ και $z_2 = 2$ και αν M είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $E_1(z_1) = E_1(-2,0)$, $E_2(z_2) = E_2(2,0)$ οι εικόνες των z_1, z_2 επειδή είναι $16 > |z_1 - z_2| = |-2-2| = \sqrt{(-4)^2} = 4$ τότε η (1) παίρνει τη μορφή

Λιβαδειά

$\mathbf{ME_1 + ME_2 = 16}$ και παριστάνει έλλειψη με εστίες $\mathbf{E_1(-2,0)}$ και $\mathbf{E_2(2,0)}$, μεγάλο ημιάξονα $\mathbf{\alpha = 8}$ και εστιακή απόσταση $\mathbf{2\gamma = 4}$.

Αν στην (1) θέσεις $z = z_1 = -2$ έχεις $|-2+2|+|-2-2| \geq 16 \Leftrightarrow |-4| \geq 16 \Leftrightarrow$

$4 \geq 16$ **ψευδής** .

Οπότε η εστία $\mathbf{E_1(-2,0)}$ **δεν ικανοποιεί** την ανίσωση (1) άρα λύσεις είναι τα εξωτερικά σημεία μαζί με τα σημεία της έλλειψης (επειδή στην ανίσωση υπάρχει και =).

26. Να λυθεί η ανίσωση $|z+5i|+|z-5i| < 28$ **(1)**

Απάντηση :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση : $|z+5i|+|z-5i| = 28 \Leftrightarrow$

$|z-(-5i)|+|z-5i| = 28$ (2). Θέσε $z_1 = -5i$, $z_2 = 5i$.

Αν M είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και $E_1(z_1) = E_1(0,-5)$,

$E_2(z_2) = E_2(0,5)$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ επειδή είναι $28 > |z_1 - z_2| =$

$|-5i-5i| = \sqrt{(-10)^2} = 10$, τότε η (1) παίρνει τη μορφή $\mathbf{ME_1 + ME_2 = 28}$ και

παριστάνει έλλειψη με εστίες $\mathbf{E_1(0,-5)}$ και $\mathbf{E_2(0,5)}$, μεγάλο ημιάξονα $\mathbf{\alpha = 14}$ και εστιακή απόσταση $\mathbf{2\gamma = 10}$.

Αν στην (1) θέσεις $z = z_1 = -5i$ έχεις $|-5i+5i|+|-5i-5i| < 28 \Leftrightarrow$

$|-10i| < 28 \Leftrightarrow \sqrt{(-10)^2} < 28$ **αληθής.**

Οπότε η εστία $\mathbf{E_1(0,-5)}$ ικανοποιεί την ανίσωση (1) άρα λύσεις είναι τα εσωτερικά σημεία χωρίς τα σημεία της έλλειψης (επειδή στην ανίσωση δεν υπάρχει και =).

12. **Εξίσωση** $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2\alpha$, $\alpha\in R$, $\alpha>0$, z_1, $z_2\in C$ και $2\alpha<|z_1-z_2|$ **(1).**

Αν **M** είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και E_1, E_2 οι εικόνες των z_1, z_2 τότε, όπως είναι γνωστό : $ME_1=|z-z_1|$ και $ME_2=|z-z_2|$.

Έτσι η (1) γίνεται $|ME_1-ME_2|=2\alpha$ (2). Από την (2) συμπεραίνεις ότι ζητάς να βρεις το σύνολο των σημείων M(z) του επιπέδου, των οποίων **το απόλυτο της διαφοράς των αποστάσεων** από τα σταθερά σημεία E_1, E_2 του επιπέδου, είναι σταθερό και ίσο με **2α**.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι το ζητούμενο σύνολο σημείων είναι **υπερβολή** με εστίες τα σημεία $E_1(z_1)$, $E_2(z_2)$ και **μεγάλο ημιάξονα α** .

Παραδείγματα :

27. Να λυθεί η εξίσωση $\big||z+9|-|z-9|\big|=10$ **(1)**

(ή Να βρεθεί ο Γ. Τ. των μιγαδικών **z** που ικανοποιούν τη σχέση $\big||z+9|-|z-9|\big|=10$)

Απάντηση :

$\big||z+9|-|z-9|\big|=10\Leftrightarrow\big||z-(-9)|-|z-9|\big|=10$. Θέσε $z_1=-9$ και $z_2=9$.

Αν M είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(-9,0)$,

$E_2(z_2)=E_2(9,0)$ οι εικόνες των z_1, z_2 επειδή είναι

$10<|z_1-z_2|=\sqrt{(-18)^2}=18$, τότε η (1) παίρνει τη μορφή $|ME_1-ME_2|=10$ και παριστάνει **υπερβολή** με εστίες $E_1(-9,0)$ και $E_2(9,0)$ και μεγάλο ημιάξονα **α = 5** και εστιακή απόσταση **2γ = 18.**

Παρατήρηση : Οι εστίες της **υπερβολή** προφανώς βρίσκονται πάνω στον άξονα χ΄χ.

Λιβαδειά

28. Να λυθεί η εξίσωση $\big||z+5i|-|z-5i|\big|=2$ **(1)**

Απάντηση :

$\big||z+5i|-|z-5i|\big|=2 \Leftrightarrow \big||z-(-5i)|-|z-5i|\big|=2$. Θέσε $z_1=-5i$, $z_2=5i$.

Αν Μ είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(0,-5)$, $E_2(z_2)=E_2(0,5)$

οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ επειδή είναι $2<|z_1-z_2|=\sqrt{(-10)^2}=10$ τότε η (1)

παίρνει τη μορφή $|\mathbf{ME_1}-\mathbf{ME_2}|=\mathbf{2}$ και παριστάνει υπερβολή με

εστίες $\mathbf{E_1(0,-5)}$ και $\mathbf{E_2(0,5)}$ μεγάλο ημιάξονα $\boldsymbol{\alpha=1}$ και εστιακή απόσταση

$\mathbf{2\gamma=10}$.

13. Ανίσωση με μορφή : $\begin{cases}\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|>2\alpha,\\ \big||z-z_1|-|z-z_2|\big|<2\alpha\end{cases}$, $\alpha\in R$, $\alpha>0$, z_1, $z_2\in C$

και $2\alpha<|z_1-z_2|$ **(1)**

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση $|\mathbf{ME_1}-\mathbf{ME_2}|=\mathbf{2\alpha}$ (2).

Αν **Μ** είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ τότε,

ως γνωστό η (2) παριστάνει **υπερβολή** με εστίες τα σημεία $\mathbf{E_1(z_1)}$, $\mathbf{E_2(z_2)}$

και **μεγάλο ημιάξονα α.**

Αν στην (1) θέσεις $\mathbf{z=z_1}$ ή $\mathbf{z=z_2}$ θα επισημάνεις τα σημεία που ικανοποιούν την ανίσωση.

Παραδείγματα :

29. Να λυθεί η ανίσωση $\big||z+9|-|z-9|\big|\geq 10$ **(1)**

Απάντηση :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση : $\big||z+9|-|z-9|\big|=10 \Leftrightarrow$

Δαμιανός Μωραΐτης

$\big||z-(-9)|-|z-9|\big|=10$. Θέσε $z_1=-9$ και $z_2=9$.

Αν Μ είναι η εικόνα του **z** στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(-9,0)$,

$E_2(z_2)=E_2(9,0)$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ επειδή είναι $10<|z_1-z_2|=\sqrt{(-18)^2}=18$, τότε η (1) παίρνει τη μορφή $|\mathbf{ME_1}-\mathbf{ME_2}|=\mathbf{10}$ και παριστάνει **υπερβολή** με εστίες $\mathbf{E_1(-9,0)}$ και $\mathbf{E_2(9,0)}$ και μεγάλο ημιάξονα **α = 5** και εστιακή απόσταση **2γ =18.** Αν στην (1) θέσεις $z=z_1=-9$ έχεις $\big||-9+9|-|-9-9|\big|\geq 10 \Leftrightarrow 18\geq 10$ **αληθής**.

Αν στην (1) θέσεις $z=z_2=9$ έχεις $\big||9+9|-|9-9|\big|\geq 10 \Leftrightarrow |9+9|\geq 10 \Leftrightarrow$ $18\geq 10$ **αληθής**.

Οπότε οι εστίες $\mathbf{E_1(-9,0)}$ και $\mathbf{E_2(9,0)}$ **ικανοποιούν** την ανίσωση (1) άρα λύσεις είναι τα «εσωτερικά» σημεία, δηλαδή τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στην ίδια «μεριά» με τις εστίες μαζί με τα σημεία της υπερβολής (επειδή στην ανίσωση υπάρχει και =).

☆ Όπως βλέπεις αν η μια εστία ικανοποιεί την ανίσωση τότε και η άλλη εστία επίσης θα την ικανοποιεί, άρα δεν χρειάζεται να αντικαθιστάς και τις δυο εστίες .

Επίσης αντί για τις συντεταγμένες της εστίας θα μπορούσες (όπως και στις υπόλοιπες περιπτώσεις να αντικαθιστάς τις συντεταγμένες του **Ο(0 , 0)**

30. Να λυθεί η ανίσωση $\big||z+5i|-|z-5i|\big|<2$ **(1)**

Απάντηση :

Θεωρείς την αντίστοιχη εξίσωση : $\big||z+5i|-|z-5i|\big|=2 \Leftrightarrow$

$\big||z-(-5i)|-|z-5i|\big|=2$. Θέσε $z_1=-5i$, $z_2=5i$.

Λιβαδειά

Αν Μ είναι η εικόνα του z στο επίπεδο και $E_1(z_1)=E_1(0,-5)$, $E_2(z_2)=E_2(0,5)$ οι εικόνες των $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ επειδή είναι $2<|z_1-z_2|=\sqrt{(-10)^2}=10$ τότε η (1) παίρνει τη μορφή $|\mathbf{ME_1}-\mathbf{ME_2}|=\mathbf{2}$ και παριστάνει υπερβολή με εστίες $\mathbf{E_1(0,-5)}$ και $\mathbf{E_2(0,5)}$ μεγάλο άξονα $\mathbf{2\alpha=2}$ και εστιακή απόσταση $\mathbf{2\gamma=10}$.

Αν στην (1) θέσεις $z=z_1=-5i$ έχεις $||-5i+5i|-|-5i-5i||<2 \Leftrightarrow$

$||-10i||<2 \Leftrightarrow \sqrt{(-10)^2}<2$ **ψευδής.**

Οπότε οι εστίες $\mathbf{E_1(0,-5)}$ και $\mathbf{E_2(0,5)}$ **δεν ικανοποιούν** την ανίσωση (1) άρα λύσεις είναι τα «εξωτερικά» σημεία, δηλαδή τα σημεία του επιπέδου που δεν βρίσκονται στην ίδια «μεριά» με τις εστίες, χωρίς τα σημεία της υπερβολής (επειδή στην ανίσωση δεν υπάρχει =).

Γεωμετρικοί τόποι που προκύπτουν από συνθήκη.

Στις περιπτώσεις που ζητάει να βρεις ένα γεωμετρικό τόπο και σου δίνει μια παράσταση η οποία ικανοποιεί μια συνθήκη, αντικαθιστάς τον μιγαδικό που περιέχεται, με την αλγεβρική του μορφή **χ + ψi.**

Κάνεις πράξεις, για να φέρεις την αρχική παράσταση στην μορφή **κ + λi και** απαιτείς να ισχύει η συνθήκη, αυτό θα σου δώσει μια εξίσωση που θα είναι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου. Όλη η ιστορία είναι θέμα πράξεων και μόνο.

Δες μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα :

Παράδειγμα :

31. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z αν είναι γνωστό ότι : ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι :

α. φανταστικός **β.** πραγματικός.

Δαμιανός Μωραΐτης

Αν $z=\chi+\psi i$, τότε : $\dfrac{z-1}{z-2i}=\dfrac{\chi+\psi i-1}{\chi+\psi i-2i}=\dfrac{(\chi-1)+\psi i}{\chi+(\psi-2)i}$

$$=\frac{(\chi^2-\chi+\psi^2-2\psi)+i(2\chi+\psi-2)}{\chi^2+(\psi-2)^2}=\frac{\chi^2-\chi+\psi^2-2\psi}{\chi^2+(\psi-2)^2}+\frac{2\chi+\psi-2}{\chi^2+(\psi-2)^2}i.$$

Επομένως :

α) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2\cdot i}$ είναι φανταστικός, αν και μόνο αν

$$\frac{\chi^2-\chi+\psi^2-2\psi}{\chi^2+(\psi-2)^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2-\chi+\psi^2-2\psi=0\\ \chi^2+(\psi-2)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2+\psi^2-\chi-2\psi=0\\ \chi^2\neq 0 \text{ και } \psi\neq 2\end{cases}.$$

Η $\chi^2+\psi^2-\chi-2\psi=0$ είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$,

με $A=-1, B=-2$ και $\Gamma=0$ και είναι $A^2+B^2-4\Gamma=1+4-0=5>0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}\Leftrightarrow$

$\rho=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ με εξαίρεση το σημείο Α(0 , 2) που ανήκει στον κύκλο και οι συντεταγμένες του μηδενίζουν τον παρονομαστή.

β) Ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2\cdot i}$ είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $\dfrac{2\chi+\psi-2}{\chi^2+(\psi-2)^2}=0$

δηλαδή, αν και μόνο αν $\begin{cases}2\chi+\psi-2=0\\ \chi^2+(\psi-2)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\chi+\psi-2=0\\ \chi^2\neq 0 \text{ και } \psi\neq 2\end{cases}$.

Άρα οι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $2\chi+\psi-2=0$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$.

Λιβαδειά

32. Αν $z=\chi+\psi i$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z όταν :

$$\left(z-\overline{z}\right)^2+8\left(z+\overline{z}\right)=16 \ .$$

Απάντηση :

Αν $z=\chi+\psi i$ τότε $\left(z-\overline{z}\right)^2+8\left(z+\overline{z}\right)=16 \Leftrightarrow \left(2\psi\cdot i\right)^2+8\left(2\chi\right)=16 \Leftrightarrow$

$-4\psi^2+16\chi=16 \Leftrightarrow \psi^2=4\left(\chi-1\right)$. Αν θέσεις **X = χ –1** οπότε **χ = X + 1,**

η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\psi^2=4X$ άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή με **p = 2,** και υπάρχει μια μετατόπιση προς τα δεξιά λόγω του **χ = X + 1** άρα κορυφή το $\mathbf{A\left(X=0,\ \psi=0\right)=A\left(1,\ 0\right)}$, και εστία το σημείο

$$\mathbf{E\left(X=\frac{p}{2},\ 0\right)=E\left(\chi-1=1,\ 0\right)=E\left(2,\ 0\right)}.$$

33. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς z έτσι ώστε να επαληθεύουν τις σχέσεις : $|z-3|=|z+3|$ **(1)** και $|z-4|>\sqrt{13}$ **(2)**

Απάντηση :

Η **(1)** παριστάνει την μεσοκάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα $\mathbf{A\left(z_1\right)}$, $\mathbf{B\left(z_2\right)}$ όπου $z_1=-3$, $z_2=3$. Δηλαδή τον άξονα ψ'ψ .

Η **(2)** παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathbf{K\left(4,\ 0\right)}$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{13}$.

Άρα λύσεις τα σημεία του άξονα ψ'ψ που ταυτόχρονα είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $\mathbf{K\left(4,\ 0\right)}$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{13}$.

Επειδή $4>\sqrt{13}$ άρα ο κύκλος δεν τέμνει ούτε εφάπτεται του άξονα ψ΄ ψ άρα τελικά λύσεις είναι όλα τα σημεία του άξονα ψ΄ψ.

Παρατήρηση :

Η άσκηση θα μπορούσε να δοθεί και ως εξής :

Να δείξετε ότι αν $|z-3|=|z+3|$ ***και*** $|z-2|>\sqrt{13}$ τότε είναι $\mathbf{z\in I}$.

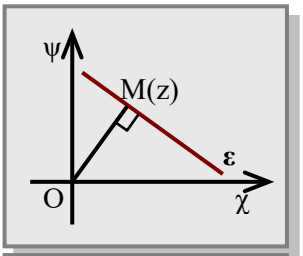
Δαμιανός Μωραΐτης

Προσοχή

Προβλήματα με τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή.

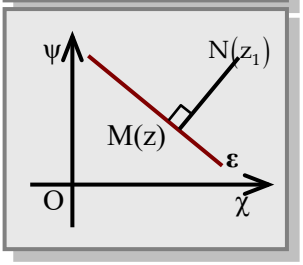
- Αν $M(z)$ και $N(z_1)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z και z_1 στο μιγαδικό επίπεδο τότε :
  - ✓ **Το $|z|$ εκφράζει την απόσταση του Ο από το Μ .**
  - ✓ **Το $|z-z_1|$ εκφράζει την απόσταση του Μ από το Ν .**

1. **Αν ο z «κινείται» σε ευθεία ε τότε :**



✓ **Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :**

η απόσταση ΟΜ = $d(O,\varepsilon)$.



✓ **Η ελάχιστη τιμή του $|z-z_1|$**

(ή διαφορετικά η ελάχιστη απόσταση των z και z_1),είναι η απόσταση

ΝΜ = $d(N,\varepsilon)$.

Εφαρμογή :

34. Να βρεθεί το «ελάχιστο μέτρο» του z (ελάχιστη τιμή του $|z|$) καθώς και η ελάχιστη απόστασή του από τον $z_1 = 2-5i$, αν είναι γνωστό ότι ο z κινείται στην ευθεία με εξίσωση **ε : ψ = – χ + 3**.

Απάντηση :

✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση $d(O,\varepsilon)$, έτσι :

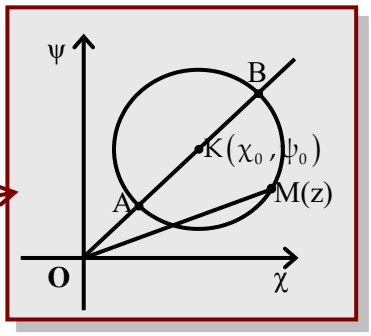
$\psi = -\chi + 3 \Leftrightarrow \chi + \psi - 3 = 0$. Άρα θα είναι $d(O,\varepsilon) = \dfrac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow d(O,\varepsilon) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ είναι $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Λιβαδειά

✓ Η ελάχιστη απόσταση του z από τον $z_1 = 2-5i$ είναι η απόσταση $d(N,\varepsilon)$. Είναι $d(N,\varepsilon) = \frac{|2-5-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow d(N,\varepsilon) = 3\sqrt{2}$ άρα η ελάχιστη τιμή για το $|z-z_1|$ είναι $3\sqrt{2}$.

2. Αν ο **z «κινείται»** σε **κύκλο** κέντρου $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνας **ρ** τότε :

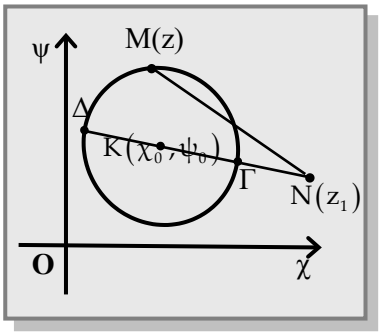


✓ **Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :**

η απόσταση $OA = |OK - \rho|$.

✓ **Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι :**

η απόσταση $OB = |OK + \rho| = OK + \rho$.



✓ **Η ελάχιστη τιμή του $|z-z_1|$ είναι :**

η απόσταση $N\Gamma = |NK - \rho|$.

✓ **Η μέγιστη τιμή του $|z-z_1|$ είναι :**

η απόσταση $N\Delta = |NK + \rho| = NK + \rho$.

Εφαρμογή :

35. Αν ο z «κινείται» στον κύκλο $(\chi-3)^2 + (\psi-3)^2 = 2$ να βρεις την **ελάχιστη** και τη **μέγιστη** τιμή του $|z|$ καθώς και την **ελάχιστη** και τη **μέγιστη** απόσταση του z από τον μιγαδικό $z_1 = 2+i$.

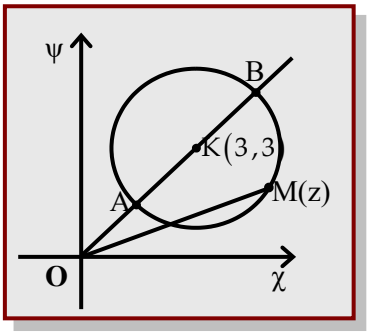
Απάντηση :

Αρχικά προσδιορίζεις το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

Αυτός ο κύκλος, (του παραδείγματος), έχει κέντρο $K(3,3)$ και ακτίνα

Δαμιανός Μωραΐτης

$\rho=\sqrt{2}$. Η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$ είναι το $|z|$, δηλαδή το μήκος (OM).



Είναι $(OK)=\sqrt{\chi_0^2+\psi_0^2}=\sqrt{3^2+3^2} \Leftrightarrow (OK)=3\sqrt{2}$

άρα :

- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση

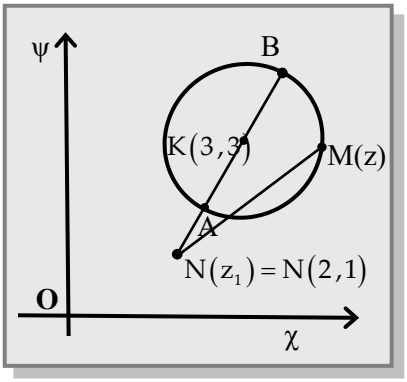
  $(OA)=|(OK)-\rho|=|3\sqrt{2}-\sqrt{2}| \Leftrightarrow \mathbf{(OA)=2\sqrt{2}}$.

- ✓ Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση

  $(OB)=|(OK)+\rho|=|3\sqrt{2}+\sqrt{2}| \Leftrightarrow \mathbf{(OB)=4\sqrt{2}}$.

Είναι $(NK)=\sqrt{(\chi_K-\chi_N)^2+(\psi_K-\psi_N)^2}=$

$\sqrt{(3-2)^2+(3-1)^2} \Leftrightarrow (NK)=\sqrt{5}$ άρα :



- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z-z_1|$

  είναι η απόσταση $(NA)=|(NK)-\rho|=$.

  $|\sqrt{5}-\sqrt{2}| \Leftrightarrow (NA)=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

- ✓ Η μέγιστη τιμή του $|z-z_1|$ είναι η απόσταση

  $(NB)=|NK+\rho|=|\sqrt{5}+\sqrt{2}| \Leftrightarrow (NB)=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να δοθεί και με την εξής μορφή :

✓ **Δίνεται η εξίσωση $|z-1-i|=2$, να βρεις**

i) Τον Γεωμετρικό τόπο των εικόνων του **z** .

ii) Την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

iii) Την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από τον w = 1 + 2·i.

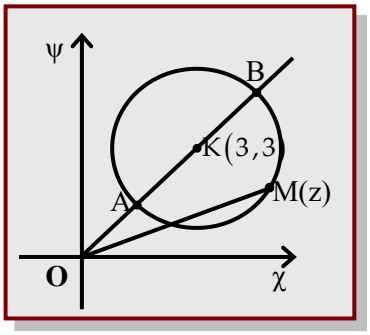
Λιβαδειά

Απάντηση :

i) $|z-1-i|=2 \Leftrightarrow |z-(1+i)|=2$ οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα **ρ = 2**.

ii) Είναι $(OK)=\sqrt{\chi_0^2+\psi_0^2}=\sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow (OK)=\sqrt{2}$ άρα :

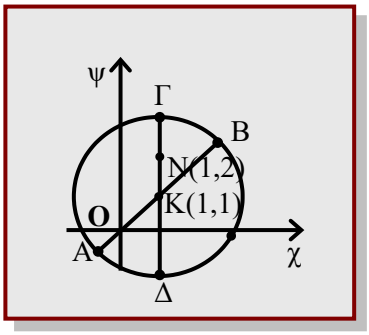
- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση $(OA)=|(OK)-\rho|$ $=|\sqrt{2}-2| \Leftrightarrow (OA)=2-\sqrt{2}$.
- ✓ Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι η απόσταση $(OB)=|(OK)+\rho|=$ $|\sqrt{2}+2| \Leftrightarrow (OB)=2+\sqrt{2}$.



iii) Αν $N(w)=N(1,2)$ τότε είναι :

$(NK)=\sqrt{(\chi_K-\chi_N)^2+(\psi_K-\psi_N)^2}=\sqrt{(1-1)^2+(1-2)^2} \Leftrightarrow (NK)=1$ άρα :

- ✓ Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση $(N\Gamma)=|(NK)-\rho|=$ $|1-2| \Leftrightarrow (N\Gamma)=1$.
- ✓ Η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση $(N\Delta)=|NK+\rho|=$ $|1+2| \Leftrightarrow (N\Delta)=3$.



Παρατήρησε ότι το σημείο **N** βρίσκεται στο **εσωτερικό** του κύκλου αλλά αυτό δεν αλλάζει τίποτε στη διαδικασία επίλυσης.

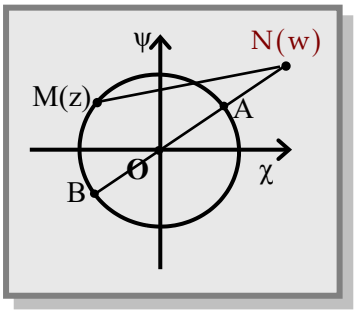
Δαμιανός Μωραΐτης

3. Αν ο **z «κινείται»** σε **κύκλο** με κέντρο **O(0 , 0)** και ακτίνα **ρ** τότε :

Δεν έχει νόημα να ψάχνεις το μέγιστο, ελάχιστο για το $|z|$

- ✓ **Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η** $NA = |ON - \rho| = ||w| - \rho|$ **που είναι και η ελάχιστη τιμή του** $|z - w|$.

- ✓ **Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η** $NB = |ON + \rho| = |w| + \rho$ **που είναι και η μέγιστη τιμή του** $|z - w|$.



Εφαρμογή :

36. Αν $|z| = 3$ να βρεις την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από τον $w = 3 - 4i$

Απάντηση :

Αν $|z| = 3$ τότε ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο **O(0 , 0)** και ακτίνα **ρ = 3** και $|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ οπότε :

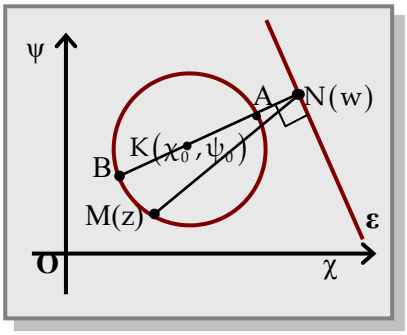
- ✓ ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η $NA = |ON - \rho| =$ $||w| - \rho| = 5 - 3 = 2$ που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

- ✓ μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η $NB = |ON + \rho| =$ $||w| + \rho| = 5 + 3 = 8$ που είναι και η μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Λιβαδειά

4. Αν ο **z «κινείται»** σε **κύκλο** κέντρου $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνας **ρ** και ο w σε ευθεία **ε** τότε :

Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z , w, που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$, είναι η $NA = |KN - \rho|$, όπου KN η κάθετος στην ε από το K.



✓ **Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z , w, που είναι και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$, είναι η $NB = |KN + \rho|$.**

Εφαρμογή :

37. Αν $|z| = 3$ και για τον w ισχύει: 3Re(w) – 4Im(w) = 25 , να βρεις την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από τον **w**

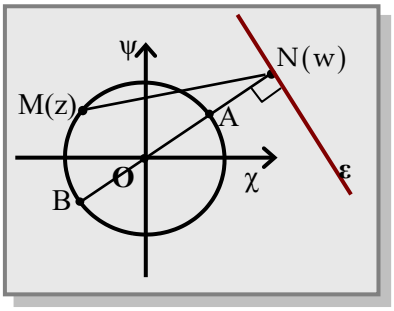
Απάντηση :

Αν $|z| = 3$ τότε ο z κινείται σε κύκλο που έχει κέντρο **O(0 , 0)** και ακτίνα **ρ = 3**.

Αν 3Re(w) – 4Im(w) = 25 τότε ο w κινείται στην ευθεία $3\chi - 4\psi = 25$

$\Leftrightarrow 3\chi - 4\psi - 25 = 0$, άρα

$$ON = d(O,\varepsilon) = \frac{|3\cdot 0 - 4\cdot 0 - 25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

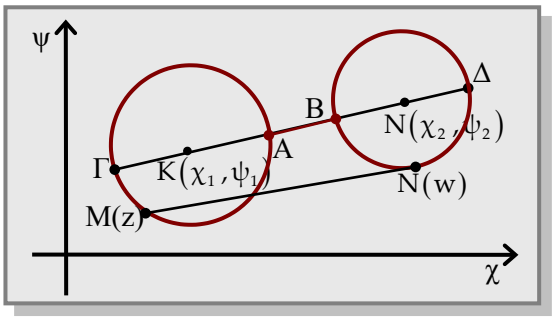


✓ ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η $NA = |ON - \rho| = |5 - 3| = 2$, που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

✓ μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z , w είναι η $NB = |ON + \rho| = |5 + 3| = 8$ που είναι και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Δαμιανός Μωραΐτης

5. Αν ο **z «κινείται»** σε **κύκλο** κέντρου $\mathbf{K(\chi_1,\psi_1)}$ και ακτίνας **R** και ο **w** σε **κύκλο** κέντρου $\mathbf{N(\chi_2,\psi_2)}$ και ακτίνας **ρ** με $KN > \rho + R$ τότε :



- ✓ **Η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z , w, που είναι και η ελάχιστη τιμή του** $|z-w|$**, είναι η** $\mathbf{AB = |KN-(\rho+R)|}$.
- ✓ **Η μέγιστη απόσταση των μιγαδικών z , w, που είναι και η μέγιστη τιμή του** $|z-w|$**, είναι η** $\mathbf{\Gamma\Delta = |KN+(\rho+R)|}$.

Εφαρμογή :

38. Αν $|z|=1$ και για τον w ισχύει: $\left|w-\left(5+2i\sqrt{6}\right)\right|=3$, να βρεις την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του z από τον **w**

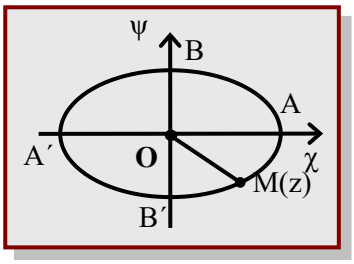
Αν $|z|=1$ τότε ο z κινείται σε κύκλο που έχει κέντρο **O(0 , 0)** και ακτίνα $\rho = 1$ από τη σχέση $\left|w-\left(5+2i\sqrt{6}\right)\right|=3$ είναι φανερό ότι και ο w κινείται σε κύκλο που έχει κέντρο $K\left(5,2\sqrt{6}\right)$ και ακτίνα $R = 3$ οπότε

$$KO=\sqrt{(0-5)^2+\left(0-2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{25+24}=7$$

- ✓ ελάχιστη απόσταση των z , w είναι η $AB=|KO-(\rho+R)|=$ $|7-(1+3)|=3$, που είναι και η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.
- ✓ μέγιστη απόσταση των z , w είναι η $AB=|KO+(\rho+R)|=$ $|7+(1+3)|=11$ που είναι και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Λιβαδειά

6. Αν ο **z «κινείται»** σε **έλειψη C** : $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1,\ \ \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ τότε :



- ✓ **Η ελάχιστη τιμή του** $|z|$ **είναι :**
  η απόσταση $(OB)=(OB')=\beta$.
- ✓ **Η μέγιστη τιμή του** $|z|$ **είναι :**
  η απόσταση $(OA)=(OA')=\alpha$.
- ✓ **Η ελάχιστη απόσταση δυο μιγαδικών** z_1 και z_2 **,που ανήκουν στην έλλειψη είναι η** $(BB')=2\beta$.
- ✓ **Η μέγιστη απόσταση δυο μιγαδικών** z_1 και z_2 **, που ανήκουν στην έλλειψη είναι η** $(AA')=2\alpha$.

Εφαρμογή :

39. Έστω ότι ο z ικανοποιεί την εξίσωση $|z-4|+|z+4|=10$.

Να βρεις τη **μέγιστη** και την **ελάχιστη** τιμή του $|z|$ καθώς και τους αντίστοιχους μιγαδικούς που έχουν αυτό το μέτρο.

Αρχικά βρίσκεις το γεωμετρικό τόπο πάνω στον οποίον **κινείται ο** z .

Ο Γ. Τ. στην περίπτωση αυτή είναι έλλειψη με **2α = 10** και εστιακή απόσταση **2γ = 8**, άρα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=5^2-4^2=9\Leftrightarrow\beta=3$.

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι $(OB)=(OB')=3$ και οι αντίστοιχοι μιγαδικοί είναι εκείνοι που οι εικόνες τους συμπίπτουν με τα σημεία $B(0,3)$ $B'(0,-3)$ δηλαδή οι μιγαδικοί που κινούνται στην έλλειψη αυτή και έχουν το μικρότερο μέτρο είναι οι $z_1=3i$ και $z_2=-3i$

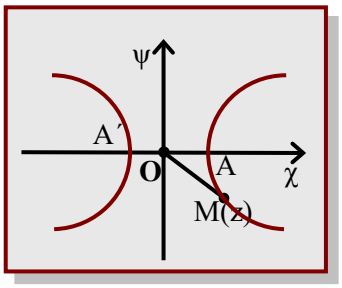
Επίσης η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι $(OA)=(OA')=5$ και οι αντίστοιχοι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

μιγαδικοί είναι εκείνοι που οι εικόνες τους συμπίπτουν με τα σημεία $A(5,0)$ $A'(-5,0)$ δηλαδή οι μιγαδικοί $z_3 = 5$ και $z_6 = -5$

7. Αν ο **z «κινείται»** σε **υπερβολή C** : $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ τότε :

- ✓ **Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι :**
  η απόσταση $(OA) = (OA') = \alpha$.
- ✓ **Η ελάχιστη απόσταση δυο μιγαδικών z_1 και z_2 είναι η απόσταση $(AA') = 2\alpha$.**



Εφαρμογή :

40. Έστω ότι ο z ικανοποιεί την εξίσωση $|z-5|+|z+5|=6$.
Να βρεις την **ελάχιστη** τιμή του $|z|$ καθώς και τους αντίστοιχους μιγαδικούς που έχουν αυτό το μέτρο.

Απάντηση :

Αρχικά βρίσκεις το γεωμετρικό τόπο πάνω στον οποίον **κινείται ο** z .
Ο Γ. Τ. στην περίπτωση αυτή είναι Υπερβολή με **2α = 6** και εστιακή απόσταση **2γ = 10**, άρα $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$.
Άρα η **ελάχιστη** τιμή του $|z|$ είναι $(OA) = 3$ και οι αντίστοιχοι μιγαδικοί είναι εκείνοι που οι εικόνες τους συμπίπτουν με τα σημεία $A(3,0)$, $A'(-3,0)$ δηλαδή οι μιγαδικοί που κινούνται στην Υπερβολή αυτή και έχουν το μικρότερο μέτρο είναι οι $z_1 = 3+0i = 3$ και $z_2 = -3+0i = -3$

Λιβαδειά

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλεις √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Η εξίσωση $\|z-z_1\|=\|z-z_2\|$, $z,z_1,z_2 \in C$, παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.	☐	☐
2.	Η εξίσωση $\|z-z_1\|=\|z-z_2\|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση.	☐	☐
3.	Η εξίσωση $\|z-z_0\|=\rho$, $\rho>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.	☐	☐
4.	Αν στο μιγαδικό επίπεδο η γραμμή C_1 έχει εξίσωση : $\chi^2+\psi^2=\rho^2$, $\rho>0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία : $z \in C_1, z=\chi+\psi i \Leftrightarrow \|z\|=\rho$	☐	☐
5.	Αν στο μιγαδικό επίπεδο η γραμμή C έχει εξίσωση : $\chi^2+\psi^2=1$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $z \in C, z=\chi+\psi i \Leftrightarrow \|z\|=1$	☐	☐
6.	Αν στο μιγαδικό επίπεδο η γραμμή C_1 έχει εξίσωση : $\chi^2+\psi^2=1$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $z \in C_1 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{1}{z}$	☐	☐
7.	Αν $\|z\|=\rho$, $\rho>0$ τότε ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο Ο και ακτίνα ρ δηλαδή στον κύκλο με εξίσωση C : $\chi^2+\psi^2=\rho^2$	☐	☐
8.	Αν $\|z\|=1$ τότε ο z ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο Ο και ακτίνα 1 δηλαδή στον κύκλο με εξίσωση C : $\chi^2+\psi^2=1$	☐	☐

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Αν $|z|>1$ τότε η εικόνα του z βρίσκεται στο εξωτερικό μέρος του κύκλου που έχει κέντρο Ο και ακτίνα 1 (δηλαδή στον κύκλο με εξίσωση C : $\chi^2+\psi^2=1$)

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Να βρεις τη σωστή απάντηση :

1. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

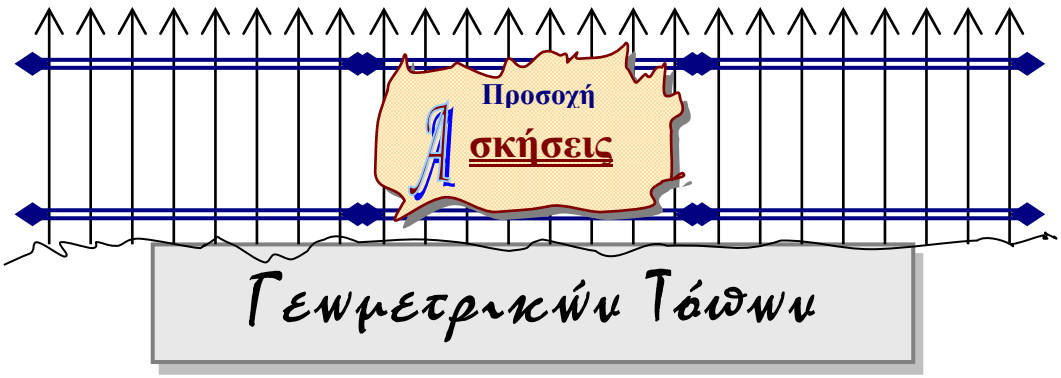
Συνθήκη		Ευθεία	
Α.	$\|z-i\|=\|z+i\|$	**α.**	$\chi = 1$
Β.	$\|z-1\|=\|z+1\|$	**β.**	$\psi'\psi$
Γ.	$\|z-1\|=\|z-i\|$	**γ.**	$\psi = \chi$
Δ.	$\|z+1\|=\|z-i\|$	**δ.**	$\psi = -\chi$
		ε.	$\chi'\chi$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z (αναφέρεται στην πρώτη στήλη), να τους αντιστοιχίσετε στην γραμμή της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους :

Συνθήκη	Γραμμή
Α $\lvert z-z_0\rvert=\alpha,\ \alpha\in R,\ \alpha>0$	**1.** Έλλειψη
Β. $\lvert z-z_1\rvert=\lvert z-z_2\rvert$	**2.** Κύκλος κέντρου $M(z_0)$ και ακτίνας **α**.
Γ. $\lvert z+2\rvert+\lvert z-2\rvert=16$	**3.** Μεσοκάθετη στο τμήμα $A(z_1)B(z_2)$
Δ. $\lvert\lvert z+5i\rvert-\lvert z-5i\rvert\rvert=2$	**4.** Η ευθεία $\psi=-\chi$
	5. Παραβολή
	6. Υπερβολή



1. Να βρεθεί η μεσοκάθετη (ε) στο τμήμα $M(z_1)N(z_2)$, όπου $z_1=2+3i$ και $z_2=3+2i$.

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $\lvert z-5-3i\rvert=\lvert z-1+2i\rvert$

β) $\lvert z+2i\rvert=\lvert z-3+3\cdot i\rvert$

γ) $\lvert z-2i\rvert=\lvert z-1-i\rvert$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+5+4i| \geq |z-1+2i|$

β) $|z-2+2i| < |z+1+i|$

γ) $|z-2i| \leq |z-3|$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|z+2-3i| = 4$

β) $|z-3i| = 5$

γ) $|z+2| = 2$

δ) $2|z|-1 = |z|+3$

5. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού **z** αν για αυτόν ισχύει :

α) $|z+2-3i| = 4$

β) $|z-3i| = 5$

γ) $|z+2| = 2$

6. Αν $|z| = 6$, να βρεις το γεωμετρικό τόπο του **z.**

7. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης :

$|z-11+7i| = -4$.

8. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+3-3i| \leq 4$ **β)** $|z+2i| > 5$

γ) $|z-1| \geq 2$ **δ)** $3|z|+1 < -|z|+3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+5+3i|\le -11$ **β)** $|z-1+i|>0$

γ) $|z-1|\ge -2$ **δ)** $3\left(|z-1|+1\right)\le -|z-1|+3$.

10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $1<|z-1-i|<2$ **β)** $|z-2+i|\ge 2$ ή $|z-2+i|<1$.

11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $-3\le |z-1-i|\le 1$ **β)** $3\le |z+i|\le 4$.

12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z-1+2i|^2+3|z-1+2i|-4=0$

β) $|z-1+2i|^2-5|z-1+2i|+6=0$.

13. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z+3+2i|^2=0$

β) $|z-1-i|^3=1$

γ) $|z-1-i|^3-|z-1-i|=0$.

14. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $3\left(|z+2i|-2\right)<|z+2i|+1$

β) $2\left(3-|z-2+3i|\right)+3|z-2+3i|\ \ge\ 3\left(5-|z-1+5i|\right)$.

15. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α) $|z-1+2i|^2+3|z-1+2i|-4\le 0$

β) $|z-1+2i|^2-5|z-1+2i|+6>0$

16. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z-1+2i|^2+2|z-1+2i|-3\ge 0$

β) $|z-1+2i|^2-7|z-1+2i|+10<0$

17. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z+3-i|=2|z+i|$

β) $|z-2+3i|=3|z-i|$ (Απολλώνιος κύκλος).

18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z οι οποίοι είναι λύσεις της : $|z-8|=2|z-2|$ (Απολλώνιος κύκλος).

19. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+3-i|\le 2|z+i|$

β) $|z-2+3i|>3|z-i|$

γ) $\left|\dfrac{z-2+3i}{z-i}\right|>3$

20. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z+3|+|z-3|=24$

β) $|z-1|+|z+1|=14$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z+3i|+|z-3i|=16$

β) $|z+i|+|z-i|=18$

22. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+3|+|z-3|\le 16$

β) $|z+1|+|z-1|>18$

23. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $|z+3i|+|z-3i|<16$

β) $|z+i|+|z-i|\ge 18$

24. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $||z+3|-|z-3||=4$

β) $||z-1|-|z+1||=1$

25. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $||z+3i|-|z-3i||=3$

β) $||z+11i|-|z-11i||=18$

26. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $||z+3|-|z-3||\le 4$

β) $||z-1|-|z+1||>1$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της ανίσωσης :

α) $\big||z+3i|-|z-3i|\big|\geq 3$

β) $\big||z+1\,1i|-|z-1\,1i|\big|<18$.

28. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς z έτσι ώστε $|z-1|>\sqrt{17}$.

29. Να βρεις τους μιγαδικούς αριθμούς z έτσι ώστε $|z-1|>|z+1|$.

30. Αν $|z-2-i|\leq 2$ να δειχτεί ότι $8\leq |z-14-7i|\leq 18$.

31. Αν $|z-1-2i|\leq 5$ να δειχτεί ότι $|z|\leq 2$.

32. Να δείξεις ότι αν για τον $z\in C$ είναι $|z-10|\leq 3|z-2|$ τότε θα είναι και $|z-1|\leq 3$. Που βρίσκονται οι εικόνες των πιο πάνω μιγαδικών ;

33. Να δείξεις ότι αν για τον $z\in C$ είναι $|z-9|>3|z-1|$ τότε $|z|<3$ Που βρίσκονται οι εικόνες των πιο πάνω μιγαδικών ;

34. Να δείξεις ότι αν για τον $z\in C$ είναι $|z-16|<4|z+1|$ τότε θα είναι και $|z|<4$. Που βρίσκονται οι εικόνες των πιο πάνω μιγαδικών ;

35. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\chi+\psi i$, $\chi, \psi\in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή α + βi τον μιγαδικό $w=\dfrac{z+8i}{z+6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα χ και ψ, αν Im (w) = 0.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα χ και ψ, αν Re (w) = 0.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

36. Να γράψεις όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z αν ξέρεις ότι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους του z είναι 3 και η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους του z είναι 4.

Πού βρίσκονται οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των παραπάνω μιγα δικών αριθμών ;

37. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των λύσεων της

$$(-2+i)^{20}(z-5)^{30}-\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^{20}(z-3-2i)^{30}=0$$

βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία την οποία και να βρείτε.

Να δικαιολογήσετε γιατί η ευθεία αυτή είναι μεσοκάθετος στο τμήμα με άκρα $A(5,0)$ και $B(3,2)$.

38. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης:

α) $z+\overline{z}=2$

β) $|z-i|\le|z-3|$

γ) $z+\overline{z}=2$ και ταυτόχρονα $|z-i|\le|z-3|$.

39. Δίνεται ο μιγαδικός z με $\begin{cases}|z-1|=10\\ \left|z+\frac{1}{3}\right|=12\end{cases}$.

Αν για τον μιγαδικό w ισχύει : $3w\cdot z+6=6\cdot\overline{z}-w$

α) Να βρεθεί το μέτρο του $\overline{w}$.

β) Να βρεθεί το $|\omega|$ αν για τον μιγαδικό ω ισχύει $(2\omega-6)\left(\overline{\omega}-3\right)=6w\,\overline{w}$.

Ακολουθούν προβλήματα με Μέγιστα-Ελάχιστα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

40. Να βρεθούν

α) Η μεσοκάθετη **(ε)** στο τμήμα $M(z_1)N(z_2)$,

όπου $z_1 = 2+3i$ και $z_2 = 3+2i$

β) Η ελάχιστη απόσταση του $w = 3 - 2\cdot i$ από τη μεσοκάθετη **(ε)**.

41. **i)** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης :

α) $|z-5-3i| = |z-1+2i|$

β) $|z+2i| = |z-3+3\cdot i|$

γ) $|z-2i| = |z-1-i|$.

ii) Να βρεθεί, σε κάθε περίπτωση, η ελάχιστη απόσταση του **z** από το $O(0, 0)$ (ελάχιστη τιμή για το $|z|$).

iii) Να βρεθεί, σε κάθε περίπτωση, η ελάχιστη απόσταση του **z** από τον $w = -3 + 2\cdot i$

42. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $|z+2-3i| = 4$

β) $|z-3i| = 5$

γ) $|z+2| = 2$

δ) $2|z|-1 = |z|+3$

και να βρεθεί, σε κάθε περίπτωση, η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση του **z** από το $O(0, 0)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

43. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει :

α) $|z+5-7i|=4$

β) $|z-3|=15$

γ) $|z+2i|=2$

Να βρείτε τον γεωμετρικό του τόπο καθώς και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

44. **α)** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών **z** όταν : $|z+2+2i|=3$.

β) Να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της απόστασης του **z** από τον $w=2+i$.

45. Αν $|z|=6$, να βρεις το γεωμετρικό τόπο του **z** καθώς και την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση του **z** από τον μιγαδικό $w=6-8i$

46. Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης : $|z-11+7i|=4$ καθώς και η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$, όπου $w=6+5\cdot i$.

47. **α.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών **z** οι οποίοι είναι λύσεις της : $|z-8|=2|z-2|$ (Απολλώνιος κύκλος)

β. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

48. Δίνεται $w=\dfrac{z-i}{z+i}, z\neq -i$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών **z** όταν :

α) $w\in R$.

β) $w\in I$.

Στην **β)** περίπτωση να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

49. Δίνεται $w=\dfrac{z-2\cdot i}{z+i}$, $z\neq -i$ και $|w|=2$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z και η μέγιστη, η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

50. Αν $z=\chi+\psi i$ και $\left(z+\overline{z}\right)^2+8i\left(z-\overline{z}\right)=0$ να βρεθεί :

α) ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών **z** .

β) Η ελάχιστη απόσταση του **z** από το $O(0,0)$.

γ) Η μέγιστη απόσταση του **z** από το $w=1-3\cdot i$.

51. Αν $z_0\in C$, $\lambda\in R$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών **z** όταν $z\cdot\overline{z_0}\left(\overline{z}\cdot z_0\right)=2\lambda$.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{2-i\cdot z}{1-z}$, $z\neq 1$.

α) Να βρεθεί το μέτρο του $f(2)$.

β) Αν $w=f(z)$ να δείξετε ότι αν $|z|=1$ τότε ο w βρίσκετε σε ευθεία.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση των z και w .

53. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}|z+5+4i|=3 & (1)\\ |z-1+2i|=2 & (2)\end{cases}$.

i) Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος .

ii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή για το $|z|$ όταν το z είναι λύση της (1)

iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση δυο μιγαδικών z_1 και z_2 όταν το z_1 είναι λύση της (1) και ο z_2 είναι λύση της (2)

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

54. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} |z-2+2i|=3 \quad (1) \\ |z+1+i|=2 \quad (2) \end{cases}$.

i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που είναι λύσεις του συστήματος.

ii) Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση του μιγαδικού $w = 2 + 3i$ από τον z όταν το z είναι λύση της (1)

ii) Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του μιγαδικού z , που είναι λύση της (2), από την ευθεία : $\psi = 2\chi + 3$.

55. Δίνεται οι εξισώσεις $\begin{cases} |z+5+4i|=3 \\ |w-2|=|w-5| \end{cases}$.

i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z .

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών w .

iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των μιγαδικών z και w που ανήκουν στους δυο αντίστοιχους γεωμετρικούς τόπους.



σ' αυτούς που σου λένε ότι μεγάλωσες και πρέπει να σοβαρευτείς δώσε την απάντησή σου  **(με σοβαρότητα όμως)**

Από το δεκάλογο του «ξύπνιου» μαθητή

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μην χαίρεσαι . . . γιατί

Έτσι



ή . . . αλλιώς



πρέπει να διαβάσεις

Τα δέματα των 30 τελευταίων χρόνων.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όρια – Συνέχεια

Θεωρία – υποδείξεις – παρατηρήσεις.



Παραδείγματα λυμένα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Μεθοδολογία – Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα Συναρτήσεις

Θεματική ενότητα	σελίδα
Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις από Α! και Β! Λυκείου	131
Συναρτήσεις (εισαγωγικές έννοιες)	138
Γραφική Παράσταση συνάρτησης	143
Βασικές πραγματικές συναρτήσεις	149
Ισότητα – πράξεις με συναρτήσεις	156
Σύνθεση συναρτήσεων – παραδείγματα	159
Ασκήσεις	168
Γενικά θέματα (λυμένα)	174
Ασκήσεις στο Πεδίο Ορισμού	186
Μονοτονία, Συνάρτηση 1 – 1, Αντίστροφη συνάρτηση, Ασκήσεις	195
Όριο συνάρτησης - Ασκήσεις	214
Ιδιότητες Ορίων, Κριτήριο παρεμβολής, Όριο σύνθετης συνάρτησης	225
Παραδείγματα – Παρατηρήσεις – Ασκήσεις	234
Άπειρο όριο μιας συνάρτησης φ στο χ_0	286
Παρατηρήσεις – Παραδείγματα – Ασκήσεις	288
Όριο μιας συνάρτησης φ στο Άπειρο	309
Παρατηρήσεις – Παραδείγματα – Ασκήσεις	312
Συνέχεια μιας συνάρτησης φ στο χ_0	365
Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις – Συνέχεια σε διάστημα	368
Θεωρήματα: Bolzano, Ενδιάμεσων τιμών	370
Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής – Πεδίο τιμών	376

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όποιος σήμερα σου χαρίζει κάτι χωρίς προφανή λόγο, κάτι θα θέλει από σένα αύριο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Εισαγωγικές – συμπληρώσεις.

Σύνολα

- **Φυσικοί αριθμοί :** $\mathrm{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$.
- **Ακέραιοι αριθμοί :** $\mathrm{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$
- **Ρητοί αριθμοί σύνολο** $\mathrm{Q}=\left\{\frac{\alpha}{\beta}/\,\alpha,\beta \text{ ακέραιοι}, \beta\neq 0\right\}$.

Ρητός αριθμός είναι κάθε αριθμός ο οποίος **είναι** ή **μπορεί να γραφεί ως κλάσμα** (ανάγωγο) με όρους ακέραιους αριθμούς.

- **Πραγματικοί αριθμοί (σύνολο R).** Περιέχει **Ρητούς** και **Άρρητους**.

- Υπάρχουν και τα σύνολα **N*, Z* , Q* , R*** που σημαίνουν ότι τα αντίστοιχα σύνολα δεν περιέχουν το μηδέν.
- Υπάρχουν και τα σύνολα $\mathbf{Z_+, Q_+, R_+}$ που σημαίνουν ότι τα αντίστοιχα σύνολα περιέχουν μόνον τους θετικούς αριθμούς και το μηδέν.
- Υπάρχουν και τα σύνολα $\mathbf{Z_-, Q_-, R_-}$ που σημαίνουν ότι τα αντίστοιχα σύνολα περιέχουν μόνον τους αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν.

Πράξεις – ιδιότητες

Για την **πρόσθεση** και τον **πολλαπλασιασμό** ισχύουν οι ιδιότητες.

Πρόσθεση		**Πολλαπλασιασμός**	
Ονομασία	**Συμβολισμός**	**Ονομασία**	**Συμβολισμός**
1. Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	**1. Αντιμεταθετική**	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
2. Προσετ/ική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	**2. Προσετ/ική**	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Ουδέτερο στοιχείο $\alpha + 0 = \alpha$	**3. Ουδέτερο στοιχείο** $\alpha \cdot 1 = \alpha$
4. Αντίθετο στοιχείο : **Για κάθε** $\alpha \in R$ **υπάρχει ο** **αντίθετός του** $-\alpha$ **ώστε** $\alpha + (-\alpha) = 0$	**4. Αντίστροφο στοιχείο :** **Για κάθε αριθμό** $\alpha \neq 0$ **υπάρχει ο** **αντ/φος του** $\frac{1}{\alpha}$ **ώστε** $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.
	5. Απορροφητικό στοιχείο $\alpha \cdot 0 = 0$
	6. Επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$

Παρατήρηση στο **R δύο πράξεις** (μόνο) **δεν** είναι δυνατόν να **κάνεις :**
Να διαιρέσεις με το 0 να βρεις την ρίζα αρνητικού αριθμού.

Αναλογίες – Ιδιότητες αναλογιών :

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ **ii)** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ **iii)** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

iv) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ **v)** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$ και $\frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$

vii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \cdots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon + \cdots + \kappa}{\beta + \delta + \zeta + \cdots + \lambda}$

Ισχύουν επίσης οι εξής σημαντικές ιδιότητες για την ισότητα :

1. $\left.\begin{matrix}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$ **2.** $\left.\begin{matrix}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$ **3.** $\left.\begin{matrix}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$

4. $\left.\begin{matrix}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : \delta,\ \delta, \gamma \neq 0$ **5.** $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ **6.** $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

7. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$
ιδιότητα διαγραφής της πρόσθεσης

8. $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta,\ \gamma \neq 0$
ιδιότητα διαγραφής του πολλαπλασιασμού

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δυνάμεις

Ορισμός :

Δύναμη με βάση ρητό αριθμό α και εκθέτη φυσικό ν > 1 λέγεται το γινόμενο που αποτελείται από ν παράγοντες ίσους με τον α.

Συμβολικά : $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$.

Ιδιότητες των δυνάμεων

• $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$	• $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$ $\alpha \neq 0, \nu - \mu > 1$
• $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$	• $\alpha^{\nu} : \beta^{\nu} = (\alpha : \beta)^{\nu}$, $\beta \neq 0$
• $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$	• Αν $\alpha \neq 1$ τότε $\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu} \Rightarrow \mu = \nu$
• Για κάθε α, β ∈ R ισχύει $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$ • **Προσοχή** $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\beta \text{ αν } \nu \text{ άρτιος} \\ \alpha = \beta \text{ αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$	**Ορίζουμε** $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ με $\alpha \geq 0$ **Ορίζουμε** $\begin{cases} \alpha^0 = 1, \alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}} \\ \text{μόνο αν } \alpha \neq 0 \end{cases}$

Προσοχή στο 0^0 και στο $0^{-\nu}$ που δεν ορίζονται και στα α^1, α^0, $\alpha^{-\nu}$ με $\alpha \neq 0$ που μοιάζουν με δυνάμεις αλλά δεν είναι.

Παρατήρηση Είναι $1^{\nu} = 1$, $0^{\nu} = 0$ για κάθε **ν**. Οι ιδιότητες των δυνάμεων καθώς και οι πιο πάνω ορισμοί ισχύουν και με έκθετες ακεραίους, με την προϋπόθεση όμως ότι έχουν νόημα ως παραστάσεις .

Θετικός αριθμός όταν υψωθεί σε οποιονδήποτε εκθέτη δίνει **θετικό αποτέλεσμα**. Ενώ όταν η βάση της δύναμης είναι αρνητική τότε αν υψώνεται **σε άρτιο** εκθέτη **(ν = 2κ)** δίνει θετικό αποτέλεσμα αλλά **σε περιττό** εκθέτη **(ν = 2 κ + 1)** δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ταυτότητες

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	6. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	7. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
3. $(\alpha\pm\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\pm2\alpha\beta+2\alpha\gamma\pm2\beta\gamma$	8. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
4. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	9. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
5. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	

Διάταξη στο R

Ορισμός : Λέμε ότι :

1. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$
2. $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$
3. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0$

Ισχύουν οι εξής (σημαντικές) ιδιότητες :

• Αν $\alpha\in\mathbf{R}^-$ και $\beta\in\mathbf{R}^+$ τότε $\alpha<0<\beta$	• $\alpha^2\geq0$ για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$
• **$\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ άρα $\alpha>\gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)**	• **$\alpha>\beta$ άρα $\alpha\pm\gamma>\beta\pm\gamma$**
• **$\alpha>\beta$ τότε** $\begin{cases}\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma & \text{αν } \gamma>0\\ \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma & \text{αν } \gamma<0\end{cases}$	• **Δεν αφαιρούμε ποτέ ανισότητες**
• **Προσθέτουμε μόνο ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη :** $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha+\gamma>\beta+\delta$	
• $\begin{cases}\alpha\geq\beta\\ \gamma\geq\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha+\gamma\geq\beta+\delta$. Ενώ $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma\geq\delta\end{cases}$ ή $\begin{cases}\alpha\geq\beta\\ \gamma>\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha+\gamma>\beta+\delta$	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- **Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη μόνο ομοιόστροφες ανισότητες ομοσήμων αριθμών ως εξής :**

1. Αν α, β, γ, δ > 0	**2. Αν α, β, γ, δ < 0**
τότε $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases} \Rightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$	**τότε** $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases} \Rightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$

- **Αν** $\alpha,\beta\geq 0$ **,** $\nu>1$**, τότε** $\alpha^\nu \geq \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha\geq\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}\geq\sqrt[\nu]{\beta}$ **.**

• **α, β ≥ 0 τότε α > β** $\Rightarrow \alpha^2>\beta^2$	• **α, β < 0 τότε α > β** $\Rightarrow \alpha^2<\beta^2$
• **α, β ομόσημοι τότε** $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$.	• **α, β ετερόσημοι τότε** $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$.

Απόλυτη τιμή – ιδιότητες

Ορισμός :

Το σύμβολο $|\alpha|$ ονομάζεται απόλυτη τιμή του **α** και είναι

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{αν} \quad \alpha\geq 0\\ -\alpha & \text{αν} \quad \alpha<0\end{cases}$$

Ιδιότητες

Για κάθε α, β ∈ R ισχύει :

• $\|\alpha\|\geq 0$	• $\|\alpha\|\geq\alpha$ και $\|\alpha\|\geq-\alpha$
• $\|\alpha\|^2=\alpha^2$ και γενικότερα $\|\alpha\|^{2\kappa}=\alpha^{2\kappa}$	• $-\|\alpha\|\leq\alpha\leq\|\alpha\|$
• Αν **θ > 0 τότε ισχύει η ισοδυναμία** $\|\chi\|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq\chi\leq\theta$	• Αν **θ > 0 τότε ισχύει η ισοδυναμία** $\|\chi\|\geq\theta \Leftrightarrow \chi\leq-\theta$ ή $\chi\geq\theta$
• $\|\alpha\cdot\beta\|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ Γενικότερα $\|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdots\alpha_\nu\|=\|\alpha_1\|\cdot\|\alpha_2\|\cdot\|\alpha_3\|\cdots\|\alpha_\nu\|$	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ Γενικότερα $\left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\alpha_3}{\beta_3}\cdots\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| = \left|\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right| \cdot \left|\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right| \cdot \left|\frac{\alpha_3}{\beta_3}\right| \cdots \left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right|$

  $\beta_1, \ldots, \beta_\nu \neq 0$, για κάθε $\nu \in N$

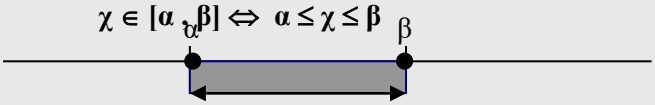
- $\big||\alpha|-|\beta|\big| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

Διαστήματα

1. Ονομάζουμε **κλειστό διάστημα** από το α ως το β (συμβολικά **[α , β]**) το σύνολο των πραγματικών αριθμών χ για του οποίους ισχύει **$\alpha \leq \chi \leq \beta$**.

Συμβολικά είναι : **$[\alpha , \beta] = \{ \chi \in R,\ \alpha \leq \chi \leq \beta \}$** και ισχύει η ισοδυναμία

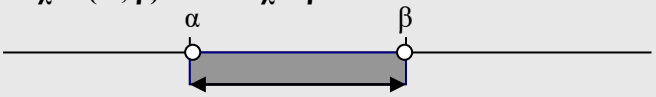
$$\chi \in [\alpha , \beta] \Leftrightarrow \alpha \leq \chi \leq \beta$$



2. Ονομάζουμε **ανοικτό διάστημα** από το α ως το β (συμβολικά **(α , β)**) το σύνολο των πραγματικών αριθμών χ για του οποίους ισχύει **$\alpha < \chi < \beta$**.

Συμβολικά είναι : **$(\alpha , \beta) = \{ \chi \in R ,\ \alpha < \chi < \beta \}$** και ισχύει η ισοδυναμία

$$\chi \in (\alpha , \beta) \Leftrightarrow \alpha < \chi < \beta$$



Ορίζονται διαστήματα ημιανοικτά ή ημίκλειστα δηλαδή :

Το σύμβολο **[α , β)** διαβάζεται διάστημα κλειστό α ανοικτό β και είναι

$$[\alpha , \beta) = \{ \chi \in R ,\ \alpha \leq \chi < \beta \}$$

Το σύμβολο **(α , β]** διαβάζεται διάστημα ανοικτό α κλειστό β και είναι

$$(\alpha , \beta] = \{ \chi \in R ,\ \alpha < \chi \leq \beta \}$$

Με αυτή την έννοια ορίζονται επίσης

α) $[\alpha , +\infty) = \{ \chi \in R ,\ \chi \geq \alpha \}$.
β) $(\alpha , +\infty) = \{ \chi \in R ,\ \chi > \alpha \}$.
γ) $(-\infty , \alpha] = \{ \chi \in R ,\ \chi \leq \alpha \}$.
δ) $(-\infty , \alpha) = \{ \chi \in R ,\ \chi < \alpha \}$.
ε) $(-\infty , +\infty) = R$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ρίζες

Ορισμός :

Αν $\alpha \geq 0$ τότε **ν – οστή ρίζα του α** (συμβολικά $\sqrt[\nu]{\alpha}$) **ονομάζουμε τον αριθμό** $\beta \geq 0$ όταν $\beta^{\nu} = \alpha$

Ιδιότητες

Η ρίζα $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα μόνο **αν** $\alpha \geq 0$	$\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$
$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ αν $\alpha \geq 0$ αλλά $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \lvert\alpha\rvert$	$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ όταν $\alpha , \beta \geq 0$
$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$ όταν $\alpha \geq 0 , \beta > 0$	$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$ αν $\alpha \geq 0$
$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ όταν $\alpha , \beta \geq 0$	$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$ αν $\alpha \geq 0$
$\sqrt[\kappa \cdot \nu]{\alpha^{\kappa \cdot \mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha \geq \beta > 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \geq \sqrt[\nu]{\beta}$
$\sqrt{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha}$ και $\alpha = \sqrt[1]{\alpha}$	

Συμυζείς παραστάσεις

Η $\sqrt{\alpha}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha}$	Η $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}$
Η $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ έχει συζυγή την $\alpha \mp \sqrt{\beta}$	Η $\sqrt{\alpha} \pm \beta$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha} \mp \beta$
Η $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}$	
Η $\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}$	
Η $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συναρτήσεις

Ορισμός :

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία <u>κάθε</u> στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται <u>σε ένα ακριβώς</u> στοιχείο του συνόλου Β.

Παρατήρηση : Αν η f με πεδίο ορισμού Α είναι συνάρτηση, και $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 = \chi_2$ τότε θα είναι και $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

Πως βρίσκεις το πεδίο ορισμού ;

Πεδίου ορισμού: Το πεδίο ορισμού είναι τόσο σημαντικό για τη λειτουργία μιας συνάρτησης όσο και ο τύπος της.

Πολλές φορές σου δίνει τον τύπο μιας πραγματικής συνάρτησης φ χωρίς να σου δίνει το πεδίο ορισμού της. Αυτό δεν είναι και πολύ «σωστό» αλλά συμβαίνει. Όταν λοιπόν δεν σου δίνει το πεδίο ορισμού μιας **πραγματικής** συνάρτησης, θα το βρίσκεις εσύ, βρίσκοντας το σύνολο που έχει για στοιχεία του όλα τα $\chi \in R$, για τα οποία η **φ(χ) έχει νόημα πραγματικού αριθμού**.

Για τις ανάγκες τις εύρεσης του πεδίου ορισμού οι συναρτήσεις χωρίζονται στις πιο κάτω κατηγορίες:

1η	**Πολυωνυμική συνάρτηση :** $P(\chi) = \alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi + \alpha_0$.
2 η	**Ρητή συνάρτηση :** $f(\chi) = \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$.
3η	**Άρρητή συνάρτηση :** $f(\chi) = \sqrt[\nu]{P(\chi)}$.
4η	**Συνάρτηση που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς.**
5 η	**Συνάρτηση της μορφής** $\psi = \log[P(\chi)]$ **ή της μορφής** $\psi = \ell n[P(\chi)]$**.**
6 η	**Συνάρτηση της μορφής** $\psi = [P(\chi)]^{Q(\chi)}$ **.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1ον **Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, τότε το πεδίο ορισμού της είναι όλο το R .**

2ον **Αν η συνάρτηση είναι ρητή, δηλαδή** $f(\chi)=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ **τότε το πεδίο ορισμού της είναι το R αφού εξαιρέσεις τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.**

Έστω $f(\chi)=\frac{11\chi^2+3\chi-2}{\chi^2-3\chi+2}$. Είναι $\chi^2-3\chi+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi=2\end{cases}$.

Άρα Π Ο είναι το **A = R – {1, 2} = (– ∞ , 1)U(1,2)U(2 , + ∞)**.

3ον Αν η συνάρτηση είναι άρρητη, δηλαδή $f(\chi)=\sqrt[\nu]{P(\chi)}$ τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι το διάστημα ή τα διαστήματα για τα οποία ισχύει : $P(\chi)\geq 0$.

Έστω $f(\chi)=\sqrt{\chi^2-3\chi+2}$. Είναι $\chi^2-3\chi+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi=2\end{cases}$. Άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2-3\chi+2$ είναι:

	$-\infty$		1		2		$+\infty$
		+	0	–	0	+	

Άρα Π Ο είναι το $A=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

4ον Αν η συνάρτηση είναι τριγωνομετρικής μορφής θα θυμάσαι τα εξής :

1. Η $f(\chi)=\eta\mu\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **A = R.**
2. Η $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$ έχει πεδίο ορισμού : **A = R.**
3. Η $f(\chi)=\varepsilon\varphi\chi$ έχει πεδίο ορισμού : $A=R-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$, $\kappa\in R$.
4. Η $f(\chi)=\sigma\varphi\chi$ έχει πεδίο ορισμού : $A=R-\{\kappa\pi\}$, $\kappa\in R$.

Παραδείγματα :

1. Έστω $f(\chi)=3\eta\mu\chi-2\varepsilon\varphi\left(3\chi+\frac{\pi}{3}\right)$. Επειδή το ημχ έχει νόημα για κάθε $\chi\in R$, για να έχει νόημα η f πρέπει να έχει νόημα η εφαπτομένη, άρα πρέπει $3\chi+\frac{\pi}{3}\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\chi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3\chi\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi \neq \kappa\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$. Άρα πεδίο ορισμού το $A = R - \left\{\kappa\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right\}$.

2. Έστω $f(\chi) = 2\sigma\varphi(\chi - 3\pi)$.

Για να έχει νόημα η συνεφαπτομένη πρέπει : $\chi - 3\pi \neq \kappa\pi \Leftrightarrow \chi \neq \kappa\pi + 3\pi$.

Άρα πεδίο ορισμού το $A = R - \{\kappa\pi + 3\pi\}$.

5ον Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $\psi = \log[P(\chi)]$ ή της μορφής $\psi = \ln[P(\chi)]$, τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι **το διάστημα** ή τα **διαστήματα** για τα οποία ισχύει **:** $P(\chi) > 0$.

Παραδείγματα :

1. Έστω $f(\chi) = 1\log(1 - 3\chi)$. Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει :

$1 - 3\chi > 0 \Leftrightarrow 3\chi < 1 \Leftrightarrow \chi < \frac{1}{3}$ άρα πεδίο ορισμού το $A = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

2. Έστω $f(\chi) = 1n(\chi^2 + 3\chi + 2)$.

Για να έχει νόημα ο λογάριθμος πρέπει : $\chi^2 + 3\chi + 2 > 0$.

Είναι $\chi^2 + 3\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi = -1\\ \chi = -2\end{cases}$.

Πίνακας προσήμου για το $\chi^2 + 3\chi + 2$

$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα Π Ο είναι το $A = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

3. Έστω $f(\chi) = \ln(\ln\chi)$. Για να έχει νόημα f(χ) πρέπει : $\chi > 0$ για να έχει νόημα ο lnχ και ταυτόχρονα $\ln\chi > 0 \Leftrightarrow \ln\chi > \ln 1 \Leftrightarrow \chi > 1$ γιατί ln γνησίως αύξουσα, για να έχει νόημα ο $\ln(\ln\chi)$.

Άρα πεδίο ορισμού το **A = (1, + ∞)**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6ον Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $\psi=\left[P(\chi)\right]^{Q(\chi)}$, π.χ. της μορφής $\psi=\left[3\chi-1\right]^{2+\chi}$, $\psi=\left[-7\chi+2\right]^{\frac{3}{5}}$, $\psi=\chi^{\alpha}$ με $\alpha\in R$, $\psi=\chi^{\chi}$ κ.λ.π, τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι **το διάστημα** ή τα διαστήματα για τα οποία ισχύει : $P(\chi)>0$.

Παραδείγματα :

1. Έστω $f(\chi)=(2\chi+5)^{3\chi}$.

Για να έχει νόημα η f(χ) πρέπει : $2\chi+5>0 \Leftrightarrow 2\chi>-5 \Leftrightarrow \chi>-\frac{5}{2}$ άρα

πεδίο ορισμού το $A=\left(-\frac{5}{2},+\infty\right)$

2. Έστω $f(\chi)=\chi^{3\chi}$.

Για να έχει νόημα η $f(\chi)$ πρέπει $\chi>0$ άρα πεδίο ορισμού το

$A=(0,+\infty)$.

Αν ο **τύπος** μιας συνάρτησης **περιέχει** δυο ή **περισσότερες** από τις προηγούμενες 6 **μορφές**, βρίσκεις ξεχωριστά, το αντίστοιχο διάστημα, για την κάθε μορφή και έπειτα βρίσκεις την τομή όλων των διαστημάτων όπως στο παράδειγμα.

Να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(\chi)=\frac{1}{\ln(\chi+1)}+\sqrt{e^{\chi}-2}$

Η παράσταση $\varphi(\chi)$ έχει νόημα όταν :

1ον έχει νόημα ο $\ln(\chi+1)$, δηλαδή $\chi+1>0 \Leftrightarrow \chi>-1 \Leftrightarrow$ **$\chi\in(-1,+\infty)$**

2ον $\ln(\chi+1)\neq 0$ (λόγω παρονομαστή) άρα $\ln(\chi+1)\neq \ln 1 \Leftrightarrow \chi+1\neq 1 \Leftrightarrow$ **$\chi\neq 0$**.

3ον $e^{\chi}-2\geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi}\geq 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^{\chi}\right)\geq \ln 2$ (επειδή lnχ γνησίως αύξουσα συνάρτηση), άρα **$\chi\geq \ln 2$**

Άρα Π.Ο. το **$A=[\ln 2,+\infty)$** (αφού $\ln 2>0>-1$).

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή

α) Όταν έχεις να λύσεις ανισότητες της μορφής $e^{\varphi(\chi)} > \alpha$ τότε :

1. με $\alpha < 0$ είναι **ταυτότητα** (ενώ η $e^{\varphi(\chi)} < \alpha$ με $\alpha < 0$ είναι αδύνατη).
2. με $\alpha = 0 \Leftrightarrow e^{\varphi(\chi)} > 0$ είναι ταυτότητα (ισχύει για κάθε $\chi \in R$)
3. με $\alpha > 0 \Leftrightarrow e^{\varphi(\chi)} > \alpha \Leftrightarrow \ln\left(e^{\varphi(\chi)}\right) > \ln\alpha \Leftrightarrow \varphi(\chi) > \ln\alpha$ . . .

β) Όταν έχεις να λύσεις ανισότητες της μορφής $\ln(\varphi(\chi)) > \alpha$ τότε :

$$\ln(\varphi(\chi)) > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\varphi(\chi)) > \alpha \cdot \ln e \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\varphi(\chi)) > \ln(e^{\alpha}) \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\chi) > e^{\alpha} \\ \varphi(\chi) > 0 \end{cases} .$$

✓ Το πεδίο ορισμού θα το βρίσκεις **οπωσδήποτε** .

Παράδειγμα :

Να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \ln(\chi + 1)}} + (\chi - 1)^{2\chi}$

Απάντηση :

Η παράσταση $\varphi(\chi)$ έχει νόημα όταν :

1ον έχει νόημα η $\ln(\chi + 1)$, δηλαδή $\chi + 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > -1$.

2ον $2 - \ln(\chi + 1) > 0$ (λόγω της ρίζας στον παρονομαστή) .

Όμως $2 - \ln(\chi + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln(\chi + 1) < 2 \Leftrightarrow \ln(\chi + 1) < 2 \cdot \ln e \Leftrightarrow$

$\ln(\chi + 1) < \ln e^2$, e^{χ} γνησίως αύξουσα άρα $\chi + 1 < e^2 \Leftrightarrow \chi < e^2 - 1$.

3ον $\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ για να έχει νόημα η εκθετική $(\chi - 1)^{2\chi}$.

Άρα Π Ο το $A = (1, e^2 - 1)$

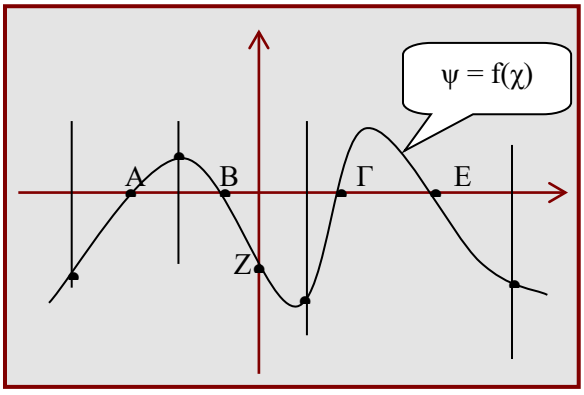
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γραφική Παράσταση συνάρτησης.

Γραφική Παράσταση συνάρτησης φ με τύπο ψ = φ(χ) και πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται το σύνολο των σημείων $M(\chi, \varphi(\chi))$, δηλαδή το σύνολο των σημείων **Μ(χ, ψ), χ ∈ Α**, του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι **λύσεις της ψ = φ(χ)** συμβολικά C_φ **.**

Η εξίσωση **ψ = φ(χ),** επειδή **επαληθεύεται μόνο** από τα σημεία της C_φ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της **φ**.
Η Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης είναι η εικόνα της και το κάθε τι που έχει σχέση με την συνάρτηση έχει **αντανάκλαση** στην Γ Π, έτσι μπορούμε από την Γ Π να καταλαβαίνουμε πολλά πράγματα για την συνάρτηση.

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι και η εξής : **Αν η f είναι συνάρτηση, τότε η παράλληλη προς τον ψ΄ ψ από κάθε σημείο του Π Ο θα τέμνει οπωσδήποτε και σε ένα ακριβώς σημείο την Γ Π** . Αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε χ του Π Ο πρέπει να αντιστοιχεί ένα ακριβώς ψ του Π Τ δηλαδή να δημιουργείται ένα ακριβώς ζευγάρι $(\chi, f(\chi))$ όπως στο σχήμα που ακολουθεί :



SOS Τα σημεία Α, Β, Γ, Ε έχουν **τεταγμένες** 0 δηλ είναι ψ = f(χ) = 0 και το **Z έχει τετμημένη 0** δηλαδή είναι ψ = f(0).

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τι κάνεις όταν θες να βρεις που η C_φ μιας συνάρτησης φ

- ✓ τέμνει τον ψ΄ψ ; Βρίσκεις το **μοναδικό σημείο με ψ = f(0)**.
- ✓ τέμνει τον χ΄χ ; **Λύνεις την f(χ) = 0**.

Τι κάνεις όταν θες να βρεις για ποια χ η C_φ μιας συνάρτησης φ

- ✓ είναι πάνω από τον χ΄χ ; Απλά λύνεις την **f(χ) > 0.**
- ✓ είναι κάτω από τον χ΄χ ; Απλά λύνεις την **f(χ) < 0.**

Τι κάνεις λοιπόν όταν θες να βρεις τα κοινά σημεία που έχουν οι γραφικές παραστάσεις C_φ και C_θ δυο συναρτήσεων φ και θ.

Απλά λύνεις την **φ(χ) – θ(χ) = 0 ⇔ φ(χ) = θ(χ)**.

Τι κάνεις λοιπόν όταν θες να βρεις για ποια χ η C_φ μιας συνάρτησης φ είναι πάνω από την C_θ μιας συνάρτησης θ.

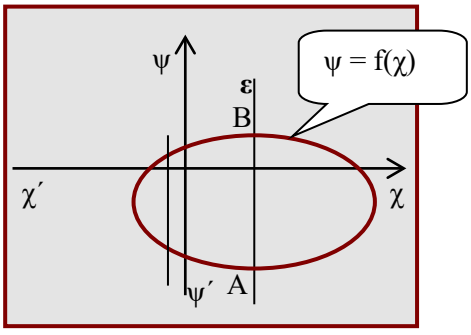
Απλά λύνεις την **φ(χ) – θ(χ) > 0 ⇔ φ(χ) > θ(χ).**

Τι κάνεις λοιπόν όταν θες να βρεις για ποια χ η C_φ μιας συνάρτησης φ είναι κάτω από την C_θ μιας συνάρτησης θ.

Απλά λύνεις την **φ(χ) – θ(χ) < 0 ⇔ φ(χ) < θ(χ).**

Προσοχή :

Η γραμμή του σχήματος δίπλα δεν παριστάνει συνάρτηση διότι **υπάρχουν ευθείες παράλληλες του ψ΄ ψ που την τέμνουν σε περισσότερα από ένα σημεία**



Π χ η ευθεία **ε** τέμνει στα σημεία Α και Β

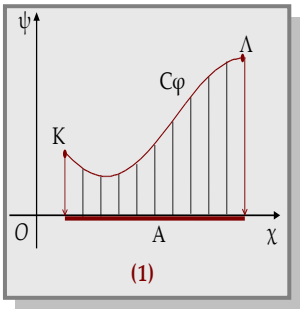
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για να μάθεις να «διαβάζεις» την γραφική παράσταση C_φ μιας συνάρτησης φ δες και τα πιο κάτω :

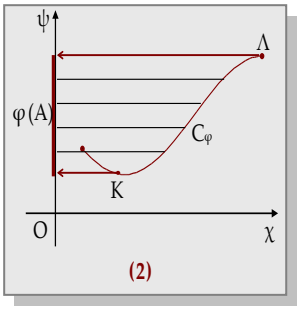
α) Το πεδίο ορισμού Α της φ είναι το **σύνολο των τετμημένων** όλων των σημείων της C_φ, για να το βρεις, προβάλεις τα άκρα **Κ** και **Λ** της C_φ πάνω στον χ΄χ, **σχήμα 1.**

β) Το σύνολο τιμών $B = \varphi(A)$ της φ είναι το σύνολο των **τεταγμένων** όλων των σημείων της C_φ, για να το βρεις προβάλεις το «χαμηλότερο σημείο **Κ** και το «ψηλότερο» σημείο **Λ** πάνω στον ψ΄ψ, **σχήμα 2.**

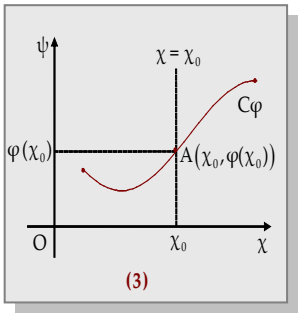
γ) Η τιμή της φ στο $\chi_0 \in A$ [δηλαδή το $\varphi(\chi_0)$] είναι η **τεταγμένη** του σημείου τομής της ευθείας $\chi = \chi_0$ και της C_φ **σχήμα 3** .



(1)



(2)



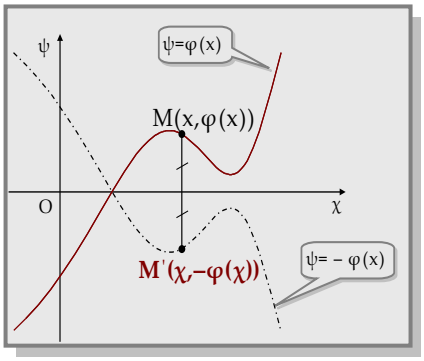
(3)

Παρατηρήσεις :

Είναι πολύ χρήσιμο για τα επόμενα να παρατηρήσεις :

1. Την σχέση ανάμεσα στην C_φ και στην $C_{-\varphi}$, δηλαδή την σχέση που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων **φ** και **– φ**.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

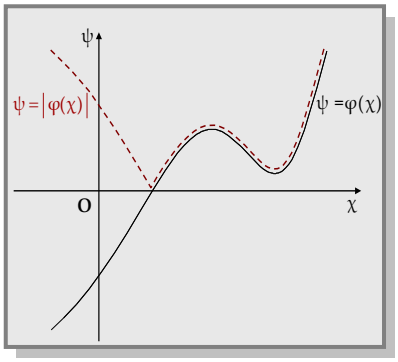


Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

– φ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα χ΄χ, με την γραφική παράσταση της φ, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(\chi, -\varphi(\chi))$ που είναι συμμετρικά των $M(\chi, \varphi(\chi))$, ως προς τον άξονα, όπως θα δεις και πιο κάτω.

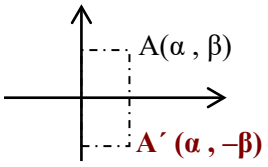
2. Την σχέση ανάμεσα στην $\mathbf{C_\varphi}$ και στην $\mathbf{C_{|\varphi|}}$ δηλαδή την σχέση που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων **φ** και $|\boldsymbol{\varphi}|$.



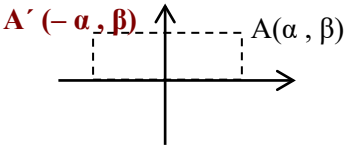
Η γραφική παράσταση της $|\boldsymbol{\varphi}|$ αποτελείται από τα τμήματα της $\mathbf{C_\varphi}$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα χ΄χ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα χ΄χ, όλων των υπολοίπων τμημάτων της $\mathbf{C_\varphi}$ που βρίσκονται κάτω από τον άξονα χ΄χ.

Θυμάσαι, βέβαια, ότι δύο σημεία Α και Α΄ λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ε αν και μόνο αν η ε είναι μεσοκάθετη στο τμήμα Α Α΄.

✓ Τα σημεία **Α(α , β)** και **Α΄ (α , –β)** είναι συμμετρικά ως προς τον χ΄ χ

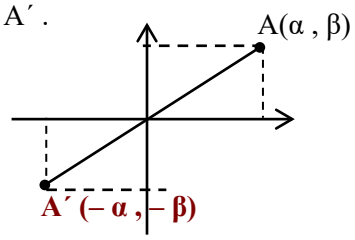


✓ Τα σημεία **Α(α , β)** και **Α΄ (–α , β)** είναι συμμετρικά ως προς τον ψ΄ ψ



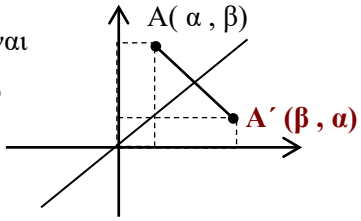
Θυμάσαι, βέβαια, ότι δύο σημεία Α και Α΄ λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο Ο αν και μόνο αν το Ο είναι μέσον του Α Α΄.

✓ Τα σημεία **Α(α , β)** και **Α΄ (–α , –β)** είναι συμμετρικά ως προς το Ο (0,0)



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Τα σημεία **Α(α , β)** και **Α΄ (β ,α)** είναι **συμμετρικά** ως προς την **ψ = χ διχοτόμο** της γωνίας του τεταρτημορίου **Ι**



Ορισμοί

✓ Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο **Α** θα λέγεται **άρτια**

εάν για κάθε $\chi \in A$ **1)** $-\chi \in A$

και **2)** $\varphi(-\chi) = \varphi(\chi)$.

✓ Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο **Α** θα λέγεται **περιττή**

εάν για κάθε $\chi \in A$ **1)** $-\chi \in A$

και **2)** $\varphi(-\chi) = -\varphi(\chi)$.

Παρατήρηση Για να μπορέσεις ***να εξετάσεις*** αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή θα πρέπει το πεδίο ορισμού της να είναι συμμετρικό σύνολο ως προς το 0 δηλαδή για κάθε θετικό αριθμό που περιέχει να περιέχει και τον αντίθετό του αρνητικό αριθμό.

✓ Μια συνάρτηση **φ** λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ **ισχύει : Αν** $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

✓ Μια συνάρτηση **φ** λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ **ισχύει : Αν** $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

✓ Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$\varphi(\chi_0) \geq \varphi(\chi)$ **για κάθε** $\chi \in A$

✓ Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0) \in \varphi(A)$ όταν :

$\varphi(\chi_0) \leq \varphi(\chi)$ **για κάθε** $\chi \in A$.

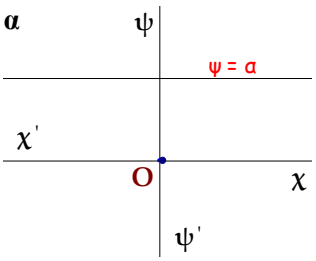
Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν το σύνολο **Α είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού** τότε το ακρότατο ονομάζεται **τοπικό**, ενώ αν το σύνολο **Α είναι το πεδίο ορισμού** τότε το ακρότατο ονομάζεται **ολικό** .

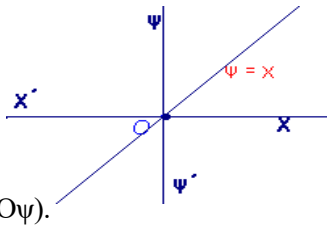
Βασικές πραγματικές συναρτήσεις

1. Σταθερή συνάρτηση $f : A \to R$ με $f(\chi) = \alpha$



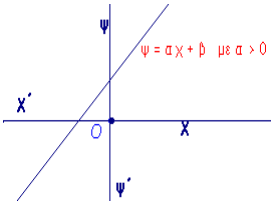
- Πεδίο Ορισμού $D_f = R$.
- Σύνολο τιμών $f(R) = \{\alpha\}$
- Η γραφική παράσταση της f αν $A = R$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha$

2. Ταυτοτική συνάρτηση $f : A \to R$ με $f(\chi) = \chi$

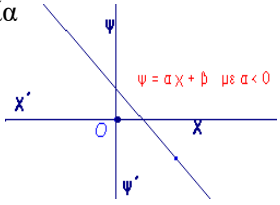


- Πεδίο Ορισμού $D_f = R$
- Σύνολο τιμών $f(R) = R$.
- Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = R$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi$ (διχοτόμος της γωνιάς χΟψ).
- Γνησίως αύξουσα

3. Συνάρτηση $f : A \to R$ με $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$, $\alpha \neq 0$.



- Πεδίο Ορισμού $D_f = R$
- Σύνολο τιμών $f(R) = R$



- Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = R$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha\chi + \beta$.
- Γνησίως αύξουσα με $\alpha > 0$,
- Γνησίως φθίνουσα με $\alpha < 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού $f : A \to R$ με $f(x) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$

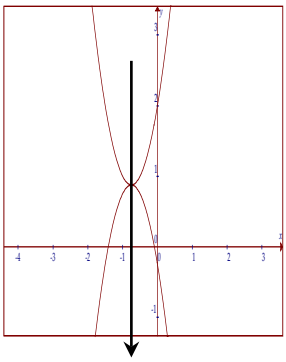
Γενικότερα για τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ με $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$ ισχύουν

α) $\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, **με** $\alpha > 0$ **β)** $\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, **με** $\alpha < 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού $\mathbf{D_f = R}$
- ✓ Σύνολο τιμών $\mathbf{f(R) = R}$
- ✓ Έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$	Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$
Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$	Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
Ελάχιστο το $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$	**Μέγιστο** το $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Παραβολή με κορυφή το $\mathbf{K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)}$



$\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Συνοπτικά

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
ψ	↘		↗

Ελάχιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

χ	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
ψ	↗		↘

Μέγιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

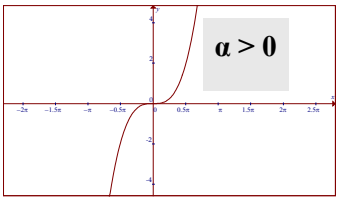
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Συνάρτηση 3ου βαθμού f : A → R με f(x) = αχ³ , α ≠ 0 .

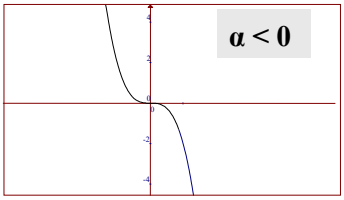
✓ Πεδίο Ορισμού **D_f = R ,** Σύνολο τιμών **f(R) = R**

Περιττή συνάρτηση , άρα έχει κέντρο συμμετρίας το **O**

✓ Με **α > 0** είναι γνησίως αύξουσα :



✓ Με **α < 0** είναι γνησίως φθίνουσα



6. Πολυωνυμική συνάρτηση f : A → R με

$$f(\chi) = \alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi^1 + \alpha_0 \quad \text{όπου } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in R,\ \alpha_\nu \neq 0.$$

✓ Πεδίο Ορισμού **D_f = R**

✓ Σύνολο τιμών **f(R) = R**

✓ Είναι **άρτια** όταν περιέχει **μόνο άρτιες** δυνάμεις του χ και **περιττή** όταν περιέχει **μόνο περιττές** δυνάμεις του χ.

✓ Η γραφική παράσταση της f είναι ανάλογη με τη μορφή του πολυωνύμου

✓ Δεν έχει ασύμπτωτες.

7. Η συνάρτηση f : A → R* με $f(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ **όπου** $0 \neq \alpha \in R$

✓ **Είναι ισοσκελής υπερβολή.**

✓ Πεδίο Ορισμού **D_f = R− { 0 } = R***

✓ Σύνολο τιμών **f(R) = R**

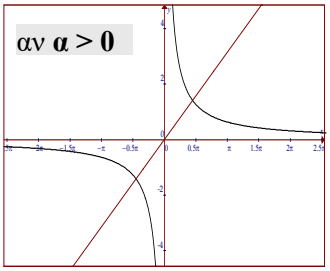
✓ Είναι **περιττή συνάρτηση**.

✓ Αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς το **O**

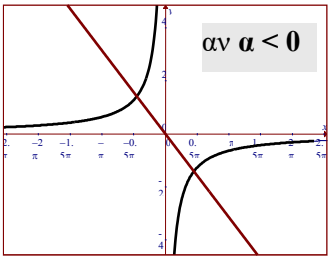
✓ Έχει ως ασύμπτωτες τους 4 ημιάξονες

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



- ✓ Αν **α > 0** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty , 0)$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $(0 , +\infty)$
- ✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ψ = χ (διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου)



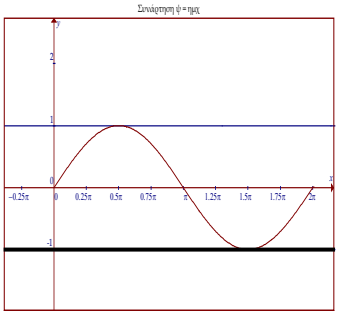
- ✓ Αν **α < 0** είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(-\infty , 0)$ και **γνησίως αύξουσα** στο $(0 , +\infty)$
- ✓ Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ψ = – χ (διχοτόμο 2ου και 4ου τεταρτημορίου)

8. Ρητή συνάρτηση f : A → R με $f(\chi)=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$,

P, Q πολυωνυμικές συναρτήσεις

- ✓ Πεδίο Ορισμού **D_f = R– {χ ∈R : Q(x) = 0}**
- ✓ Σύνολο τιμών **f(R) = R**
- ✓ Η γραφική παράσταση της f αν D_f = R είναι ανάλογη με τη μορφή της συνάρτησης

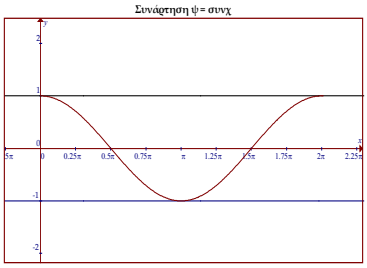
9. Συνάρτηση ημίτονο f : A → R με f(χ) = ημχ



- ✓ Πεδίο Ορισμού **D_f = R**
- ✓ Σύνολο τιμών **f(R) = [– 1 , 1]**
- ✓ Είναι **περιττή** , **περιοδική** με περίοδο **Τ = 2π**
- ✓ **Διάστημα μελέτης : Δ = [0 , 2π]** ή **Δ = [– π , π]**
- ✓ ***Γνησίως αύξουσα*** στα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ και ***γνησίως φθίνουσα*** στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

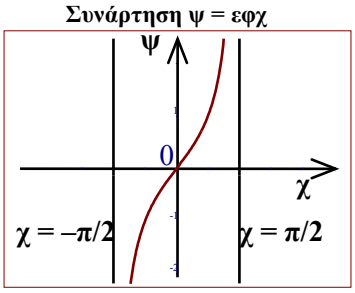
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. Συνάρτηση συνημίτονο $f : A \to R$ με $f(\chi) = συνχ$



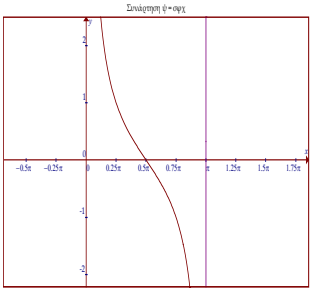
- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = R$.
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = [-1, 1]$
- ✓ Είναι **άρτια,** είναι **περιοδική** με περίοδο $T = 2\pi$
- ✓ **Διάστημα μελέτης** : $\Delta = [0 , 2\pi]$ ή $\Delta = [-\pi , \pi]$
- ✓ ***Γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα $[0 , \pi]$ και ***γνησίως αύξουσα*** στο διάστημα $[\pi , 2\pi]$.

11. Συνάρτηση εφαπτόμενη $f : A \to R$ με $f(\chi) = εφχ = \frac{ημχ}{συνχ}$



- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = R - \left\{\kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\right\}$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = R$
- ✓ Είναι **περιττή** , είναι **περιοδική** με περίοδο $T = \pi$
- ✓ **Διάστημα μελέτης** $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right)$, **(γνησίως αύξουσα σ' αυτό).**

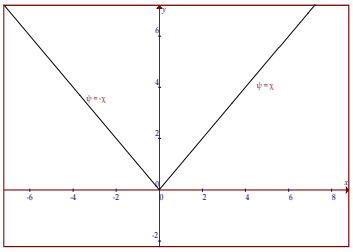
12. Συνάρτηση συνεφαπτόμενη $f(\chi) = σφχ = \frac{συνχ}{ημχ}$



- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = R - \{\kappa \cdot \pi, \kappa \in Z\}$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = R$
- ✓ Είναι **περιττή** , είναι **περιοδική** με περίοδο $T = \pi$
- ✓ **Διάστημα μελέτης** $\Delta = [0 , \pi]$ **(γνησίως φθίνουσα σ΄ αυτό)**

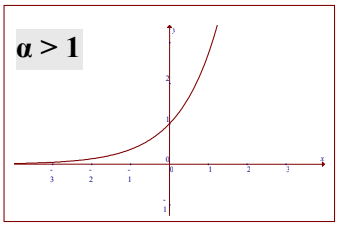
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Συνάρτηση απόλυτη τιμή f : A → R με $f(\chi)=|\chi|=\begin{cases}\chi & \text{αν } \chi\geq 0\\ -\chi & \text{αν } \chi<0\end{cases}$



- ✓ Πεδίο Ορισμού **$D_f = R$**
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R)=R^+$
- ✓ Είναι **άρτια**
- ✓ **Η γραφική παράσταση της f είναι 2 ημιευθείες.**
  (διχοτόμοι γωνίας I και II τεταρτημόριου)
- ✓ **Βασικές ιδιότητες :** Δες προηγούμενα ιδιότητες απόλυτης τιμής

14. Εκθετική f : A → R_+^* με $f(\chi)=\alpha^{\chi}$, **$0<\alpha\neq 1$**



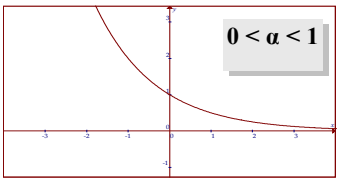
- ✓ Πεδίο Ορισμού **$D_f = R$**
- ✓ Σύνολο τιμών **f(R) = R_+^* = (0, + ∞)**
- ✓ Η γραφική παράσταση της f είναι :
- ✓ **Βασικές ιδιότητες**

1. Η **f είναι συνάρτηση "1 – 1 και επί"**
2. Αν **α = 1** η **f** είναι **σταθερή**
3. Αν **α > 1** η **f** είναι **γνησίως αύξουσα στο R** δηλαδή

$$\alpha^{\chi_1}<\alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1<\chi_2$$

4. Αν **0 < α < 1** η **f** είναι **γνησίως φθίνουσα στο R** δηλαδή

$$\alpha^{\chi_1}<\alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1>\chi_2$$



5. **Αν $\chi \in R$ τότε $\alpha^{\chi} > 0$**

(γι' αυτό και f(A) = R_+^*)

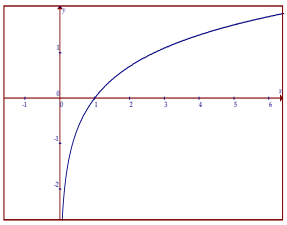
Όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης $f(\chi)=\alpha^{\chi}$ **με** $\alpha>1$ **ισχύουν και για την συνάρτηση** $f(\chi)=e^{\chi}$ δηλαδή Π Ο το A = P, Π Τ το (0, + ∞), είναι γνησίως αύξουσα που σημαίνει $e^{\chi_1}<e^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1<\chi_2$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Λογαριθμική συνάρτηση $f : R_+^* \to R$ με $f(x) = \log x$,

Λογαριθμική συνάρτηση $f : R_+^* \to R$ με $f(x) = \ln\chi$.



- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = R_+^* = (0, +\infty)$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = R$
- ✓ Η γραφική παράσταση της f είναι :
- ✓ **Βασικές ιδιότητες**

1. **Οι συναρτήσεις $\log\chi$, $\ln\chi$ είναι "1 – 1 και επί"**
2. **Είναι γνησίως αύξουσες στο R_+^* .**
3. **Για κάθε $\chi \in R_+^*$ ισχύουν οι ισοδυναμίες** $\ln x = \psi \Leftrightarrow \chi = e^{\psi}$ και $\log_\alpha x = \psi \Leftrightarrow \chi = \alpha^{\psi}$

Ορισμοί – Ιδιότητες

Έστω η εξίσωση $\alpha^{\psi} = \chi$ όπου $\mathbf{0 < \alpha \neq 1}$ και $\mathbf{\chi > 0}$.

Αποδεικνύεται ότι έχει μοναδική λύση.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha^{\psi} = \chi$** ονομάζουμε **λογάριθμο του χ με βάση το α** και συμβολικά είναι : $\alpha^{\psi} = \chi \Leftrightarrow \psi = \log_\alpha \chi$

Δηλαδή ο $\log_\alpha \chi$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον **α** για να βρούμε το **χ**.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης** $10^{\chi} = \theta$ ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση το 10** και συμβολικά είναι : $10^{\chi} = \theta \Leftrightarrow \chi = \log\theta$

Δηλαδή ο **logθ** είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το **10** για να βρούμε το **θ**.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης** $e^{\chi} = \theta$ ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση το e** και συμβολικά είναι : $e^{\chi} = \theta \Leftrightarrow \chi = \ln\theta$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δηλαδή ο **lnθ** είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσεις τον **e** για να βρεις το **θ**.

Ιδιότητες **Αν** $\chi_1, \chi_2, \chi > 0$ **και** $\kappa \in R$ **ισχύουν οι ιδιότητες :**

Λογάριθμοι με βάση το 10	**Λογάριθμοι με βάση e**	
$\log 10^{\chi} = \chi$	$\ln e^{\chi} = \chi$	Αν **α, β > 0** και **β ≠ 1** τότε για κάθε **χ > 0** ισχύει : $\log_\beta \chi = \frac{\log_\alpha \chi}{\log_\alpha \beta}$.
$10^{\log \chi} = \chi$	$e^{\ln \chi} = \chi$	
$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$	
$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$	
$\log \chi_1 < \log \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 < \chi_2$	$\ln \chi_1 < \ln \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 < \chi_2$	
$\log(\chi_1 \cdot \chi_2) = \log \chi_1 + \log \chi_2$	$\ln(\chi_1 \cdot \chi_2) = \ln \chi_1 + \ln \chi_2$	
$\log \frac{\chi_1}{\chi_2} = \log \chi_1 - \log \chi_2$	$\ln \frac{\chi_1}{\chi_2} = \ln \chi_1 - \ln \chi_2$	
$\log \chi^{\kappa} = \kappa \cdot \log \chi$	$\ln \chi^{\kappa} = \kappa \cdot \ln \chi$	
$\alpha^{\chi} = e^{\chi \cdot \ln \alpha}$		

4. Συνάρτηση f : A → R , $f(\chi) = \chi^{\alpha}$ **,** $\alpha \in R$ **.**

- ✓ Πεδίο Ορισμού : Εξαρτάται από το **α** π. χ. η $\varphi(\chi) = \chi^{\sqrt{3}}$ και η $\varphi(\chi) = \chi^{\frac{3}{5}}$ έχουν $D_f = R_+$ όπως και οι περισσότερες συναρτήσεις αυτής της μορφής, υπάρχουν και εξαιρέσεις όπως π.χ. η $\varphi(\chi) = \sqrt[5]{\chi^4}$ η οποία έχει $D_f = R$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = R_+$
- ✓ Η γραφική παράσταση της f δεν είναι συγκεκριμένη, εξαρτάται από την τιμή του α.

Δαμιανός Μωραΐτης

Ισότητα συναρτήσεων – Πράξεις .

Ορισμός

Δύο συναρτήσεις **f** και **g** λέγονται **ίσες** (**f = g**) όταν :

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α
2. για κάθε $\chi \in A$ ισχύει $f(\chi)=g(\chi)$

Παραδείγματα :

1. Οι συναρτήσεις : $f(\chi)=\dfrac{\chi^4+\chi^2}{\chi^2+1}$ και $g(\chi)=\chi^2$ είναι ίσες .

Πράγματι :

– οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A = R και

– για κάθε $\chi \in A$ ισχύει $f(\chi)=g(\chi)$, αφού $f(\chi)=\dfrac{\chi^4+\chi^2}{\chi^2+1}=\dfrac{\chi^2(\chi^2+1)}{\chi^2+1}=$

$\chi^2=g(\chi)$

2. Οι συναρτήσεις : $f(\chi)=2|\chi|^2+5$ και $g(\chi)=2\chi^2+5$ είναι ίσες .

Πράγματι : $f=g$ αφού $|\chi|^2=\chi^2 \Leftrightarrow f(\chi)=2|\chi|^2+5=2\chi^2+5=g(\chi)$.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα και $\Gamma = A \cap B \neq \varnothing$.

Αν για κάθε $\chi \in \Gamma$ ισχύει f(χ) = g(χ), τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις : $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-1}{\chi-1}$ και $g(\chi)=\dfrac{\chi^2+\chi}{\chi}$,

με πεδία ορισμού τα σύνολα A = R – {1} και B = R – {0} = R^* αντίστοιχα, είναι ίσες στο σύνολο Γ = R – {0,1} αφού για κάθε $\chi \in \Gamma$ ισχύει :

$$f(\chi)=\frac{\chi^2-1}{\chi-1}=\frac{(\chi+1)(\chi-1)}{\chi-1}=\chi+1=g(\chi).$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Να εξετάσετε αν τα πιο κάτω ζευγάρια είναι ίσες συναρτήσεις.

Αν δεν είναι εξετάστε αν μπορούν να γίνουν.

α) $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-e^2}{\chi-e}$ και $g(\chi)=\chi+e$.

β) $f(\chi)=|\chi|$ και $g(\chi)=\chi$.

γ) $f(\chi)=\ln\left(\chi^2-1\right)$ και $g(\chi)=\ln(\chi+1)+\ln(\chi-1)$.

Απάντηση :

α) $f(\chi)=\dfrac{\chi^2-e^2}{\chi-e}$ και $g(\chi)=\chi+e$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού **A = R – { e }** και η g έχει πεδίο ορισμού το **B = R**.

Επειδή A ≠ B δεν μπορεί να εξετάσεις αν f = g γιατί **προϋπόθεση** για να είναι f = g είναι να έχουν κοινό πεδίο ορισμού.

Όμως αν περιορίσουμε την συνάρτηση g στο σύνολο **A = R – { e }** τότε έχουν κοινό πεδίο ορισμού και :

$$f(\chi)=\frac{\chi^2-e^2}{\chi-e} \Leftrightarrow f(\chi)=\frac{(\chi-e)(\chi+e)}{\chi-e}=\chi+e=g(\chi)$$

β) $f(\chi)=|\chi|$ και $g(\chi)=\chi$.

Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού **A = B = R .**

Όμως πχ $f(-5)=|-5|=5$ ενώ $g(-5)=-5$, επομένως αφού υπάρχει έστω και ένα χ τέτοιο ώστε f(χ) ≠ g(χ), οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες.

γ) $f(\chi)=\ln\left(\chi^2-1\right)$ και $g(\chi)=\ln(\chi+1)+\ln(\chi-1)$.

Για το πεδίο ορισμού της f έχεις : $\chi^2-1>0$. Και επειδή έχει ρίζες $\chi_1=-1$ και $\chi_2=1$ άρα . . . $A=(-\infty,-1)\cup(1+\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της g έχεις : χ + 1 > 0 και χ – 1 > 0. άρα . . .

$B=(1+\infty)$. Άρα δεν μπορεί να εξετάσεις αν f = g .

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όμως αν θεωρήσεις το σύνολο $B=(1+\infty)$ ως κοινό πεδίο ορισμού θα είναι : $f(\chi)=\ln(\chi^2-1) = \ln[(\chi-1)(\chi+1)] = \ln(\chi+1)+\ln(\chi-1)$.

Οι $\ln(\chi+1)$, $\ln(\chi-1)$ έχουν νόημα γιατί έχουμε περιοριστεί στο σύνολο $B=(1+\infty)$.

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω δυο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού Α κα Β αντίστοιχα και $\Gamma = A \cap B \neq \varnothing$.

Με πεδίο ορισμού το σύνολο **Γ** ορίζουμε :

1. **Άθροισμα συναρτήσεων,** συμβολικά **f + g** : **(f + g)(χ) = f(χ) + g(χ),** για κάθε **χ ∈ Γ.**
2. **Διαφορά συναρτήσεων,** συμβολικά **f – g** : **(f – g)(χ) = f(χ) – g(χ),** για κάθε **χ ∈ Γ.**
3. **Γινόμενο συναρτήσεων,** συμβολικά **f · g** : $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\chi)=\mathbf{f}(\chi)\cdot\mathbf{g}(\chi)$, για κάθε **χ ∈ Γ.**

Με πεδίο ορισμού το σύνολο Δ = {χ ∈ Γ και g(χ) ≠ 0} ορίζουμε :

4. **Πηλίκο συναρτήσεων,** συμβολικά $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$: $\left(\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right)(\chi)=\frac{\mathbf{f}(\chi)}{\mathbf{g}(\chi)}$, για κάθε **χ ∈ Δ.**

Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\frac{\chi-1}{\chi^2-9}$ και $g(\chi)=\frac{\chi+3}{\chi+2}$.

Να ορίσετε τις $f+g$, $f\cdot g$.

Απάντηση :

Για το πεδίο ορισμού D_f της f έχεις : $\chi^2-9\neq 0 \Leftrightarrow \chi\neq\pm 3 \Leftrightarrow$

$D_f = R-\{\pm 3\}$.

- Για το πεδίο ορισμού D_g της g έχεις : $\chi+2\neq 0 \Leftrightarrow \chi\neq -2 \Leftrightarrow$ $D_g = R-\{-2\}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $D_{f+g} = D_f \cap D_g = R - \{-3, -2, 3\}$ και είναι :

✓ $(f+g)(\chi) = f(\chi) + g(\chi) = \dfrac{\chi-1}{\chi^2-9} + \dfrac{\chi+3}{\chi+2} = \dfrac{\chi-1}{(\chi-3)(\chi+3)} + \dfrac{\chi+3}{\chi+2} =$

$\dfrac{\chi^2+2\chi-\chi-2+(\chi-3)(\chi+3)^2}{(\chi-3)(\chi+3)(\chi+2)} = \dfrac{\chi^2+\chi-2+(\chi-3)(\chi^2+6\chi+9)}{(\chi-3)(\chi+3)(\chi+2)} =$

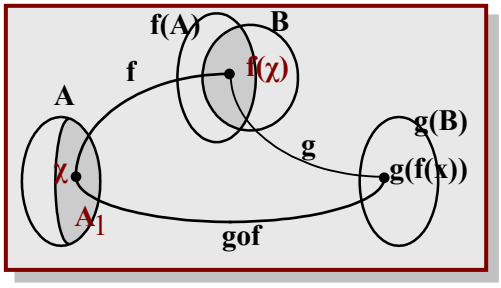
$\dfrac{\chi^2+\chi-2+\chi^3+3\chi^2-9\chi-27}{(\chi-3)(\chi+3)(\chi+2)} \Leftrightarrow (f+g)(\chi) = \dfrac{\chi^3+4\chi^2-8\chi-29}{(\chi-3)(\chi+3)(\chi+2)}$.

✓ $(f\cdot g)(\chi) = f(\chi)\cdot g(\chi) = \dfrac{\chi-1}{\chi^2-9}\cdot\dfrac{\chi+3}{\chi+2} = \dfrac{\chi-1}{(\chi-3)(\chi+3)}\cdot\dfrac{\chi+3}{\chi+2} \Leftrightarrow$

$(f\cdot g)(\chi) = \dfrac{\chi-1}{(\chi-3)(\chi+2)}$.

Ορισμός

Αν **f, g** είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού **A, B** αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με **gof** , τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(\chi) = g(f(\chi))$.



Το **πεδίο ορισμού** της **gof** είναι το σύνολο :

$A_1 = \{\chi \in A \text{ με } f(\chi) \in B\}$.

Δηλαδή είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία $\chi \in A$ (του πεδίου ορισμού της f), για τα οποία το $f(\chi) \in B$ (ανήκει στο πεδίο ορισμού της g).

Είναι φανερό ότι η **gof** ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi}$ και $\theta(\chi)=\chi^2-1$ να βρείτε την $\varphi o\theta$ και $\theta o\varphi$.

Απάντηση :

α. Επειδή $(\varphi o\theta)(\chi)=\varphi(\theta(\chi))$ θα βρεις πρώτα το Π Ο της θ έστω Α.

Είναι $\theta(\chi)=\chi^2-1$ άρα **Α = R.**

Για το Π Ο της φ έχεις : $\chi\geq 0$ (λόγω της ρίζας) οπότε **Β = [0, + ∞)**

Οπότε το πεδίο ορισμού της $\varphi o\theta$ είναι το $A_1=\{\chi\in A \text{ με } \theta(\chi)\in B\}\Leftrightarrow$

$A_1=\{\chi\in A \text{ με } \chi^2-1\in[0,+\infty)\}$. Όμως $\chi^2-1\geq 0$. (ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού). Ρίζες $\chi_1=-1$ και $\chi_2=1$ άρα πίνακας προσήμου για το

χ^2-1 είναι

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

Για να είναι **θ(χ) ∈ Β** πρέπει **χ ∈** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Άρα πρέπει $\chi\in R$ (για να είναι $\chi\in A$) και $\chi\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ οπότε $A_1=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Τότε $(\varphi o\theta)(\chi)=\varphi(\theta(\chi))=\sqrt{\theta(\chi)}\Leftrightarrow(\varphi o\theta)(\chi)=\sqrt{\chi^2-1}$

β. Επειδή $(\theta o\varphi)(\chi)=\theta(\varphi(\chi))$ θα βρεις πρώτα το Π Ο της φ, έστω Α.

Είναι $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi}$ άρα **Α =** $\{\chi\in R \text{ με } \chi\geq 0\}$ (λόγω της ρίζας)**.**

Για το Π Ο της θ έχεις : **Β = R** (γιατί είναι πολυωνυμική).

Οπότε το πεδίο ορισμού της $\theta o\varphi$ είναι το $A_1=\{\chi\in A \text{ με } \varphi(\chi)\in B\}\Leftrightarrow$

$A_1=\{\chi\geq 0 \text{ με } \sqrt{\chi^2-1}\in R\}$. Όμως $\sqrt{\chi^2-1}\in R$ όταν $\chi^2-1\geq 0$ δηλαδή $\chi\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και $\chi\geq 0$. Επομένως είναι $A_1=[1,+\infty)$

Τότε $(\theta o\varphi)(\chi)=\theta(\varphi(\chi))=\left[\varphi(\chi)\right]^2-1=\left[\sqrt{\chi}\right]^2-1\Leftrightarrow(\boldsymbol{\theta o\varphi})(\chi)=\chi-1$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση

✓ Από την πιο πάνω εφαρμογή είναι φανερό ότι $g\circ f \neq f\circ g$.

Γενικότερα μιλώντας, αν f και g είναι δυο συναρτήσεις τέτοιες ώστε να **ορίζονται οι** $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές ***δεν είναι υποχρεωτικά*** ίσες.

Άρα δεν ισχύει η αντιματαθετική ιδιότητα στη σύνθεση συναρτήσεων.

✓ Αν f, g και h είναι τρεις συναρτήσεις και **ορίζεται** η $h\circ(g\circ f)$, τότε **ορίζεται** και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει : $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Τη συνάρτηση $h\circ(g\circ f)$ τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h\circ g\circ f$.

Παραδειγμάτων συνέχεια :

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi-4}$ και $\omega(\chi)=2\eta\mu\chi+1$ να βρείτε την $\varphi\circ\omega$.

Απάντηση :

Επειδή «ψάχνεις» την $\varphi\circ\omega$, το **A** θα είναι το πεδίο ορισμού της **ω**.

Άρα είναι **A = R**.

Το πεδίο ορισμού της φ είναι $\chi-4\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq 4$, άρα $B=[4,+\infty)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της $\varphi\circ\omega$ είναι το $A_1=\{\chi\in A \text{ με } \omega(\chi)\in B\} \Leftrightarrow$

$A_1=\{\chi\in R \text{ με } 2\eta\mu\chi+1\in[4,+\infty)\}$. Όμως $2\eta\mu\chi+1\in[4,+\infty)\Leftrightarrow$

$2\eta\mu\chi+1\geq 4\Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\geq 3\Leftrightarrow \eta\mu\chi\geq\frac{3}{2}=1,5$ **Άτοπο** γιατί **$-1\leq\eta\mu\chi\leq 1$.**

Επομένως δεν ορίζεται η $\varphi\circ\omega$ γιατί δεν υπάρχει πεδίο ορισμού.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Έστω ότι η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\sqrt{\frac{1-\chi}{2}}$ και $\omega(\chi)=\text{συν}2\chi$ να βρείτε την $\varphi\circ\omega$.

Απάντηση :

Επειδή «ψάχνεις» την $\varphi\circ\omega$, το **A** θα είναι το πεδίο ορισμού της **ω**.

Άρα είναι **A = R**.

Το πεδίο ορισμού της φ είναι $1-\chi\geq 0\Leftrightarrow\chi\leq 1$, άρα $B=(-\infty,1]$.

Άρα το πεδίο ορισμού της $\varphi\circ\omega$ είναι το $A_1=\{\chi\in A \text{ με } \omega(\chi)\in B\}\Leftrightarrow$

$A_1=\{\chi\in R \text{ με } \text{συν}2\chi\in(-\infty,1]\}$. Όμως για κάθε $\chi\in R$ είναι **συν2χ ≤ 1.**

Επομένως ορίζεται η $\varphi\circ\omega$ **για κάθε χ ∈ R** και είναι :

$$(\varphi\circ\omega)(\chi)=\varphi(\omega(\chi))=\sqrt{\frac{1-\omega(\chi)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\text{συν}2\chi}{2}}=\sqrt{\eta\mu^2\chi}\Leftrightarrow$$

$$(\varphi\circ\omega)(\chi)=|\eta\mu\chi|.$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(\chi)=\sqrt{\chi^2+1}$ και $(g\circ f)(\chi)=\sqrt{9\chi^2+6\chi+2}$, με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα, να βρείτε την f .

Απάντηση :

Είναι $(g\circ f)(\chi)=g(f(\chi))=\sqrt{(f(\chi))^2+1}$ από τον ορισμό της σύνθεσης.

Δίνεται $(g\circ f)(\chi)=\sqrt{9\chi^2+6\chi+2}$. Άρα $\begin{cases}\sqrt{(f(\chi))^2+1}=\sqrt{9\chi^2+6\chi+2}\\ \sqrt{(f(\chi))^2+1},\sqrt{9\chi^2+6\chi+2}>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (f(\chi))^2+1=9\chi^2+6\chi+2\Leftrightarrow (f(\chi))^2=9\chi^2+6\chi+1=$

$(3\chi)^2+2\cdot 3\chi\cdot 1+1^2=(3\chi+1)^2\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\mathbf{f(\chi)=3\chi+1}\\ \text{ή}\\ \mathbf{f(\chi)=-3\chi-1}\end{cases}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✳ ✳ ✳
S O S

Ένας **άλλος τρόπος** αντιμετώπισης, πιο **αλγεβρικός**, είναι να θέσεις $\mathbf{t = f(\chi)}$.

Άρα $(gof)(\chi) = g(f(\chi)) = g(t) = \sqrt{t^2+1}$.

Άρα $\begin{cases} \sqrt{t^2+1} = \sqrt{9\chi^2+6\chi+2} \\ \sqrt{t^2+1}, \sqrt{9\chi^2+6\chi+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t^2+1 = 9\chi^2+6\chi+2 \Leftrightarrow$

$t^2 = 9\chi^2+6\chi+1$ και επειδή το 1ο μέλος είναι τέλειο τετράγωνο πρέπει και το δεύτερο, επίσης να είναι τέλειο τετράγωνο, πράγματι

$t^2 = (3\chi)^2 + 2\cdot 3\chi\cdot 1 + 1^2 \Leftrightarrow t^2 = (3\chi+1)^2 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{f(\chi) = t = 3\chi+1} \\ \text{ή} \\ \mathbf{f(\chi) = t = -3\chi-1} \end{cases}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = 3\chi+1$ και $(gof)(\chi) = \sqrt{9\chi^2+6\chi+2}$, με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα, να βρείτε την g.

Απάντηση :

Είναι $(gof)(\chi) = g(f(\chi)) = g(3\chi+1)$ **(1)**.

Όμως $(gof)(\chi) = \sqrt{9\chi^2+6\chi+2}$ και θα προσπαθήσεις να «βάλεις» στο παιχνίδι την $f(\chi) = 3\chi+1$.

Έτσι $(gof)(\chi) = \sqrt{(3\chi)^2+2\cdot 3\chi+1+1}$ άρα $g(3\chi+1) = \sqrt{(3\chi+1)^2+1}$ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** είναι φανερό ότι $\mathbf{g(\chi) = \sqrt{\chi^2+1}}$

✳ ✳ ✳
S O S

Ένας **άλλος τρόπος** αντιμετώπισης, πιο αλγεβρικός, είναι να θέσεις

$\mathbf{t = f(\chi) = 3\chi+1 \Leftrightarrow \chi = \frac{t-1}{3}}$.

Άρα $(gof)(\chi) = g(f(\chi)) = g(t) = \sqrt{9\left(\frac{t-1}{3}\right)^2 + 6\frac{t-1}{3} + 2} =$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\sqrt{9\frac{t^2-2t+1}{9}+6\frac{t-1}{3}+2}=\sqrt{t^2-2t+1+2(t-1)+2}=$$

$\sqrt{t^2-2t+1+2t-2+2} \Leftrightarrow g(t)=\sqrt{t^2+1}$. Άρα $\mathbf{g(\chi)=\sqrt{\chi^2+1}}$

Παρατήρηση :

Βλέπεις ότι και στις δυο περιπτώσεις κατά τις οποίες σου έδινε την σύνθετη συνάρτηση **g o f** και μια από τις **f, g** βοηθάει να θέτεις $\mathbf{t=f(\chi)}$ (αυτήν που είναι «δεξιότερα» στην σύνθεση).

6. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-4)^{\ln(\chi^2-3\chi+2)}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(\chi-1)$.

Απάντηση :

α. Για να βρεις το πεδίο ορισμού της f πρέπει να «λύσεις» τους εξής περιορισμούς :

i) $\chi-4>0 \Leftrightarrow \chi>4$. **(1)**

(Επειδή είναι εκθετική με «βάση» που εξαρτάται από το χ).

ii) $\chi^2-3\chi+2>0$ για να έχει νόημα ο λογάριθμος.

Όμως $\chi^2-3\chi+2>0$ είναι ανίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Ρίζες $\chi_1=1$ και $\chi_2=2$ άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2-3\chi+2$ είναι

$-\infty$		1		2		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

Επομένως $\chi^2-3\chi+2>0 \Leftrightarrow \chi<1$ ή $\chi>2$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχεις ότι $\mathbf{\chi>4}$ **άρα πεδίο ορισμού το** $(4,+\infty)$

β. **Απάντηση :** Για να βρεις το πεδίο ορισμού της $f(\chi-1)$ μπορείς να ακολουθήσεις δυο «διαδρομές»

1η «διαδρομή» (κλασική) : Θεωρείς τη συνάρτηση $g(\chi)=\chi-1$ οπότε η $f(\chi-1)=f(g(\chi))$, επομένως η άσκηση «μετατρέπεται» στην :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δίνονται η $f(\chi)=(\chi-4)^{\ln(\chi^2-3\chi+2)}$ και $g(\chi)=\chi-1$, να βρείτε το Π Ο της $f\,o\,g$.

Η g έχει πεδίο ορισμού : A = R

Η f έχει πεδίο ορισμού : . . . (δες **α.** ερώτημα) το διάστημα $(4,+\infty)$**.**

Άρα το πεδίο ορισμού της $f\,o\,g$ είναι $A_1=\{\chi\in R \text{ με } \chi-1>4\} \Leftrightarrow$

$A_1=\{\chi\in R \text{ με } \chi>5\} \Leftrightarrow \mathbf{A_1=(5,+\infty)}$.

2η «διαδρομή» η οποία αποτελεί και **διαφορετική μέθοδο δουλειάς.**

Βρίσκεις πρώτα τον τύπο της συνάρτησης $f\,o\,g$ και μετά βρίσκεις το Π Ο του «τελικού προϊόντος» δηλαδή του τελικού τύπου της $f\,o\,g$.

Προσοχή μόνο, αν γίνουν ενδιάμεσες απλοποιήσεις θα πρέπει να «κρατήσεις» τους **περιορισμούς** μέχρι το τέλος.

Δίνονται η $f(\chi)=(\chi-4)^{\ln(\chi^2-3\chi+2)}$ και $g(\chi)=\chi-1$, να βρείτε την $f\,o\,g$.

Βρίσκεις την $f\,o\,g$: $(f\,o\,g)(\chi)=f(g(\chi))=((\chi-1)-4)^{\ln((\chi-1)^2-3(\chi-1)+2)}=$

$(\chi-5)^{\ln(\chi^2-2\chi+1-3\chi+3+2)} \Leftrightarrow f(g(\chi))=(\chi-5)^{\ln(\chi^2-5\chi+6)}$.

Άρα για το Π Ο της $f(g(\chi))$ έχεις :

i) $\chi-5>0 \Leftrightarrow \mathbf{\chi>5}$. **(1)**

(Επειδή είναι εκθετική με «βάση» που εξαρτάται από το χ).

ii) $\chi^2-5\chi+6>0$ για να έχει νόημα ο λογάριθμος.

Όμως $\chi^2-5\chi+6>0$ είναι ανίσωση 2ου βαθμού. Ρίζες $\chi_1=2$ και $\chi_2=3$

άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2-5\chi+6$ είναι

$-\infty$		2		3		$+\infty$
	+	0	−	0	+	

Επομένως $\chi^2-5\chi+6>0 \Leftrightarrow \chi<2$ ή $\chi>3$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** έχεις ότι $\mathbf{\chi>4}$ **άρα πεδίο ορισμού το** $\mathbf{A_1=(5,+\infty)}$

Πρόσεξε ότι εδώ δεν είχε καθόλου απλοποιήσεις, στην περίπτωση που έχει, πρέπει να κάνεις αυτό που «λέγαμε» στην αρχή.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $D_f = [-3, 1]$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(2\chi - 1)$.

Απάντηση :

Αν θεωρήσεις τη συνάρτηση $g(\chi) = 2\chi - 1$ οπότε η $f(2\chi - 1) = f(g(\chi))$, επομένως η άσκηση «μετατρέπεται» στην : $g(\chi) = 2\chi - 1$ και η f έχει Π Ο το $D_f = [-3, 1]$ να βρείτε το Π Ο της $f \circ g$.

Η g έχει πεδίο ορισμού : $A = R$

Η f έχει πεδίο ορισμού : το διάστημα $D_f = [-3, 1]$ (από την εκφώνηση).

Άρα το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι $A_1 = \{\chi \in R \text{ με } 2\chi - 1 \in [-3, 1]\}$.

Όμως $2\chi - 1 \in [-3, 1] \Leftrightarrow -3 \le 2\chi - 1 \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 2\chi \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \chi \le 1 \Leftrightarrow$ $\chi \in [-2, 1]$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = 3\chi + \alpha$ και $g(\chi) = \beta\chi + 2$, $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε την σχέση των α, β έτσι ώστε η συνάρτηση $f - g$ να τέμνει τον $\chi'\chi$ στο σημείο $A(1, 0)$.

β. Να βρείτε τις τιμές των α, β έτσι ώστε να ισχύει το **α.** ερώτημα και επί πλέον $g \circ f = f \circ g$.

Απάντηση :

α. Για να τέμνει η $f - g$ τον $\chi'\chi$ στο σημείο $A(1, 0)$ πρέπει $(f - g)(1) = 0$ $\Leftrightarrow f(1) - g(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + \alpha - (\beta + 2) = 0 \Leftrightarrow$ **$\alpha - \beta = -1$.**

β. Για να ισχύει το **α.** ερώτημα πρέπει **$\alpha - \beta = -1$ (1)** .

Οι συναρτήσεις του **α.** ερωτήματος έχουν πεδία ορισμού **$A = B = R$.**

Άρα ορίζονται οι $g \circ f$, $f \circ g$ και είναι :

$$\begin{cases} (g \circ f)(\chi) = g(f(\chi)) = \beta(3\chi + \alpha) + 2 = 3\beta\chi + \alpha\beta + 2 \\ (f \circ g)(\chi) = f(g(\chi)) = 3(\beta\chi + 2) + \alpha = 3\beta\chi + \alpha + 6 \end{cases}.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν επί πλέον είναι $gof = fog \Leftrightarrow 3\beta\chi + \alpha\beta + 2 = 3\beta\chi + \alpha + 6 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta - \alpha = 4$ **(2)**

Από **(1)** : $\beta = \alpha + 1$

Από **(2)** : $\alpha\beta - \alpha = 4 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha(\alpha+1) - \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\alpha = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \beta = 3 \\ \alpha = -2, \beta = -1 \end{cases}$$

9. Έστω η συνάρτηση $g(\chi) = \sqrt{4 - \chi^2}$, να βρείτε μια συνάρτηση f που να ικανοποιεί τη σχέση : $(gof)(\chi) = 2|\eta\mu\chi|$.

Απάντηση :

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(\chi) = \sqrt{4 - \chi^2}$ έχεις : $4 - \chi^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\chi^2 - 4 \leq 0 \ \ldots \ \chi \in [-2, 2]$.

Είναι $(gof)(\chi) = 2|\eta\mu\chi| \Leftrightarrow g(f(\chi)) = 2|\eta\mu\chi|$ (1) και

$$g(\chi) = \sqrt{4 - \chi^2} \Leftrightarrow g(f(\chi)) = \sqrt{4 - [f(\chi)]^2} \quad (2).$$

Άρα $\sqrt{4 - [f(\chi)]^2} = 2|\eta\mu\chi| \Leftrightarrow 4 - [f(\chi)]^2 = 4|\eta\mu\chi|^2 \Leftrightarrow$

$4 - [f(\chi)]^2 = 4(\eta\mu\chi)^2 \Leftrightarrow [f(\chi)]^2 = 4(1 - \eta\mu^2\chi) = 4\sigma\upsilon\nu^2\chi$

$\Leftrightarrow |f(\chi)| = 2|\sigma\upsilon\nu\chi| \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi \\ f(\chi) = -2\sigma\upsilon\nu\chi \end{cases}$ και επειδή ζητάει **μια** συνάρτηση

και όχι **την** συνάρτηση άρα κάλλιστα η απάντηση μπορεί να είναι :

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση μπορεί να είναι η $f(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi$.

Μια άλλη μπορεί να είναι η $f(\chi) = -2\sigma\upsilon\nu\chi$, ή η $f(\chi) = 2\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \chi)$ που προφανώς επίσης ικανοποιεί την σχέση πιο πάνω.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

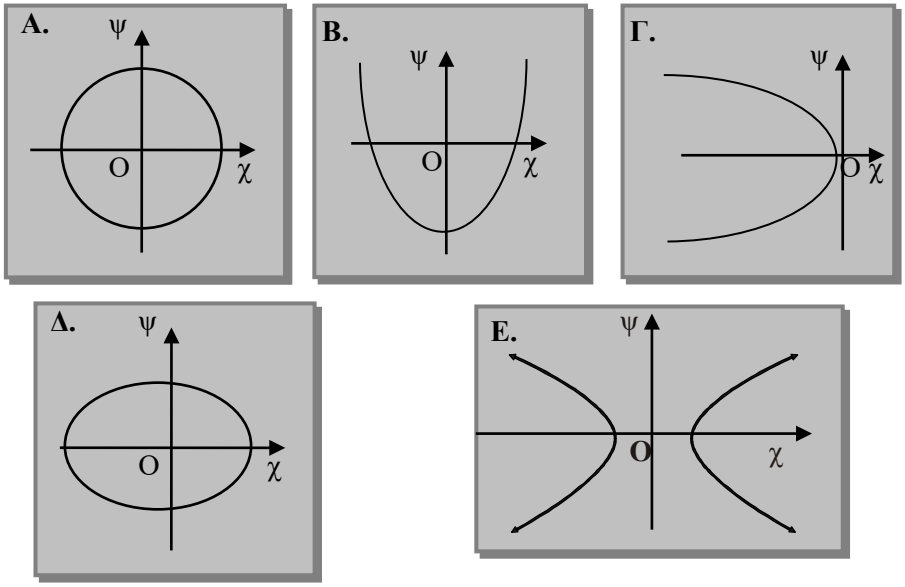
		Σ	**Λ**
1.	Η σχέση $f: N \to \{0, 1\}$ με $f(\chi) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \chi \text{ άρτιος} \\ 1, & \text{αν } \chi \text{ περιττός} \end{cases}$ είναι συνάρτηση.	☐	☐
2.	Για τη συνάρτηση $f(\chi) = \ln\chi$, $\chi > 0$, ισχύει : $f(\chi \cdot \psi) = f(\chi) + f(\psi)$, για κάθε $\chi, \psi > 0$.	☐	☐
3.	Για τη συνάρτηση $f(\chi) = e^{\chi}$, $\chi \in R$, ισχύει : $f(\chi + \psi) = f(\chi) \cdot f(\psi)$ για κάθε $\chi, \psi \in R$.	☐	☐
4.	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\lvert f \rvert$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.	☐	☐
5.	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\lvert -f \rvert$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.	☐	☐
6.	Για να βρεις τα σημεία τομής της C_f με τον $\chi'\chi$ βάζεις στον τύπο της f το $\chi = 0$	☐	☐
7.	Για να βρεις τα σημεία τομής της C_f με τον $\chi'\chi$ βάζεις στον τύπο της f το $\psi = 0$.	☐	☐
8.	Δύο συναρτήσεις f, g με Π. Ο. το R είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $\chi \in R$, ώστε να ισχύει $f(\chi) = g(\chi)$.	☐	☐
9.	Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία.	☐	☐
10.	Αν δυο συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού Α τότε το πηλίκο τους έχει και αυτό πεδίο ορισμού το σύνολο Α.	☐	☐

Λιβαδειά

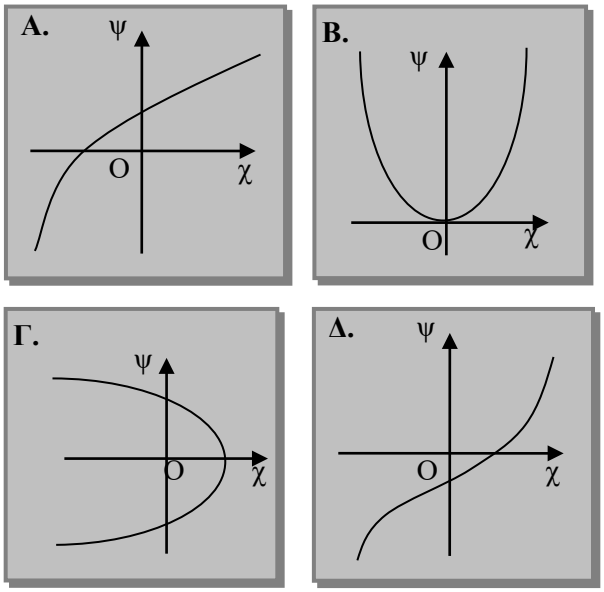
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Από τα παρακάτω διαγράμματα, **γραφική παράσταση συνάρτησης** είναι το διάγραμμα. Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα.



2. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Να κυκλώσετε το σωστό γράμμα



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)=\dfrac{\chi-2}{\chi^2+4}$ είναι το σύνολο :

i) $R-\{-2,2\}$ **ii)** R **iii)** $R-\{-2\}$ **iv)** $[2,+\infty)$ **v)** $R-\{2\}$

4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)=\ln(9-\chi^2)$ είναι το σύνολο

i) $R-\{-3,3\}$ **ii)** $R-\{3\}$ **iii)** $[3,+\infty)$

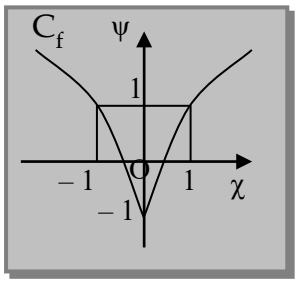
iv) $(-3,3)$ **v)** $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

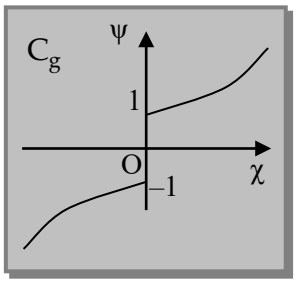
5. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi)=\ln(2\chi-1)$ είναι το σύνολο

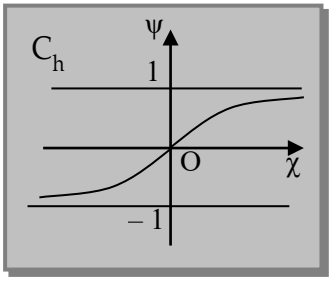
i) **R** **ii)** $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ **iii)** $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

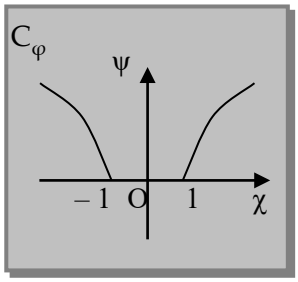
iv) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **v)** $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

6. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων: f, g, h, φ.









Το διάστημα $(-1,1)$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

i) **f** **ii)** **g** **iii)** **h** **iv)** **φ**

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Αντιστοίχησης

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\sqrt{7-\chi}$ και $g(\chi)=\sqrt{\chi-3}$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στο πεδίο ορισμού της που γράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. f	**α.** R
2. g	**β.** $(-\infty, 7]$
3. $f+g$	**γ.** $[3, 7]$
4. $f-g$	**δ.** $(3, 7]$
5. $f\cdot g$	**ε.** $[3, 7)$
6. $\frac{f}{g}$	**ζ.** $(3, 7)$
7. $\frac{g}{f}$	**η.** $[3, +\infty)$

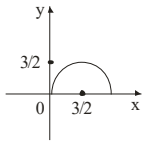
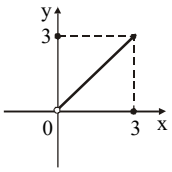
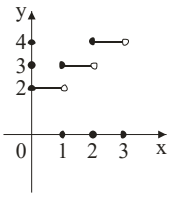
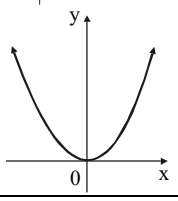
Πίνακας ΙΙ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $D_f = R$
2. 	**β.** $D_f = R - \{0\}$
3. 	**γ.** $D_f = [0, 3]$
4. 	**δ.** $D_f = (0, 3]$
	ε. $D_f = [0, 3)$
	ζ. $D_f = (0, 3)$
	η. $D_f = [0, +\infty)$

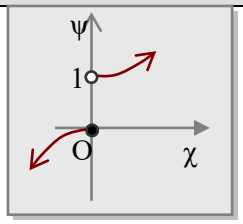
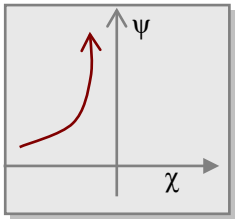
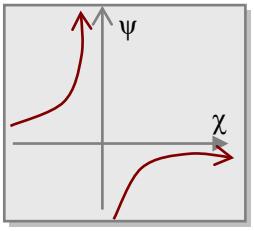
Πίνακας ΙΙ

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1	
2.	
3.	
4.	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το σύνολο τιμών της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 	**α.** $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	β. **R**
2. 	**γ.** $(0,+\infty)$
	δ. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$
3. 	**ε.** $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$
	ζ. $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$.

Πίνακας ΙΙ

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1.	
2.	
3.	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Γενικά Θέματα Λυμένα.

Παραδείγματα στην εύρεση του Πεδίου Ορισμού.

1. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης f με $f(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi-7}}{2\chi-4}$.

Απάντηση :

Ο τύπος της f έχει ρίζα άρα πρέπει $3\chi - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 3\chi \geq 7 \Leftrightarrow \chi \geq \dfrac{7}{3}$.

Όμως στον τύπο υπάρχει και παρονομαστής, άρα $2\chi - 4 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi = 2}$.

Τελικά Π Ο είναι το $D_f = \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right) - \{2\} \Leftrightarrow D_f = \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right)$, διότι έτσι

κι' αλλιώς το $2 \notin \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right)$ επομένως δεν χρειάζεται η εξαίρεσή του.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης g με $g(\chi)=\dfrac{2x+5}{\sqrt{\chi-1}}$.

Απάντηση :

Στην $g(\chi)=\dfrac{2x+5}{\sqrt{\chi-1}}$ υπάρχει **ρίζα στον παρονομαστή** επομένως $\begin{cases}\chi-1\geq 0\\ \chi-1\neq 0\end{cases}$

που **συμπυκνώνονται** στην **$\chi - 1 > 0$**.

Άρα για το D_g έχεις $\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ άρα $D_g=(1,+\infty)$.

3. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-5}{\chi-3}+\dfrac{3}{\chi^2-4}$.

Απάντηση :

Στην φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-5}{\chi-3}+\dfrac{3}{\chi^2-4}$ πρέπει $\chi - 3 \neq 0$ και $\chi^2 - 4 \neq 0$.

Όμως $\chi - 3 = 0 \Leftrightarrow \chi = 3$ και $\chi^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi = \pm 2$.

Τελικά $D_\varphi = R-\{\pm 2, 3\}$.

Τότε (και μόνον τότε) η φ γίνεται $\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-5}{\chi-3}+\dfrac{3}{\chi^2-4} \Leftrightarrow$

$\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-5}{\chi-3}+\dfrac{\chi-2}{(\chi-2)(\chi+2)} \Leftrightarrow \varphi(\chi)=\dfrac{3\chi-5}{\chi-3}+\dfrac{1}{\chi+2}$.

Δηλαδή ο τύπος της $\varphi(\chi)$ απλοποιείται αλλά **προσοχή το D_φ εξακολουθεί να είναι το** $D_\varphi = R-\{\pm 2, 3\}$ και παρ' όλο που δεν υπάρχει πια στον παρονομαστή ο παράγοντας $\chi - 2$, το χ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 .

4. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης θ με $\theta(\chi)=\dfrac{\chi-1}{\chi^2-4}-\dfrac{\sqrt{\chi+1}}{3\chi}$.

Απάντηση :

Στην $\theta(\chi)=\dfrac{\chi-1}{\chi^2-4}-\dfrac{\sqrt{\chi+1}}{3\chi}$ πρέπει ταυτόχρονα : $\begin{cases}\chi^2-4\neq 0\\ 3\chi\neq 0\\ \chi+1\geq 0\end{cases}$.

Όμως $\chi^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$ **$\chi = \pm 2$** και $3\chi \neq 0 \Leftrightarrow$ **$\chi \neq 0$** και $\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$ **$\chi \geq -1$** .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τελικά είναι $D_\theta = [-1, +\infty) - \{0, \pm 2\} = [-1, +\infty) - \{0, 2\}$ γιατί το -2 δεν υπάρχει στο $[-1, +\infty)$ έτσι κι' αλλιώς .

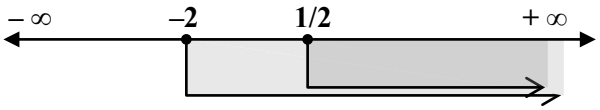
5. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης p με $p(\chi) = \sqrt{2\chi - 1} + \sqrt{\chi + 2}$.

Απάντηση :

Για την $p(\chi) = \sqrt{2\chi - 1} + \sqrt{\chi + 2}$ πρέπει $2\chi - 1 \geq 0$ **και** $\chi + 2 \geq 0$.

Όμως $2\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi \geq 1 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{2}$ **και** $\chi + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -2$

όποτε αν συναληθεύσεις τις ανισώσεις έχεις



Άρα Π Ο το $D_p = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ....τελικά.

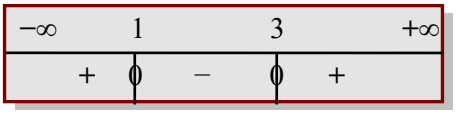
6. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης f με $f(\chi) = \frac{3\chi + 1}{\sqrt{8 - 4\chi}} + \frac{1}{\sqrt{\chi^2 - 4\chi + 3}}$.

Απάντηση :

Ο τύπος της f έχει ριζικά σε **παρονομαστή** γι' αυτό πρέπει :

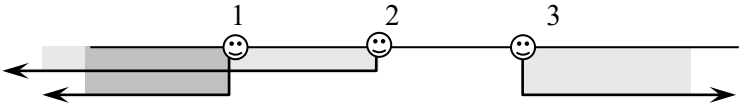
i) $8 - 4\chi > 0 \Leftrightarrow 8 > 4\chi \Leftrightarrow 4\chi < 8 \Leftrightarrow \chi < 2$ και

ii) $\chi^2 - 4\chi + 3 > 0 \Leftrightarrow \ldots$ $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 3$ άρα πίνακας πρόσημου για το το $\chi^2 - 4\chi + 3$ είναι



οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2 - 4\chi + 3 > 0$ είναι $\chi < 1$ **ή** $\chi > 3$.

Έτσι για να βρεις το Π Ο πρέπει να συναληθεύσεις τις ανισώσεις :



Οπότε με βάση και την γραφική επίλυση το Π Ο είναι το $D_f = (-\infty, 1)$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης με τύπο : $\varphi(\chi)=\dfrac{\ln\left(\chi^2-8\chi+15\right)}{\sqrt{16-\chi^2}}$.

Απάντηση :

Για να ορίζεται η φ θα πρέπει να ισχύουν :

$$\begin{cases}\chi^2-8\chi+15 \;>\; 0 & \text{για να έχει νόημα ο λογάριθμος}\\ 16-\chi^2 \;>\; 0 & \text{για να έχει νόημα η ρίζα}\end{cases}$$

α) $\chi^2-8\chi+15>0 \Leftrightarrow \ldots$ $\rho_1=3$ και $\rho_2=5$ άρα πίνακας πρόσημου για το

το $\chi^2-8\chi+15$ είναι

$-\infty$		3		5		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2-8\chi+15>0$ είναι $\chi<3$ **ή** $\chi>5$.

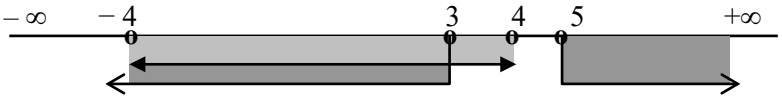
β) $16-\chi^2>0 \Leftrightarrow \chi^2-16<0 \ldots$ $\rho_1=-4$ και $\rho_2=4$ άρα πίνακας πρόσημου για το :

το χ^2-16 είναι

$-\infty$		-4		4		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2-16<0$ είναι $-4<\chi<4$.

Έτσι για να βρεις το Π Ο πρέπει να συναληθεύσεις τις ανισώσεις :



Οπότε με βάση και την γραφική επίλυση το Π Ο είναι το $D_f=(-4,3)$.

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(\chi)=\ln\left(\dfrac{\chi+1}{1-\chi}\right)$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού να αποδείξετε ότι $f(\chi)+f(\psi)=f\left(\dfrac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}\right)$

Απάντηση : α) πρέπει $\chi\neq 1$

β) Από τον ορισμό του λογαρίθμου θα πρέπει να ισχύει : $\dfrac{\chi+1}{1-\chi}>0 \Leftrightarrow$

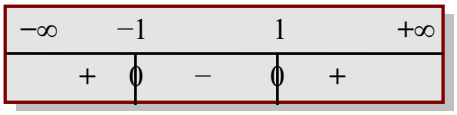
$\Leftrightarrow (\chi+1)(\chi-1)<0 \Leftrightarrow -\chi^2+1>0 \Leftrightarrow \chi^2-1<0 \Leftrightarrow \ldots$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$ άρα πίνακας πρόσημου

για το $\chi^2 - 1$ είναι

οπότε λύσεις της



ανίσωσης : $\chi^2 - 1 < 0$ είναι $-1 < \chi < 1$. Έχεις λοιπόν ότι $D_f = (-1, 1)$.

✓ Για το δεύτερο ερώτημα έχεις : $f(\chi) + f(\psi) = \ln\left(\frac{\chi+1}{1-\chi}\right) + \ln\left(\frac{\psi+1}{1-\psi}\right) =$

$\ln\left(\frac{\chi+1}{1-\chi} \cdot \frac{\psi+1}{1-\psi}\right) = \ln\left(\frac{(\chi+1)(\psi+1)}{(1-\chi)(1-\psi)}\right)$.

Αν στον τύπο της $f(\chi)$ θέσεις όπου χ το $\frac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}$ το 2ο μέλος γίνεται :

$$f\left(\frac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}}{1-\frac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}}\right) = \ln\left(\frac{1+\chi\psi+\chi+\psi}{1+\chi\psi-\chi-\psi}\right) = \ln\left(\frac{(1+\chi)(\psi+1)}{(1-\chi)(1-\psi)}\right).$$

Οπότε είναι προφανές ότι καταλήγεις στο ίδιο, άρα $f(\chi) + f(\psi) = f\left(\frac{\chi+\psi}{1+\chi\psi}\right)$.

9. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \left(\frac{3-\chi}{2\chi-1}\right)^{\chi}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Απάντηση :

Πρέπει $2\chi - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \frac{1}{2}$ και σύμφωνα με τον ορισμό της εκθετικής

συνάρτησης θα πρέπει επίσης $\frac{3-\chi}{2\chi-1} > 0 \Leftrightarrow (3-\chi)(2\chi-1) > 0 \Leftrightarrow$

$-2\chi^2 + 7\chi - 3 > 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 - 7\chi + 3 < 0$ . . . $\rho_1 = \frac{1}{2}$ και $\rho_2 = 3$ άρα πίνακας

πρόσημου για το

$2\chi^2 - 7\chi + 3$ είναι



Λιβαδειά

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $2\chi^2 - 7\chi + 3 < 0$ είναι $\frac{1}{2} < \chi < 3$.

Έχεις λοιπόν ότι $D_f = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

10. Να βρεθεί το Π Ο της συνάρτησης με τύπο :

$$\varphi(\chi) = \left[\ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5\right)\right]^{\sqrt{\ln(\chi-1)-2}} .$$

✳ Η άσκηση περιλαμβάνει σχεδόν όλες τις περιπτώσεις, χωρίς να είναι δύσκολη, είναι όμως ένα **καλό δείγμα συνδυασμού** αρκετών περιπτώσεων. Είναι δε γεγονός πως σε παρόμοιες περιπτώσεις στις εξετάσεις το πεδίο ορισμού δίνεται στην εκφώνηση , επειδή αντικειμενικός σκοπός των εξετάσεων δεν είναι να κάνει ακροβασίες με το πεδίο ορισμού, αλλά να εξεταστούν τα υπόλοιπα (πιο σημαντικά) θέματα ανάλυσης.

Απάντηση :

Για να έχει νόημα η φ πρέπει :

i) $\ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right) > 0$, επειδή είναι βάση σε εκθετική συνάρτηση.

ii) $\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5 > 0$, για να έχει νόημα ο $\ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right)$.

iii) $e^{\chi} - 3 \geq 0$, για να έχει νόημα η $\sqrt{e^{\chi} - 3}$.

iv) $\ln(\chi - 1) - 2 \geq 0$, για να έχει νόημα η $\sqrt{\ln(\chi - 1) - 2}$.

v) $\chi - 1 > 0$, για να έχει νόημα ο $\ln(\chi - 1)$.

i) $\ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right) > 0 \cdot \ln e \Leftrightarrow$

$$\ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right) > \ln e^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5)\right) > \ln 1 \\ \text{και } \ln \text{ γν. αύξουσα} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{e^{\chi} - 3} - 5 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^{\chi} - 3} > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\chi} - 3 > 36 \\ \text{αφού } \sqrt{e^{\chi} - 3}, 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^{\chi} > 39 \Leftrightarrow$$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\begin{cases}\ln\left(e^{\chi}\right) > \ln 39 \\ \text{αφού ln γν. αύξουσα}\end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\chi > \ln 39.}$$

ii) $\sqrt{e^{\chi}-3}-5>0 \Leftrightarrow \sqrt{e^{\chi}-3}>5 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\chi}-3>25 \\ \text{αφού } \sqrt{e^{\chi}-3},\ 5\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow e^{\chi}>28 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\ln\left(e^{\chi}\right) > \ln 28 \\ \text{αφού ln γν. αύξουσα}\end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\chi > \ln 28.}$$

iii) $e^{\chi}-3\geq 0 \Leftrightarrow e^{\chi}\geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\left(e^{\chi}\right)\geq \ln 3 \\ \text{αφού ln γν. αύξουσα}\end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{\chi \geq \ln 3}$.

iv) $\ln(\chi-1)-2\geq 0 \Leftrightarrow \ln(\chi-1)\geq 2 \Leftrightarrow \ln(\chi-1)\geq 2\cdot\ln e \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\ln(\chi-1)\geq \ln e^2 \\ \text{και ln γν. αύξουσα}\end{cases} \Leftrightarrow \chi-1\geq e^2 \Leftrightarrow \mathbf{\chi \geq e^2+1}$$

v) $\chi-1>0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{\chi > 1.}$ Οπότε προφανώς $D_f=(\ln 39, +\infty)$.

11. Αν για μια συνάρτηση $f: R\to R$ ισχύει : $f(\chi+\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ **(1),** για κάθε $\chi, \psi \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$.

β. Η f είναι περιττή.

γ. $f(2\chi)=2f(\chi)$.

δ. $f(\alpha\cdot\chi)=\alpha\cdot f(\chi)$ για κάθε $\alpha \in Z, \alpha>0$.

Απάντηση :

α. Βάλε στην **(1)** $\chi=\psi=0$ και έχεις : $f(0+0)=f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)=2f(0)$

$\Leftrightarrow f(0)=0$.

β. Βάλε στην **(1)** $\psi=-\chi$ και έχεις : $f(\chi-\chi)=f(\chi)+f(-\chi) \Leftrightarrow$

$f(0)=f(\chi)+f(-\chi) \Leftrightarrow f(\chi)+f(-\chi)=0 \Leftrightarrow f(-\chi)=-f(\chi)$,

άρα η **f είναι περιττή.**

Λιβαδειά

γ. Βάλε στην **(1)** $\psi = \chi$ και έχεις : $f(\chi+\chi) = f(\chi)+f(\chi) \Leftrightarrow f(2\chi) = 2f(\chi)$.

δ. Είναι $f(\alpha\chi) = f(\underbrace{\chi+\chi+\cdots+\chi}_{\alpha\ \text{όροι}})$ αφού $\alpha \in Z,\ \alpha > 0 \Leftrightarrow$

$$f(\alpha\cdot\chi) = \underbrace{f(\chi)+f(\chi)+\cdots+f(\chi)}_{\alpha\ \text{όροι}} \Leftrightarrow f(\alpha\cdot\chi) = \alpha\cdot f(\chi).$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύει : $f(\chi) = (\lambda+2)\chi^2 + \mu\cdot\chi + \mu - 1$ και $D_f = [0, 3)$.

α. Να βρείτε τα λ, μ έτσι ώστε : $f(1) = 2$ και η C_f να τέμνει τον ψ΄ψ στο – 1.

β. Αν $\lambda = 1$ και $\mu = 0$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $f(\chi^2 - 1)$.

ii) Να βρείτε μια τουλάχιστον συνάρτηση g αν είναι γνωστό ότι $(f\,o\,g)(\chi) = 3\chi^2 - 6\chi + 2$.

Απάντηση :

α. $f(1) = 2 \Leftrightarrow f(\chi) = (\lambda+2)1^2 + \mu\cdot 1 + \mu - 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda + 2 + \mu + \mu - 1 = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda + 2\mu = 1}$ **(1).**

Αν η C_f τέμνει τον ψ΄ψ στο – 1 τότε $f(0) = -1 \Leftrightarrow \mu - 1 = -1 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\mu = 0}$ **(2).**

(1), (2) $\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 1}$ και $\boldsymbol{\mu = 0}$ άρα η συνάρτηση έχει τύπο $f(\chi) = 3\chi^2 - 1$

β. Αν $\lambda = 1$ και $\mu = 0$ τότε η συνάρτηση έχει τύπο $f(\chi) = 3\chi^2 - 1$ και $D_f = [0, 3)$.

i) Για το $D_{f(\chi^2-1)}$ θα έχεις : πρέπει : $\chi^2 - 1 \in [0, 3) \Leftrightarrow 0 \le \chi^2 - 1 < 3$.

1ον $\chi^2 - 1 \ge 0$, το $\chi^2 - 1$ ρίζες το ± 1 άρα πίνακας προσήμου για το $\chi^2 - 1$ είναι:

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

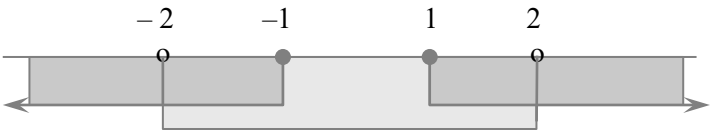
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα $\chi^2-1\geq 0 \Leftrightarrow \chi\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

2ον $\chi^2-1<3$, το χ^2-4 έχει ρίζες ± 2 άρα πίνακας προσήμου για το χ^2-4 είναι :

$-\infty$		-2		2		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\chi^2-1<3 \Leftrightarrow \chi\in(-2,2)$



Άρα πεδίο ορισμού της $f(\chi^2-1)$ το $D_{f(\chi^2-1)}(-2,-1]\cup[1,2)$

β. ii) Από την **(1)** : $f(\chi)=3\chi^2-1 \Leftrightarrow f(t)=3t^2-1$ **(3)** και

(2) : $(fog)(\chi)=3\chi^2-6\chi+2 \Leftrightarrow f(g(\chi))=3\chi^2-6\chi+2$, θέτω

$t=g(\chi)$ και έχω $f(t)=3\chi^2-6\chi+2$ **(4)**

Από **(3)** και **(4)** $\Leftrightarrow 3t^2-1=3\chi^2-6\chi+2 \Leftrightarrow$

$3t^2=3\chi^2-6\chi+3=3(\chi^2-2\chi+1) \Leftrightarrow t^2=\chi^2-2\chi+1=(\chi-1)^2$ άρα **μία** συνάρτηση που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι η **$t=\chi-1$**

13. Για μια συνάρτηση $f : R^* \to R$ ισχύει : $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ **(1)**.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1)=0$.

β. $f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R^*$.

γ. $f(\kappa\cdot\chi)+f\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)=2f(\chi)$ για κάθε $\kappa\in R, \kappa\neq 0$.

Απάντηση :

α. Βάλε στην **(1)** $\psi=1$ και έχεις : $f(\chi)=f(\chi)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$.

Λιβαδειά

β. Βάλε στην **(1)** $\psi=\frac{1}{\chi}$ και έχεις : $f(1)=f(\chi)+f\left(\frac{1}{\chi}\right)\Leftrightarrow$

$0=f(\chi)+f\left(\frac{1}{\chi}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi),\ \chi\in R^*$.

γ. Είναι $f(\kappa\cdot\chi)=f(\chi)+f(\kappa)$, $f\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)=f\left(\chi\cdot\frac{1}{\kappa}\right)=f(\chi)+f\left(\frac{1}{\kappa}\right)=$

$f(\chi)-f(\kappa)$ αφού $f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi),\ \chi\in R^*$, άρα αν τα προσθέσεις κατά

μέλη έχεις : $f(\kappa\cdot\chi)+f\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)=\left(f(\chi)+f(\kappa)\right)+\left(f(\chi)-f(\kappa)\right)=2f(\chi)$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(\chi)=\sqrt{e^{\chi}-2}+\chi^2+3\chi-2$ και g με

$g(\chi)=\chi^2+3\chi+1$.

Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση C_f της f

είναι «πάνω» από την γραφική παράσταση C_g της g.

Απάντηση :

Στην αρχή, πριν βρεις οτιδήποτε, πρέπει να εξασφαλίσεις ότι οι συναρτήσεις έχουν νόημα, δηλαδή να βρεις τα Π Ο.

Άρα πρέπει $e^{\chi}-2\geq 0\Leftrightarrow e^{\chi}\geq 2\Leftrightarrow \ln e^{\chi}\geq \ln 2\Leftrightarrow \chi\geq \ln 2$.

Για να βρεις τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση C_f της f είναι «πάνω» από την γραφική παράσταση C_g της g πρέπει να λύσεις την ανίσωση :

$f(\chi)-g(\chi)>0\Leftrightarrow\sqrt{e^{\chi}-2}+\chi^2+3\chi-2-(\chi^2+3\chi+1)>0\Leftrightarrow\sqrt{e^{\chi}-2}-3>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{e^{\chi}-2}>3\\ \sqrt{e^{\chi}-2},3>0\end{cases}\Leftrightarrow e^{\chi}-2>9\Leftrightarrow e^{\chi}>11\Leftrightarrow \ln e^{\chi}>\ln 11$ άρα

$\chi>\ln 11\geq\ln 2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=\sqrt{\ln(\chi-1)-2}-2$.

Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση C_f της f είναι «πάνω» από τον $\chi'\chi$.

Απάντηση :

Στην αρχή, πριν βρεις οτιδήποτε, πρέπει να εξασφαλίσεις ότι οι συναρτήσεις έχουν νόημα, δηλαδή να βρεις τα Π Ο.

Άρα πρέπει να έχει νόημα ο ln δηλαδή $\chi - 1 > 0 \Leftrightarrow$ **$\chi > 1$** και ταυτόχρονα :

$\ln(\chi-1)-2\geq 0 \Leftrightarrow \ln(\chi-1)\geq 2 \Leftrightarrow \ln(\chi-1)\geq 2\cdot\ln e \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\ln(\chi-1)\geq \ln e^2\\ \text{και } \ln \text{ γν. αύξουσα}\end{cases} \Leftrightarrow \chi-1\geq e^2 \Leftrightarrow \boxed{\chi\geq e^2+1}.$$

Οι δυο ανισότητες συναληθεύουν όταν **$\chi \geq e^2+1$**. **(1)**

Οπότε για να είναι η γραφική παράσταση C_f της f είναι «πάνω» από τον $\chi'\chi$ πρέπει επί πλέον να ισχύει :

$$\sqrt{\ln(\chi-1)-2}-2>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\ln(\chi-1)-2}>2\\ \sqrt{\ln(\chi-1)-2},\ 2>0\end{cases} \Leftrightarrow \ln(\chi-1)-2>4 \Leftrightarrow$$

$\ln(\chi-1)>2$ που όπως είδες πιο πάνω $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ **$\chi \geq e^2+1$**. **(2)**

Οι **(1)** και **(2)** συναληθεύουν όταν **$\chi \geq e^2+1$** $\Leftrightarrow$ **$\chi \in (e^2+1,+\infty)$**.

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $D_f = D_g$ κοινό πεδίο ορισμού.

Να δείξετε ότι :

i) Αν f και g **άρτιες** τότε $f\cdot g$ και $f\circ g$ επίσης **άρτιες.**

ii) Αν f και g **περιττές** τότε $f\cdot g$ **άρτια** ενώ $f\circ g$ **περιττή.**

iii) Αν f **άρτια** και g **περιττή** τότε $f\cdot g$ **περιττή** και $f\circ g$ **άρτια.**

Απάντηση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Αν f και g **άρτιες** τότε $(f\cdot g)(-\chi)=f(-\chi)g(-\chi)\underset{f,g\ \text{άρτιες}}{=}$

$f(\chi)g(\chi)=(f\cdot g)(\chi)$. Άρα $f\cdot g$ **άρτια**.

Και $(f\,o\,g)(-\chi)=f(g(-\chi))\underset{g\ \text{άρτιες}}{=}f(g(\chi))=(f\,o\,g)(\chi)$.

Άρα $f\,o\,g$ **άρτια**.

ii) Αν f και g **περιττές** τότε $(f\cdot g)(-\chi)=f(-\chi)g(-\chi)\underset{f,g\ \text{περττές}}{=}$

$(-f(\chi))(-g(\chi))=(f\cdot g)(\chi)$. Άρα $f\cdot g$ **άρτια**.

Και $(f\,o\,g)(-\chi)=f(g(-\chi))\underset{g\ \text{περιττή}}{=}f(-g(\chi))\underset{f\ \text{περιττή}}{=}-f(g(\chi))=-(f\,o\,g)(\chi)$.

Άρα $f\,o\,g$ **περιττή**.

iii) Αν f **άρτια** και g **περιττή** τότε :

$(f\cdot g)(-\chi)=f(-\chi)g(-\chi)\underset{g\ \text{περττή}}{\overset{f\ \text{άρτια}}{=}}f(\chi)(-g(\chi))=-(f\cdot g)(\chi)$.

Άρα $f\cdot g$ **περιττή**.

Και $(f\,o\,g)(-\chi)=f(g(-\chi))\underset{g\ \text{περιττή}}{=}f(-g(\chi))\underset{f\ \text{άρτια}}{=}f(g(\chi))=(f\,o\,g)(\chi)$.

Άρα $f\,o\,g$ **άρτια**.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $D_f=D_g$ κοινό πεδίο ορισμού.

Να δείξετε ότι : Αν **f** και **g** **γνησίως αύξουσες** $(\uparrow)$, τότε και η $f\,o\,g$ επίσης **γνησίως αύξουσα** $(\uparrow)$.

Απάντηση :

Αν g **γνησίως αύξουσα** τότε $\chi_1<\chi_2\Leftrightarrow g(\chi_1)<g(\chi_2)$ κα επειδή και η f **γνησίως αύξουσα** άρα θα είναι και $(fg(\chi_1))<f(g(\chi_2))\Leftrightarrow$

$(f\,o\,g)(\chi_1)<(f\,o\,g)(\chi_2)$. Άρα **f o g** **γνησίως αύξουσα**.$(\uparrow)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ασκήσεις στο Πεδίο Ορισμού

1. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) f με $f(\chi) = \dfrac{3\chi^2+5\chi-1}{3\chi-2}$ **β)** g με $g(\chi) = \dfrac{5\chi+2}{2\chi^2-7\chi+3}$

2. Να βρεις το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλάξεις τους παρονομαστές από τα ριζικά :

α) θ με $\theta(\chi) = \sqrt{4-\chi^2} + \sqrt[3]{\chi^2-1}$ **β)** φ με $\varphi(\chi) = \dfrac{\sqrt{36-\chi^2}}{\sqrt{\chi^2-16\chi+63}}$

γ) f με $f(\chi) = \dfrac{\sqrt{36-\chi^2}}{\sqrt{\chi^2-16}-3}$ **δ)** g με $g(\chi) = \dfrac{\sqrt{1-\chi^2}}{\sqrt{\chi}-1}$

3. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) $\omega(\chi) = \dfrac{2\chi}{\ln(\chi-2)}$ **β)** σ με $\sigma(\chi) = \dfrac{\ln(\chi^2-4)}{\ln(\chi-5)}$

4. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(\chi) = \sqrt{\ln(\chi-2)} + \sqrt{\ln(2\chi-1)-2}$ **β)** $g(\chi) = \ln(e^{\chi}-2)$

5. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) θ με $\theta(\chi) = \sqrt{\ln(e^{\chi}-2)-2}$ **β)** φ με $\varphi(\chi) = \ln(\ln\chi+2)$

6. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) r με $r(\chi) = \chi^{\chi}$ **β)** $\varphi(\chi) = (3-\chi)^{\chi-3}$

7. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) φ με $\varphi(\chi) = |\chi-2|^{\sqrt{2\chi-3}}$ **β)** φ με $\varphi(\chi) = \left(\sqrt[2000]{\chi-2001}\right)^{\sqrt{2002-\chi}}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) π με $\pi(\chi)=(1+\ln\chi)^{\chi}$ **β)** φ με $\varphi(\chi)=(3\chi-2)^{2\chi-3}$

9. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) θ με $\theta(\chi)=(\ln\chi)^{\ln(\chi+2)}$ **β)** ω με $\omega(\chi)=(\ln(\chi-1))^{\ln\chi}$

10. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) w με $w(\chi)=\ln(\ln(\ln\chi))$ **β)** φ με $\varphi(\chi)=\sqrt{e^{\chi^2-5\chi+7}-1}$

11. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) q με $q(\chi)=(\chi^2+2\chi+5)^{3\chi^3-5\chi^2+7}$ **β)** φ με $\varphi(\chi)=\sqrt{e^{-\chi^2}}$

12. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλαχτούν οι παρονομαστές από τα ριζικά

α) θ με $\theta(\chi)=\chi+\sqrt[5]{\dfrac{3}{2\chi}}$ **β)** φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi+\sqrt{\chi}}{\chi-\sqrt{\chi}}$ **γ)** φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{2\chi}{\sqrt[3]{\chi}-1}$

13. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) f με $f(\chi)=\dfrac{\chi-1}{\chi^2-5|\chi|+6}$ **β)** g με $g(\chi)=\dfrac{2\chi-1}{2\chi^2+|\chi|}$

14. Να βρεις το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλάξεις τους παρονομαστές από τα ριζικά :

α) φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{36-\chi^2}}{\sqrt{|\chi|-4}}$ **β)** g με $g(\chi)=\dfrac{\sqrt{4-2\chi}}{7-|\chi-4|}$

15. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) p με $p(\chi)=\dfrac{\chi}{1+|\chi|}$ **β)** q με $q(\chi)=\dfrac{2\chi-1}{3-2|\chi|}$ **γ)** θ με $\theta(\chi)=\sqrt{2-|\chi|}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων :

α) f με $f(\chi)=\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi+1}$ **β)** g με $g(\chi)=\sqrt[3]{\sqrt{2}-2\sigma\upsilon\nu\chi}$

γ) m με $m(\chi)=\sqrt[3]{5+3\sigma\upsilon\nu\chi}$.

17. Να βρεις το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλάξεις τους παρονομαστές από τα ριζικά

α) f με $f(\chi)=\sqrt[7]{2\eta\mu\chi-1}$ **β)** g με $g(\chi)=\sqrt[5]{1-\eta\mu\chi}$

γ) n με $n(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\eta\mu(2\chi-1)}}$.

18. Να βρεις το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλάξεις τους παρονομαστές από τα ριζικά :

α) θ με $\theta(\chi)=\dfrac{2\chi-1}{\sqrt{|\chi|-\chi}}$ **β)** t με $t(\chi)=\dfrac{\chi+2}{\sqrt{|\chi|+\chi}}$

γ) u με $u(\chi)=\dfrac{2}{\sqrt{\chi-|\chi|}}$.

19. Να βρεις το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων και να απαλλάξεις τους παρονομαστές από τα ριζικά

α) f με $f(\chi)=\sqrt{\dfrac{4-|\chi|}{1-|\chi|}}$ **β)** φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{|\chi|-1}}{\ln\left(4-\chi^2\right)}$

γ) φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{2\chi-2}{\ln e^{\chi}-2}$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις φ με $\varphi(\chi)=2\chi-1$ και θ με $\theta(\chi)=3\chi^2+5$.

Να βρεθούν οι $\varphi o\theta$, $\theta o\varphi$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(\chi)=2\chi^2+1$ και g με $g(\chi)=\ln\chi-2$.

Να βρεθούν οι $f o g$ $g o f$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi o\theta$ με $(\varphi o\theta)(\chi)=6\chi^2+9$ και φ με $\varphi(\chi)=2\chi-1$. Να βρεθεί η θ.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi o\theta$ με $(\varphi o\theta)(\chi)=6\chi^2+9$ και θ με $\theta(\chi)=3\chi^2+5$. Να βρεθεί η φ.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις $\theta o\varphi$ με $(\theta o\varphi)(\chi)=12\chi^2-12\chi+8$ και φ με $\varphi(\chi)=2\chi-1$. Να βρεθεί θ.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $\theta o\varphi$ με $(\theta o\varphi)(\chi)=12\chi^2-12\chi+8$ και θ με $\theta(\chi)=3\chi^2+5$. Να βρεθεί η φ.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f o g$ με $(f o g)(\chi)=2\ln^2\chi-8\ln\chi+9$ και f με $f(\chi)=2\chi^2+1$. Να βρεθεί η g.

27. Δίνονται οι συναρτήσεις $f o g$ με $(f o g)(\chi)=2\ln^2\chi-8\ln\chi+9$ και g με $g(\chi)=\ln\chi-2$. Να βρεθεί η f.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $g o f$ με $(g o f)(\chi)=\ln\left(2\chi^2+1\right)-2$ και f με $f(\chi)=2\chi^2+1$. Να βρεθεί η g.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $g o f$ με $(g o f)(\chi)=\ln\left(2\chi^2+1\right)-2$ και g με $g(\chi)=\ln\chi-2$. Να βρεθεί η f.

30. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $D_f=[0,5]$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f\left(\chi^2-4\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

31. Αν για τη συνάρτηση φ ισχύει : $\varphi(2\chi-1)=8\chi^2-18\chi+1$ για κάθε $\chi \in R$ τότε :

i) Να βρείτε τον τύπο της.

ii) Να δείξετε ότι $\varphi(2\chi-1)=4\varphi(\chi)+2\chi+25$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού το R.

Να δείξετε ότι :

i) Αν **f** και **g** **γνησίως φθίνουσες** $(\downarrow)$ τότε η **f o g** είναι **γνησίως αύξουσα** $(\uparrow)$.

ii) Αν **f** **γνησίως αύξουσα** $(\uparrow)$ και **g** **γνησίως φθίνουσα** $(\downarrow)$ τότε η **f o g** επίσης **γνησίως φθίνουσα** $(\downarrow)$.

iii) Αν **f** **γνησίως φθίνουσα** $(\downarrow)$ και **g** **γνησίως αύξουσα** $(\uparrow)$ τότε η **f o g** επίσης **γνησίως φθίνουσα** $(\downarrow)$.

Γενικά Θέματα.

1. Αν για μια συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει : $f(\chi+\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ **(1),** για κάθε $\chi, \psi \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$.

β. Η f είναι περιττή.

γ. $f(\chi^2)=\chi f(\chi)$ για κάθε $\chi \in Z, \chi>0$.

2. Αν για μια συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει : $f(\chi+\psi)=\chi f(\chi)+\psi f(\psi)$ **(1),** για κάθε $\chi, \psi \in R$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=0$.

β. $f(1)=0$.

γ. $f(\chi)=0$ για κάθε $\chi \in R$.

Υπόδειξη :
α) θέσε $\chi=\psi=0$.
β) $\chi=1, \psi=-1$ και $\chi=-1, \psi=0$.
γ) $\psi=-\chi$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Για μια συνάρτηση $f : R^* \to R$ ισχύει : $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1)=0$.

β. $f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R^*$.

γ. $f(3\chi)-f\left(\frac{\chi}{3}\right)=2f(3)$.

δ. $f(\kappa\cdot\chi)-f\left(\frac{\chi}{\kappa}\right)=2f(\kappa)$ για κάθε $\kappa\in R$, $\kappa\neq 0$.

4. Για μια συνάρτηση $f : R^* \to R$ ισχύει : $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1)=0$.

β. $f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R^*$.

γ. $f(-1)=0$.

δ. $f(\chi^2)=2f(\chi)$ και γενικότερα $f(\chi^\kappa)=\kappa\cdot f(\chi)$, $\kappa\in N$, $\kappa\geq 2$.

5. Για μια συνάρτηση $f : R^* \to R$ ισχύει: $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$, $f(e)=1$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1)=0$.

β. $f\left(\frac{1}{\chi}\right)=-f(\chi)$ για κάθε $\chi\in R^*$.

γ. $f(-1)=0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(\chi)=f(\chi^2)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. Για μια συνάρτηση $f: R^* \to R$ ισχύει: $f(\chi \cdot \psi) = f(\chi) + f(\psi)$, $f(e) = 1$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $f(1) = 0$.

β. $f\left(\frac{1}{\chi}\right) = -f(\chi)$ για κάθε $\chi \in R^*$.

γ. $f(1) = f(-1) = 0$.

δ. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια .

7. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: R \to R$ ώστε να ισχύει :

$f(\chi) + f(1-\chi) = \chi$ για κάθε $\chi \in R$.

8. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $I(\chi) = \chi$ έχει την ιδιότητα του ουδέτερου στοιχείου στην σύνθεση των συναρτήσεων, δηλαδή να δείξετε ότι :

«Για κάθε συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει $f \circ I = I \circ f = f$ ».

9. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 - 3\chi + 2$.

α. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

γ. Να βρείτε εκείνα τα $\chi \in R$ για τα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει :

$f(\chi + \psi) + f(\chi - \psi) = f(\chi) + 2f(\psi)$ για κάθε $\chi, \psi \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi \in R$ ισχύει ότι $f(|\chi|) = f(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi+1$.

α. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

i) $f_1(\chi)=\dfrac{\chi^2-1}{\chi-1}$, **ii)** $f_2(\chi)=\dfrac{\chi^3+1}{\chi^2-\chi+1}$, **iii)** $f_3(\chi)=\chi\left(\dfrac{1}{\chi}+1\right)$.

β. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις :

i) $f_1(\chi)=\sqrt{\dfrac{\chi-1}{\chi+1}}$ **ii)** $f_2(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi-1}}{\sqrt{\chi+1}}$ **iii)** $f_3(\chi)=\dfrac{\sqrt{(\chi-1)^2}}{\sqrt{\chi^2-1}}$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\dfrac{\chi+1}{\chi-1}$, $g(\chi)=\dfrac{2\chi^2+2\alpha\chi+\alpha}{2\left(\chi^2-1\right)}$, $\alpha\in R$, $\chi>0$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β. Για ποια τιμή του α ισχύει **f = g.**

14. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

i) $f\left(\chi^2\right)$ **ii)** $f(\chi-4)$ **iii)** $f(\ln\chi)$.

15. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει : $2f(\chi)-3f\left(\dfrac{1}{\chi}\right)=\chi^2$, $\chi\neq 0$, να βρείτε το $f(2)$ και το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Βάλε $\chi=2$, $\chi=\dfrac{1}{2}$ και λύσε το σύστημα που προκύπτει.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(\chi)=-\chi+5 \ \ \chi\in[-5,0] \text{ και } f(\chi)=\begin{cases}3\chi+11 & \chi\in(-\infty,2]\\ -4\chi+5 & \chi\in(2,4]\end{cases}.$$

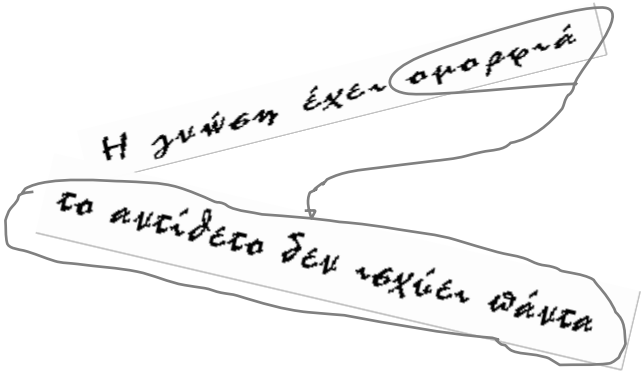
Να βρείτε την $f\circ g$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=2\chi+1$, $g(\chi)=-\chi+5$ και $h(\chi)=3\chi^2$.

Να εξετάσετε αν για αυτές ισχύουν οι σχέσεις

α. $(f+g)oh=foh+goh$.

β. $(f\cdot g)oh=(foh)\cdot(goh)$.



Πάντα θα ισχύει ότι :

Η γνώση με τα χρόνια αυξάνεται και λάμπει

Ενώ η ομορφιά σβήνει και χάνεται.

Περάσει όμως πού τα θέλω και τα δυο ;

Ο.Μ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονοτονία συνάρτησης.

Έστω μια συνάρτηση **φ** με πεδίο ορισμού **Α** και **Δ** ένα διάστημα, υποσύνολο του Α $(\Delta \subseteq A)$.

Ορισμοί

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1 , \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

Συμβολικά $\varphi \uparrow$ στο **Δ**.

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1 , \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

Συμβολικά $\varphi \downarrow$ στο **Δ**.

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως μονότονη συνάρτηση** στο διάστημα Δ όταν **είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' αυτό**.

- ✓ Αν το διάστημα Δ = Α, δηλαδή αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της Α, τότε την αναφέρουμε ως **γνησίως μονότονη συνάρτηση**, χωρίς δηλαδή αναφορά σε διάστημα.

- ✓ Μπορεί μια συνάρτηση **να μην είναι γνησίως μονότονη** σ' ολόκληρο το Πεδίο Ορισμού της **,** αλλά να είναι γνησίως μονότονη **σε κάθε ένα** από τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται το Πεδίο Ορισμού της, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.**

Παράδειγμα :

1. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2$. Η f έχει πεδίο ορισμού το **Α = R** .

- ✓ Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, επειδή $0 \le \chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow$

$0 \le \chi_1^2 < \chi_2^2 \Leftrightarrow 0 \le 2\chi_1^2 < 2\chi_2^2 \Leftrightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$. Άρα $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, επειδή $\chi_1 < \chi_2 \le 0 \Leftrightarrow$

$\chi_1^2 > \chi_2^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\chi_1^2 > 2\chi_2^2 \ge 0 \Leftrightarrow f(\chi_1) > f(\chi_2)$. Άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0]$.

Προφανώς η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο **A = R** αφού αλλάζει μονοτονία στα δυο διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Επειδή όμως είναι γνησίως μονότονη **σε κάθε ένα** από τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται το Πεδίο Ορισμού της, την ονομάζουμε **γνησίως μονότονη κατά διαστήματα**.

2. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{1}{\chi}$.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = R^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, επειδή $0 \le \chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_1} > \frac{1}{\chi_2} \Leftrightarrow$

$f(\chi_1) > f(\chi_2)$. Άρα $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$.

Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, επειδή $\chi_1 < \chi_2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_1} > \frac{1}{\chi_2} \Leftrightarrow$

$f(\chi_1) > f(\chi_2)$. Άρα $f \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$.

Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $A = R^*$ αφού $\chi_1 < 0 < \chi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_1} < 0 < \frac{1}{\chi_2}$

(είναι $\frac{1}{\chi_1} < 0$ και $\frac{1}{\chi_2} > 0$). Άρα $f(\chi_1) < f(\chi_2)$ όταν $\chi_1 < 0 < \chi_2$ δηλαδή

διαφορετική σχέση από αυτή που ισχύει όταν τα $\chi_1, \chi_2 \in (0, +\infty)$ ή

$\chi_1, \chi_2 \in (-\infty, 0)$.

Παρατηρήστε ότι δεν αρκεί μια συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη **σε κάθε ένα** από τα διαστήματα στα οποία χωρίζεται το Πεδίο Ορισμού της, ούτε να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στα διαστήματα αυτά, για να είναι και γνησίως μονότονη σ' όλο το Πεδίο Ορισμού της.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έστω μια συνάρτηση **φ** με πεδίο ορισμού **Α** και **Δ** ένα διάστημα, υποσύνολο του Α $(\Delta \subseteq A)$.

Ορισμοί

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **αύξουσα** (απλά) στο διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1 , \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) \leq \varphi(\chi_2)$.

Συμβολικά $\varphi\uparrow$ στο **Δ**.

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται **φθίνουσα** (απλά) στο διάστημα Δ όταν :

Για κάθε $\chi_1 , \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ **τότε** $\varphi(\chi_1) \geq \varphi(\chi_2)$.

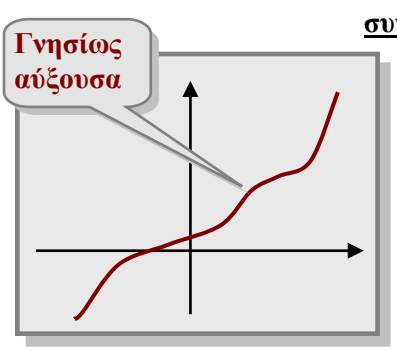
Συμβολικά $\varphi\downarrow$ στο **Δ**.

Η συνάρτηση **φ** θα λέγεται (απλά) **μονότονη συνάρτηση** στο διάστημα Δ όταν **είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' αυτό**.

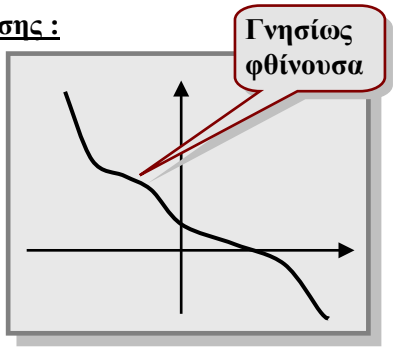
Σου έχω αναφέρει ξανά πως «***κάθε τι που έχει σχέση με μια συνάρτηση έχει αντανάκλαση και στην γραφική της παράσταση***».

Δες πως είναι οι γραφικές παραστάσεις ανάλογα με τη μονοτονία.

Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης :



Η γραφική παράσταση της γνησίως αύξουσας συνάρτησης «**ανεβαίνει**» από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

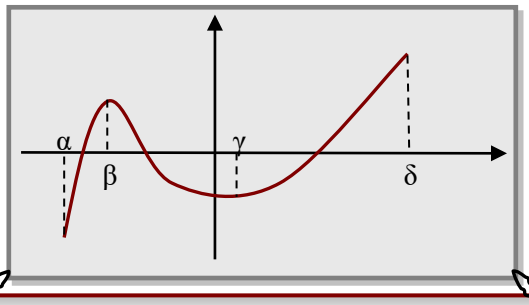


Η γραφική παράσταση της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης «**κατεβαίνει**» από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση συνάρτησης μονότονης κατά διαστήματα :



Συνάρτηση **αύξουσα στο (α , β),** **Φθίνουσα στο (β , γ)** και **αύξουσα στο (γ , δ).**

Τοπικά Ακρότατα.

Έστω μια συνάρτηση **φ** με πεδίο ορισμού **Α** και **Δ** ένα διάστημα, υποσύνολο του Α $(\Delta \subseteq A)$.

Ορισμοί

Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $\chi_0 \in \Delta$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$, όταν : $\varphi(\chi) \leq \varphi(\chi_0)$ **για κάθε** $\chi \in \Delta$.

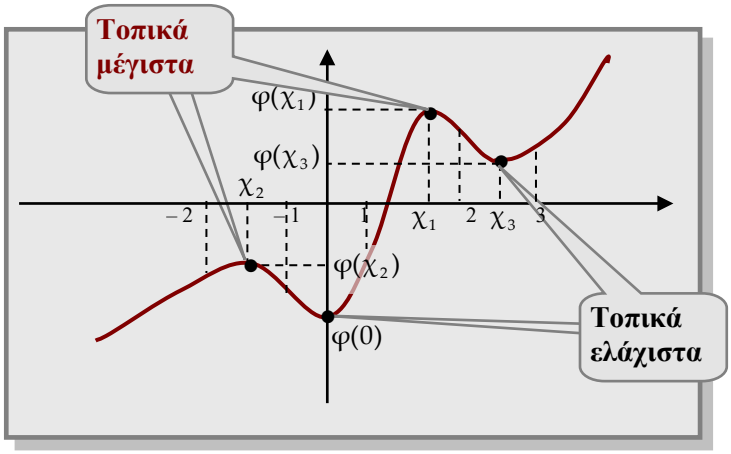
Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $\chi_0 \in \Delta$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$ όταν : $\varphi(\chi_0) \leq \varphi(\chi)$ **για κάθε** $\chi \in \Delta$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο $\chi_0 \in \Delta$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$ όταν έχει **τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο** χ_0.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης με τοπικά ακρότατα :



Ένα τοπικό μέγιστο είναι το «πιο ψηλό σημείο» , ενώ το τοπικό ελάχιστο είναι το «πιο χαμηλό σημείο», της γραφικής παράστασης, για μια «περιοχή» (διάστημα Δ) του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης φ.

Στο πιο πάνω σχήμα π χ είναι το $\varphi(\chi_2)$ ένα **τοπικό μέγιστο** γιατί προφανώς για κάθε $\chi \in \Delta = [-2,-1]$ είναι $\varphi(\chi) \le \varphi(\chi_2)$.

Όμοια το $\varphi(0)$ είναι **τοπικό ελάχιστο** , όπως και το $\varphi(\chi_3)$, ενώ το $\varphi(\chi_1)$ είναι **τοπικό μέγιστο**.

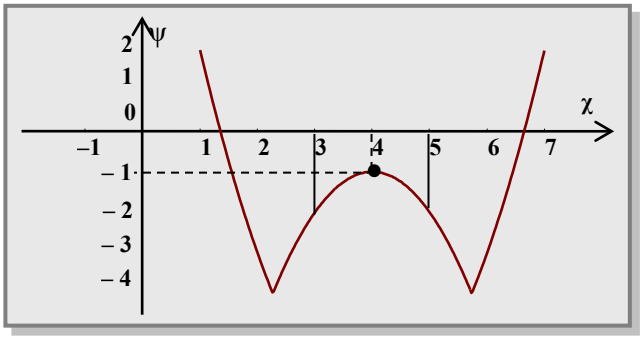
Παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi) = |\chi^2 - 8\chi + 13| - 4$, του πιο κάτω σχήματος. Όπως φαίνεται και από το σχήμα, στο διάστημα $(3,5)$ το $\varphi(4) = -1$ είναι τοπικό μέγιστο γιατί για κάθε $\chi \in (3,5)$ είναι $\varphi(\chi) \le -1$.

Παρατηρήστε επίσης ότι υπάρχουν και δυο τοπικά ελάχιστα.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Παρατήρηση :

Από αυτά που έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα, μια συνάρτηση μπορεί να έχει ένα ή περισσότερα τοπικά ακρότατα (ελάχιστα ή μέγιστα).

Ολικά Ακρότατα.

- Έστω μια συνάρτηση **φ** με πεδίο ορισμού **Α** και $\chi_0 \in A$.

Ορισμοί

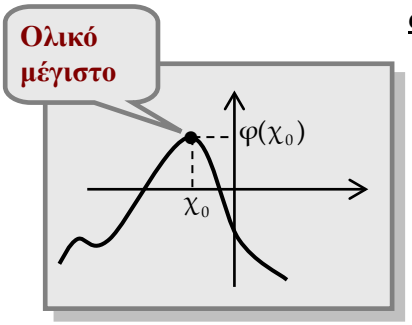
Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$ όταν : $\varphi(\chi) \le \varphi(\chi_0)$ **για κάθε** $\chi \in A$.

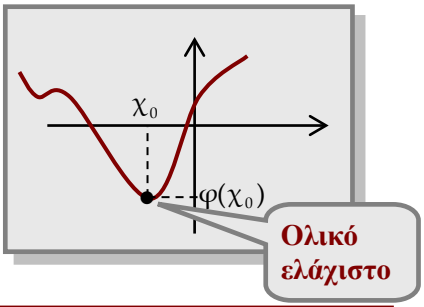
Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$ όταν : $\varphi(\chi_0) \le \varphi(\chi)$ **για κάθε** $\chi \in A$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό ακρότατο** στο $\chi_0 \in A$, τον αριθμό $\varphi(\chi_0)$ όταν έχει **ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο στο** χ_0.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης με ολικά ακρότατα :



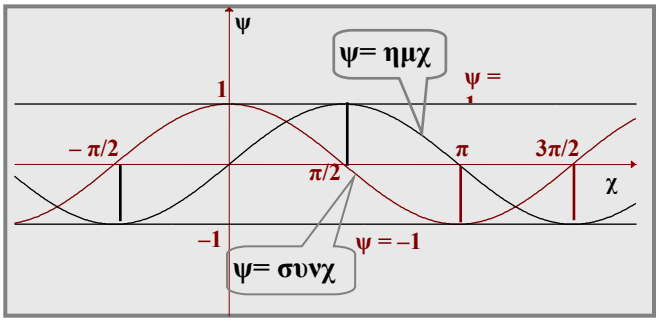


Ένα **ολικό μέγιστο** είναι το «**πιο ψηλό σημείο**» στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ.

Ένα **ολικό ελάχιστο** είναι το «**πιο χαμηλό σημείο**» στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ.

Παραδείγματα :

1. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(\chi)=\eta\mu\chi$ και $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$ του σχήματος.



Όπως φαίνεται και από το σχήμα, η $\varphi(\chi)=\eta\mu\chi$ για $\chi=-\frac{\pi}{2}$, $\chi=\frac{3\pi}{2}$ και γενικότερα για κάθε $\chi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το **– 1** που είναι και **ολικό ελάχιστο**, ενώ όταν $\chi=-\frac{\pi}{2}$ και γενικότερα για κάθε $\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το **1** , που είναι (τελικά) και **ολικό μέγιστο**.

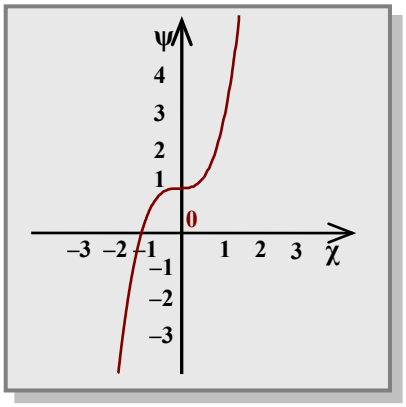
Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

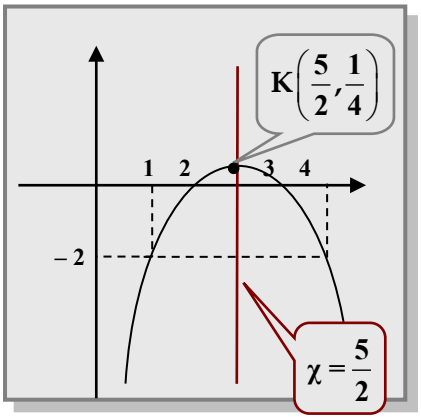
Αντίστοιχα πράγματα συμβαίνουν και για την $f(\chi)=\text{συν}\chi$**,** για $\chi = 0$ και γενικότερα για $\chi = 2\kappa\pi$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το **1** που είναι (τελικά) και **ολικό μέγιστο** ενώ όταν $\chi = \pi$ και γενικότερα για **$\chi = 2\kappa\pi + \pi$** παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το **– 1** που είναι και **ολικό ελάχιστο**.

2. Έστω η συνάρτηση : $\varphi(\chi)=\chi^3+1$ με πεδίο ορισμού το Α = R.

Είναι προφανές από το διπλανό σχήμα ότι δεν έχει ούτε μέγιστο (ολικό) ούτε ελάχιστο (ολικό).



3. Η συνάρτηση $f(\chi)=-\chi^2+5\chi-6$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\chi_0=\frac{5}{2}$, το $\psi=\frac{1}{4}$, αφού $f(\chi)\le\frac{1}{4}$ για κάθε $\chi \in R$, όπως φαίνεται και από το σχήμα.

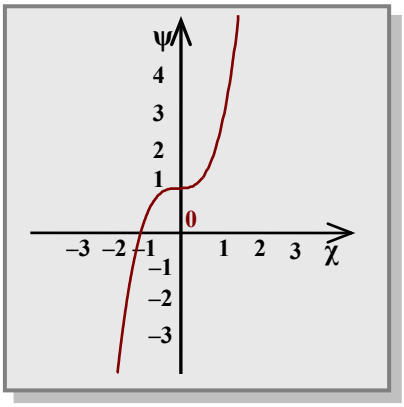


Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συνάρτηση ένα προς ένα (1 – 1).

Έστω η συνάρτηση : $\varphi(\chi)=\chi^3+1$ με πεδίο ορισμού το Α = R του διπλανού σχήματος.

Παρατήρησε ότι για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in R$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ τότε $\chi_1^3 \neq \chi_2^3$ άρα $\chi_1^3+1 \neq \chi_2^3+1$ οπότε $\varphi(\chi_1) \neq \varphi(\chi_2)$ που σημαίνει ότι



Η $\varphi(\chi)=\chi^3+1$ απεικονίζει τα διαφορετικά στοιχεία $\chi_1, \chi_2 \in R$ σε διαφορετικές εικόνες.

Λόγω αυτής της ιδιότητας η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^3+1$ λέγεται συνάρτηση **1 – 1** (ένα προς ένα).

Γενικότερα ισχύει ο :

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $\varphi : A \to R$ λέγεται **συνάρτηση 1 – 1** (ένα προς ένα), όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : $\chi_1 \neq \chi_2$, τότε $\varphi(\chi_1) \neq \varphi(\chi_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι :

Μια συνάρτηση $\varphi : A \to R$ είναι **συνάρτηση 1 – 1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

$\varphi(\chi_1)=\varphi(\chi_2)$, τότε $\chi_1=\chi_2$.

Αυτό αποτελεί **Μέθοδο** : ξεκινάς δηλαδή με το $\varphi(\chi_1)=\varphi(\chi_2)$ και αν με πράξεις καταλήξεις σε $\chi_1=\chi_2$ (μόνο) τότε η φ **είναι 1 – 1.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

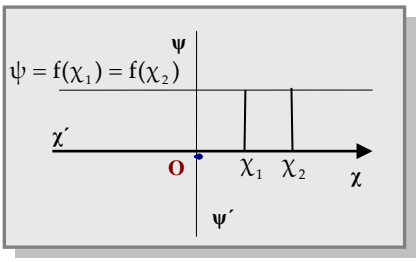
1. **Η συνάρτηση** $f: A \to R$ με $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ δεν είναι **1 – 1.**

Έστω πχ η $f(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$ και έστω $\chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$.
Είναι $\chi_1 \neq \chi_2$ αλλά $f(2) = 0 = f(3)$, επίσης $1 \neq 4$ αλλά $f(1) = -2 = f(4)$.

Όταν «εμφανίζεται» μέσα στον τύπο μιας συνάρτησης η παράσταση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ τότε η συνάρτηση **δεν είναι 1 – 1** αλλά **ούτε και γνήσια μονότονη**.

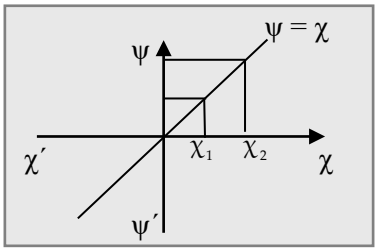
2. **Η σταθερή συνάρτηση** $f: A \to R$ με $f(\chi) = \alpha$.

έχει γραφική παράσταση την ευθεία με εξίσωση **ψ = α** (παράλληλη **στον χ΄ χ)** και όπως φαίνεται από το σχήμα δίπλα δεν είναι **1 – 1** γιατί **για κάθε** $\chi_1, \chi_2 \in R$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $f(\chi_1) = f(\chi_2)$.



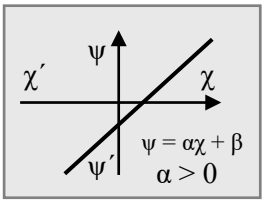
3. **Η ταυτοτική συνάρτηση** $f: A \to R$ με $f(\chi) = \chi$

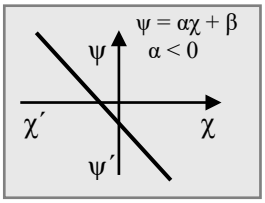
έχει γραφική παράσταση την ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi$ (διχοτόμος των γωνιών χΟψ, χ΄Οψ΄ του 1ου και 3ου τεταρτημορίου) και είναι **1 – 1** γιατί **για κάθε** $\chi_1, \chi_2 \in R$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $f(\chi_1) = \chi_1 \neq \chi_2 = f(\chi_2)$.



4. **Η συνάρτηση** $f: A \to R$ με $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$, $\alpha \in R, \alpha \neq 0$

έχει γραφική παράσταση μια από τις ευθείες του σχήματος δίπλα και είναι





Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1 – 1 γιατί **για κάθε** $\chi_1, \chi_2 \in R$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $\alpha\chi_1 \neq \alpha\chi_2 \Leftrightarrow$

$\alpha\chi_1 + \beta \neq \alpha\chi_2 + \beta \Leftrightarrow f(\chi_1) = f(\chi_2)$.

S O S

Όλες οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις, είναι 1 – 1.

✓ Άρα όλες οι γνωστές μονότονες συναρτήσεις $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$, $\alpha \neq 0$,

$\varphi(\chi) = \alpha\chi^3, \alpha \neq 0$, $g(\chi) = \alpha^{\chi}, 0 < \alpha \neq 1$, $h(\chi) = e^{\chi}$, $\theta(\chi) = \log\chi$, $\chi > 0$

$\omega(\chi) = \ln\chi$, $\chi > 0$ είναι συναρτήσεις **1 – 1**.

✓ Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι **1 – 1** αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση :

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \chi^2 - 1 & \text{αν } \chi < 0 \\ 2\chi^2 - 1 & \text{αν } \chi \geq 0 \end{cases} .$$

Αν η f είναι συνάρτηση είναι **1 – 1** τότε $\chi_1 \neq \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$ και επειδή η f είναι πριν απ' όλα συνάρτηση, άρα θα ισχύει **και** $f(\chi_1) \neq f(\chi_2) \Rightarrow \chi_1 \neq \chi_2$.

Τελικά : Όταν μια **συνάρτηση f** είναι **1 – 1** θα ισχύει η **ισοδυναμία** : $\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$».

Παρατήρηση :

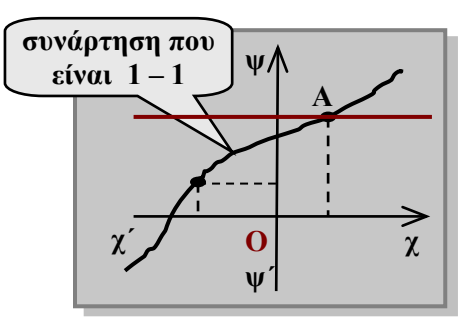
Οι τρεις προτάσεις που ακολουθούν είναι ισοδύναμες και είναι αντίστοιχα η αλγεβρική, η αναλυτική και η γεωμετρική εικόνα μια συνάρτησης που είναι **1 – 1.**

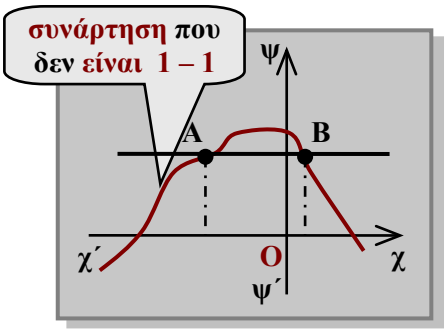
1. Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in D_f$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι και $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$.
2. Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
3. Κάθε ευθεία // χ΄χ **τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς** σε ένα σημείο.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όλα αυτά φαίνονται στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις.





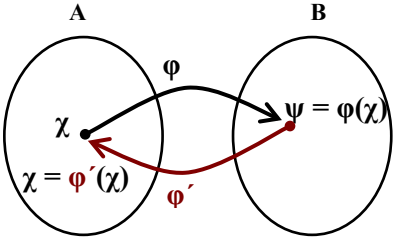
Αντίστροφη συνάρτηση.

Προσοχή

Στο σημείο αυτό καλό είναι να «τακτοποιήσουμε» μερικά πράγματα :

- ✓ **Κάθε συνάρτηση** $\varphi : A \to B$ είναι μια σχέση, που συνδέει τα στοιχεία του συνόλου Α με τα στοιχεία του συνόλου Β, επομένως **πάντα μπορείς να δημιουργήσεις την αντίστροφη σχέση** της, δηλαδή την σχέση η οποία θα συνδέει τα στοιχεία του συνόλου Β με τα στοιχεία του συνόλου Α.

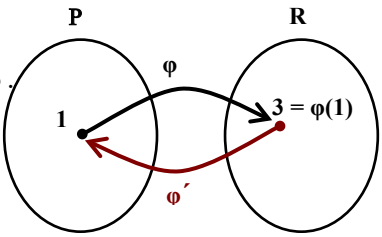
Αν φ μια συνάρτηση και φ΄ η αντίστροφη σχέση της φ τότε σχηματικά είναι :



Δηλαδή αν στο $\chi \in A$ αντιστοιχεί το $\psi = \varphi(\chi)$ τότε για να φτιάξεις την αντίστροφη **σχέση** πολύ απλά συνδέεις αυτό το $\psi \in B$ με το $\chi \in A$.

Παράδειγμα :

Αν η **συνάρτηση** είναι η $\psi = \varphi(\chi) = 2\chi + 1$ τότε στο 1 αντιστοιχεί το $\psi = \varphi(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Άρα μέσω της αντίστροφης **σχέσης** φ΄ στο 3 θα αντιστοιχεί το $\varphi'(3) = 1$ δες και σχήμα .



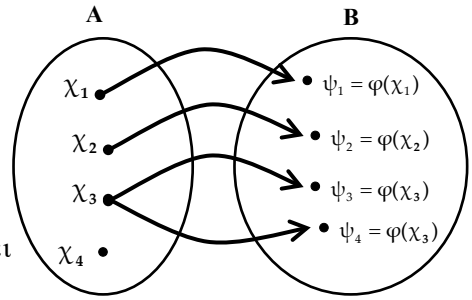
Λιβαδειά

Άρα το πρόβλημα δεν είναι **αν μπορείς** να «φτιάξεις» την αντίστροφη **σχέση** μιας συνάρτησης ούτε το **πώς την φτιάχνεις, το πρόβλημα** είναι αν η αντίστροφη **σχέση** είναι και αυτή **συνάρτηση**.

✓ Μια συνάρτηση από τον ορισμό της αποκλείεται να είναι όπως στο σχήμα :



Δηλαδή να υπάρχει χ_3 που να έχει δυο εικόνες ψ_3 και ψ_4 ή να υπάρχει χ_4 που να μην έχει εικόνα.

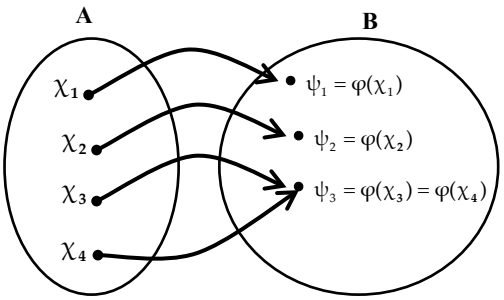


Συμβολικά αποκλείεται να ισχύουν οι σχέσεις :

1 − 0 και **1 − 2** (ή περισσότερα).

Επομένως απομένουν δυο περιπτώσεις, η φ **να είναι 2 – 1** και η **φ να είναι 1 – 1.**

1ον Μια συνάρτηση φ που δεν είναι 1 – 1 θα είναι πχ **2 – 1** όπως στο σχήμα :



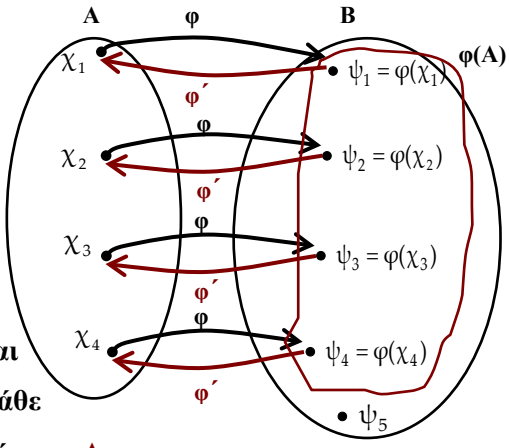
Δηλαδή θα υπάρχουν πχ $\chi_3 \neq \chi_4$ με $\varphi(\chi_3) = \varphi(\chi_4)$.

Σ' αυτή την περίπτωση, αν φτιάξεις την αντίστροφη **σχέση**, αυτή **δεν θα είναι συνάρτηση**, διότι μέσω της αντίστροφης σχέσης φ΄ στο ψ_3 πχ θα αντιστοιχούν δυο χ, τα χ_3 και χ_4, πράγμα που αντιβαίνει στον ορισμό της συνάρτησης.

Συμβολικά **αν η συνάρτηση φ είναι 2 – 1 τότε η φ΄ είναι 1 – 2**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2ον Μια συνάρτηση φ που είναι **1 – 1** θα είναι όπως στο σχήμα : Δηλαδή **για κάθε** $\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) \neq \varphi(\chi_2)$. Σ' αυτή την περίπτωση, αν φτιάξεις την αντίστροφη **σχέση** και περιοριστείς στο φ(Α) και όχι στο Β τότε η **αντίστροφη σχέση φ΄ θα είναι συνάρτηση**, διότι μέσω της **φ΄ στο κάθε** $\psi \in \varphi(A)$ **θα αντιστοιχεί ένα ακριβώς** $\chi \in A$.



Από τον τρόπο που ορίστηκε η **φ΄** προκύπτει ότι :

- ✓ Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών **φ(Α)** της **φ**.
- ✓ Έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού **Α** της **φ**.
- ✓ Ισχύει η ισοδυναμία : $\varphi(\chi) = \psi \Leftrightarrow \varphi'(\psi) = \chi$.

Την **αντίστροφη συνάρτηση** της φ την συμβολίζουμε με φ^{-1} και επομένως η τελευταία ισοδυναμία γράφεται : $\varphi(\chi) = \psi \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(\chi)) = \varphi^{-1}(\psi) = \chi$.

S O S

Αν μια συνάρτηση **φ** είναι **γνησίως μονότονη** τότε είναι **1 – 1** και επομένως **ορίζεται η αντίστροφή της,** φ^{-1}, η οποία, όπως αποδεικνύεται, είναι συνάρτηση και έχει το **ίδιο είδος μονοτονίας** με την φ.

- ✓ Ισχύει επίσης $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi$ « Η αντίστροφη, της αντίστροφης της φ είναι η ίδια συνάρτηση φ »

Παράδειγμα (κλασικό) :

Έστω η $f(\chi) = e^{\chi}$ (εκθετική συνάρτηση με βάση e). Ως γνωστό η $f(\chi) = e^{\chi}$:

- ✓ Έχει πεδίο ορισμού το R.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Έχει πεδίο τιμών το $(0,+\infty)$

✓ Είναι **1 – 1**

Αν $\psi = f(\chi) = e^{\chi} \Leftrightarrow e^{\chi} = \psi \Leftrightarrow \ln(e^{\chi}) = \ln\psi \Leftrightarrow \chi = \ln\psi$.

Αν θέσεις $f^{-1} = \ln$ τότε $\psi = f(\chi) = e^{\chi} \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = \ln e^{\chi} = \chi$ δηλαδή η

$f(\chi) = e^{\chi}$ και η $g(\chi) = \ln\chi$ είναι συναρτήσεις αντίστροφες.

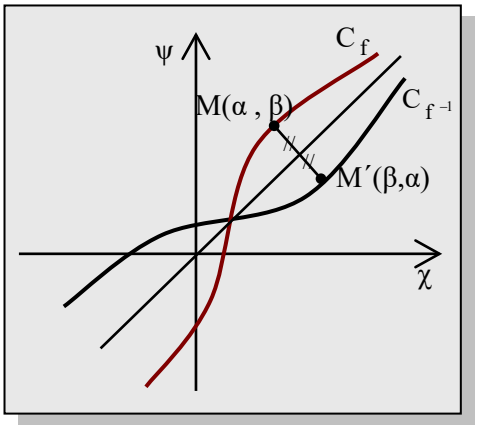
Επίσης σύμφωνα με του συμβολισμούς είναι :

$$\psi = f(\chi) \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = \chi \Leftrightarrow f^{-1}(f(\chi)) = \chi .$$

Προσοχή

Είναι διαφορετικές συναρτήσεις η f^{-1} και $\frac{1}{f}$.

✓ Έστω μια συνάρτηση **f** που είναι **1 – 1,** τότε ορίζεται η **συνάρτηση** f^{-1}, έστω επίσης C_f και $C_{f^{-1}}$ οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} όπως στο σχήμα .



Επειδή $\psi = f(\chi) \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = \chi$, αν το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} και αντιστρόφως τα σημεία, όμως $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο των γωνιών $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου που έχει εξίσωση ψ = χ.

Άρα αν C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, τότε αυτές θα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ = χ.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1 και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $\varphi(\chi)=2\chi+5$ **ii)** $f(\chi)=\ln(3\chi+2)$ **iii)** $g(\chi)=\ln(\chi^2-1)$

Προσοχή μέθοδος : Αν θες να δείξεις για μια συνάρτηση ότι είναι **1 – 1** μπορείς να εξετάσεις την μονοτονία της και αν είναι γνησίως μονότονη θα είναι και **1 – 1**. Διαφορετικά ξεκινάς με $\chi_1 \neq \chi_2$ και προσπαθείς να φτάσεις στο $\varphi(\chi_1) \neq \varphi(\chi_2)$

Απάντηση :

i) Π Ο το Α = R

1ος τρόπος : Η $\varphi(\chi)=2\chi+5$ είναι της μορφής «$\varphi(\chi)=\alpha\chi+\beta$», επομένως, όπως διάβασες (;) προηγουμένως, είναι γνησίως μονότονη (και μάλιστα η συγκεκριμένη επειδή α = 2 > 0 είναι γνησίως αύξουσα). Άρα είναι **1 – 1.**

2ος τρόπος : Είναι $\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow 2\chi_1 \neq 2\chi_2 \Leftrightarrow 2\chi_1+5 \neq 2\chi_2+5 \Leftrightarrow$ $\varphi(\chi_1) \neq \varphi(\chi_2)$. Άρα είναι **1 – 1**.

✳ **Τι κάνεις για να βρεις την αντίστροφη μιας συνάρτησης φ ;**

Προσοχή μέθοδος : Αν θες να βρεις την αντίστροφη μιας συνάρτησης **φ** ξεκινάς από την εξίσωση $\psi=\varphi(\chi)$, θεωρείς «γνωστό» το **ψ** , «άγνωστο» το **χ** και λύνεις την εξίσωση προσπαθώντας να βρεις το **χ, δηλαδή να φτάσεις στην** $\chi=\varphi^{-1}(\psi)$

Έστω $\psi=\varphi(\chi)=2\chi+5 \Leftrightarrow 2\chi=\psi-5 \Leftrightarrow \chi=\dfrac{\psi-5}{2}$

ii) Π Ο το $A=\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $\chi_1 \neq \chi_2 \Leftrightarrow 3\chi_1 \neq 3\chi_2 \Leftrightarrow 3\chi_1 + 2 \neq 3\chi_2 + 2 \Leftrightarrow$

$\ln(3\chi_1 + 2) \neq \ln(3\chi_2 + 2) \Leftrightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$. Άρα είναι **1 – 1**.

Για να βρεις την αντίστροφη θέτεις $\psi = \ln(3\chi + 2) \Leftrightarrow \psi \cdot \ln e = \ln(3\chi + 2)$

$\Leftrightarrow \ln e^{\psi} = \ln(3\chi + 2) \Leftrightarrow 3\chi + 2 = e^{\psi} \Leftrightarrow \chi = \dfrac{e^{\psi} - 2}{3}$.

iii) Π Ο το $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (πρέπει $\chi^2 - 1 > 0$ κ λ π)

Επειδή η $g(\chi) = \ln(\chi^2 - 1)$ είναι σύνθεση της **ln που είναι 1 – 1** και της

$\chi^2 - 1$ που δεν είναι **1 – 1,** άρα η σύνθεση τους **δεν θα είναι 1 – 1**.

Πράγματι, αν $\chi_1 = -2$ τότε $g(-2) = \ln\left((-2)^2 - 1\right) = \ln 3$ και για $\chi_2 = 2$

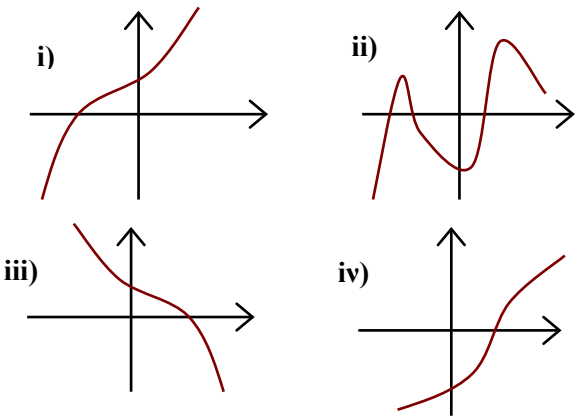
τότε $g(2) = \ln(2^2 - 1) = \ln 3$ άρα παρ' όλο που $\chi_1 \neq \chi_2$ δεν προκύπτει

$g(\chi_1) \neq g(\chi_2)$. Άρα **δεν είναι 1 – 1**

2. **α)** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν συναρτήσεις που είναι 1 – 1 και επομένως αντιστρέφονται .

β) Να εξηγήσετε πως φτάσατε σ' αυτό το συμπέρασμα.

γ) Υπάρχουν γραφικές παραστάσεις που «να μοιάζουν» με γραφικές παραστάσεις αντίστροφων (μεταξύ τους) συναρτήσεων ;
Που το στηρίζετε ;



Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Απάντηση :

α) Η **i), iii)**, και **iv)** παριστάνουν συναρτήσεις 1 – 1 ενώ η **ii)** όχι

β) Ο λόγος για το προηγούμενο συμπέρασμα είναι πως αν στα γραφήματα **i), iii)**, και **iv)** φέρεις οποιαδήποτε παράλληλη προς τον χ΄ χ, αυτή θα τέμνει την γραφική παράσταση σε ένα το πολύ σημείο, πράγμα που προφανώς δεν ισχύει για την περίπτωση **ii)**.

γ) Τα γραφήματα **i), iii)**, και **iv)** μοιάζουν να είναι γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων όμως αυτό συμβαίνει μόνο για τα γραφήματα **i)** και **iv)**, διότι μόνο αυτά «φαίνεται» να είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο των γωνιών του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου.

3. Να δείξετε ότι :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση – f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και γενικότερα :
«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση – f έχει το αντίθετο είδος μονοτονίας στο Δ».

β) Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f + g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Απάντηση :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει : για κάθε $\chi_1,\ \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \underset{\text{f γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(\chi_1) > f(\chi_2) \Leftrightarrow$

$-f(\chi_1) < -f(\chi_2)$. Άρα – f είναι γνησίως αύξουσα

β) Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει : για κάθε $\chi_1,\ \chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2 \underset{\text{f,g γν. φθίνουσες}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(\chi_1) > f(\chi_2) \\ g(\chi_1) > g(\chi_2) \end{cases}$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει : $f(\chi_1) + g(\chi_1) > f(\chi_2) + g(\chi_2)$.

Άρα η συνάρτηση f + g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

✳ Με τα θέματα μονοτονίας θα ασχοληθούμε σε επόμενα κεφάλαια όπου εκεί θα αναπτυχθούν νέες μέθοδοι εξαιρετικά απλές.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ασκήσεις

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1 και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $\varphi(\chi) = -3\chi + 1$ **ii)** $f(\chi) = -2\ln(\chi - 2)$ **iii)** $g(\chi) = 3\chi^2 - 6\chi - 1$

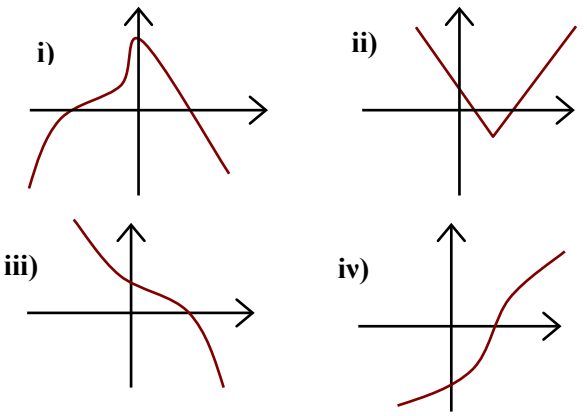
iv) $\theta(\chi) = e^{\chi-2}$ **v)** $h(\chi) = \sqrt{2-3\chi}$

2. **α)** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν συναρτήσεις που είναι 1 – 1 και επομένως αντιστρέφονται .

β) Να εξηγήσετε πως φτάσατε σ' αυτό το συμπέρασμα.

γ) Υπάρχουν γραφικές παραστάσεις που «να μοιάζουν» με γραφικές παραστάσεις αντίστροφων (μεταξύ τους) συναρτήσεων ;

Που το στηρίζετε ;



3. Να δείξετε ότι :

α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση – f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και γενικότερα :

«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση – f έχει το αντίθετο είδος μονοτονίας στο Δ».

β) Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f + g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **α)** Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και επί πλέον $f(\chi), g(\chi) \geq 0$ τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

β) Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και επί πλέον $f(\chi), g(\chi) \leq 0$ τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Όριο συνάρτησης.

Στα μαθηματικά ο όρος «**όριο**» δεν έχει ακριβώς την έννοια που έχει στην καθημερινή ζωή.

Στα μαθηματικά το όριο δεν σημαίνει το «τέρμα», ούτε το όριο προσεγγίζεται μονόπλευρα, και επί πλέον στα μαθηματικά «***αν υπάρχει το όριο είναι μοναδικό***».

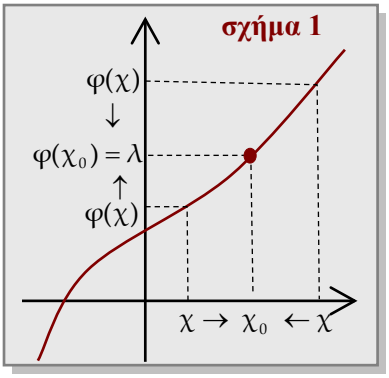
Για να γίνουν αυτά που θα ακολουθήσουν πιο κατανοητά, να ξεκαθαρίσουμε το εξής : Στις συναρτήσεις υπάρχουν δυο μεταβλητές, η ανεξάρτητη μεταβλητή **χ** και η εξαρτημένη μεταβλητή **ψ**.

Όταν λέμε πως « αναζητούμε το όριο της ψ καθώς το χ τείνει . . .» εννοούμε πως έχοντας καθορίσει την συμπεριφορά του **χ** «ψάχνουμε» να δούμε αν το **ψ** έχει κάποια συγκεκριμένη συμπεριφορά και ποια είναι αυτή.

Δες τα επόμενα για να αρχίσεις να καταλαβαίνεις, μην ξεχνάς όμως την αρχή : όριο σημαίνει συμπεριφορά του **ψ** με δεδομένη την συμπεριφορά του **χ**.

Έστω συνάρτηση **φ** με γραφική παράσταση όπως στο σχήμα 1. Από το σχήμα είναι προφανές ότι Π Ο της φ είναι το $D_\varphi = R$.

Παρατήρησε προσεκτικά το σχήμα και σκέψου ότι $\chi \to \chi_0 \leftarrow \chi$ σημαίνει πως το χ μπορεί να πλησιάζει το χ_0



Λιβαδειά

όντας μικρότερο $(\chi \to \chi_0)$, αλλά ταυτόχρονα το χ μπορεί να πλησιάζει το χ_0 όντας μεγαλύτερο $(\chi_0 \leftarrow \chi)$ και αυτή η συμπεριφορά είναι δοσμένη και «***εκ των προτέρων καθορισμένη***».

Και με αυτά τα δεδομένα, η φ, δηλαδή οι τιμές της, απ' ότι φαίνεται από το σχήμα έχει δεδομένη συμπεριφορά : **όταν οι τιμές του $\chi \to \chi_0 \leftarrow \chi$ τότε οι τιμές της φ πλησιάζουν την τιμή $\lambda = \varphi(\chi_0)$ δηλαδή $\varphi(\chi) \to \lambda \leftarrow \varphi(\chi)$.**

Για να δηλώσουμε τα πιο πάνω γράφουμε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$ και διαβάζουμε

« το lim (το όριο) της φ του χ, καθώς το χ τείνει στο χ_0 είναι ο αριθμός λ».

Ξέρω πως σκέφτεσαι : « ε . . . καλά τώρα και τι άλλο θα μπορούσαν να κάνουν οι τιμές της φ ; ».

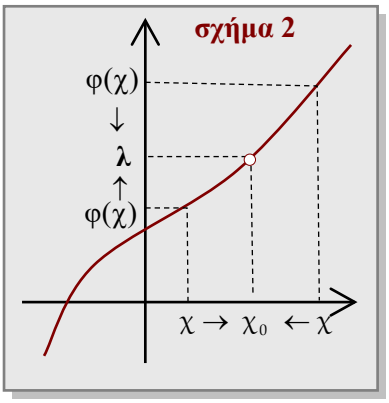
Μη το λες αυτό , δες και τα επόμενα :

- Το σύμβολο $\chi \to \chi_0$ διαβάζεται « το **χ** τείνει στο χ_0 » και σημαίνει πως το χ πλησιάζει (και από τις δυο μεριές) διαρκώς το χ_0 χωρίς ποτέ να γίνει $\chi = \chi_0$.
- Το σύμβολο $\chi \to \chi_0^+$ διαβάζεται « το **χ** τείνει στο χ_0 συν » και σημαίνει πως το χ πλησιάζει διαρκώς το χ_0 (από δεξιά) χωρίς ποτέ να γίνει $\chi = \chi_0$ και ταυτόχρονα $\chi > \chi_0$.
- Το σύμβολο $\chi \to \chi_0^-$ διαβάζεται « το **χ** τείνει στο χ_0 πλην » και σημαίνει πως το χ πλησιάζει διαρκώς το χ_0 (από αριστερά) χωρίς ποτέ να γίνει $\chi = \chi_0$ και ταυτόχρονα $\chi < \chi_0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

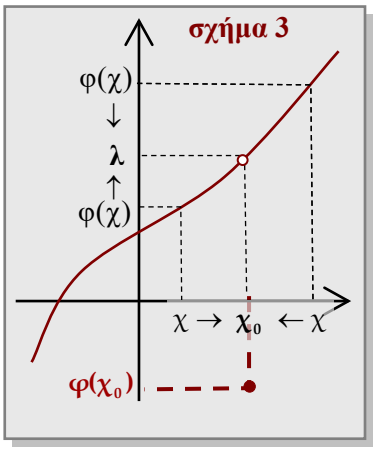
✓ Στο σχήμα 2 η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = (-\infty, \chi_0) \cup (\chi_0, +\infty)$

δηλαδή η φ δεν ορίζεται στο χ_0, παρ' όλα αυτά επειδή η φ έχει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά με προηγούμενα, δηλαδή : Όταν οι τιμές του χ : $\chi \to \chi_0 \leftarrow \chi$ τότε οι τιμές της φ πλησιάζουν την τιμή λ δηλαδή $\varphi(\chi) \to \lambda \leftarrow \varphi(\chi)$, γράφουμε και σ' αυτήν την περίπτωση $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$.



Με λίγα λόγια δεν μας ενδιαφέρει τι γίνεται με την τιμή $\varphi(\chi_0)$, αν υπάρχει ή δεν υπάρχει, εκείνο που ενδιαφέρει είναι αν η φ έχει συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το χ πλησιάζει στο χ_0.

✓ Στο σχήμα 3 η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = R$ μόνο που στο χ_0 δεν έχει την τιμή που θα περίμενε κανείς, αυτή δηλαδή που θα προέκυπτε από την γραφική παράσταση αλλά μια διαφορετική, τιμή, δηλ $\varphi(\chi_0) \neq \lambda$. Αυτό στην πράξη σημαίνει πως η φ είναι διπλού τύπου. Όμως παρά το γεγονός ότι $\varphi(\chi_0) \neq \lambda$, επειδή η φ έχει συγκεκριμένη συμπεριφορά $\varphi(\chi) \to \lambda \leftarrow \varphi(\chi)$ καθώς το $\chi \to \chi_0 \leftarrow \chi$ γράφουμε και σ' αυτήν την περίπτωση $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$.



Με λίγα λόγια δεν μας ενδιαφέρει τι γίνεται με την τιμή $\varphi(\chi_0)$, αν είναι η ίδια ή διαφορετική από το όριο λ της φ, εκείνο που ενδιαφέρει είναι αν η φ έχει συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το χ πλησιάζει στο χ_0.

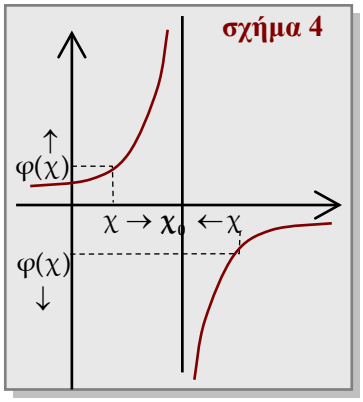
Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Και αν όλα αυτά δεν σε έπεισαν ότι, παρ' όλο που το χ έχει πάντα συγκεκριμένη συμπεριφορά η φ μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές συμπεριφορές ή να μην έχει συγκεκριμένη συμπεριφορά, παρατήρησε και τα πιο κάτω σχήματα :

✓ Στο σχήμα 4 η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = (-\infty, \chi_0) \cup (\chi_0, +\infty)$

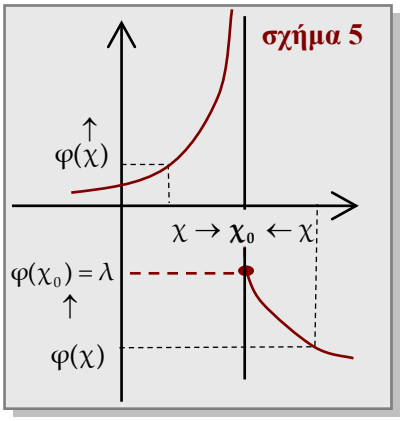
Παρατηρούμε όμως πως καθώς το χ πλησιάζει το χ_0 «από αριστερά» δηλαδή όταν $\chi \to \chi_0^-$ οι τιμές της φ «μεγαλώνουν» διαρκώς ενώ καθώς το χ πλησιάζει το χ_0 «από δεξιά» δηλαδή $\chi \to \chi_0^+$ οι τιμές της φ «μικραίνουν» διαρκώς, άρα η **φ** δεν έχει σταθερή συμπεριφορά καθώς το $\chi \to \chi_0$ άρα **δεν υπάρχει το όριο της φ**.



✓ Στο σχήμα 5 η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = R$

Παρατηρούμε όμως πως καθώς το χ πλησιάζει το χ_0 «από αριστερά» δηλαδή όταν $\chi \to \chi_0^-$ οι τιμές της φ «μεγαλώνουν» διαρκώς ενώ καθώς το χ πλησιάζει το χ_0 «από δεξιά» δηλαδή $\chi \to \chi_0^+$ οι τιμές της φ πλησιάζουν τον αριθμό λ διαρκώς.

Άρα η **φ** δεν έχει σταθερή συμπεριφορά καθώς το $\chi \to \chi_0$ άρα **δεν υπάρχει το όριο της φ**.



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Όμως για να δηλώσουμε πως όταν $\chi \to \chi_0^+$ οι τιμές της φ πλησιάζουν διαρκώς τον αριθμό λ , γράφουμε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi) = \lambda$ και λέμε πως «***υπάρχει το δεξιό όριο της φ***».

✓ Επίσης για να δηλώσουμε πως όταν $\chi \to \chi_0^-$ οι τιμές της φ πλησιάζουν τον αριθμό λ διαρκώς, γράφουμε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda$ και λέμε πως «***υπάρχει το αριστερό όριο της φ***».

✓ Τα $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda$ και $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi) = \lambda$ ονομάζονται πλευρικά όρια της φ στο χ_0 .

✳ Τα σύμβολα $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$, $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda$ και $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi) = \lambda$ χρησιμοποιούνται **μόνο όταν υπάρχουν** τα αντίστοιχα όρια.

Αν γυρίσεις να δεις τα σχήματα **1, 2, 3** θα παρατηρήσεις ότι :

α) Και στις τρεις περιπτώσεις υπάρχει το όριο της φ και ισχύει $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$

β) Και στις τρεις περιπτώσεις υπάρχουν τα «πλευρικά» όρια της φ και ισχύει : $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi)$

Με όλα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω έγινε μια προσπάθεια να γνωρίσουμε την έννοια του ορίου «διαισθητικά» δηλαδή μέσα από τα σχήματα και «***συμφωνήσαμε***» επίσης και για μερικά πράγματα.

✓ «Συμφωνήσαμε» πως όταν γράφουμε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$, εννοούμε ότι οι τιμές $\varphi(\chi)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο λ, για όλα τα $\chi \to \chi_0$ με

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi \neq \chi_0$ δηλαδή **για όλα τα χ τα οποία βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο** χ_0 .

Αυτό όμως δεν είναι και πολύ «μαθηματικό» .

Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα κάνουμε τα εξής:

Το σύμβολο $|\varphi(\chi)-\lambda|$, ως είναι γνωστό συμβολίζει την απόσταση του λ από το $\varphi(\chi)$.

Η ανίσωση $|\varphi(\chi)-\lambda|<\varepsilon$ «λέει» ότι η απόσταση του λ από το $\varphi(\chi)$ είναι μικρότερη από τον αριθμό **ε**.

Αν «βάλεις» τον αριθμό **ε** σε μια διαδικασία να μικραίνει διαρκώς, αυτό σημαίνει ότι η απόσταση του λ από το $\varphi(\chi)$ μικραίνει διαρκώς, δηλαδή το $\varphi(\chi)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στο λ.

Όμοια η ανίσωση $|\chi-\chi_0|<\delta$ αντικαθιστά την πρόταση «ο χ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε τον χ_0» , και μάλιστα για να δηλώσουμε πως ταυτόχρονα $\chi \neq \chi_0$ γράφουμε $0<|\chi-\chi_0|<\delta$, όπου δ είναι αριθμός όσο θέλουμε μικρός.

Με αυτούς τους συμβολισμούς δες πως «μεταφράζεται» η φράση :

«όταν οι τιμές του χ πλησιάζουν το χ_0 $(\chi \to \chi_0 \leftarrow \chi)$**,τότε οι τιμές της φ πλησιάζουν την τιμή** λ $(\varphi(\chi) \to \lambda \leftarrow \varphi(\chi))$

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση φ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta)$.

Θα λέμε ότι η φ έχει στο χ_0 όριο $\lambda \in \mathbf{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $\chi \in (\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta)$, με $0 < |\chi-\chi_0| < \delta$, να ισχύει : $|\varphi(\chi)-\lambda|<\varepsilon$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή

1. Είναι αυτονόητο πως **για να έχει νόημα** το όριο μια συνάρτησης **φ** όταν το $\chi \to \chi_0$, θα πρέπει η **φ** να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ για να μπορεί ο χ να «πλησιάζει» όσο κοντά θέλουμε το χ_0.

Αποδεικνύεται πως το όριο μιας συνάρτησης **φ** είναι ανεξάρτητο από τα άκρα **α**, **β**, μας ενδιαφέρει γενικά να υπάρχει διάστημα «γύρω» από το χ_0.

2. Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση **φ** έχει **όριο** στο χ_0, τότε αυτό είναι **μοναδικό** και συμβολίζεται με $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi)$.

3. Ισχύουν οι ισοδυναμίες :

α) $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi \to \chi_0} (\varphi(\chi) - \lambda) = 0$

β) $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \varphi(\chi_0 + h) = \lambda$

4. $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lambda$ εάν και μόνον εάν $\lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi) = \lambda = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi)$.

Επισημάνσεις :

✓ Το **3. β)** υπάρχει για να μας δώσει την δυνατότητα να αλλάζουμε μεταβλητή όποτε μας διευκολύνει πχ σε μια άσκηση αν θέλουμε μπορούμε να θέσουμε $\chi - \chi_0 = h \Leftrightarrow \chi = h + \chi_0$ και αφού $\chi \to \chi_0$ άρα $h \to 0$

✓ Αν μια συνάρτηση **φ** είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (χ_0, β), όχι όμως και σε διάστημα της μορφής (α, χ_0), τότε **ταυτίζουμε** το **όριο** της **φ** με το **δεξιό όριο** της **φ** δηλαδή : $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^+} \varphi(\chi)$.

✓ Αν μια συνάρτηση **φ** είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, χ_0), όχι όμως και σε διάστημα της μορφής (χ_0, β), τότε **ταυτίζουμε** το **όριο** της **φ** με το **αριστερό όριο** της **φ** δηλαδή: $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to \chi_0^-} \varphi(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση : $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi-1}$. Πεδίο ορισμού είναι το $A=[1,+\infty)$.

Επειδή η **φ** ορίζεται **μόνο** σε διάστημα της μορφής $(1,\beta)$, πχ ορίζεται (μεταξύ άλλων) και στο διάστημα $(1,3)$, ενώ δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha,1)$ προφανώς θα είναι

$$\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi) \Leftrightarrow \lim_{\chi\to 1}\sqrt{\chi-1}=\lim_{\chi\to 1^+}\sqrt{\chi-1}.$$

✓ Παρατήρησε ότι για μια ακόμη φόρα φαίνεται πόσο σημαντικό ρόλο παίζει το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης. Για μια ακόμη φορά λοιπόν σου λέω πως το **πρώτο** πράγμα που θα πρέπει να κάνεις είναι να βρεις το πεδίο ορισμού.

Έτσι λοιπόν στα επόμενα όταν θέλεις να αποδείξεις για μια συνάρτηση κάτι, πρώτα απ' όλα θα εξασφαλίζεις πως στο πεδίο ορισμού της περιλαμβάνεται οπωσδήποτε ένα διάστημα που έχει **μια** από τις **τρεις** μορφές :

α) Στο πεδίο ορισμού της **φ** περιλαμβάνεται **και ένα διάστημα της μορφής** $(\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta)$.

β) Στο πεδίο ορισμού της **φ** περιλαμβάνεται **και ένα διάστημα της μορφής** (α,χ_0).

γ) Στο πεδίο ορισμού της **φ** περιλαμβάνεται **και ένα διάστημα της μορφής** (χ_0,β).

Παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$.

Πεδίο Ορισμού είναι το $A=R^*=R-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν, πιθανά, ενδιαφερόσουν να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ (θα το υπολογίσεις πράγματι αργότερα) τότε θα έπρεπε να επισημάνεις ότι η $\varphi(\chi)$ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta)$ **πχ** ορίζεται **και** στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$.

Όριο ταυτοτικής – σταθερής συνάρτησης.

Αποδεικνύεται ότι :

✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi$ με Π Ο το Α = R, έχει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi=\chi_0$

✓ Η συνάρτηση $f(\chi)=\kappa$ με Π Ο το Α = R, έχει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\kappa=\kappa$

Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $\varphi(\chi)=\chi$ στο χ_0 είναι ίσο με την τιμή της στο χ_0, ενώ η δεύτερη δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης $f(\chi)=\kappa$ στο χ_0 είναι ίσο με **κ**.

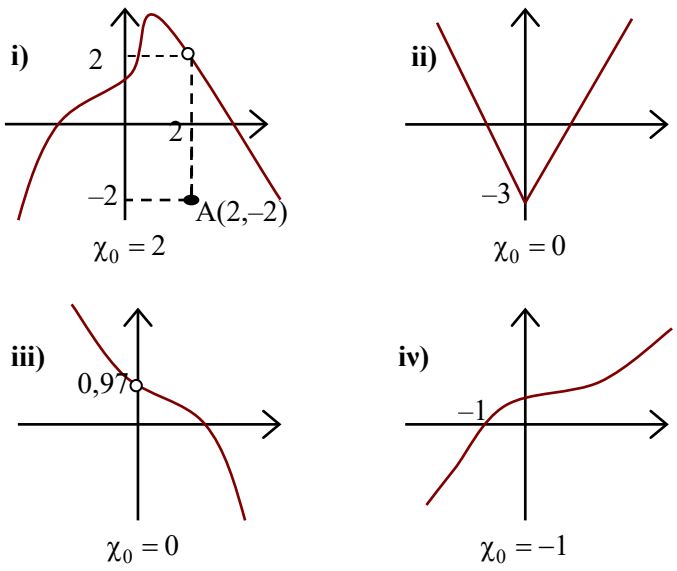
Παράδειγμα :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to -3}\chi=-3$, $\lim\limits_{\chi\to\frac{2}{5}}\chi=\dfrac{2}{5}$ και $\lim\limits_{\chi\to -11}5=5$, $\lim\limits_{\chi\to 0,3}(-2)=-2$

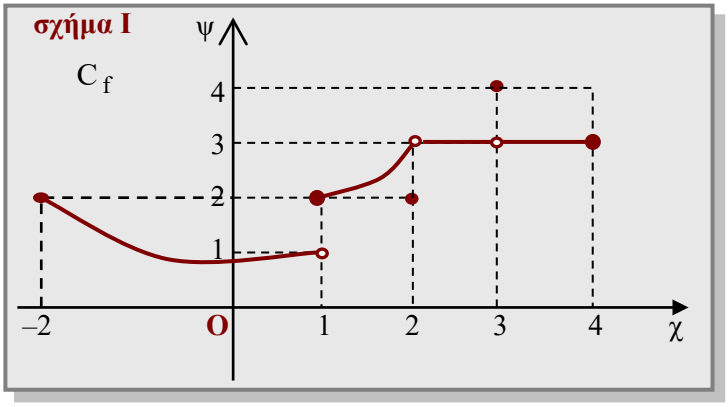
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ασκήσεις

1. Από την γραφική παράσταση της $\varphi(\chi)$ να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi)$ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις :



2. Το **σχήμα I** πιο κάτω παρουσιάζει την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης **f** . Στηριζόμενοι στις «πληροφορίες» που σας δίνει το σχήμα να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν.



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f.

ii) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της f.

iii) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to -2^+} f(\chi)$;

iv) Έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to -2^-} f(\chi)$;

v) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 1^-} f(\chi)$;

vi) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$;

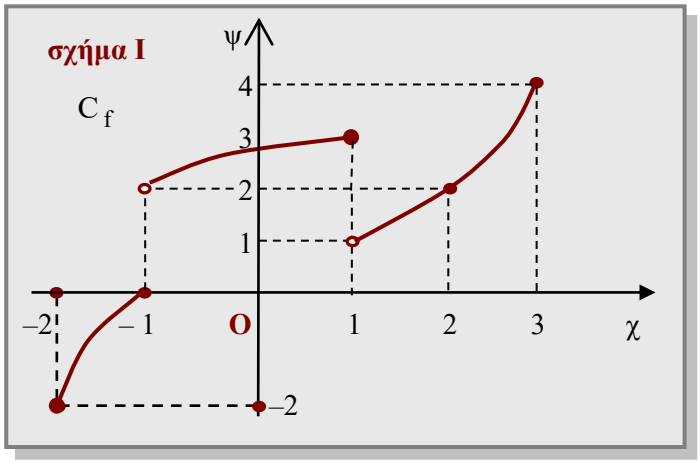
vii) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 2^-} f(\chi)$;

viii) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to 2^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$;

ix) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to 3^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 3^+} f(\chi) = f(3)$;

x) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to 4} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 4^-} f(\chi) = 3$;

3. Το **σχήμα I** πιο κάτω παρουσιάζει την γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης **f** . Στηριζόμενοι στις «πληροφορίες» που σας δίνει να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν.



Λιβαδειά

i) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f.

ii) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της f.

iii) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to -2^+} f(\chi)$;

iv) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to -2^-} f(\chi)$;

v) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to -1^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to -1^+} f(\chi) = f(-1) = 0$;

vi) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 1^-} f(\chi)$;

vii) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$;

viii) Ποιο είναι το $\lim\limits_{\chi\to 2^-} f(\chi)$;

ix) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to 2^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$;

x) Είναι το $\lim\limits_{\chi\to 3^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 3^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 3} f(\chi)$;

4. Δίνεται μια συνάρτηση φ ορισμένη στο $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$, με

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} \varphi(\chi) = 2\kappa^2 - 2\kappa + 1$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} \varphi(\chi) = \kappa^2 - 7\kappa + 7$.

Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in R$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)$

Ιδιότητες των ορίων μιας συνάρτησης.

✓ **Όριο και ανισότητες**

Για το όριο και τις ανισότητες αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής δυο θεωρήματα :

Δαμιανός Μωραΐτης

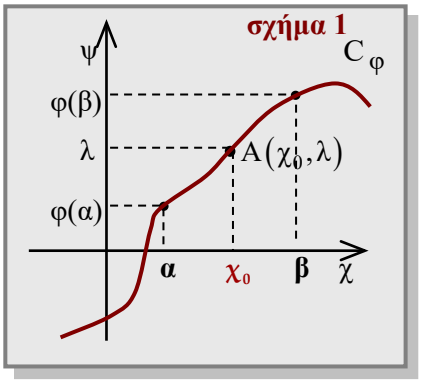
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα 1 **S O S**

Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lambda>0$, τότε $\varphi(\chi)>0$ σε μια περιοχή γύρω από το χ_0.

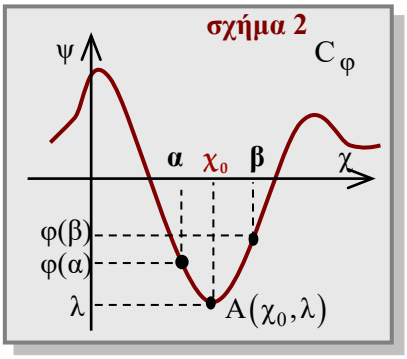
Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lambda<0$, τότε $\varphi(\chi)<0$ σε μια περιοχή γύρω από το χ_0.

✓ Το θεώρημα 1 λέει, περίπου το αυτονόητο, δηλαδή ότι στα μαθηματικά δεν υπάρχουν λογικές αντινομίες, λέει δηλαδή ότι : « όταν **οι τιμές της φ πλησιάζουν ένα θετικό αριθμό**, καθώς το χ πλησιάζει το χ_0, δεν μπορεί παρά , **από ένα σημείο και μετά**, **οι τιμές της φ** να είναι **θετικές».**



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως μπορεί ένα τμήμα της C_φ να βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ, αλλά αν η **φ** έχει **όριο** τον $\lambda>0$ τότε θα υπάρχει και ένα «κομμάτι» της C_φ, γύρω από το σημείο $A(\chi_0,\lambda)$, το οποίο θα ΄ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ, δες και σχήμα 1.

✓ Αντίστοιχα « όταν **οι τιμές της φ πλησιάζουν ένα αρνητικό αριθμό**, καθώς το χ πλησιάζει το χ_0, δεν μπορεί παρά, **από ένα σημείο και μετά**, **οι τιμές της φ** να είναι **αρνητικές».**



Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως μπορεί ένα τμήμα της C_φ να βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ, αλλά αν η **φ** έχει **όριο** τον $\lambda<0$ τότε θα υπάρχει και ένα «κομμάτι» της C_φ, γύρω από το σημείο $A(\chi_0,\lambda)$, το οποίο θα βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ, δες και σχήμα 2.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θεώρημα 2

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι :

1. **Υπάρχουν** τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $f(x)\geq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0

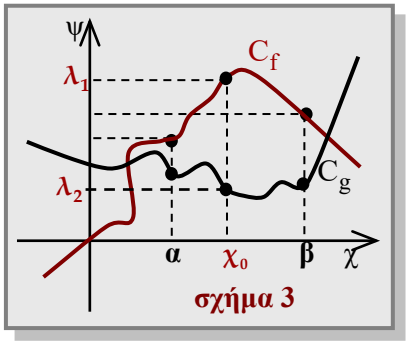
τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

✓ Το θεώρημα 2 λέει επίσης το αυτονόητο, λέει δηλαδή ότι : « όταν οι τιμές της f είναι **μεγαλύτερες** από τις τιμές της g για όλα τα x που ανήκουν σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 , **τότε την ίδια σχέση θα έχουν και τα όριά τους** λ_1 και λ_2 αντίστοιχα **.**

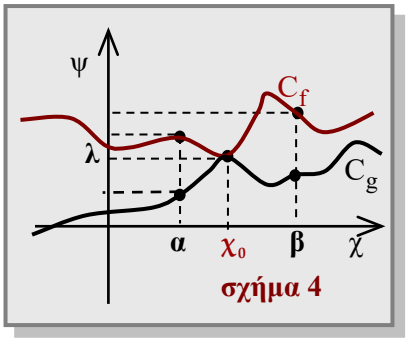
Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως όταν ένα τμήμα της C_f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο τμήμα της C_g τότε και το όριο της f θα είναι ένα σημείο του ψ΄ψ που θα βρίσκεται πιο ψηλά από το αντίστοιχο σημείο που είναι το όριο της g (σχήμα 3) ή θα είναι το ίδιο σημείο αν οι C_f , C_g τέμνονται όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ όταν $f(x_0)\neq g(x_0)$,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ όταν $f(x_0)=g(x_0)$ αντίστοιχα



σχήμα 3



σχήμα 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όριο και πράξεις.

Θεώρημα

Με την **προϋπόθεση** ότι υπάρχουν τα όρια : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ισχύει :

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, με την προϋπόθεση ότι : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, με την προϋπόθεση $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 .

✓ Η ιδιότητα **1.** γενικεύεται και για περισσότερες, από δυο, συναρτήσεις :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_\kappa(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to x_0} f_\kappa(x)$$

Και αν θέσεις $f(x)=f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_\kappa(x)$ η πιο πάνω σχέση παίρνει

την μορφή : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\kappa\cdot f(x)\right)=\kappa\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε $\kappa\in\mathbf{R}$.

✓ Η ιδιότητα **2.** γενικεύεται και για περισσότερες, από δυο, συναρτήσεις :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_\kappa(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0} f_\kappa(x)$$

Και αν θέσεις $f(x)=f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_\kappa(x)$ η πιο πάνω σχέση παίρνει

την μορφή : $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)\right)^\nu\right]=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^\nu$, για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$.

Λιβαδειά

Επισημάνσεις:

✓ ***Σε κάθε περίπτωση*** πρέπει να εξασφαλίζεις πως ***υπάρχει ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής*** $(\alpha,\chi_0)\cup(\chi_0,\beta)$ ή (α,χ_0) ή (χ_0,β) ***στο οποίο να ορίζονται και οι δυο συναρτήσεις*** f ***και*** g

✓ Όταν **υπάρχουν** τα $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{f}(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{g}(\chi)$ τότε **υπάρχει** και το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \left(\mathbf{f}(\chi)+\mathbf{g}(\chi)\right)$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \left(\mathbf{f}(\chi)\cdot\mathbf{g}(\chi)\right)$, **το αντίθετο δεν ισχύει πάντα** για αυτό σε κάθε άσκηση που **σου δίνει** το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \left(\mathbf{f}(\chi)+\mathbf{g}(\chi)\right)$, ή το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \left(\mathbf{f}(\chi)\cdot\mathbf{g}(\chi)\right)$ ή είναι φανερό ότι **υπάρχουν αυτά,** πριν προχωρήσεις θα εξασφαλίζεις την ύπαρξη και των $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{f}(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{g}(\chi)$. δες ένα <u>αντιπαράδειγμα</u> :

Αν $f(\chi)=3\chi+\dfrac{1}{\chi}$ και $g(\chi)=\chi-\dfrac{1}{\chi}+2$ με κοινό Π Ο το $A=R^*$ τότε $f(\chi)+g(\chi)=4\chi+2$ με Π Ο το $A=R^*$ και ενώ προφανώς υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(f(\chi)+g(\chi)\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}(4\chi+2)=2$, δεν υπάρχει κανένα από τα $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)$ άρα δεν μπορεί να εφαρμοσθεί καμιά από τις πιο πάνω ιδιότητες.

✓ Όταν είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} |f(\chi)|=\lambda$ με $\lambda\in R^+$ τότε για το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ μπορεί να συμβαίνει ένα από τα εξής :

α) $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda$

β) $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=-\lambda$

γ) Να μην υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πχ αν $f(\chi)=\dfrac{|\chi|}{\chi}$, τότε Π Ο είναι το $A=R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ άρα

ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1,0)\cup(0,1)$, άρα έχει νόημα το

$\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$. Είναι $f(\chi)=\dfrac{|\chi|}{\chi}=\begin{cases}1 & \text{αν } \chi>0\\ -1 & \text{αν } \chi<0\end{cases}$ οπότε

$\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-}(-1)=-1$ ενώ $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}1=1$ άρα προφανώς

δεν υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$ γιατί $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$.

Ενώ $\lim\limits_{\chi\to 0}|f(\chi)|=\lim\limits_{\chi\to 0}\left|\dfrac{|\chi|}{\chi}\right|=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|\chi|}{|\chi|}=\lim\limits_{\chi\to 0}1=1$.

✓ Τα δυο, μέχρι στιγμής, γνωστά όρια, της ταυτοτικής συνάρτησης:

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi=\chi_0$ και της σταθερής συνάρτησης : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\kappa=\kappa$, σε συνδυασμό με

όσα αναφέρθηκαν αμέσως πιο πάνω, θα μας βοηθήσουν πολύ να

υπολογίσουμε τα όρια **γνωστών** συναρτήσεων και στη συνέχεια όλα μαζί

θα μας επιτρέψουν να υπολογίζουμε τα όρια πάρα πολλών συναρτήσεων

όπως φαίνεται στα παραδείγματα πιο κάτω.

Παραδείγματα (θεωρητικά) και **εφαρμογές** :

1. Είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\chi^\nu=\chi_0^\nu$

Απόδειξη :

Αν στην $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left[\left(f(\chi)\right)^\nu\right]=\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}f(\chi)\right)^\nu$ θέσεις $f(\chi)=\chi$ έχεις :

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\chi^\nu=\left(\lim_{\chi\to\chi_0}\chi\right)^\nu=\chi_0^\nu$$

Εφαρμογή :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-2}\chi^3=(-2)^3=-8$, $\lim\limits_{\chi\to 2}\chi^{-4}=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Αν $P(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\alpha_1\chi+\alpha_0$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} P(\chi)=P(\chi_0)$

Απόδειξη :

Με διαδοχική εφαρμογή των ιδιοτήτων είναι

$$\lim_{\chi\to\chi_0} P(\chi)=\lim_{\chi\to\chi_0}\left(\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\alpha_1\chi+\alpha_0\right)=$$

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\left(\alpha_\nu\chi^\nu\right)+\lim_{\chi\to\chi_0}\left(\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}\right)+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\lim_{\chi\to\chi_0}\left(\alpha_1\chi\right)+\lim_{\chi\to\chi_0}\left(\alpha_0\right)=$$

$$\alpha_\nu\lim_{\chi\to\chi_0}\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{\chi\to\chi_0}\chi^{\nu-1}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\alpha_1\lim_{\chi\to\chi_0}\chi+\alpha_0=$$

$$\alpha_\nu\chi_0^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi_0^{\nu-1}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\alpha_1\chi+\alpha_0=P(\chi_0)$$

Εφαρμογή :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 3}\left(\chi^3-2\chi^2-\chi+11\right)=3^3-2\cdot 3^2-3+11=\ 27-18-3+11=17.$

3. Είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\dfrac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$ με την προϋπόθεση ότι : $Q(\chi_0)\neq 0$

Απόδειξη :

Με εφαρμογή της ιδιότητας για το πηλίκο είναι

$$\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\frac{\lim\limits_{\chi\to\chi_0}P(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to\chi_0}Q(\chi)}=\frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}.$$

Εφαρμογή :

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\chi^3-2\chi^2-\chi+11}{2\chi+1}=\dfrac{3^3-2\cdot 3^2-3+11}{2\cdot 3+1}=\dfrac{17}{7}$, εννοείται ότι Π Ο είναι το $A=R-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Κριτήριο παρεμβολής.

Αν για τις συναρτήσεις **f , g** και **h,** με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο Α, ισχύει

1. $h(x) \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lambda$

τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

Παράδειγμα : S O S για τις ασκήσεις :

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Απόδειξη :

Π Ο είναι το $A = R^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ άρα ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1, 0) \cup (0, 1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{x \to 0}$.

Πράγματι όταν $x \to 0$ είναι $x \neq 0$ άρα θα έχεις : $\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \le |x|$,

επειδή γενικά $\left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \le 1$. Οπότε $\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \le |x|$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} (-|x|) = \lim\limits_{x \to 0} (|x|) = \left| \lim\limits_{x \to 0} x \right| = |0| = 0$, άρα με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής θα έχεις $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Όρια Τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αποδεικνύεται ότι : $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \in R^*$ και $|\eta\mu 0| = 0$.

1. Είναι :

- ✓ $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- ✓ $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Είναι : ✓ $\lim\limits_{\chi\to 0} \eta\mu\chi = 0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0} \sigma\upsilon\nu\chi = 1$

3. Είναι :

✓ $\lim\limits_{\chi\to 0} \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$

✓ $\lim\limits_{\chi\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\chi} = 0$

Όριο σύνθετης συνάρτησης.

Οι ιδιότητες που καταγράψαμε πιο πάνω είναι υπεραρκετές για να βρίσκεις τα πιο πολλά όρια, αφορούν όμως τα όρια απλών συναρτήσεων $\pi\chi$ $\eta\mu\chi$, $\sqrt{\chi}$, χ^{ν} κ λ π. Αν όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε πχ το $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{3}} \eta\mu\left(\chi+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ή το $\lim\limits_{\chi\to 0} \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2+1}+\dfrac{\pi}{3}\right)$ δεν θα ξέρουμε τι να κάνουμε.

Αν πρέπει να βρεις όρια της μορφής $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f\left(g(\chi)\right)$, δηλαδή το όριο μιας σύνθετης συνάρτησης $(f\circ g)$ στο σημείο χ_0, τότε κάνεις αυστηρά τα εξής :

i) Θέτεις $\mathbf{u = g(\chi)}$.

ii) Υπολογίζεις (αν υπάρχει) το $\mathbf{u_0 = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} u = \lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)}$.

iii) Υπολογίζεις (αν υπάρχει) το $\mathbf{\lim\limits_{u\to u_0} f(u)}$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(\chi)\neq u_0$ κοντά στο χ_0, τότε **το ζητούμενο όριο είναι :**

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f\left(g(\chi)\right) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✳ Στα επόμενα, τα όρια της μορφής $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \mathbf{f}\left(\mathbf{g}(\chi)\right)$ τα οποία θα συναντήσεις θα ικανοποιούν τη συνθήκη : «$\mathbf{g}(\chi)\neq \mathbf{u_0}$ κοντά στο $\boldsymbol{\chi_0}$ », άρα δεν χρειάζεται να το ελέγχεις, δηλαδή «πες πως δεν το είδες».

Παραδείγματα :

1. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0} \dfrac{\boldsymbol{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}}{\boldsymbol{\beta\cdot\chi}}$

Super S O S για τις ασκήσεις

Απάντηση :

Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}$ τότε Π Ο είναι το $A=R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ άρα ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1,0)\cup(0,1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$.

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\chi}=\dfrac{1}{\beta}\cdot\alpha\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}$.

Αν θέσεις $u=\alpha\cdot\chi$ τότε $\lim\limits_{\chi\to 0} u=\lim\limits_{\chi\to 0}(\alpha\cdot\chi)=0$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}$

$=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

Εφαρμογή : Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\chi}$

Απάντηση :

Αν $f(\chi)=\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\chi}$ τότε Π Ο είναι το $A=R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ άρα ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1,0)\cup(0,1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επίσης είναι $f(\chi)=\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\chi}=5\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}$ και αν θέσεις $u=5\chi$, τότε

$\lim\limits_{\chi\to 0} u=\lim\limits_{\chi\to 0} 5\chi=0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\chi}=5\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}=5\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=5\cdot 1=5$.

2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}$

S O S για τις ασκήσεις

Απάντηση :

Αν $g(\chi)=\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}$, $\alpha\chi\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ άρα Π Ο είναι το $A=R^*-\left\{\kappa\dfrac{\pi}{\alpha}+\dfrac{\pi}{2\alpha}\right\}$,

$\kappa\in Z$, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(\mu,0)\cup(0,\nu)$, άρα

έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)$. Είναι $g(\chi)=\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\dfrac{\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}}{\beta\cdot\chi}=$

$\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{(\beta\cdot\chi)\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{(\beta\cdot\chi)}$.

Οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{(\beta\cdot\chi)}\right)=$

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{(\beta\cdot\chi)}$.

Είναι $\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\chi}=\dfrac{1}{\beta}\cdot\alpha\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}$.

Αν θέσεις $u=\alpha\cdot\chi$ τότε $\lim\limits_{\chi\to 0} u=\lim\limits_{\chi\to 0}(\alpha\cdot\chi)=0$.

Όμως $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\alpha\cdot\chi}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ **(1)**

(δες και προηγούμενο παράδειγμα) .

Είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot\chi)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\sigma\upsilon\nu(u)}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=\dfrac{1}{1}=1$ **(2)** .

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα από **(1)** και **(2)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\beta\cdot\chi}=1\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Εφαρμογή : Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 5\chi}{3\chi}$

Απάντηση :

Αν $g(\chi)=\dfrac{\varepsilon\varphi 5\chi}{3\chi}$ τότε Π Ο είναι το $A=R^*-\left\{\kappa\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10}\right\}$, κ ∈ Z, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(\mu,0)\cup(0,\nu)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)$.

Είναι $g(\chi)=\dfrac{\varepsilon\varphi 5\chi}{3\chi}=\dfrac{\frac{\eta\mu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}}{3\chi}=\dfrac{\eta\mu 5\chi}{3\chi\sigma\upsilon\nu 5\chi}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{3\chi}$.

Οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 5\chi}{3\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{3\chi}\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}\cdot\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{3\chi}$.

και αν θέσεις $u=5\chi$, τότε $\lim\limits_{\chi\to 0} u=\lim\limits_{\chi\to 0} 5\chi=0$, οπότε

$\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\chi\to 0}\sigma\upsilon\nu 5\chi}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=\dfrac{1}{1}=1$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{3\chi}=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}$

$=\dfrac{5}{3}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\dfrac{5}{3}\cdot 1=\dfrac{5}{3}$ οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 5\chi}{3\chi}=1\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}$.

3. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\varepsilon\varphi 5\chi}$

Απάντηση :

Αν $g(\chi)=\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\varepsilon\varphi 5\chi}$ τότε Π Ο είναι το $A=R^*-\left\{\kappa\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10}\right\}$, κ ∈ Z, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(\mu,0)\cup(0,\nu)$, άρα έχει

Παρατήρηση :

✓ Το πεδίο ορισμού θα το βρίσκεις **οπωσδήποτε** :

α) Για να είναι γνωστό που ορίζεται η συνάρτηση.

β) Για να δείξεις πως έχει νόημα το όριο που σου ζητά.

γ) Για να ξέρεις αν πιθανόν θα αντιμετωπίσεις «πρόβλημα» όταν θελήσεις να υπολογίσεις το όριο όπως θα δεις από τα παραδείγματα πιο κάτω.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)$. Είναι $g(\chi)=\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\varepsilon\varphi 5\chi}=\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 5\chi}}=$

$$\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\frac{\eta\mu 3\chi}{\eta\mu 5\chi}=\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\frac{\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\chi}}{\dfrac{\eta\mu 5\chi}{\chi}}=\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\frac{3\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}}{5\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}}=\frac{3}{5}\cdot\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\frac{\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}}{\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}}$$

Επειδή όταν $\chi\to 0$ είναι $\chi\neq 0$ άρα μπορείς να διαιρέσεις αριθμητή και παρονομαστή με το χ.

Οπότε $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\eta\mu 5\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{3}{5}\cdot\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\dfrac{\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}}{\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}}\right)=$

$$\frac{3}{5}\cdot\lim_{\chi\to 0}\sigma\upsilon\nu 5\chi\cdot\lim_{\chi\to 0}\left(\frac{\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}}{\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}}\right)=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot\frac{\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}}{\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{5\chi}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

Άρα $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\varepsilon\varphi 5\chi}=\dfrac{3}{5}}$.

✳ Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεις ότι

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha\cdot\chi)}{\varepsilon\varphi(\beta\cdot\chi)}=\frac{\alpha}{\beta}\quad\textbf{αλλά και}\quad\lim_{\chi\to 0}\frac{\varepsilon\varphi(\alpha\cdot\chi)}{\eta\mu(\beta\cdot\chi)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{\chi^2+1}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Απάντηση :

Αν $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{\chi^2+1}+\dfrac{\pi}{3}\right)$, επειδή $\chi^2+1\neq 0$ άρα Π Ο το Α = R, άρα η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1,0)\cup(0,1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$. Αν θέσεις $u=\dfrac{1}{\chi^2+1}+\dfrac{\pi}{3}$ τότε :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\lim\limits_{\chi\to 0} u = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{\pi}{\chi^2+1}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{0^2+1}+\frac{\pi}{3} = \pi+\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, οπότε

$\lim\limits_{\chi\to 0} \text{συν}\left(\frac{\pi}{\chi^2+1}+\frac{\pi}{3}\right) = \lim\limits_{u\to \frac{4\pi}{3}} \text{συν}u = \text{συν}\frac{4\pi}{3} = -\text{συν}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

5. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0} \textbf{ημ}\left(\mathbf{2\chi^5 - 1 + \frac{\pi}{4}}\right)$

Απάντηση :

Αν $f(\chi) = \text{ημ}\left(2\chi^5 - 1 + \frac{\pi}{4}\right)$, άρα Π Ο το A = R, άρα η f ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1, 0)\cup(0, 1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$.

Αν θέσεις $u = 2\chi^5 - 1 + \frac{\pi}{4}$ τότε $\lim\limits_{\chi\to 0} u = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(2\chi^5 - 1 + \frac{\pi}{4}\right) =$

$2\cdot 0^5 - 1 + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$, άρα $\lim\limits_{\chi\to 0} \text{ημ}\left(2\chi^5 - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{u\to -\frac{3\pi}{4}} \text{ημ}u$

$= \text{ημ}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\text{ημ}\frac{3\pi}{4} = -\text{ημ}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0} \frac{\textbf{ημ}^2\mathbf{3\chi}}{\chi^4 - \chi^2}$

Απάντηση :

Αν $f(\chi) = \frac{\text{ημ}^2 3\chi}{\chi^4 - \chi^2}$, είναι $\chi^4 - \chi^2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2(\chi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ **χ = 0, χ = – 1, χ = 1.**

Άρα Π Ο το $A = R - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1)\cup(-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$, άρα η f ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-1, 0)\cup(0, 1)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $f(\chi)=\dfrac{\eta\mu^2 3\chi}{\chi^4-\chi^2}=\dfrac{\eta\mu^2 3\chi}{\chi^2(\chi^2-1)}=\dfrac{1}{\chi^2-1}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 3\chi}{\chi^2}=\dfrac{1}{\chi^2-1}\cdot\left(\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\chi}\right)^2$, άρα

$$\lim_{\chi\to 0} f(\chi)=\lim_{\chi\to 0}\left(\frac{1}{\chi^2-1}\cdot\left(\frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}\right)^2\right)=\lim_{\chi\to 0}\frac{1}{\chi^2-1}\cdot\lim_{\chi\to 0}\left(\frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}\right)^2=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{\chi\to 0}(\chi^2-1)}\cdot\left(\lim_{\chi\to 0}\frac{\eta\mu 3\chi}{\chi}\right)^2=\frac{1}{-1}\cdot\left(\lim_{\chi\to 0}3\frac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}\right)^2$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 3\chi}{\chi^4-\chi^2}=-3^2\left(\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{3\chi}\right)^2=-9$

7. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to-\pi}\dfrac{\mathbf{1+\sigma\upsilon\nu\chi}}{\mathbf{\eta\mu^2\chi}}$

Απάντηση :

Αν $f(\chi)=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}$, είναι $\eta\mu\chi=0 \Leftrightarrow \chi=\kappa\pi$.

Άρα Π Ο το $A=R-\{\kappa\pi\}$, $\kappa\in Z$, άρα η f ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-\pi} f(\chi)$.

Είναι $f(\chi)=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{(1+\sigma\upsilon\nu\chi)(1-\sigma\upsilon\nu\chi)}=\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}$ άρα

$$\lim_{\chi\to-\pi} f(\chi)=\lim_{\chi\to-\pi}\frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}=\lim_{\chi\to-\pi}\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{\chi\to-\pi}(1-\sigma\upsilon\nu\chi)}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

8. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to-1}\left(\chi^7-2\chi^3+3\chi\right)^{10}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\left|2\chi^2-5\chi+1\right|}{(\chi-2)^7}$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt{\chi^3+8}-4}{\chi^2+5\chi+6}$, $\chi\in R_+^*$

Απάντηση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Αν $f(\chi)=\left(\chi^7-2\chi^3+3\chi\right)^{10}$ τότε Π Ο το Α = R, άρα η f ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,-1)\cup(-1,\beta)$ πχ στο $(-2,-1)\cup(-1,0)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-1} f(\chi)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-1}\left(\chi^7-2\chi^3+3\chi\right)^{10}=\left[\lim\limits_{\chi\to-1}\left(\chi^7-2\chi^3+3\chi\right)\right]^{10}=(-2)^{10}=$ **1024**

ii) Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\left|2\chi^2-5\chi+1\right|}{(\chi-2)^7}$ τότε Π Ο το $A=R-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, άρα η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ πχ στο $(0,1)\cup(1,2)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to1}\varphi(\chi)$.

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-2)^7=(-1)^7=-1\neq0$ άρα θα είναι $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{\left|2\chi^2-5\chi+1\right|}{(\chi-2)^7}=$

$$\frac{\left|\lim\limits_{\chi\to1}\left(2\chi^2-5\chi+1\right)\right|}{\left(\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-2)^7\right)^7}=\frac{|-2|}{(-1)^7}=\frac{2}{-1}=-2.$$

iiii) Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi^3+8}-4}{\chi^2+5\chi+6}$, Π Ο της φ είναι το $R_+^*=(0,+\infty)$ άρα η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,2)\cup(2,\beta)$ πχ στο $(0,2)\cup(2,3)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to2}\varphi(\chi)$.

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to2}\left(\chi^2+5\chi+6\right)=20\neq0$ άρα θα είναι :

$$\lim_{\chi\to2}\frac{\sqrt{\chi^3+8}-4}{\chi^2+5\chi+6}=\frac{\lim\limits_{\chi\to2}\left(\sqrt{\chi^3+8}-4\right)}{\lim\limits_{\chi\to2}(\chi^2+5\chi+6)}=\frac{\sqrt{2^3+8}-4}{20}=\frac{\sqrt{16}-4}{20}=\frac{0}{20}=0$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi^3-\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-4}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{3\chi^2+4\chi+1}{2\chi^2+2\chi}$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi-1}{\sqrt{\chi}-1}$

Απάντηση :

i) Έστω $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^3-\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-4}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$,

Για το Π Ο της φ έχεις : $\chi^2-4=0\Leftrightarrow\ldots$ $\rho_1=-2$ και $\rho_2=2$ άρα Π Ο το $A=R-(-2,2)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, άρα η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,2)\cup(2,\beta)$ πχ στο $(0,2)\cup(2,3)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$.

Επειδή $Q(2)=2^2-4=4-4=0$, βρίσκεις και το

$P(2)=2^3-2^2-8\cdot 2+12=8-4-16+12=20-20=0$.

Οπότε παραγοντοποιείς αριθμητή και παρονομαστή και έχεις :

$\chi^2-4=(\chi-2)(\chi+2)$ και επειδή το 2 είναι ρίζα του $\chi^3-\chi^2-8\chi+12$, το σχήμα Horner δίνει : $\chi^3-\chi^2-8\chi+12=(\chi-2)(\chi^2+\chi-6)$ άρα :

$$\varphi(\chi)=\frac{\chi^3-\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-4}=\frac{(\chi-2)(\chi^2+\chi-6)}{(\chi-2)(\chi+2)}=\frac{\chi^2+\chi-6}{\chi+2}$$ και

$\lim\limits_{\chi\to 2}(\chi+2)=2+2=4\neq 0$ άρα :

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^3-\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-4}=\lim_{\chi\to 2}\frac{\chi^2+\chi-6}{\chi+2}=\frac{2^2+2-6}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

Παρατηρήσεις S O S για τις ασκήσεις:

✓ Αν έχεις να υπολογίσεις το όριο ρητής συνάρτησης $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, όπως

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

πιο πάνω, τότε βρίσκεις το Π Ο, βρίσκοντας τις **ρίζες** του παρονομαστή $Q(\chi)$ και διακρίνεις δυο περιπτώσεις :

α) Το $\chi \to \chi_0$ και χ_0 **δεν είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ $\left(Q(\chi_0) \neq 0\right)$

τότε $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \dfrac{\lim\limits_{\chi \to \chi_0} P(\chi)}{\lim\limits_{\chi \to \chi_0} Q(\chi)} = \dfrac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$.

β) Το $\chi \to \chi_0$ και χ_0 **είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ $\left(Q(\chi_0) = 0\right)$ τότε αν το χ_0 **είναι ρίζα** και του αριθμητή P(χ) $\left(P(\chi_0) = 0\right)$, επειδή ισχύει ότι «το χ_0 είναι ρίζα ενός πολυωνύμου εάν και μόνον εάν το $\chi - \chi_0$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου» , παραγοντοποιείς αριθμητή και παρονομαστή και έχεις : $\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \dfrac{(\chi - \chi_0)P_1(\chi)}{(\chi - \chi_0)Q_1(\chi)} = \dfrac{P_1(\chi)}{Q_1(\chi)}$.

Την τελευταία διαδικασία την επαναλαμβάνεις, αν χρειαστεί ν φορές, μέχρι το χ_0 να **μην είναι** πλέον ρίζα του παρονομαστή οπότε $\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \dfrac{P_\nu(\chi)}{Q_\nu(\chi)}$

και υπολογίζεις το $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)} = \dfrac{\lim\limits_{\chi \to \chi_0} P_\nu(\chi)}{\lim\limits_{\chi \to \chi_0} Q_\nu(\chi)} = \dfrac{P_\nu(\chi_0)}{Q_\nu(\chi_0)}$.

ii) Αν $g(\chi) = \dfrac{3\chi^2 + 4\chi + 1}{2\chi^2 + 2\chi} = \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της g έχεις :

$2\chi^2 + 2\chi = 2\chi(\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 0$ άρα Π Ο το

$A = R - (-1, 0) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, άρα η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha, -1) \cup (-1, \beta)$ πχ στο $(-2, -1) \cup (-1, 0)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi \to 2} g(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✳ Εδώ ίσως να καταλάβεις καλλίτερα τι εννοούσα πιο πάνω όταν έλεγα πως «έχοντας βρει το Π Ο θα ξέρεις αν θα αντιμετωπίσεις πρόβλημα όταν θελήσεις να υπολογίσεις το όριο» . Δηλαδή έχοντας βρει ήδη το Π Ο στο παράδειγμά μας ξέρεις ότι το $Q(-1)=0$. Άρα ξέρεις ότι πρέπει να ψάξεις αν μηδενίζεται και ο αριθμητής και να παραγοντοποιήσεις και τους δυο για να κάνεις στη συνέχεια τις απαραίτητες απλοποιήσεις, αλλιώς δεν υπολογίζεται το όριο. Έτσι λοιπόν επειδή $Q(-1)=0$ βρίσκεις και το $P(-1)$, είναι : $P(-1)=3(-1)^2+4(-1)+1=3-4+1=0$.

Οπότε παραγοντοποιείς αριθμητή και παρονομαστή και έχεις :

$2\chi^2+2\chi=2\chi(\chi+1)$ και επειδή το $3\chi^2+4\chi+1$ είναι $2^{ου}$ βαθμού άρα

$\Delta=\ldots=4$, ρίζες $\rho_1=-1$ και $\rho_2=-\frac{1}{3}$ άρα $3\chi^2+4\chi+1=3(\chi+1)\left(\chi+\frac{1}{3}\right)$

$=(3\chi+1)(\chi+1)$.

Οπότε είναι : $g(\chi)=\frac{3\chi^2+4\chi+1}{2\chi^2+2\chi}=\frac{(3\chi+1)(\chi+1)}{2\chi(\chi+1)}=\frac{3\chi+1}{2\chi}$ και

$\lim\limits_{\chi\to-1}2\chi=-2\neq0$ άρα: $\lim\limits_{\chi\to-1}\frac{3\chi^2+4\chi+1}{2\chi^2+2\chi}=\lim\limits_{\chi\to-1}\frac{3\chi+1}{2\chi}=\frac{-3+1}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$.

iii) $g(\chi)=\frac{\chi-1}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της g έχεις : **$\chi\geq0$** για να έχει νόημα η ρίζα και $\sqrt{\chi}-1\neq0$. Όμως $\sqrt{\chi}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{\chi}=1\Leftrightarrow\chi=1$ άρα πρέπει **$\chi\neq1$** . Έτσι Π Ο το $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ πχ στο $(0,1)\cup(1,2)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to1}g(\chi)$. Έτσι λοιπόν είναι $P(1)=1-1=0$.

Παρατήρησες φαντάζομαι πως ο παρονομαστής $\left(\sqrt{\chi}-1\right)$ δεν παραγοντοποιείται με τους πολύ γνωστούς τρόπους. Τι κάνεις λοιπόν ;

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μπορείς να δουλέψεις με δυο τρόπους

1ος τρόπος : Παραγοντοποιείς μόνο τον αριθμητή (αν παραγοντοποιείται και αυτός) και κάνεις τις απλοποιήσεις . Δες τι εννοώ ακριβώς :

$$g(\chi)=\frac{\chi-1}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{\left(\sqrt{\chi}\right)^2-1^2}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\sqrt{\chi}-1}=\sqrt{\chi}+1 \text{ οπότε } \lim_{\chi\to 1}\frac{\chi+1}{\sqrt{\chi}-1}$$

$$= \lim_{\chi\to 1}\left(\sqrt{\chi}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$$

2ος τρόπος :

Όταν σε μια άσκηση εύρεσης ενός ορίου της μορφής $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ είναι

$\mathbf{Q(\chi_0)=0}$, και ταυτόχρονα υπάρχουν ρίζες (ριζικά) στον αριθμητή ή στον παρονομαστή και δεν διευκολύνεται η παραγοντοποίηση, τότε ο μόνος σίγουρος τρόπος, που έχει αποτέλεσμα, είναι να πολλαπλασιάσεις αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή ή την συζυγή παράσταση του αριθμητή ή να κάνεις ταυτόχρονα και τις δυο διαδικασίες, πάντως συνήθως ξεκινάς με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

Σ' αυτό το σημείο ξαναδές τις συζυγείς παραστάσεις, **τελευταία ευκαιρία**.

Super S O S για τις ασκήσεις που έχουν ριζικά

Η $\sqrt{\alpha}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha}$	Η $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha}\mp\sqrt{\beta}$
Η $\alpha\pm\sqrt{\beta}$ έχει συζυγή την $\alpha\mp\sqrt{\beta}$	Η $\sqrt{\alpha}\pm\beta$ έχει συζυγή την $\sqrt{\alpha}\mp\beta$
Η $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$	
Η $\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}$ έχει συζυγή την $\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}$	
Η $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$	

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έτσι λοιπόν στο παράδειγμά μας εννοείται πως έχεις βρει Π Ο και είναι $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$ κ λ π και άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)$ και επίσης έχεις ήδη διαπιστώσει πως υπάρχει «πρόβλημα» στο $\chi_0=1$ αφού το 1 είναι στις «εξαιρέσεις» του Π Ο μιας και είναι ρίζα του παρονομαστή και ταυτόχρονα βλέπεις και ρίζα στον παρονομαστή άρα :

$$g(\chi)=\frac{\chi-1}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}=\frac{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\left(\sqrt{\chi}\right)^2-1}=\frac{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\chi-1}\Leftrightarrow$$

$g(\chi)=\sqrt{\chi}+1$ επομένως : $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\chi+1}{\sqrt{\chi}-1}=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\sqrt{\chi}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$.

Δες και το επόμενο παράδειγμα :

10. Με το δεδομένο ότι οι παραστάσεις ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα, να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 3}\frac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{5\chi-6}}{\chi^2-9}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 5}\frac{3\chi-15}{\sqrt{2\chi-6}-2}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\sqrt{2\chi+7}-\sqrt{\chi^2+8}}{\sqrt{\chi}-1}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{\sqrt[3]{3\chi+2}-2}{\chi^2-3\chi+2}$

Απάντηση :

i) Έστω $\varphi(\chi)=\frac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{5\chi-6}}{\chi^2-9}=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, επειδή αναφέρει ότι η παραστάσεις έχουν νόημα δεν χρειάζεται να βρεις το Π Ο.

Επειδή $Q(3)=0$, βρίσκεις και το $P(3)=\sqrt{2\cdot 3+3}-\sqrt{5\cdot 3-6}\Leftrightarrow$

$P(3)=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$, βλέπεις και **τις ρίζες** στον αριθμητή, αλλά μην απογοητεύεσαι, πες «μπόρα» είναι θα περάσει, εν τω μεταξύ δες τι πρέπει να κάνεις : Σύμφωνα και με αυτά που έχουμε ήδη πει , πολλαπλασιάζεις με την συζυγή παράσταση του αριθμητή και έχεις :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\varphi(\chi)=\frac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{5\chi-6}}{\chi^2-9}=\frac{\left(\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{5\chi-6}\right)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}{(\chi^2-9)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2\chi+3}\right)^2-\left(\sqrt{5\chi-6}\right)^2}{(\chi^2-9)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=\frac{(2\chi+3)-(5\chi-6)}{\left(\chi^2-9\right)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=$$

$$\frac{2\chi+3-5\chi+6}{\left(\chi^2-9\right)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=\frac{-3\chi+9}{\left(\chi^2-9\right)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=$$

$$\frac{-3(\chi-3)}{(\chi-3)(\chi+3)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}=\frac{-3}{(\chi+3)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)},$$

επομένως : $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\sqrt{2\chi+3}-\sqrt{5\chi-6}}{\chi^2-9}=\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{-3}{(\chi+3)\left(\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi-6}\right)}$

$$=\frac{-3}{(3+3)\left(\sqrt{2\cdot 3+3}+\sqrt{5\cdot 3-6}\right)}=\frac{-3}{6\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)}=-\frac{1}{12}.$$

ii) Αν $g(\chi)=\dfrac{3\chi-15}{\sqrt{2\chi-6}-2}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της g, <u>αν έπρεπε να το βρεις</u>, έχεις :

- ✓ $2\chi-6\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq 3$ για να έχει νόημα η ρίζα.
- ✓ $\sqrt{2\chi-6}-2\neq 0$. Όμως $\sqrt{2\chi-6}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{2\chi-6}=2\Leftrightarrow 2\chi-6=4\Leftrightarrow$ $\chi=5$. Άρα πρέπει $\chi\neq 5$

Επομένως Π Ο το $A=[3,5)\cup(5,+\infty)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 5} g(\chi)$.

Επειδή $Q(5)=0$ (δες και Πεδίο Ορισμού), βρίσκεις και το $P(5)=3\cdot 5-15=0$. Επειδή **η ρίζα βρίσκεται** στον παρονομαστή, πολλαπλασιάζεις, αριθμητή και παρονομαστή, με τη συζυγή παράσταση του **παρονομαστή :**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$g(\chi)=\frac{3\chi-15}{\sqrt{2\chi-6}-2}=\frac{(3\chi-15)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{\left(\sqrt{2\chi-6}-2\right)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}=\frac{(3\chi-15)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{\left(\sqrt{2\chi-6}\right)^2-2^2}$$

$$=\frac{(3\chi-15)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{2\chi-6-4}=\frac{(3\chi-15)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{2\chi-10}=\frac{3(\chi-5)\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{2(\chi-5)}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{2}\text{, επομένως } \lim_{\chi\to5}g(\chi)=\lim_{\chi\to5}\frac{3\chi-15}{\sqrt{2\chi-6}-2}=$$

$$\lim_{\chi\to5}\frac{3\left(\sqrt{2\chi-6}+2\right)}{2}=\frac{3\left(\sqrt{2\cdot5-6}+2\right)}{2}=\frac{3(2+2)}{2}=6\,.$$

iii) Αν $f(\chi)=\dfrac{\sqrt{2\chi+7}-\sqrt{\chi^2+8}}{\sqrt{\chi}-1}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$.

Επειδή $Q(1)=0$ βρίσκεις και το $P(1)=\sqrt{2\cdot1+7}-\sqrt{1^2+8}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$.

Βλέπεις **τις ρίζες στον αριθμητή και στον παρονομαστή** οπότε πολλαπλασιάζεις, αριθμητή και παρονομαστή, **με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή,** αρχικά, **και με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή** στη συνέχεια (δες προσεκτικά) :

$$f(\chi)=\frac{\sqrt{2\chi+7}-\sqrt{\chi^2+8}}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{\left(\sqrt{2\chi+7}-\sqrt{\chi^2+8}\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2\chi+7}\right)^2-\left(\sqrt{\chi^2+8}\right)^2}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=\frac{2\chi+7-\left(\chi^2+8\right)}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=$$

$$\frac{2\chi+7-\chi^2-8}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=\frac{-(\chi^2-2\chi+1)}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=$$

$$\frac{-(\chi-1)^2}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}\text{, όμως δεν έγινε τίποτα για να}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

παραγοντοποιηθεί ο παρονομαστής και να γίνουν απλοποιήσεις, γι' αυτό πρέπει να πολλαπλασιάσεις και με τη συζυγή παράσταση και του παρονομαστή .

$$f(\chi)=\frac{-(\chi-1)^2}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=$$

$$\frac{-(\chi-1)^2\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{\chi}+1\right)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=\frac{-(\chi-1)^2\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{(\chi-1)\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}\Leftrightarrow$$

$$f(\chi)=\frac{-(\chi-1)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}\text{ , επομένως :}$$

$$\lim_{\chi\to 1} f(\chi)=\lim_{\chi\to 1}\frac{-(\chi-1)\left(\sqrt{\chi}+1\right)}{\left(\sqrt{2\chi+7}+\sqrt{\chi^2+8}\right)}=\frac{-(1-1)\left(\sqrt{1}+1\right)}{\left(\sqrt{2\cdot 1+7}+\sqrt{1^2+8}\right)}=\frac{0\cdot 2}{3+3}=0\,.$$

iv) Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt[3]{3\chi+2}-2}{\chi^2-3\chi+2}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$.

Επειδή $Q(2)=0$ βρίσκεις και το $P(2)=\sqrt[3]{3\cdot 2+2}-2=\sqrt[3]{8}-2=0$.

Βλέπεις **τη ρίζα** στον αριθμητή, οπότε πολλαπλασιάζεις, αριθμητή και παρονομαστή, **με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή** που είναι η $\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)$ και έχω **:**

$$f(\chi)=\frac{\sqrt[3]{3\chi+2}-2}{\chi^2-3\chi+2}=\frac{\left(\sqrt[3]{3\chi+2}-2\right)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)}{\left(\chi^2-3\chi+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^3-2^3}{\left(\chi^2-3\chi+2\right)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)}=$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{3\chi+2-8}{(\chi-1)(\chi-2)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)}=$$

$$\frac{3(\chi-2)}{(\chi-1)(\chi-2)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)} \text{ άρα}$$

$$f(\chi)=\frac{3}{(\chi-1)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)} \text{ οπότε :}$$

$$\lim_{\chi\to 2} f(\chi)=\lim_{\chi\to 2}\frac{3}{(\chi-1)\left(\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\chi+2}\right)+2^2\right)}=$$

$$\frac{3}{(2-1)\left(\left(\sqrt[3]{3\cdot 2+2}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{3\cdot 2+2}\right)+2^2\right)}=\frac{3}{1\left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{8}\right)+2^2\right)}\Rightarrow$$

$$\lim_{\chi\to 2} f(\chi)=\frac{3}{1\left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+2\left(\sqrt[3]{8}\right)+2^2\right)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

Παρατήρηση : **Super S O S** για τις ρητές συναρτήσεις (κλάσματα) που περιέχουν απόλυτη τιμή.

Αν έχεις να υπολογίσεις το όριο ρητής συνάρτησης (κλάσματος), $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ και ***στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει απόλυτη τιμή***, δουλεύεις με έναν από τους εξής τρόπους, ανάλογα με την περίπτωση όπως θα δεις και στα παραδείγματα πιο κάτω.

α) το $\chi\to\chi_0$ και το χ_0 **δεν είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ $\left[\mathbf{Q(\chi_0)\neq 0}\right]$

τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$. (δες και περίπτωση **11.i** πιο κάτω).

β) το $\chi\to\chi_0$ και χ_0 **είναι** ρίζα του παρονομαστή $Q(\chi)$ $\left[\mathbf{Q(\chi_0)=0}\right]$ τότε :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) αν το χ_0 **μηδενίζει** και την απόλυτη τιμή (είναι ρίζα), τότε θα κάνεις υποθέσεις για το χ: $\chi > \chi_0$ και $\chi < \chi_0$, θα βγάζεις κατάλληλα το απόλυτο και στη συνέχεια θα δουλεύεις, όπως ήδη ξέρεις με τις ρητές συναρτήσεις. Δεν ξεχνάς βέβαια πως έχοντας κάνει υποθέσεις για το χ, στην πραγματικότητα υπολογίζεις τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+}\varphi(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-}\varphi(\chi)$ οπότε εξετάζεις αν ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to\chi_0^-}\varphi(\chi)$. (δες και περίπτωση **11.ii** πιο κάτω)

ii) αν το χ_0 **δεν μηδενίζει** και την απόλυτη τιμή (δεν είναι ρίζα), τότε θα θεωρείς **κατάλληλο** διάστημα της μορφής $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$ (διάστημα που βολεύει καλλίτερα) μέσα στο οποίο το απόλυτο βγαίνει με μοναδικό τρόπο (χωρίς υποθέσεις για το χ). (δες και περίπτωση **11.iii** πιο κάτω)

Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα απόλυτα κάνεις τα ίδια με την αμέσως προηγούμενη περίπτωση φροντίζοντας λίγο περισσότερο το κατάλληλο διάστημα (δες και περίπτωση **11.iv** πιο κάτω).

11. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2-2|\chi-1|+3}{3|\chi+3|-2|\chi-1|}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2}{\chi^2+4\chi+3}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to -3}\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2|\chi+1|-6}{\chi^2+4\chi+3}$.

Απάντηση :

i) Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-2|\chi-1|+3}{3|\chi+3|-2|\chi-1|}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της φ έχεις :

$3|\chi+3|-2|\chi-1| \neq 0$. Όμως $\Leftrightarrow 3|\chi+3|-2|\chi-1| = 0 \Leftrightarrow$

$3|\chi+3|=2|\chi-1| \Leftrightarrow \begin{cases}3(\chi+3)=2(\chi-1) \text{ ή}\\ 3(\chi+3)=-2(\chi-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=-11 \text{ ή}\\ \chi=-\dfrac{7}{5}\end{cases}$

Λιβαδειά

Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-11)\cup\left(-11,-\frac{7}{5}\right)\cup\left(-\frac{7}{5},+\infty\right)$, άρα η φ ορίζεται

και σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

Επειδή $Q(1)=3|1+3|-2|1-1|=12\neq 0$ άρα δεν υπάρχει πρόβλημα με τον υπολογισμό του ορίου παρ' όλο που «βλέπεις» **την απόλυτη τιμή** οπότε είναι : $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\chi^2-2|\chi-1|+3}{3|\chi+3|-2|\chi-1|}=\frac{1^2-2|1-1|+3}{3|1+3|-2|1-1|}=\frac{1-2\cdot 0+3}{3\cdot 4-2\cdot 0}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

ii) Αν $f(\chi)=\frac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi}=\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της f έχεις :

$\chi^2-2\chi\neq 0$. Όμως $\Leftrightarrow\ \chi^2-2\chi=0\ \Leftrightarrow\ \chi(\chi-2)=0\ \Leftrightarrow$ $\rho_1=0$ και $\rho_2=2$.

Άρα Π Ο το $A=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$, άρα η f ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,2)\cup(2,\beta)$ πχ στο $(1,2)\cup(2,4)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)$.

Επειδή $Q(2)=2^2-2\cdot 2=4-4=0$, βρίσκεις και το $P(2)=2\cdot 2^2-|2-2|-8=8-0-8=0$, άρα πρέπει να παραγοντοποιήσεις αριθμητή και παρονομαστή, για να μπορέσεις να κάνεις απλοποιήσεις.

Όμως υπάρχει «πρόβλημα» γιατί υπάρχουν απόλυτες τιμές !

Κανένα πρόβλημα. Επειδή το απόλυτο μηδενίζεται όταν $\chi=2$ και ζητάς το όριο όταν $\chi\to 2$ τότε σκέφτεσαι ότι $\chi\to 2$ άρα πχ το $\chi\in(1,2)\cup(2,4)$, που ανέφερες πιο πάνω, άρα :

α. $\chi>2\ \Leftrightarrow\ |\chi-2|=\chi-2$ άρα η $f(\chi)=\frac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi}=$

$$\frac{2\chi^2-(\chi-2)-8}{\chi(\chi-2)}=\frac{2\chi^2-\chi+2-8}{\chi(\chi-2)}=\frac{2\chi^2-\chi-6}{\chi(\chi-2)}.$$

Όμως το $2\chi^2-\chi-6$ έχει $\Delta=49$ και ρίζες $\rho_1=-\frac{3}{2}$ και $\rho_2=2$ άρα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$2\chi^2-\chi-6 = 2(\chi-2)\left(\chi+\frac{3}{2}\right) = (\chi-2)(2\chi+3).$$

Άρα $f(\chi)=\dfrac{(\chi-2)(2\chi+3)}{\chi(\chi-2)} \Leftrightarrow f(\chi)=\dfrac{2\chi+3}{\chi}$ άρα

$$\lim_{\chi\to 2^+} f(\chi)= \lim_{\chi\to 2^+}\frac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi} = \lim_{\chi\to 2^+}\frac{2\chi+3}{\chi}=\frac{7}{2} \quad .$$

β. $\chi<2 \Leftrightarrow |\chi-2|=-(\chi-2)$ άρα η $f(\chi)=\dfrac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi} =$

$$\frac{2\chi^2+(\chi-2)-8}{\chi(\chi-2)} = \frac{2\chi^2+\chi-2-8}{\chi(\chi-2)}= \frac{2\chi^2+\chi-10}{\chi(\chi-2)}.$$

Όμως το $2\chi^2+\chi-10$ έχει **Δ = 81** και ρίζες $\rho_1=-\dfrac{5}{2}$ και $\rho_2=2$ άρα

$2\chi^2+\chi-10 = 2(\chi-2)\left(\chi+\dfrac{5}{2}\right) = (\chi-2)(2\chi+5)$. Άρα

$$f(\chi)=\frac{(\chi-2)(2\chi+5)}{\chi(\chi-2)} \Leftrightarrow f(\chi)=\frac{2\chi+5}{\chi} \text{ άρα}$$

$$\lim_{\chi\to 2^-} f(\chi)= \lim_{\chi\to 2^-}\frac{2\chi^2-|\chi-2|-8}{\chi^2-2\chi} = \lim_{\chi\to 2^-}\frac{2\chi+5}{\chi}=\frac{9}{2}$$ και επειδή

$\dfrac{7}{2}\neq\dfrac{9}{2}$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 2^+} f(\chi)\neq \lim\limits_{\chi\to 2^-} f(\chi)$ **άρα δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$

iii) Αν $g(\chi)=\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2}{\chi^2+4\chi+3}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, για το Π Ο της g έχεις $\chi^2+4\chi+3\neq 0$

Όμως $\chi^2+4\chi+3=0$, **Δ = 4**, άρα ρίζες $\rho_1=-3$ και $\rho_2=-1$.

Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής: $(\alpha,-1)\cup(-1,\beta)$ πχ στο $(-2,-1)\cup(-1,0)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to -1} g(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή $Q(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+3=1-4+3=0$, βρίσκεις και το

$P(-1)=(-1)^2+|-1+2|-2=1+1-2=0$ άρα πρέπει να

παραγοντοποιήσεις αριθμητή και παρονομαστή, για να μπορέσεις να κάνεις απλοποιήσεις.

Όμως δες πως λύνεται το «πρόβλημα» με τις απόλυτες τιμές :

Επειδή το απόλυτο μηδενίζεται όταν **$\chi=-2$** και ζητάς το όριο όταν $\chi\to-1$ τότε σκέφτεσαι ότι : $\chi\to-1 \Leftrightarrow \chi\in(-2,-1)\cup(-1,0)$, που ανέφερες πιο πάνω, άρα **$\chi>-2$,** δηλαδή σκέφτεσαι πως $\chi\to-1$ άρα μπορείς να υποθέσεις, με βεβαιότητα, ότι **$\chi>-2$**, τότε **$|\chi+2|=\chi+2$** άρα

$$g(\chi)=\frac{\chi^2+|\chi+2|-2}{\chi^2+4\chi+3}=\frac{\chi^2+\chi+2-2}{\chi^2+4\chi+3}=\frac{\chi^2+\chi}{\chi^2+4\chi+3}.$$

Όμως το $\chi^2+4\chi+3=0$ έχει ρίζες $\rho_1=-3$ και $\rho_2=-1$ άρα

$\chi^2+4\chi+3=(\chi+1)(\chi+3)$ και $g(\chi)=\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2}{\chi^2+4\chi+3}=\dfrac{\chi^2+\chi}{\chi^2+4\chi+3}\Leftrightarrow$

$$g(\chi)=\frac{\chi(\chi+1)}{(\chi+1)(\chi+3)}\Leftrightarrow g(\chi)=\frac{\chi}{\chi+3}$$ άρα

$$\lim_{\chi\to-1}g(\chi)=\lim_{\chi\to-1}\frac{\chi^2+|\chi+2|-2}{\chi^2+4\chi+3}=\lim_{\chi\to-1}\frac{\chi}{\chi+3}=\frac{-1}{-1+3}=-\frac{1}{2}$$

iv) Αν $\theta(\chi)=\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2|\chi+1|-6}{\chi^2+4\chi+3}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, Για το Π Ο της θ έχεις :

$\chi^2+4\chi+3\neq0$. Όμως $\chi^2+4\chi+3=0$, **$\Delta=4$**, άρα ρίζες $\rho_1=-3$ και $\rho_2=-1$. Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$, άρα η g ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,-3)\cup(-3,\beta)$ πχ στο $(-4,-3)\cup(-3,-2)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-3}\theta(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή $Q(-3)=(-3)^2+4\cdot(-3)+3=9-12+3=0$, βρίσκεις και το $P(-3)=(-3)^2+|-3+2|-2|-3+1|-6=9+1-4-6=0$ άρα πρέπει να παραγοντοποιήσεις αριθμητή και παρονομαστή, για να μπορέσεις να κάνεις απλοποιήσεις.

Επειδή το ένα απόλυτο μηδενίζεται όταν **χ = – 2** , το άλλο απόλυτο μηδενίζεται όταν **χ = – 1** και ζητάς το όριο όταν $\chi\to-3$ τότε σκέφτεσαι ότι : $\chi\to-3 \Leftrightarrow \chi\in(-4,-3)\cup(-3,-2)$, που ανέφερες πιο πάνω, άρα **χ < – 2 < – 1,** δηλαδή σκέφτεσαι πως $\chi\to-3$ άρα μπορώ να υποθέσω, με βεβαιότητα, ότι $\chi<-2<-1$, τότε $|\chi+2|=-(\chi+2)$ και $|\chi+1|=-(\chi+1)$

άρα η $\theta(\chi)=\dfrac{\chi^2+|\chi+2|-2|\chi+1|-6}{\chi^2+4\chi+3}=\dfrac{\chi^2-(\chi+2)+2(\chi+1)-6}{\chi^2+4\chi+3}\Leftrightarrow$

$\theta(\chi)=\dfrac{\chi^2+\chi-6}{\chi^2+4\chi+3}$.

Όμως το $\chi^2+4\chi+3$ έχει ρίζες $\rho_1=-3$ και $\rho_2=-1$ άρα $\chi^2+4\chi+3=(\chi+1)(\chi+3)$ και το $\chi^2+\chi-6$ έχει **Δ = 25** και ρίζες $\rho_3=-3$, $\rho_4=2$

άρα $\chi^2+\chi-6=(\chi-2)(\chi+3)$ Άρα $\theta(\chi)=\dfrac{\chi^2+\chi-6}{\chi^2+4\chi+3}\Leftrightarrow$

$\theta(\chi)=\dfrac{(\chi-2)(\chi+3)}{(\chi+1)(\chi+3)}\Leftrightarrow\ \theta(\chi)=\dfrac{\chi-2}{\chi+1}$ άρα

$$\lim_{\chi\to-3}\frac{\chi^2+|\chi+2|-2|\chi+1|-6}{\chi^2+4\chi+3}=\lim_{\chi\to-3}\frac{\chi-2}{\chi+1}=\frac{-3-2}{-3+1}=\frac{5}{2}.$$

Προειδοποίηση

Το διάβασμα βλάπτει σοβαρότατα την βλακεία, …

μην διακινδυνεύεις λοιπόν τέτοιες αξίες διαβάζοντας,

πάλεψε για να μπορείς να είσαι αυτό που θες.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Οδηγίες προς κολυμβητές

Όταν η συνάρτηση **f είναι πολλαπλού τύπου** και ζητάς το όριο σε **σημείο** χ_0 που η συνάρτηση **f αλλάζει τύπο** τότε υπολογίζεις τα **πλευρικά όρια** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi)$ (δες και παράδειγμα **12.i** και **ii** πιο κάτω).

12. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to -1} f(\chi)$ αν $f(\chi)=\begin{cases} 2\chi^2-1, & \chi\le -1 \\ \chi^2 \ , & \chi>-1 \end{cases}$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$ αν $g(\chi)=\begin{cases} \chi^2+3 & \text{όταν } \chi\le 2 \\ 3\chi-1 & \text{όταν } \chi>2 \end{cases}$

Απάντηση :

i) Π Ο της f είναι το A = R. Προφανώς η f ορίζεται και σε διάστημα $(-2,-1)\cup(-1,0)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to -1} f(\chi)$, επειδή όμως η f έχει διαφορετικό τύπο πριν και μετά το – 1 αναγκαστικά θα υπολογίσεις τα πλευρικά όρια.

Είναι $\begin{cases} \lim\limits_{\chi\to -1^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}\left(2\chi^2-1\right)=2(-1)^2-1=2-1=1 \\ \lim\limits_{\chi\to -1^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}\chi^2=(-1)^2=1 \end{cases}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to -1^-} f(\chi)=1=\lim\limits_{\chi\to -1^+} f(\chi)$ οπότε $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to -1} f(\chi)=1}$.

ii) Για το Π Ο της g έχεις : A = R. Προφανώς η g ορίζεται και σε διάστημα $(0,2)\cup(2,4)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$, επειδή όμως η g έχει διαφορετικό τύπο πριν και μετά το 2 αναγκαστικά θα υπολογίσεις τα πλευρικά όρια.

Είναι $\begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 2^-} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}\left(\chi^2+3\right)=2^2+3=7 \\ \lim\limits_{\chi\to 2^+} g(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}(3\chi-1)=5 \end{cases}$ άρα

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\lim\limits_{\chi\to 2^-} g(\chi) = 7 \neq 5 = \lim\limits_{\chi\to 2^+} g(\chi)$, άρα **δεν** υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 2} \mathbf{g(\chi)}$.

13. Αν $\lim\limits_{\chi\to -2} f(\chi) = 5$ να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to -2} \left[3f(\chi) - 11\right]$

ii) $\lim\limits_{\chi\to -2} g(\chi)$ αν $f^2(\chi) + g(\chi)\sqrt{4f(\chi)+5} = 3f^2(\chi) - 6f(\chi)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to -2} \dfrac{\sqrt{3f(\chi)+1}}{|3 - f(\chi)|}$.

Απάντηση :

i) Επειδή στην παράσταση $3f(\chi) - 11$ υπάρχουν τα επί μέρους όρια

$\lim\limits_{\chi\to -2} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to -2} 11$ άρα μπορείς να εφαρμόσεις το αντίστοιχο θεώρημα και επομένως είναι :

$$\lim_{\chi\to -2}\left[3f(\chi) - 11\right] = 3\lim_{\chi\to -2} f(\chi) - \lim_{\chi\to -2} 11 = 3\cdot 5 - 11 = 4 .$$

β) Επειδή στην παράσταση $f^2(\chi) + g(\chi)\sqrt{4f(\chi)+5} = 3f^2(\chi) - 6f(\chi)$ δεν έχεις εξασφαλισμένο ότι υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to -2} g(\chi)$, θα λύσεις πρώτα ως προς $g(\chi)$, $f^2(\chi) + g(\chi)\sqrt{4f(\chi)+5} = 3f^2(\chi) - 6f(\chi) \Leftrightarrow$

$$g(\chi)\sqrt{4f(\chi)+5} = 2f^2(\chi) - 6f(\chi) \Leftrightarrow g(\chi) = \frac{2f^2(\chi) - 6f(\chi)}{\sqrt{4f(\chi)+5}} .$$

Επειδή υπάρχουν τα $\lim\limits_{\chi\to -2} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to -2} 5$ και $\lim\limits_{\chi\to -2} \sqrt{4f(\chi)+5} = 5 \neq 0$ άρα μπορείς να εφαρμόσεις το αντίστοιχο θεώρημα και επομένως είναι :

$$\lim_{\chi\to -2} g(\chi) = \lim_{\chi\to -2} \frac{2f^2(\chi) - 6f(\chi)}{\sqrt{4f(\chi)+5}} = \frac{2\cdot 5^2 - 6\cdot 5}{\sqrt{4\cdot 5 + 5}} = \frac{50-30}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 .$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Επειδή στην παράσταση $\dfrac{\sqrt{3f(\chi)+1}}{|3-f(\chi)|}$ υπάρχουν τα επί μέρους όρια

$\lim\limits_{\chi\to -2} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to -2} 1$ και $\lim\limits_{\chi\to -2} 3$ άρα μπορείς να εφαρμόσεις το

αντίστοιχο θεώρημα και : $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\sqrt{3f(\chi)+1}}{|3-f(\chi)|} = \dfrac{\sqrt{3\cdot 5+1}}{|3-5|} = \dfrac{\sqrt{16}}{|-2|} = 2$.

14. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ όταν :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[3\varphi(\chi)-1+4\chi^2\right]=9$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}=2$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{3\varphi(\chi)-7}{\chi^2-1}=-1$.

Απάντηση :

Επειδή σε κάθε περίπτωση υπάρχει το αντίστοιχο $\lim\limits_{\chi\to 1}$ είναι προφανές ότι

και η $\varphi(\chi)$ θα ορίζεται τουλάχιστον σε διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$

$(\text{οπότε } \chi\neq 1)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

i) Επειδή στην παράσταση $3\varphi(\chi)-1+4\chi^2$ δεν είναι εξασφαλισμένο ότι υπάρχει το όριο της $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ $(\text{άλλο έχει νόημα και άλλο υπάρχει})$, δεν μπορείς να εφαρμόσεις το αντίστοιχο θεώρημα, γι' αυτό θα ακολουθείς σ' αυτές τις περιπτώσεις, την εξής μέθοδο :

ΜΕΘΟΔΟΣ :

Ονομάζεις $h(\chi)=3\varphi(\chi)-1+4\chi^2$ οπότε είναι

$\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=9$ και $3\varphi(\chi)=h(\chi)+1-4\chi^2 \Leftrightarrow$

$\varphi(\chi)=\dfrac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3}$ **(1)**.

Στην **(1)** είναι εξασφαλισμένο το όριο του δεξιού μέλους, μιας και υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1} h(\chi)=9$ και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-4\chi^2\right)=1-4\cdot 1^2=-3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα **(1)** : $\varphi(\chi)=\dfrac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3}=$

$\dfrac{\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)+\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-4\chi^2\right)}{\lim\limits_{\chi\to 1}3} \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\dfrac{9-3}{3}=2$

ii) Έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ και θα ακολουθήσεις την «γνωστή μέθοδο» :

Βάζεις $h(\chi)=\dfrac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}$ οπότε είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=2$ και

$\varphi(\chi)-1=(\chi-1)h(\chi) \Leftrightarrow \varphi(\chi)=(\chi-1)h(\chi)+1$ **(1)**.

Στην **(1)** είναι εξασφαλισμένο το όριο του δεξιού μέλους, μιας και υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=2$.

Άρα $\varphi(\chi)=(\chi-1)h(\chi)+1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left[(\chi-1)h(\chi)+1\right]=$

$\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)+\lim\limits_{\chi\to 1}1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=0\cdot 2+1=1$.

iii) Έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ και θα ακολουθήσεις την «γνωστή μέθοδο» :

Βάζεις $h(\chi)=\dfrac{3\varphi(\chi)-7}{\chi^2-1}$ οπότε είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=-1$ και

$3\varphi(\chi)-7=h(\chi)\left(\chi^2-1\right) \Leftrightarrow \varphi(\chi)=\dfrac{h(\chi)\left(\chi^2-1\right)+7}{3}$ **(1)**.

Στην **(1)** είναι εξασφαλισμένο το όριο του δεξιού μέλους, μιας και υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=-1$. Άρα **(1)** $\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{h(\chi)\left(\chi^2-1\right)+7}{3}=\dfrac{\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\chi^2-1\right)+\lim\limits_{\chi\to 1}7}{\lim\limits_{\chi\to 1}3}$

$\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\dfrac{0\cdot(-1)+7}{3}=\dfrac{7}{3}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Οι συναρτήσεις **f, g** είναι ορισμένες στο R και ισχύουν :

α) $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[3f(\chi)+g(\chi)\right]=-1$ και **β)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[f(\chi)-g(\chi)\right]=-3$.

Να βρεθούν τα :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[2f(\chi)+g(\chi)\right]$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}$

Απάντηση :

Επειδή τα $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[3f(\chi)+g(\chi)\right]=-1$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[f(\chi)-g(\chi)\right]=-3$,

υπάρχουν, είναι προφανές ότι και η $f(\chi)$ και η $g(\chi)$ θα ορίζονται τουλάχιστον σε διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ και είναι $\chi\neq 1$ άρα έχουν νόημα τα $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi)$.

✓ Για μια ακόμη φορά θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσεις βοηθητικούς αγνώστους για να διευκολυνθείς.

i) Βάλε $\omega(\chi)=3f(\chi)+g(\chi)$ **(1)** και $\theta(\chi)=f(\chi)-g(\chi)$ **(2).**

Άρα από τις σχέσεις **α)** και **β)** έχεις : $\begin{cases}\lim\limits_{\chi\to 1}\omega(\chi)=-1\\ \lim\limits_{\chi\to 1}\theta(\chi)=-3\end{cases}$ και επιπλέον οι

(1) και **(2)** αποτελούν **σύστημα** : $\begin{cases}3f(\chi)+g(\chi)=\omega(\chi)\\ f(\chi)-g(\chi)=\theta(\chi)\end{cases}$ με αγνώστους τα

$f(\chi)$ και $g(\chi)$. Μπορείς αν θέλεις να αντικαταστήσεις τα $f(\chi)$, $g(\chi)$ $\omega(\chi)$, $\theta(\chi)$ με κ, λ, μ, ν αντίστοιχα οπότε έχεις :

$\begin{cases}3\kappa+\lambda=\mu\\ \kappa-\lambda=\nu\end{cases}$ με πρόσθεση π χ κατά μέλη έχεις $\begin{cases}4\kappa=\mu+\nu\\ \kappa-\lambda=\nu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=\dfrac{\mu+\nu}{4}\\ \lambda=\kappa-\nu\end{cases}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \dfrac{\mu+\nu}{4} \\ \lambda = \dfrac{\mu-3\nu}{4} \end{cases} \text{ άρα } \begin{cases} f(\chi) = \dfrac{\omega(\chi)+\theta(\chi)}{4} \\ g(\chi) = \dfrac{\omega(\chi)-3\theta(\chi)}{4} \end{cases}.$$ Επειδή στο δεξιό μέλος

είναι εξασφαλισμένο ότι υπάρχουν τα όρια $\begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 1}\omega(\chi) = -1 \\ \lim\limits_{\chi\to 1}\theta(\chi) = -3 \end{cases}$ άρα

$$\begin{cases} f(\chi) = \dfrac{\omega(\chi)+\theta(\chi)}{4} \\ g(\chi) = \dfrac{\omega(\chi)-3\theta(\chi)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 1} \dfrac{\omega(\chi)+\theta(\chi)}{4} \\ \lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 1} \dfrac{\omega(\chi)-3\theta(\chi)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi) = \dfrac{\lim\limits_{\chi\to 1}\omega(\chi) + \lim\limits_{\chi\to 1}\theta(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to 1} 4} \\ \lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi) = \dfrac{\lim\limits_{\chi\to 1}\omega(\chi) - 3\lim\limits_{\chi\to 1}\theta(\chi)}{\lim\limits_{\chi\to 1} 4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi) = \dfrac{-1-3}{4} \\ \lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi) = \dfrac{-1-3\cdot(-3)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi) = -1 \\ \lim\limits_{\chi\to 1} g(\chi) = 2 \end{cases}.$$

ii)

- ✓ Στην παράσταση $2f(\chi)+g(\chi)$ υπάρχουν τα επί μέρους όρια, από τα προηγούμενο ερώτημα άρα υπάρχει και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[2f(\chi)+g(\chi)\right]$ και είναι

$$\lim_{\chi\to 1}\left[2f(\chi)+g(\chi)\right] = 2\lim_{\chi\to 1} f(\chi) + \lim_{\chi\to 1} g(\chi) = 2(-1)+2 = 0.$$

- ✓ Στην παράσταση $\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}$ παρ' όλο που υπάρχουν τα επί μέρους όρια είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(10f(\chi)+5g(\chi)\right) = 10(-1)+5\cdot 2 = 0$ άρα δεν μπορείς να εφαρμόσεις το γνωστό θεώρημα και θα κάνεις πρώτα απλοποιήσεις :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}=\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{5\left(2f(\chi)+g(\chi)\right)}=\dfrac{1}{5}$. Άρα υπάρχει και το

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}$ και είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Προσοχή : Όλα αυτά για την ύπαρξη του $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}$ και ότι

$\lim\limits_{\chi\to 1}\left(10f(\chi)+5g(\chi)\right)=0$, πρέπει να τα πεις και δεν μπορείς να κάνεις πως

τα ξέχασες γιατί είναι απαραίτητο π χ να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2f(\chi)+g(\chi)}{10f(\chi)+5g(\chi)}$,

αλλιώς δεν μπορείς να προχωρήσεις στον υπολογισμό του.

16. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και ισχύει :

$\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ για κάθε $\chi\in$ R.

Να βρεθούν τα :

i) τα $f(0)$, $f(3)$ και **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 3}f(\chi)$.

Απάντηση :

i)

✓ Αν στη σχέση : $\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ βάλεις όπου χ το 0 θα έχεις

$0-3\le f(0)\le 0^2-2\cdot 0-3 \Leftrightarrow -3\le f(0)\le -3$ οπότε προφανώς είναι

$f(0)=-3$.

✓ Αν στη σχέση : $\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ βάλεις όπου χ το 3 θα έχεις

$3-3\le f(3)\le 3^2-2\cdot 3-3 \Leftrightarrow 0\le f(3)\le 0$ οπότε προφανώς είναι $f(3)=0$.

ii)

Από την (ανισωτική) σχέση $\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ (που σου δίνει) είναι φανερό ότι θα χρησιμοποιήσεις το **κριτήριο παρεμβολής** (δες σχετικά στη θεωρία).

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}(\chi-3)=0-3=-3$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^2-2\chi-3\right)=0^2-2\cdot 0-3=-3$

άρα από την $\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ και το κριτήριο παρεμβολής είναι

και $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)=-3$.

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 3}(\chi-3)=3-3=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 3}\left(\chi^2-2\chi-3\right)=3^2-2\cdot 3-3=0$ άρα

από την $\chi-3\le f(\chi)\le\chi^2-2\chi-3$ και το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{\chi\to 3} f(\chi)=0$.

17. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και ισχύει :

$\eta\mu\chi+2\chi\le\chi f(\chi)\le-\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\chi$ για κάθε $\chi\in R$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$

Απάντηση :

Αφού η $\eta\mu\chi+2\chi\le\chi f(\chi)\le-\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\chi$ **(1)** ισχύει για κάθε $\chi\in R$ άρα ισχύει και όταν το χ ανήκει σε διάστημα της μορφής : $(\alpha,0)\cup(0,\beta)$ έτσι όταν $\chi\ne 0$ η σχέση **(1)** γίνεται :

1ον αν $\chi>0$ **(1)** $\Rightarrow \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2\le f(\chi)\le-\sigma\upsilon\nu^3\chi+4$

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2=1+2=3$ και

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}\left(-\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\right)=(-1)^3+4=3$

άρα από την : $\eta\mu\chi+2\chi\le\chi f(\chi)\le-\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\chi$ και το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=3$.

2ον αν $\chi<0$ **(1)** $\Rightarrow \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2\ge f(\chi)\ge-\sigma\upsilon\nu^3\chi+4$.

Λιβαδειά

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2\right)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}+2=1+2=3$ και

$\lim\limits_{\chi\to 0^-}\left(-\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\right)=(-1)^3+4=3$

άρα από την : $\eta\mu\chi+2\chi\le\chi f(\chi)\le-\chi\sigma\upsilon\nu^3\chi+4\chi$ και το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{\chi\to 0^-}f(\chi)=3$.

Επειδή $\lim\limits_{\chi\to 0^-}f(\chi)=3=\lim\limits_{\chi\to 0^+}f(\chi)$ άρα θα είναι και $\boldsymbol{\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)=3}$.

18. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(5\chi\cdot\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to -1}\left(\left(\chi^2-1\right)\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}\right)$

Η άσκηση είναι ένα «κλασικό» παράδειγμα εφαρμογής κριτηρίου παρεμβολής παρ' όλο που δεν υπάρχουν εμφανείς ανισότητες.
Όμως αν προσέξεις θα δεις δυο πράγματα :

✓ Στο $\boldsymbol{\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}}$ υπάρχει παρονομαστής το $5\chi^2$ και είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}5\chi^2=0$ άρα δεν είναι εξασφαλισμένο το $\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}$

✓ Επειδή, στον τύπο της συνάρτησης υπάρχει το $\boldsymbol{\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}}$, υπάρχουν ανισότητες που δεν φαίνονται, γιατί για κάθε $\chi\in\mathrm{R}$ είναι $\boldsymbol{\left|\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}\right|\le 1}$.

Απάντηση :

i) Για το Π Ο έχεις : πρέπει $\chi\neq 0$ για να έχει νόημα το $\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}$.

Άρα Π Ο το $A=\mathrm{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επομένως η $g(\chi)=5\cdot\chi\cdot\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}$ ορίζεται και σε διάστημα

$\Delta=(-1,0)\cup(0,1)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)$.

Είναι $|g(\chi)|=\left|5\cdot\chi\cdot\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}\right|=5|\chi|\left|\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}\right|\le 5|\chi| \Leftrightarrow |g(\chi)|\le 5|\chi|$

$\Leftrightarrow -5|\chi|\le g(\chi)\le 5|\chi|$.

Όμως $\lim\limits_{\chi\to 0}(-5|\chi|)=\lim\limits_{\chi\to 0}(5|\chi|)=0$ άρα (κριτήριο παρεμβολής) είναι

$\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 0}\left(5\cdot\chi\cdot\eta\mu\dfrac{\chi^2-1}{5\chi^2}\right)=0$.

ii) Για το Π Ο έχεις : πρέπει $\chi+1\neq 0$ για να έχει νόημα το $\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}$.

Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Επομένως η $g(\chi)=(\chi^2-1)\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}$ ορίζεται και σε διάστημα

$\Delta=(-2,-1)\cup(-1,0)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to -1} g(\chi)$.

Είναι $|g(\chi)|=\left|(\chi^2-1)\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}\right|=|\chi^2-1|\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}\right|\le|\chi^2-1| \Leftrightarrow$

$|g(\chi)|\le|\chi^2-1| \Leftrightarrow -|\chi^2-1|\le g(\chi)\le|\chi^2-1|$.

Όμως $\lim\limits_{\chi\to -1}\left(-|\chi^2-1|\right)=\lim\limits_{\chi\to -1}\left(|\chi^2-1|\right)=0$ άρα (κριτήριο παρεμβολής)

είναι $\lim\limits_{\chi\to -1} g(\chi)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to -1}\left((\chi^2-1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\chi}{\chi+1}\right)=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(-5,2)\cup(2,9)$ και ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{f(\chi)-\chi^2+3\chi-2}{\chi-2}=5\,.$$ Να βρεθεί το $\lim_{\chi\to 2} f(\chi)$ (αν υπάρχει).

Απάντηση :

Επειδή δεν έχεις εξασφαλίσει την ύπαρξη του $\lim_{\chi\to 2} f(\chi)$ βάζεις

$$h(\chi)=\frac{f(\chi)-\chi^2+3\chi-2}{\chi-2}$$ οπότε είναι $\lim_{\chi\to 2} h(\chi)=5$ και

$$f(\chi)-\chi^2+3\chi-2=h(\chi)(\chi-2)\Leftrightarrow f(\chi)=h(\chi)(\chi-2)+\chi^2-3\chi+2\ \textbf{(1)}.$$

Στην **(1)** είναι εξασφαλισμένο το όριο του δεξιού μέλους, μιας και υπάρχει το $\lim_{\chi\to 2} h(\chi)=5$.

Άρα $f(\chi)=h(\chi)(\chi-2)+\chi^2-3\chi+2\Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi\to 2} f(\chi)=\lim_{\chi\to 2} h(\chi)\lim_{\chi\to 2}(\chi-2)+\lim_{\chi\to 2}\left(\chi^2-3\chi+2\right)=$$

$$5\cdot 0+\left(2^2-3\cdot 2+2\right)\Leftrightarrow \lim_{\chi\to 2} f(\chi)=0\,.$$

20. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(-5,2)\cup(2,9)$ και ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 2}\frac{f(\chi)-\chi^2+3\chi-2}{\chi-2}=3\,.$$ Να βρεθεί το $\lim_{\chi\to 2}\frac{3\chi f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}$.

Απάντηση :

Επειδή δεν έχεις εξασφαλίσει την ύπαρξη του $\lim_{\chi\to 2} f(\chi)$ βάζεις

$$h(\chi)=\frac{f(\chi)-\chi^2+3\chi-2}{\chi-2}$$ οπότε είναι $\lim_{\chi\to 2} h(\chi)=3$ και

$$f(\chi)-\chi^2+3\chi-2=h(\chi)(\chi-2)\Leftrightarrow f(\chi)=h(\chi)(\chi-2)+\chi^2-3\chi+2\,.$$

Αντικαθιστάς την $f(\chi)$ στην $\frac{3\chi f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}$ και έχεις :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{3\chi f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=\frac{3\chi\left[h(\chi)(\chi-2)+\chi^2-3\chi+2\right]-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=$$

$$\frac{3\chi\left[h(\chi)(\chi-2)+\chi^2-3\chi+2\right]}{\chi-2}-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=$$

$$\frac{3\chi h(\chi)(\chi-2)}{\chi-2}+\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi-2}-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=$$

$3\chi h(\chi)+\frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi-2}-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}$, το $\chi^2-3\chi+2$ έχει ρίζες το 1 και το 2 άρα

$\chi^2-3\chi+2=(\chi-1)(\chi-2)$ και

επομένως $\frac{3\chi f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=3\chi h(\chi)+\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{\chi-2}-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=$

$3\chi h(\chi)+\chi-1-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{3\chi f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=\lim\limits_{\chi\to 2}\left[3\chi h(\chi)+\chi-1-\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}\right]=$

$$\lim_{\chi\to 2}3\chi\cdot\lim_{\chi\to 2}h(\chi)+\lim_{\chi\to 2}(\chi-1)-\lim_{\chi\to 2}\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=6\cdot 3+(2-1)-1.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi\to 2}\frac{3\chi\cdot f(\chi)-\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=18.$$

Αφού $\lim\limits_{\chi\to 2}3\chi=3\cdot 2=6$, $\lim\limits_{\chi\to 2}h(\chi)=3$ και για το $\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}$, αν

βάλεις $u=\chi-2$ οπότε $\lim\limits_{\chi\to 2}u=0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{\eta\mu(\chi-2)}{\chi-2}=\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

ό ρ ι ο (μαθητή) = μιζέρια
αδιαφορία→∞ .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. Οι συναρτήσεις **f, g** είναι ορισμένες στο R και ισχύουν :

α) Υπάρχει στο Πεδίο ορισμού τους διάστημα της μορφής: $(\alpha, 2)\cup(2, 5)$.

β) Για κάθε $\chi \in (\alpha, 2)\cup(2, 5)$ ισχύει $-f(\chi) < 2 < g(\chi) + 2$.

γ) $\lim\limits_{\chi \to 2}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = -2$.

Να βρεθούν τα : $\lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi \to 2} g(\chi)$.

Απάντηση :

Όταν είναι $\chi \in (\alpha, 2)\cup(2, 5)$ τότε η σχέση $-f(\chi) < 2 < g(\chi) + 2$ γράφεται

$0 < 2 + f(\chi) < f(\chi) + g(\chi) + 2$.

Όμως $\lim\limits_{\chi \to 2}\left[f(\chi)+g(\chi)+2\right] = \lim\limits_{\chi \to 2}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] + 2 = -2 + 2 = 0$ και

$\lim\limits_{\chi \to 2} 0 = 0$. Άρα με βάση το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και

$\lim\limits_{\chi \to 2}\left[2 + f(\chi)\right] = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi) = -2}$.

Οπότε αν θέσεις $h(\chi) = f(\chi) + g(\chi)$ είναι $\lim\limits_{\chi \to 2} h(\chi) = -2$ άρα

$g(\chi) = h(\chi) - f(\chi) \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi \to 2} g(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 2}\left[h(\chi) - f(\chi)\right] =$

$\lim\limits_{\chi \to 2} h(\chi) - \lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi) \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi \to 2} g(\chi) = -2 - (-2) \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{\chi \to 2} g(\chi) = 0}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση : $\varphi(\chi) = \begin{cases} (2\alpha+1)\chi - \beta, & \chi < -1 \\ (2\alpha+\beta)\chi^2 - \alpha + 2\beta, & -1 \le \chi < 1 \\ (\beta+4)\chi - 5\alpha, & \chi \ge 1 \end{cases}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να δείξετε ότι έχουν νόημα τα

$\lim\limits_{\chi \to -1} \varphi(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi \to 1} \varphi(\chi)$.

ii) Να βρείτε τα **α** και **β** έτσι ώστε να υπάρχουν τα $\lim\limits_{\chi \to -1} \varphi(\chi)$ και

$\lim\limits_{\chi \to 1} \varphi(\chi)$, τα οποία και να βρείτε.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

i) Η συνάρτηση φ είναι πολλαπλού τύπου, από τον «τύπο» της είναι φανερό ότι Π Ο είναι το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ άρα η συνάρτηση ορίζεται και σε διαστήματα της μορφής $(-2,-1)\cup(-1,1)$, $(-1,1)\cup(1,2)$ άρα έχουν νόημα τα $\lim\limits_{\chi\to -1}\varphi(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

ii) Για να υπάρχει πχ το $\lim\limits_{\chi\to -1}\varphi(\chi)$ πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο – 1 και να είναι ίσα.

✓ Έτσι λοιπόν είναι $\lim\limits_{\chi\to -1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}\left((2\alpha+1)\chi-\beta\right)=-2\alpha-\beta-1$ και

$\lim\limits_{\chi\to -1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}\left((2\alpha+\beta)\chi^2-\alpha+2\beta\right)=\alpha+3\beta$.

Για να υπάρχει λοιπόν το $\lim\limits_{\chi\to -1}\varphi(\chi)$ πρέπει $\lim\limits_{\chi\to -1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1^+}\varphi(\chi)$

$\Leftrightarrow -2\alpha-\beta-1=\alpha+3\beta$ **(1) .**

Για να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο 1 και να είναι ίσα.

✓ Έτσι λοιπόν είναι $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left((2\alpha+\beta)\chi^2-\alpha+2\beta\right)=\alpha+3\beta$ και

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left((\beta+4)\chi-5\alpha\right)=-5\alpha+\beta+4$.

Για να υπάρχει λοιπόν το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ πρέπει $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)\Leftrightarrow$

$\alpha+3\beta=-5\alpha+\beta+4$ **(2) .** Οι **(1)** και **(2)** αποτελούν σύστημα που όταν το λύσεις θα βρεις **α = 1** και **β = – 1.**

Για τα όρια στο −1 και στο 1 έχεις :

$$\begin{cases}\lim\limits_{\chi\to -1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1^+}\varphi(\chi)=3\alpha+\beta=2\\ \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1^-}\varphi(\chi)=3\alpha+\beta=2\end{cases}.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(\chi)=\begin{cases}\chi^{\alpha+2} & \chi<e\\ \ln\chi^2-\dfrac{\eta\mu(\chi-e)}{\chi-e}, & \chi\geq e\end{cases}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να δείξετε ότι έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$.

ii) Να βρείτε το **α** έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$.

Απάντηση :

i) Η συνάρτηση f είναι πολλαπλού τύπου, από τον «τύπο» της είναι φανερό ότι Π Ο είναι το A = R, έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$.

ii) Για να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$ πρέπει να υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο e και να είναι ίσα.

✓ Έτσι λοιπόν είναι $\lim\limits_{\chi\to e^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to e} \chi^{\alpha+2} = e^{\alpha+2}$.

✓ $\lim\limits_{\chi\to e^+} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to e}\left(\ln\chi^2-\dfrac{\eta\mu(\chi-e)}{\chi-e}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to e}\left(\ln\chi^2\right)=\lim\limits_{\chi\to e}\left(2\ln\chi\right)=2$ και αν θέσεις $u=\chi-e \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to e} u=\lim\limits_{\chi\to e}(\chi-e)=0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to e}\dfrac{\eta\mu(\chi-e)}{\chi-e}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, οπότε

$\lim\limits_{\chi\to e^+} f(\chi) = 2-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to e^+} f(\chi)=1$.

Για να υπάρχει λοιπόν το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$ πρέπει $\lim\limits_{\chi\to e^-} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to e^+} f(\chi) \Leftrightarrow$

$e^{\alpha+2}=1 \Leftrightarrow \alpha+2=0 \Leftrightarrow$ **α = – 2**.

Για το όριο στο e έχεις $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to e^-} f(\chi) = e^{\alpha+2}=e^{-2+2}=e^0=1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν ανησυχείς μήπως τελειώνοντας το Λύκειο θα τελειώσει και το διάβασμα, μπορείς να κοιμάσαι ήσυχα.

- ✓ Άμα διαβάζεις πολύ θα μπεις σε σχολή και έχεις εξασφαλίσει 6 – 7 χρόνια διαβάσματος για να τελειώσεις.
- ✓ Άμα τελειώσεις έχεις εξασφαλίσει 35 χρόνια διαβάσματος μέχρι τη σύνταξη.

Ε ! μετά θα κά α α α θεσαι.

(κατάλαβες τώρα τι σημαίνει : Κάνε υπομονή μέχρι τον Ιούνιο).

Από τον δεκάλογο του καλού γονιού.



Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Όταν μια συνάρτηση **f** έχει όριο στο σημείο χ_0 έναν πραγματικό αριθμό **λ** τότε το χ_0 ανήκει οπωσδήποτε στο πεδίο ορισμού της.	☐	☐
2.	Τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης **f** είναι πάντοτε ίσα, όταν το χ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο χ_0.	☐	☐
3.	Το όριο μιας συνάρτησης f στο χ_0 εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό.	☐	☐
4.	Αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο χ_0, τότε αυτό είναι μοναδικό.	☐	☐
5.	Ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi)-\lambda\right]=0$.	☐	☐
6.	Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda$, τότε είναι και $f(\chi_0)=\lambda$ για κάθε χ_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της **f**.	☐	☐

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda$, τότε υπάρχει συνάρτηση φ με

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)=0$ και $f(\chi)=\varphi(\chi)+\lambda$.

8. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \big(f(\chi)+g(\chi)\big)=\lambda$, $\lambda\in R$ τότε οι συναρτήσεις

f, g έχουν πάντοτε όριο στο χ_0

9. Αν για τις συναρτήσεις f, g : $A\to R$ υπάρχει το

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \big[f(\chi)\cdot g(\chi)\big]$, τότε ισχύει πάντοτε η ισότητα

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \big[f(\chi)\cdot g(\chi)\big]=\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)\cdot\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$.

10. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, τότε ισχύει η σχέση

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$ για κάθε $\chi_0\in D_f=D_g$.

11. Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{|\chi|}{\chi}-1$ ισχύει η σχέση :

$\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=0=\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)$.

12. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} |f(\chi)|=|\lambda|$, $\lambda\neq 0$, τότε πάντοτε ισχύει

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda$ ή $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=-\lambda$.

13. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\lambda$, $\lambda\in R^*$ τότε οι τιμές της f είναι

ομόσημες με το λ όταν το χ παίρνει τιμές κοντά στο χ_0 .

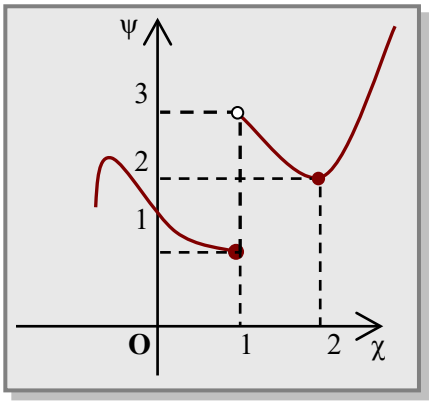
14. Ισχύει ότι $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\chi}=\alpha$, για κάθε $\alpha\in R^*$.

15. Αν $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\chi)}{\chi}=\lambda$, τότε $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{f(\alpha\cdot\chi)}{\chi}=\alpha\cdot\lambda$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης **φ** είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα δίπλα, τότε να βρείτε ποια από τις πιο κάτω σχέσεις είναι **λάθος.**

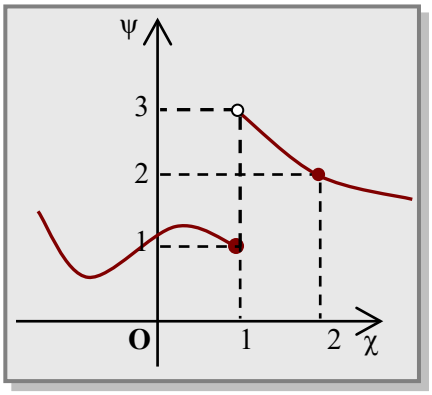


i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=1$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=1$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=3$ **iv)** $\varphi(1)=1$

v) $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=2$ **vi)** $\varphi(2)=2$

2. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης **φ** είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα δίπλα, τότε να βρείτε ποια από τις πιο κάτω σχέσεις είναι **σωστή.**



i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=1$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=1$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=2$ **iv)** $\varphi(1)=3$

v) $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 2^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2^+}\varphi(\chi)=3$

3. Αν $f(\chi)\le g(\chi)$ όταν $\chi\in(1,3)$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)=\kappa$, $\lim\limits_{\chi\to 2}g(\chi)=\lambda$ με κ, $\lambda\in R$, τότε ισχύει ότι :

i) $\kappa>\lambda$ **ii)** $\kappa<0<\lambda$ **iii)** $\kappa>0>\lambda$ **iv)** $\kappa<\lambda$

v) $\kappa\ge\lambda$ **vi)** $\kappa\le\lambda$ **vii)** Τίποτε από τα παραπάνω

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Αν $h(\chi) \le f(\chi) \le g(\chi)$ όταν $\chi \in (-1,1)$ και $\lim\limits_{\chi \to 0} h(\chi) = -1$,

$\lim\limits_{\chi \to 0} g(\chi) = 1$ τότε ισχύει ότι :

i) $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = 0$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = -1$ **iii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = 1$

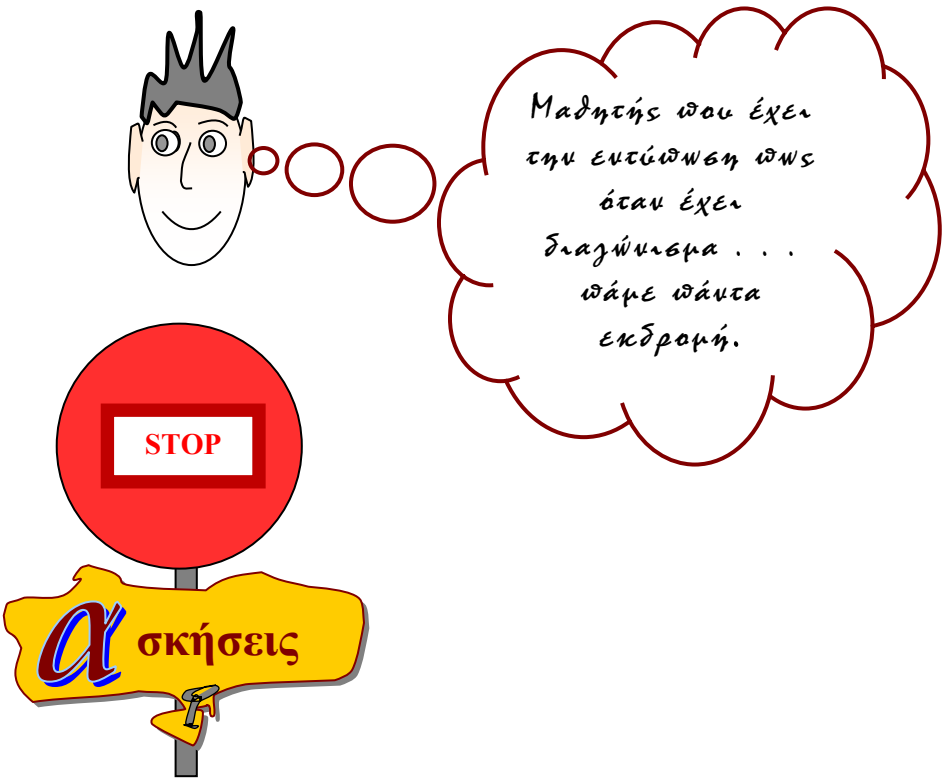
iv) Δεν υπάρχει το όριο της f στο 0 **v)** Τίποτε από τα παραπάνω

5. Αν $h(\chi) \le f(\chi) \le g(\chi)$ όταν $\chi \in (-1,1)$ και $\lim\limits_{\chi \to 0} h(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 0} g(\chi) = -2$,

τότε ισχύει ότι :

i) $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = 0$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = -1$ **iii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = 1$ **iv)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi) = -2$

v) Δεν υπάρχει το όριο της f στο 0 **vi)** Τίποτε από τα παραπάνω



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Να βρεθούν τα όρια :

Δες και παρ : **8 σελ. 221**

i) $\lim\limits_{\chi\to -2}\left(\chi^3+2\chi^2+\chi\right)^{10}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to -5}\left(\chi^2+6\chi+4\right)^{30}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\chi^{16}-\chi^{15}+\cdots-\chi+1\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\chi^{25}-\chi^{24}+\cdots+\chi-1\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to -1}\left(\chi^{25}-\chi^{24}+\cdots+\chi-1\right)$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to \sqrt{3}}\dfrac{\chi^4-\chi^2+2}{\chi^2-1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to -3}\dfrac{\sqrt{\chi^3+31}-2}{\sqrt{\chi^2+7}-2}$, $\chi\in\left[-\sqrt[3]{31},3\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

viii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt{\chi-2}-2}{\sqrt{\chi^3-4}+\sqrt[3]{2\chi+4}}$, $\chi\in\left[\sqrt[3]{4},3\right)$

ix) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\left|\chi^2-5\chi+7\right|}{\left|\chi-3\right|+1}$ **x)** $\lim\limits_{\chi\to -3}\dfrac{\left|\chi^2-5\chi\right|-2\left|\chi^2+1\right|}{\left|\chi-3\right|+1}$

2. Να βρείτε το κ έτσι ώστε να υπάρχουν τα όρια :

Υποδ. βρες Π Ο δες Θεωρία. σελ. 203 και **Παρατηρήσεις**

i) $\lim\limits_{\chi\to \kappa-2}\sqrt{\chi^2-4}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2\kappa+1}\dfrac{3}{\sqrt{\chi^2-1}}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to \kappa}\dfrac{3}{\sqrt{\chi^2+1}}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to \kappa+1}\dfrac{3+\sqrt{\chi^2-1}}{\sqrt{\chi^2-1}-1}$

3. Να βρείτε τα όρια (όπου υπάρχουν) :

i) $\lim\limits_{\chi\to -2}f(\chi)$ αν $f(\chi)=\begin{cases}\sqrt{\chi^2-4}, & \chi<-2\\ 2\chi+4, & \chi\geq -2\end{cases}$

ii) $\lim\limits_{\chi\to -1}f(\chi)$ αν $f(\chi)=\begin{cases}3\chi-1, & \chi<-1\\ \chi+5, & \chi\geq -1\end{cases}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}f(\chi)$ αν $f(\chi)=\begin{cases}\sqrt{\chi^2+4}, & \chi\geq 0\\ 2\chi+2, & \chi<0\end{cases}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iv) $\lim\limits_{\chi\to 5} f(\chi)$ αν $f(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2-7\chi+10}{\chi-5}, & \chi<5\\ 3\chi-12, & \chi\geq 5\end{cases}$

4. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** έχει Π Ο το $A=(-5,-2)\cup(-2,3)$ και ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to -2^-} f(\chi)=2\lambda+3$ και $\lim\limits_{\chi\to -2^+} f(\chi)=3\lambda+5$.

Παρ : **12, 22, 23**

Να βρείτε το λ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to -2} f(\chi)$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο αυτό.

5. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** έχει Π Ο το $A=(-1,0)\cup(0,1)$ και ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=\lambda^2-\lambda+5$ και $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=\lambda-5$.

Να βρείτε το λ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο αυτό.

6. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** έχει Π Ο το $A=R$ και για το $\chi_0\in R$ ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi)=\lambda^2-3\lambda+1$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi)=2\lambda-5$.

Να βρείτε το λ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο αυτό.

7. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** έχει Π Ο το $A=R$ και για το $\chi_0\in R$ ισχύει :

$\lim\limits_{\chi\to\chi_0^-} f(\chi)=\kappa+\lambda$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0^+} f(\chi)=\dfrac{\kappa+2}{6}$.

Να βρείτε τα κ, λ έτσι ώστε να ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=1$.

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** με τύπο $f(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\chi-2\kappa+\lambda+2, & \chi<-1\\ \chi+\kappa+2\lambda+1, & \chi\geq -1\end{cases}$

Να βρείτε τα κ, λ έτσι ώστε να ισχύει $\lim\limits_{\chi\to -1} f(\chi)=-1$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. Δίνεται ότι η συνάρτηση **f** έχει Π Ο το Α = R

Να βρείτε το κ έτσι ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=\kappa$ και

$\lim\limits_{t\to 0} f(t+\chi_0)=2\kappa+11$, $\chi_0 \in R$.

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi)=\begin{cases}\chi^{3\alpha+2}+2 & \chi\le e\\ 2\ln\chi^2-\dfrac{\eta\mu(\chi-e)}{\chi-e}, & \chi>e\end{cases}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να δείξετε ότι έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$.

ii) Να βρείτε το **α** έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$ και να υπολογίσετε το

$\lim\limits_{\chi\to e} f(\chi)$.

11. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε η συνάρτηση

$$\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\kappa\chi+1}{\chi^2-1}, & \chi<-1\\ \ln(\chi+\lambda), & \chi\ge -1\end{cases}$$

να **έχει όριο**, πραγματικό αριθμό στο $\chi_0=-1$.

Δες παρ : **1 – 7** και **9** και παρατηρήσεις σελ 223 – 224

12. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 2\chi}{\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(-2\chi)}{\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 2\chi}{2\cdot\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{1}{\chi^2}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\chi^2}\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 5\chi}{7\chi}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{5\eta\mu 2\chi}{2\eta\mu 5\chi}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 11\chi}{\varepsilon\varphi 7\chi}$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi}{\sqrt{\chi+4}-2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες και όριο σύνθετης συνάρτησης.

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt{\chi^2+4}-2}{1-\sigma\upsilon\nu^2 3\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 3\chi}{\chi^4-\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\sigma\upsilon\nu\left(\chi^2-1+\dfrac{\pi}{3}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi^4+1}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to \pi}\dfrac{\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\eta\mu^2\left(\chi^2-2\chi+1\right)}{\chi^2-2\chi+1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}\right)$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{2}{\eta\mu^2\chi}-\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\chi}\right)$

14. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|\eta\mu\chi|}{\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{|\chi|}$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\left|\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right|$

iv) $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{\eta\mu(\chi+1)}{\chi+1}$ **v)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi+1}{\chi+1}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{|\eta\mu\chi+1|}{\chi+1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{\eta\mu\left[\dfrac{\pi}{2}(\chi-1)\right]}{\chi-1}$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\left[\dfrac{3\pi}{4}(\chi+2)\right]}{\chi+2}$

ix) $\lim\limits_{\chi\to \frac{\pi}{2}}\left|\dfrac{\eta\mu\left(\chi-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\chi-\dfrac{\pi}{2}}\right|$

15. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha\chi}{\alpha\chi+\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha\chi+\eta\mu\beta\chi}{\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha\chi+\eta\mu\beta\chi}{\varepsilon\varphi\alpha\chi+\varepsilon\varphi\beta\chi}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha\chi+\beta)}{\alpha\chi+\beta}$ με $\alpha,\beta\neq 0$

v) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu 3\chi+\eta\mu 2\chi}{\varepsilon\varphi 7\chi-\varepsilon\varphi 2\chi}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu(2\chi+3)}{2\chi+3}$ με $\alpha,\beta\neq 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. Να δείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi+\eta\mu 2\chi+\cdots+\eta\mu\nu\chi}{\chi}=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu\in N$.

ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left[\eta\mu\chi+\eta\mu 2\chi+\cdots+\eta\mu\kappa\chi\right]=\lim\limits_{\chi\to 0}\left[\eta\mu\chi+\eta\mu 3\chi+\cdots+\eta\mu(2\kappa+1)\chi\right]$,

$\nu\in N$.

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi\cdot\eta\mu 2\chi\cdot\ldots\cdot\eta\mu\nu\chi}{\chi^{\nu}}=\nu!$, $\nu\in N$ $\left(\text{υπενθύμιση } \nu!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu\right)$.

17. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi+\eta\mu 2\chi+\cdots+\eta\mu\nu\chi}{\chi}=28$.

ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi\cdot\eta\mu 2\chi\cdot\ldots\cdot\eta\mu\nu\chi}{\chi^{\nu}}=120$ $\left(\text{υποδ γράψε το } 120=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\right)$.

18. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ : **9 – 10,** συζυγείς παραστάσεις

i) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi^3+4\chi^2-3\chi-18}{\chi^2-\chi-2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{2\chi^2-\chi-6}{\chi^2-4}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to -1}\left(\dfrac{\chi+1}{\chi^2-1}\sqrt{\chi^2-1}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

v) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2-2\chi+1}{\chi^2-1}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2-1}{\chi^3-1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to 5}\dfrac{\chi^3-5\chi^2+25\chi-125}{\chi^3-125}$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi^3-8}{\chi^2-4}$

19. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi^2-1}+\sqrt{\chi-1}}{\sqrt{\chi^2-1}}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{2}}{\chi-2}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{\chi}-1}{\sqrt{\chi}-1}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{\chi}-1}{\sqrt{\chi}-1}$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to -5}\dfrac{\chi+5}{\sqrt{\chi+9}-2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi}-1}{\sqrt{\chi+8}-\sqrt{\chi^2+8}}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3\chi+5}-2}{\chi^2-3\chi+2}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\dfrac{1}{1-\chi}-\dfrac{3}{1-\chi^3}\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2+\chi}{\sqrt[12]{\chi^3}}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^{\mu+1}-\chi^{\mu}}{\sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}}$

21. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\chi-\sqrt{\chi+6}}{\sqrt{2\chi+3}-3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\chi}-\sqrt{3-\chi}}{\chi^2+2\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 4}\dfrac{\chi-3\sqrt{\chi}+2}{\chi-4}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi+1}-\chi+1}{\chi^2+4\chi+3}$

v) $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\sqrt{2\chi+8}-\sqrt{3\chi^2-8}}{\chi^2-4}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{\chi}-\sqrt{\chi}}{\chi-1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi-\sqrt{\chi}}{\chi-\sqrt[3]{\chi}}$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\chi}-\sqrt[4]{\chi}}{\chi-\sqrt[3]{\chi}}$

22. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\mathrm{f}(\chi)$ όταν $\mathrm{f}(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\chi+4}-2}{\chi}, & \chi\in(-4,0)\\ \dfrac{\sqrt{\chi}-\chi}{\chi+\sqrt{\chi}}, & \chi>0\end{cases}$.

ii) $\lim\limits_{\chi\to -3}\mathrm{g}(\chi)$ όταν $\mathrm{g}(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7+\chi^2}-4}{\chi+3}, & \chi\in(-4,-3)\\ \dfrac{\sqrt{\chi+12}+\chi}{\sqrt{|\chi|}-\sqrt{3}}, & \chi>-3\end{cases}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ **11i)** και ιδιότ. απολύτων.

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3|x+3|+4}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-|x+3|+3}{3|x+3|+4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{2|x^2+3|+|x+1|}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|-|x+3|}{|x+3|+4x+1}$

24. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ **11ii), iii),** ιδιότ. απολύτων.

i) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x|-1}{x+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-|x+1|-1}{2x^2-2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-2|x-1|+2}{2|x+3|-6}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|-|x+3|+2}{x^2-x-2}$

v) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+|x+2|-4}{(x-1)(x+2)}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2}{|x+1|}$

25. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ **11 iii),** ιδιότ. απολύτων.

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+3|-2x-5}{x+2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-|x+1|-5}{x^2-9}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x+1|-2|x+2|+3}{2|x+3|-6}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|2x+1|-|x+3|+1}{x^2-4x+3}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-|x-2|+1}{|x-3|-2}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|3x-1|-2|x+3|}{x^2+4x+3}$

26. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ : **11.**

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-1|-2x+3}{|x-3|-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3|x-2|+2|x-4|-8}{x^2-9}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|2x-1|-2|x-2|+1}{2|x-4|-6}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sigma\upsilon\nu x-1|}{x}$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : Δες παρ **11 γ)**, πρόσημο τριωνύμου.

i) $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\chi^2+\left|\chi^2+\chi-2\right|-2\chi}{\chi+2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^2+\left|\chi^2+\chi-2\right|-\chi}{\chi-1}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2+\left|\chi^2+\chi-2\right|-\left|\chi-3\right|+1}{\left|\chi+1\right|-1}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\left|\chi^2+4\chi+3\right|-1}{\left|\chi+1\right|-1}$

28. Αν $\lim\limits_{\chi\to -5}f(\chi)=5$, $f(\chi)\neq 5$ για κάθε $\chi\in R$, Δες παρ : **13**, **14**, **15**.

να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to -5}\dfrac{2f(\chi)-1}{f(\chi)+3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to -5}\dfrac{2f(\chi)-10}{\left[f(\chi)\right]^2-25}$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to -5}\dfrac{\left|6+f(\chi)\right|}{\left|3+f(\chi)\right|}$

iv) $\lim\limits_{\chi\to -5}g(\chi)$ αν $g(\chi)\sqrt{4f(\chi)+5}=2f^2(\chi)-f(\chi)-g(\chi)$

29. Αν $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)=-1$ και $f(\chi)\neq -1$ για κάθε $\chi\in R$, να βρεθούν

(αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{f(\chi)+1}{f(\chi)}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\sqrt{2\left[f(\chi)\right]^2-f(\chi)+4}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{2\left|f(\chi)+4\right|-3}{\left|4-f(\chi)\right|-2}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\sqrt{f(\chi)+5}-2}{f(\chi)+1}$

30. Αν $f(\chi)=\sqrt{2\chi-1}$ να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-1}{\chi-1}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 5}\dfrac{f(\chi)-f(5)}{\chi-5}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{f(\chi)-1}{\sqrt{f(\chi)+3}-2}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 13}\dfrac{13f(\chi)-\chi\cdot f(13)}{\sqrt{f(\chi)+4}-3}$

v) $\lim\limits_{\chi\to 13}\dfrac{13f(\chi)-\chi\cdot f(13)}{\chi-13}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\dfrac{f(\chi)}{\chi-1}}{f(\chi)-1}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

31. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=4$, $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)=-6$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} h(\chi)=10$, να βρείτε τα όρια : **i)** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \dfrac{f(\chi)-g(\chi)}{(h(\chi))^2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \dfrac{3f(\chi)-4(g(\chi))^2}{2f(\chi)+g(\chi)}$

32. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 3} \varphi(\chi)$ όταν :

i) $\lim\limits_{\chi\to 3}\left(2\varphi(\chi)-3\chi^2+2\right)=2$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 3}\left(\chi^3-\chi^2\cdot\varphi(\chi)-2\chi+1\right)=6$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\chi\cdot\varphi(\chi)-2}{\chi^2-4\chi+3}=3$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\varphi(\chi)-1}{\varphi(\chi)-2}=-3$

v) $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{4\varphi(\chi)-1}{\chi^2-1}=3$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{3\varphi(\chi)-7}{\chi^2-9}=3$

33. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,1)\cup(1,3)$ και ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)-2\chi+1}{\chi-1}=1.$$

i) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)=1$

ii) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο : $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\chi^3 f(\chi)-\chi^2}{\sqrt{\chi}-1}$

34. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(-2,-1)\cup(-1,3)$ και ισχύει :

$$\lim_{\chi\to -1}\frac{2f(\chi)+\chi^2+3\chi+2}{\chi-1}=-1.$$

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to -1} f(\chi)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to -1}\dfrac{\chi^2\cdot f(\chi)-1+\eta\mu(\chi+1)}{\chi+1}$.

Δες παρ : **16**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21** .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

35. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0,1)\cup(1,+\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)+\eta\mu\frac{\pi(\chi-1)}{2}-1}{\sqrt{\chi}-1}=\frac{\pi}{2}.$$

Δες παρ : **16**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21** .

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1} f(\chi)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{f(\chi)-1}{\chi-1}$

36. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0,4)\cup(4,+\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{\chi\to 4}\frac{f(\chi)+\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-4}{\pi}}{\chi-4}=\frac{4}{\pi}.$$

i) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to 4} f(\chi)=-1$

ii) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{\chi\to 4}\frac{3f(\chi)+3}{\sqrt{\chi}-2}$

37. Οι συναρτήσεις **f, g** είναι ορισμένες στο R και ισχύουν :

α) $\lim\limits_{\chi\to 2}\left[3f(\chi)+2g(\chi)\right]=0$ και **β)** $\lim\limits_{\chi\to 2}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]=-1$.

Να βρεθούν τα :

i) $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\left[2f(\chi)+3g(\chi)\right]$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\frac{8f(\chi)+g(\chi)}{f(\chi)-g(\chi)}$

38. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και ισχύει :

$3\chi+3\le f(\chi)\le 2\chi^2-3\chi+3$ για κάθε $\chi\in R$.

Δες παρ : **16**, **17**, **18** **19**, **20**, **21** και το κριτήριο παρεμβολής .

Να βρεθούν τα :

i) $f(0)$ και $f(3)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to 3} f(\chi)$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

39. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο $[-1, 3]$ και ισχύει :

$\chi^2 - 3\chi + 4 \le f(\chi) \le 2|\chi - 1| - \chi + 2$ για κάθε $\chi \in [-1, 3]$.

Να βρεθούν τα :

i) $f(0)$ και $f(2)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi)$

40. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο $[0, 3]$ και ισχύει :

$$\frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^2 - 1} \le f(\chi) \le \frac{\chi^4 - 2\chi^2 + 1}{\chi^2 + \chi - 2}$$ για κάθε $\chi \in [0, 1) \cup (1, 3]$.

Να βρεθούν τα :

i) $f(1)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to 1} f(\chi)$

41. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και ισχύει :

$\eta\mu\chi \le \chi \cdot f(\chi) \le -\chi^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^3\chi + \chi$ για κάθε $\chi \in R$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi \to 0} f(\chi)$.

42. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και για κάθε $\chi \in R$ ισχύει :

$|f(\chi) - 2| \le |\chi - 2|$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi \to 2} f(\chi) = 2$.

43. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και για κάθε $\chi \in R$ ισχύει :

$3\chi^4 - 5\chi^2 \le f(\chi) + 6\chi^3 \le \chi^4 - 5\chi^2$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi \to 0} \frac{f(\chi)}{\chi^2} = -5$.

44. Η συνάρτηση **f** είναι ορισμένη στο R και για κάθε $\chi \in R$ ισχύει :

$2\chi^2 - \chi - 1 \le f(\chi) \le 4\chi^2 - 5\chi + 1$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi \to 1} \frac{f(\chi)}{\chi - 1} = 3$.

Δες παρ : **18 19, 20, 21,** το κριτήριο παρεμβολής και το όριο σύνθετης συνάρτησης.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

45. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi\cdot\eta\mu\frac{1}{\chi}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^{\kappa}\cdot\eta\mu\frac{1}{\chi^{\lambda}}\right)$ $\kappa, \lambda \in N$ με $\kappa, \lambda \neq 0$.

iii) $\lim\limits_{\chi\to \kappa}\left((\chi-\kappa)\eta\mu\frac{1}{\chi-\kappa}\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi^2}\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\sqrt[5]{\chi^3}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\chi^2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to -1}\left((\chi^3+1)\cdot\eta\mu\frac{3\chi}{\chi+1}\right)$

46. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi}\right)$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{(\sigma\upsilon\nu 3\chi-1)\eta\mu\frac{\chi-1}{\chi}}{\chi}\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2\chi\cdot\eta\mu\frac{\chi+2}{\chi}}{3\chi}\right)$ $\kappa, \lambda \in N, \kappa, \lambda \neq 0$.

iv) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\frac{\chi^2-\chi}{\chi}.\eta\mu\frac{\chi-1}{\chi}\right)$

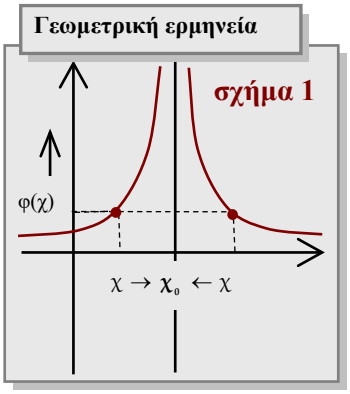
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άπειρο όριο μιας συνάρτησης φ στο x_0.

Στο **σχήμα 1** η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = (-\infty, \chi_0) \cup (\chi_0, +\infty)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ πλησιάζει το χ_0, δηλαδή όταν $\chi \to \chi_0$, με οποιοδήποτε τρόπο, οι τιμές της φ «**μεγαλώνουν**» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 1), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi \to \chi_0$.

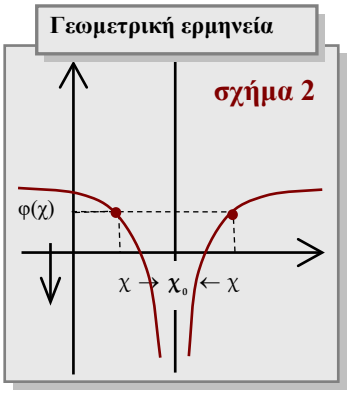


Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 1** λέμε ότι η φ έχει στο χ_0 όριο το «συν άπειρο $(+\infty)$» και γράφουμε : $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = +\infty$

Στο **σχήμα 2** η συνάρτηση φ έχει Π Ο το $D_\varphi = (-\infty, \chi_0) \cup (\chi_0, +\infty)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ πλησιάζει το χ_0, δηλαδή όταν $\chi \to \chi_0$, με οποιαδήποτε τρόπο, οι τιμές της φ «**μικραίνουν**» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 2), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi \to \chi_0$.



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 2** λέμε ότι η φ έχει στο χ_0 όριο το «πλην άπειρο $(-\infty)$» και γράφουμε : $\lim\limits_{\chi \to \chi_0} \varphi(\chi) = -\infty$

Λιβαδειά

✓ Για ιστορικούς και μόνον λόγους δίνω τους ορισμούς

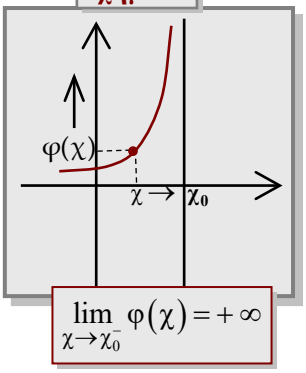
Ορισμοί

✓ Έστω μια συνάρτηση φ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η φ έχει στο χ_0 όριο το «συν άπειρο», συμβολικά $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi) = +\infty$, όταν για κάθε $\mathbf{M > 0}$ υπάρχει $\mathbf{\delta > 0}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$, με $0 < |\chi - \chi_0| < \delta$, να ισχύει : $\varphi(\chi) > \mathbf{M}$.

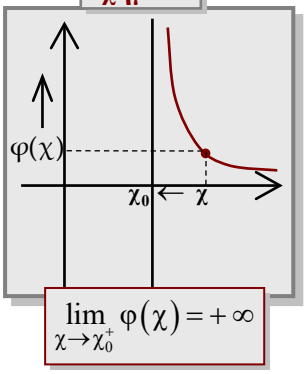
✓ Έστω μια συνάρτηση φ ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η φ έχει στο χ_0 όριο το «πλην άπειρο», συμβολικά $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi) = -\infty$, όταν για κάθε $\mathbf{M > 0}$ υπάρχει $\mathbf{\delta > 0}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$, με $0 < |\chi - \chi_0| < \delta$, να ισχύει : $\varphi(\chi) < -\mathbf{M}$.

✓ Ανάλογα για τα πλευρικά όρια η γεωμετρική ερμηνεία και οι αντίστοιχοι συμβολισμοί είναι :

σχήμα 3

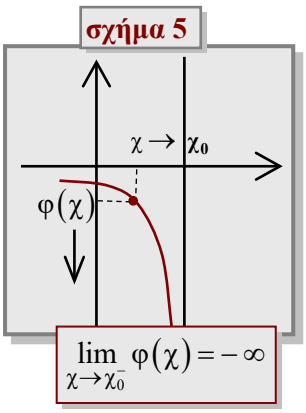


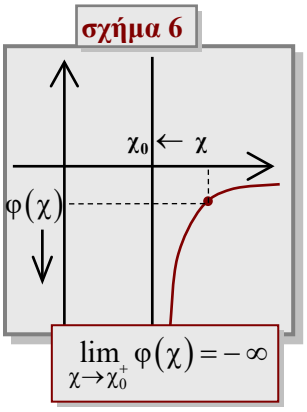
σχήμα 4



Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ





✓ Όπως και στην περίπτωση που το όριο της φ είναι αριθμός $\lambda \in R$ $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)=\lambda\right)$, έτσι και στην περίπτωση που το όριο της φ είναι άπειρο $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)=\pm\infty\right)$ **ισχύουν όλα όσα μάθαμε** , αρκεί βέβαια να λαμβάνονται υπ' όψη κάποιες ιδιαιτερότητες, όπου χρειάζεται, κυρίως ιδιαιτερότητες που προκύπτουν από το γεγονός πως το $\pm\infty$ δεν είναι αριθμός.

Προσοχή Παρατηρήσεις :

1. Είναι αυτονόητο πως **για να έχει νόημα** το όριο μια συνάρτησης **φ** όταν το $\chi \to \chi_0$, θα πρέπει η **φ** να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$ για να μπορεί ο χ να «πλησιάζει» όσο κοντά θέλουμε το χ_0 .

Αποδεικνύεται πως το όριο μιας συνάρτησης **φ** είναι ανεξάρτητο από τα άκρα **α**, **β** του διαστήματος $(\alpha, \chi_0)\cup(\chi_0, \beta)$ (μας ενδιαφέρει γενικά να υπάρχει διάστημα «γύρω» από το χ_0).

2. Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση **φ** έχει **όριο** στο χ_0 , τότε αυτό είναι **μοναδικό** και συμβολίζεται, όπως είδες, με $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Ισχύουν οι ισοδυναμίες :

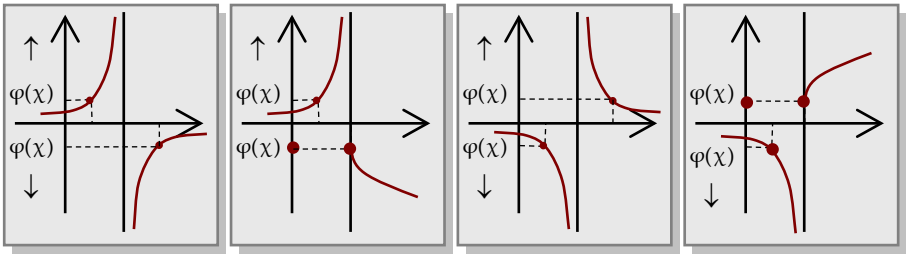
$$\begin{cases} \textbf{α)} & \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi(x) \\ \textbf{β)} & \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi(x) \end{cases} .$$

Επισημάνσεις :

✓ Αν μια συνάρτηση **φ** είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), όχι όμως και σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε **ταυτίζουμε** το **όριο** της **φ** με το **δεξιό όριο** της **φ** δηλαδή : $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi(x)$.

✓ Αν μια συνάρτηση **φ** είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), όχι όμως και σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε **ταυτίζουμε** το **όριο** της **φ** με το **αριστερό όριο** της **φ** δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi(x)$.

✓ Οι συναρτήσεις των πιο κάτω σχημάτων είναι προφανές πως



δεν έχουν όριο στο x_0, επειδή προφανώς είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi(x)$

Αποδεικνύεται ότι :

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$ τότε όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο x_0, θα είναι και $\varphi(x)>0$.

2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=-\infty$ τότε όταν το χ παίρνει τιμές «**κοντά**» στο x_0, θα είναι και $\varphi(x)<0$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$ τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-\varphi(x)\right]=-\infty$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=-\infty$ τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-\varphi(x)\right]=+\infty$.

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$ τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{\varphi(x)}=\sqrt[\nu]{+\infty}=+\infty$.

6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\pm\infty$ τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\varphi(x)\right|=+\infty$.

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\pm\infty$ τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\varphi(x)}=0$.

8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ και $\varphi(x)>0$ όταν το x παίρνει τιμές «**κοντά**» στο x_0,

τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\varphi(x)}=+\infty$.

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ και $\varphi(x)<0$ όταν το x παίρνει τιμές «**κοντά**» στο , x_0,

τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\varphi(x)}=-\infty$.

Παράδειγμα :

Super S O S για τις ασκήσεις

Με εφαρμογή των πιο πάνω ιδιοτήτων προκύπτει ότι :

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\kappa}}=+\infty$

✓ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\kappa+1}}=+\infty$

✓ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\kappa+1}}=-\infty$

Οπότε είναι προφανές ότι δεν υπάρχει το :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}$ ούτε και γενικότερα το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\kappa+1}}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όπως και στην περίπτωση που το όριο της φ είναι αριθμός $\lambda \in R$ $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lambda\right)$, έτσι και στην περίπτωση που το όριο της φ είναι άπειρο $\left(\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\pm\infty\right)$ **ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες για τις πράξεις,** αρκεί βέβαια να μπορούν να εκτελεστούν αυτές οι πράξεις.

Δες τους επόμενους πίνακες με το τι ισχύει ακριβώς.

Αν στο $\chi_0 \in R$ το						
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ **είναι :**	**$\alpha\in R$**	**$\alpha\in R$**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$ **είναι :**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]$ **είναι**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	✗	✗

Αν στο $\chi_0 \in R$ το										
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ **είναι:**	**$\alpha>0$**	**$\alpha<0$**	**$\alpha>0$**	**$\alpha<0$**	**0**	**0**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$ **είναι:**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\left[f(\chi)\cdot g(\chi)\right]$ **θα είναι :**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	✗	✗	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- ✓ Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει Χ , σημαίνει ότι το όριο δεν μπορεί να υπολογισθεί με απ' ευθείας εφαρμογή των ιδιοτήτων. Σ' αυτές περιπτώσεις λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** ή **απροσδιοριστία .**
- ✓ Το αντίστοιχο όριο μπορεί και να υπάρχει, εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που έχεις, επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις **θα προσπαθείς** να το υπολογίσεις με άλλον τρόπο π. χ. κάνοντας πρώτα πράξεις και μετασχηματισμούς στη παράσταση που έχεις.

  Η διαδικασία αυτή λέγεται **άρση της απροσδιοριστίας**.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων αντίστοιχα είναι οι :

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty)$$

✓ Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι :

$$(+\infty) - (+\infty) \qquad \frac{0}{0} \text{ και } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Προσοχή **δεν είναι απροσδιοριστία** το $\frac{0}{\pm\infty}$ ή το $\frac{\pm\infty}{0}$, απροσδιοριστίες είναι μόνο τα $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και αυτό προς το παρόν, γιατί αργότερα στο 2ο κεφάλαιο θα μάθουμε τρόπο για να αίρουμε και αυτές τις απροσδιοριστίες .

Με την επιφύλαξη της πιο πάνω παρατήρησης για το τι είναι και τι δεν είναι απροσδιοριστία, για το πηλίκο συναρτήσεων ισχύει ο συνοπτικός πίνακας :

Αν στο $\chi_0 \in R$ το			
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} f(\chi)$ **είναι :**	**$\alpha\in R$**	**$\alpha\in R$ ή $\pm\infty$**	**$\pm\infty$**
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} g(\chi)$ **είναι :**	**$\pm\infty$**	**0**	**$\beta\in R$ $\beta\neq 0$**
$\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ **θα είναι :**	**0**	**$\pm\infty$**	**$\pm\infty$**

Παραδείγματα :

1. Αν $f(\chi)=-\frac{1}{\chi^2}$ και $g(\chi)=\frac{1}{\chi^2}$, να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]$.

Λιβαδειά

Απάντηση :

Είναι $D_f = D_g = R^*$, $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(-\dfrac{1}{\chi^2}\right) = -\infty$,

$\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{\chi^2} = +\infty$.

Αν θελήσεις να εφαρμόσεις την ιδιότητα για το άθροισμα συναρτήσεων, έχεις :

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = \lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) + \lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi) = (-\infty)+(+\infty)$ η οποία προφανώς είναι **απροσδιόριστη μορφή.** Αν υπολογίσεις όμως πρώτα την $f+g$ έχεις $f(\chi)+g(\chi) = \left(-\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\chi^2}\right) = 0$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = \lim\limits_{\chi\to 0} 0 = 0$

2. Αν $f(\chi) = \dfrac{2}{\chi^2}$ και $g(\chi) = -\dfrac{5}{\chi^2}$, να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right]$.

Απάντηση :

Είναι $D_f = D_g = R^*$, $\lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2}{\chi^2} = +\infty$, και

$\lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(-\dfrac{5}{\chi^2}\right) = -\infty$.

Αν θελήσεις να εφαρμόσεις την ιδιότητα για το άθροισμα συναρτήσεων έχεις :

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = \lim\limits_{\chi\to 0} f(\chi) + \lim\limits_{\chi\to 0} g(\chi) = (+\infty)+(-\infty)$ η οποία προφανώς είναι **απροσδιόριστη μορφή.** Αν υπολογίσεις όμως πρώτα την $f+g$ έχεις $f(\chi)+g(\chi) = \left(\dfrac{2}{\chi^2}-\dfrac{5}{\chi^2}\right) = -\dfrac{3}{\chi^2}$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left[f(\chi)+g(\chi)\right] = \lim\limits_{\chi\to 0}\left(-\dfrac{3}{\chi^2}\right) = -\infty$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi^2-1}$

Απάντηση :

Έστω $\varphi(\chi)=\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi^2-1}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$. Για το ΠΟ έχεις $\chi^2-1=0\Leftrightarrow$

$\chi_1=-1$, $\chi_2=1$. Άρα ΠΟ το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

Παρατήρησε πως $Q(1)=0$ ενώ $P(1)=1\neq 0$ άρα δεν θ' ακολουθήσεις τον «γνωστό δρόμο» να παραγοντοποιήσεις κλπ .

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi^2-1}=\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{(\chi+1)(\chi-1)}=\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi+1}\cdot\dfrac{1}{\chi-1}$ οπότε

$$\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1}\left(\frac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi+1}\cdot\frac{1}{\chi-1}\right)=\lim_{\chi\to 1}\frac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi+1}\cdot\lim_{\chi\to 1}\frac{1}{\chi-1}=$$

$$\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1+2}{1+1}\cdot\lim_{\chi\to 1}\frac{1}{\chi-1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\chi\to 1}\frac{1}{\chi-1}\ .$$

Για να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\chi-1}$, θέτεις $u=\chi-1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}u=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)=0$

άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\chi-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$, το $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ όπως είδες πιο πάνω (στη θεωρία)

δεν υπάρχει. Άρα δεν υπάρχει (τελικά) και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\chi-1}$ ούτε και το

$\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\chi-1}$ άρα ούτε και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi^2-3\chi+2}{\chi^2-1}$

4. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{\chi^2+\chi-2}{(\chi+2)^3}$

Απάντηση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έστω $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2+\chi-2}{(\chi+2)^3}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$. Για το Π Ο έχεις $(\chi+2)^3=0\Leftrightarrow$ $\chi=-2$ τριπλή ρίζα. Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-2}\varphi(\chi)$.

Παρατήρησε πως $Q(-2)=0$, $P(-2)=0$ άρα θ' ακολουθήσεις τον «γνωστό δρόμο» να παραγοντοποιήσεις $\rightarrow$ να απλοποιήσεις $\rightarrow$ κλπ .

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2+\chi-2}{(\chi+2)^3}=\dfrac{(\chi-1)(\chi+2)}{(\chi+2)^3}=\dfrac{\chi-1}{(\chi+2)^2}$ οπότε

$$\lim_{\chi\to-2}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to-2}\frac{\chi-1}{(\chi+2)^2}=\lim_{\chi\to-2}(\chi-1)\cdot\lim_{\chi\to-2}\frac{1}{(\chi+2)^2}=$$

$$-3\cdot\lim_{\chi\to-2}\frac{1}{(\chi+2)^2}\ .$$

Για να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to-2}\dfrac{1}{(\chi+2)^2}$ θέτεις $u=\chi+2$ οπότε είναι

$$\lim_{\chi\to-2}u=\lim_{\chi\to-2}(\chi+2)^3=0\text{, άρα }\lim_{\chi\to-2}\frac{1}{(\chi+2)^2}=\lim_{u\to0}\frac{1}{u^2}=+\infty.$$

Άρα τελικά υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to-2}\dfrac{\chi^2+\chi-2}{(\chi+2)^3}=-3\cdot\lim\limits_{\chi\to-2}\dfrac{1}{(\chi+2)^2}=$

$$-3\cdot(+\infty)=-\infty\ .$$

Σημαντική παρατήρηση :

Όπως θα δεις τα παραδείγματα και τα θέματα που ακολουθούν είναι σχεδόν ίδια με αυτά της προηγούμενης παραγράφου και **αντιμετωπίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο** .

Γι' αυτό δεν θα υπάρξουν ιδιαίτερες παρατηρήσεις και οι διαδικασίες θα είναι λίγο πιο «συνοπτικές.»

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{\chi^2-9}{\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\right)^3}$

Απάντηση :

Έστω $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-9}{\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$. Για το Π Ο έχεις :

1ον $\chi\geq 0$ για να έχει νόημα η ρίζα και

2ον $\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\neq 0 \Leftrightarrow \chi\neq 3$

Άρα Π Ο το $A=(0,3)\cup(3,+\infty)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)$.

Παρατήρησε πως $Q(3)=0$, $P(3)=0$ άρα θ' ακολουθήσεις τον «γνωστό δρόμο» να πολλαπλασιάσεις με τη συζυγή παράσταση .

Είναι $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-9}{\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{(\chi-3)(\chi+3)\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3}=$

$$\frac{(\chi-3)(\chi+3)\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3}{(\chi-3)^3}=\frac{(\chi+3)\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3}{(\chi-3)^2}$$

οπότε $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{(\chi+3)\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3}{(\chi-3)^2}=$

$$\lim_{\chi\to 3}\left[(\chi+3)\left(\sqrt{\chi}+\sqrt{3}\right)^3\right]\cdot\lim_{\chi\to 3}\frac{1}{(\chi-3)^2}=144\sqrt{3}\cdot\lim_{\chi\to 3}\frac{1}{(\chi-3)^2}.$$

Για να βρεις το $\lim\limits_{\chi\to 3}\dfrac{1}{(\chi-3)^2}$ θέτεις $u=\chi-3$, είναι

$$\lim_{\chi\to 3}u=\lim_{\chi\to 3}(\chi-3)=0 \text{ άρα } \lim_{\chi\to 3}\frac{1}{(\chi-3)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2}=+\infty.$$

Άρα υπάρχει (τελικά) το

$$\lim_{\chi\to 3}\frac{\chi^2-9}{\left(\sqrt{\chi}-\sqrt{3}\right)^3}=144\sqrt{3}\cdot\lim_{\chi\to 3}\frac{1}{(\chi-3)^2}=144\sqrt{3}(+\infty)=+\infty$$

Λιβαδειά

6. Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ όταν $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{-4\chi-7}{\chi-1}, & \chi<1\\ \dfrac{4\chi^2-1}{\chi-1}, & \chi>1\end{cases}$.

Απάντηση :

Είναι προφανές το Π Ο $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

Προφανές επίσης ότι θα υπολογίσεις τα πλευρικά όρια αφού η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο στο $\chi_0=1$.

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{-4\chi-7}{\chi-1}=\lim\limits_{\chi\to 1^-}(-4\chi-7)\cdot\lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{1}{\chi-1}=-11(-\infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=+\infty$

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{4\chi^2-1}{\chi-1}=\lim\limits_{\chi\to 1^+}(4\chi^2-1)\cdot\lim\limits_{\chi\to 1^+}\dfrac{1}{\chi-1}=3(+\infty)\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=+\infty$

Άρα (τελικά υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=+\infty$

7. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ όταν :

i) $\lim\limits_{\chi\to 1}\left[3\varphi(\chi)-1+4\chi^2\right]=+\infty$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{2\chi-1}{\varphi(\chi)-1}=-\infty$

Απάντηση :

Επειδή σε κάθε περίπτωση **υπάρχει** το αντίστοιχο $\lim\limits_{\chi\to 1}[\cdots]$ είναι προφανές ότι και η $\varphi(\chi)$ θα ορίζεται τουλάχιστον σε διάστημα της μορφής $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ (θα είναι $\chi\neq 1$) άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

i) Επειδή στην παράσταση $3\varphi(\chi)-1+4\chi^2$ δεν είναι εξασφαλισμένο ότι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

υπάρχει το όριο της $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ δεν μπορείς να εφαρμόσεις το αντίστοιχο θεώρημα για το άθροισμα, γι' αυτό θα ακολουθείς σ' αυτές τις περιπτώσεις, την γνωστή **ΜΕΘΟΔΟ** :

Βάζεις $\mathbf{h(\chi)=3\varphi(\chi)-1+4\chi^2}$ οπότε είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=+\infty$ και

$$3\varphi(\chi)=h(\chi)+1-4\chi^2 \Leftrightarrow \varphi(\chi)=\frac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3}\ \textbf{(1)}.$$

Στην **(1)** είναι εξασφαλισμένο το όριο του δεξιού μέλους, μιας και υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=+\infty$ και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-4\chi^2\right)=1-4\cdot 1^2=-3$.

Άρα **(1)** : $\varphi(\chi)=\dfrac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3} \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{h(\chi)+1-4\chi^2}{3}=$

$$\frac{\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)+\lim\limits_{\chi\to 1}\left(1-4\chi^2\right)}{\lim\limits_{\chi\to 1}3} \Rightarrow \boxed{\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\frac{+\infty-3}{3}=+\infty}.$$

β) Έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$ και θα ακολουθήσεις την «γνωστή μέθοδο».

Βάζεις $\mathbf{h(\chi)=\dfrac{2\chi-1}{\varphi(\chi)-1}}$ οπότε είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}h(\chi)=-\infty$ και $\varphi(\chi)-1=\dfrac{2\chi-1}{h(\chi)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1}\frac{2\chi-1}{h(\chi)}+\lim_{\chi\to 1}1=\lim_{\chi\to 1}\frac{2\chi-1}{h(\chi)}+1, \text{ το } \lim_{\chi\to 1}\frac{2\chi-1}{h(\chi)}=0$$

γιατί είναι της μορφής $\dfrac{\alpha}{\pm\infty}$ $\left(\text{δες πίνακα πηλίκου πιο πάνω}\right)$.

Άρα $\boxed{\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=0+1=1}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta}{\chi-1}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε να είναι : $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=-2$

Απάντηση :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Π Ο της φ είναι το $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή το $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{1}{\chi-1}$ δεν υπάρχει μιας και αν θέσεις $u=\chi-1$,

$\lim\limits_{\chi\to1}u=\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-1)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to1}\dfrac{1}{\chi-1}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{u}$ που δεν υπάρχει.

1ος τρόπος (αλγεβρικός)

Θα ακολουθήσεις «παραδοσιακή» μέθοδο : $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta}{\chi-1}\Leftrightarrow$

$\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta=\varphi(\chi)(\chi-1)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to1}\left(\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta\right)=\lim\limits_{\chi\to1}\varphi(\chi)\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-1)\Leftrightarrow 1-\alpha-2-\beta=-2\cdot0=0$

$\Leftrightarrow -1-\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\beta=-\alpha-1$ **(1)**.

Τότε η $\varphi(\chi)$ γίνεται $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta}{\chi-1}=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi+\alpha+1}{\chi-1}=$

$\dfrac{\chi^2-\alpha\chi-2\chi+\alpha+1}{\chi-1}=\dfrac{\chi^2-2\chi+1-\alpha\chi+\alpha}{\chi-1}=\dfrac{(\chi-1)^2-\alpha(\chi-1)}{\chi-1}=\chi-1-\alpha$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to1}\varphi(\chi)=-2\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-1-\alpha)=-2\Leftrightarrow 1-1-\alpha=-2\Leftrightarrow$ **α = 2.**

Επομένως από **(1)** είναι **β = – 3**.

Επαλήθευση: α = 2, β = – 3 τότε $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-4\chi+3}{\chi-1}=\dfrac{(\chi-1)(\chi-3)}{\chi-1}=\chi-3$

άρα $\lim\limits_{\chi\to1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to1}(\chi-3)=-2$ ..

2ος τρόπος (λογικός)

Επειδή η $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta}{\chi-1}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ και $\mathbf{Q(1)=0}$ δηλ. μηδενίζεται

ο παρονομαστής οπότε ***για να υπάρχει*** το $\lim\limits_{\chi\to1}\varphi(\chi)$ ***και να είναι***

πραγματικός αριθμός, **θα πρέπει να είναι και** $\mathbf{P(1)=0}$, έτσι ώστε να

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

παραγοντοποιείται και ο αριθμητής και να γίνεται απλοποίηση.

Έτσι λοιπόν $\mathbf{P(1)=0} \Leftrightarrow 1^2-(\alpha+2)1-\beta=0 \Leftrightarrow -1-\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow$

$\beta=-\alpha-1$ **(1)**.

Τότε η $\varphi(\chi)$ γίνεται $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi-\beta}{\chi-1}=\dfrac{\chi^2-(\alpha+2)\chi+\alpha+1}{\chi-1}=$

$\dfrac{\chi^2-\alpha\chi-2\chi+\alpha+1}{\chi-1}=\dfrac{\chi^2-2\chi+1-\alpha\chi+\alpha}{\chi-1}=\dfrac{(\chi-1)^2-\alpha(\chi-1)}{\chi-1}=$

$\chi-1-\alpha$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=-2 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1-\alpha)=-2 \Leftrightarrow 1-1-\alpha=-2 \Leftrightarrow$ **α = 2**.

Επομένως από **(1)** είναι **β = – 3**. (εννοείται πως πάλι κάνεις επαλήθευση)

9. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2}$.

Να βρείτε το α, έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Απάντηση :

Π Ο της φ είναι το $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ μιας και το $3\chi^2+4>0$ για κάθε $\chi\in R$.

Επειδή το $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{1}{\chi-2}$ δεν υπάρχει μιας και αν θέσεις $u=\chi-2$,

$\lim\limits_{\chi\to 2}u=\lim\limits_{\chi\to 2}(\chi-2)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{1}{\chi-2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ που δεν υπάρχει.

1ος τρόπος (αλγεβρικός)

Θα ακολουθήσεις «παραδοσιακή» μέθοδο : $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi=\varphi(\chi)(\chi-2) \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to 2}\left(\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi\right)=\lim_{\chi\to 2}\varphi(\chi)\lim_{\chi\to 2}(\chi-2)=\lim_{\chi\to 2}\varphi(\chi)\cdot 0=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16}-2\alpha=0 \Leftrightarrow 4-2\cdot\alpha=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}.$$

Τότε η $\varphi(\chi)$ γίνεται : $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2}=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-2\chi}{\chi-2}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$

Επειδή $Q(2)=0$ και $P(2)=0$ τότε $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2}=$

$$\frac{\left(\sqrt{3\chi^2+4}-2\chi\right)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}=\frac{3\chi^2+4-4\chi^2}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}=$$

$$\frac{-\left(\chi^2-4\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}=\frac{-(\chi-2)(\chi+2)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}=\frac{-(\chi+2)}{\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}.$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{-(\chi+2)}{\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}.$

2ος τρόπος (λογικός)

Επειδή η $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2}=\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}=$ και $\mathbf{Q(2)=0}$, ***μηδενίζεται ο παρονομαστής, για να υπάρχει το*** $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ **θα πρέπει να είναι και** $\mathbf{P(2)=0}$, έτσι ώστε ν***α παραγοντοποιείται και ο αριθμητής*** και ***να γίνεται απλοποίηση***. Έτσι λοιπόν $P(2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3\cdot 2^2+4}-\alpha\cdot 2 \Leftrightarrow$

$2\alpha=\sqrt{3\cdot 4+4}=\sqrt{16}=4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2}$ **(1)**. Τότε η $\varphi(\chi)$ γίνεται :

$$\varphi(\chi)=\frac{\sqrt{3\chi^2+4}-\alpha\chi}{\chi-2}=\frac{\sqrt{3\chi^2+4}-2\chi}{\chi-2}=\frac{\left(\sqrt{3\chi^2+4}-2\chi\right)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$= \frac{3\chi^2+4-4\chi^2}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)} = \frac{-\left(\chi^2-4\right)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)} =$$

$$\frac{-(\chi-2)(\chi+2)}{(\chi-2)\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)} = \frac{-(\chi+2)}{\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)}.$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 2}\frac{-(\chi+2)}{\left(\sqrt{3\chi^2+4}+2\chi\right)} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi) = \frac{(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1}{\chi^2+\chi-2}$, $\lambda \in R$.

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το $\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi)$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

Απάντηση :

Επειδή $\chi^2+\chi-2=0 \Leftrightarrow \rho_1=-2$ και $\rho_2=1$

Άρα Π Ο της φ είναι το $A=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

Άρα έχει νόημα $\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to -2}\left(\chi^2+\chi-2\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to -2}\left[(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1\right] =$

$(\lambda+3)(-2)^2-3\lambda(-2)+\lambda-1 = 4\lambda+12+6\lambda+\lambda-1 = 11\lambda+11 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to -2}\left[(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1\right]=11(\lambda+1)$, άρα θα διακρίνεις 2 περιπτώσεις :

Περίπτωση 1 : $\mathbf{11(\lambda+1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -1.}$

Τότε $\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to -2}\frac{(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1}{\chi^2+\chi-2} =$

$\lim\limits_{\chi\to -2}\left[(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1\right]\cdot\lim\limits_{\chi\to -2}\frac{1}{\chi^2+\chi-2}$ άρα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi)=11(\lambda+1)\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{1}{\chi^2+\chi-2}$. Αν θέσεις $u=\chi^2+\chi-2$ είναι

$\lim\limits_{\chi\to -2}u=\lim\limits_{\chi\to -2}\left(\chi^2+\chi-2\right)=0$ οπότε το $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{1}{\chi^2+\chi-2}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$,

το οποίο όμως δεν υπάρχει άρα **δεν υπάρχει** και το $\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{1}{\chi^2+\chi-2}$,

επομένως **δεν υπάρχει και το** $\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi)$ όταν **$\lambda\neq -1$.**

Περίπτωση 2 : $\mathbf{11(\lambda+1)=0\Leftrightarrow\lambda=-1.}$

Τότε αν θέσεις **$\lambda=-1$** στην $\varphi(\chi)$ έχεις : $\varphi(\chi)=\dfrac{(\lambda+3)\chi^2-3\lambda\chi+\lambda-1}{\chi^2+\chi-2}$

$=\dfrac{2\chi^2+3\chi+-2}{\chi^2+\chi-2}=\dfrac{(2\chi-1)(\chi+2)}{(\chi+2)(\chi-1)}\Leftrightarrow\varphi(\chi)=\dfrac{2\chi-1}{\chi-1}$ και επομένως είναι

$\lim\limits_{\chi\to -2}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -2}\dfrac{2\chi-1}{\chi-1}=\dfrac{2(-2)-1}{-2-1}=\dfrac{5}{3}$ όταν **$\lambda=-1$.**

11. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\sigma\varphi\chi$, όπου $\sigma\varphi\chi=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$.

Να αποδείξετε ότι το $\lim\limits_{\chi\to\pi}\varphi(\chi)$ δεν υπάρχει.

Απάντηση :

Όπως είναι γνωστό από την τριγωνομετρία το Π Ο της σφ το

$A=R-\{\kappa\pi\}$ με $\kappa\in Z$ το οποίο στην Ανάλυση συνηθίζεται να αναφέρεται

ως η ένωση όλων των διαστημάτων της μορφής $(\kappa\pi,\kappa\pi+\pi)$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to\pi}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}=\lim\limits_{\chi\to\pi}\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{1}{\eta\mu\chi}=-1\cdot\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{1}{\eta\mu\chi}=$

$\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{1}{\eta\mu\chi}$. Αν θέσεις $u=\eta\mu\chi$ είναι $\lim\limits_{\chi\to\pi}u=\lim\limits_{\chi\to\pi}\eta\mu\chi=0$ και

$\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{1}{\eta\mu\chi}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ και όπως είναι γνωστό το $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}$ δεν υπάρχει..

Άρα **δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{\chi\to\pi}\dfrac{1}{\eta\mu\chi}$ άρα **δεν υπάρχει και το** $\lim\limits_{\chi\to\pi}\varphi(\chi)$.

Όλα τα παραδείγματα και, κυρίως, οι παρατηρήσεις που διάβασες στην προηγούμενη παράγραφο, έχουν **άμεση** εφαρμογή και στις . . . . . .



Υποδ. βρες Π Ο και πλευρικά όρια αν χρειαστεί.

Παρ : **1, 2, 3**

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\dfrac{\chi^2-4\chi+3}{\chi^4+3\chi^2}\right)$

ii) $\lim\limits_{\chi\to -2}\left(\dfrac{1}{\chi+2}+\dfrac{1}{\chi^2+3\chi+2}\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to -1}\left(\dfrac{1}{\chi+1}-\dfrac{1}{\chi^2+3\chi+2}\right)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια : Παρ : **1, 2, 3, 6**

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3|x|}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x>0\\ -\dfrac{1}{x^2}, & x<0\end{cases}$

3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια : Παρ : **4, 5**

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{(x-2)^2}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{2}\right)^3}$

4. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ όταν :

i) $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3+\dfrac{1}{x^4}$ **ii)** $f(x)=\dfrac{x-2}{|x|}$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

iii) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|^2}$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{|x|}$.

Υποδ. βρες Π Ο. Παραδ : **1, 2, 3** και πλευρικά όρια, αν χρειαστεί.

5. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της $f(x)+g(x)$ όταν :

i) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}$ και $g(x)=-\dfrac{4}{1-x^2}$ στο $x_0=1$

ii) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ και $g(x)=\dfrac{3x-2}{x|x|}$ στο $x_0=0$

iii) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{|x|}$ στο $x_0=0$

iv) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ στο $x_0=0$

6. Με την προϋπόθεση ότι η φ ορίζεται σε κατάλληλο πεδίο ορισμού, να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ όταν : Παρ : **7**

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\varphi(x)+x^2-5\right]=+\infty$ για κάθε $x\in R$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\chi}{\varphi(\chi)}=-\infty$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left[3\varphi^2(\chi)+2\chi^2-1\right]=+\infty$

7. Με την προϋπόθεση ότι η φ ορίζεται σε κατάλληλο πεδίο ορισμού, να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ όταν :

i) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{\chi-1}{\varphi(\chi)}=+\infty$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{2\varphi(\chi)}{\chi+2}=-\infty$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 2}\left[3\varphi(\chi)\left(5\chi^3+1\right)+2\chi^2-1\right]=+\infty$

8. Δίνεται η συνάρτηση f έτσι ώστε : $f(\chi)\neq -1$ όταν $\chi\in(1,2)\cup(2,3)$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}\dfrac{f(\chi)-2}{f(\chi)+1}=\pm\infty$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to 2}f(\chi)=-1$

Υποδ : θέσε $g(\chi)=\dfrac{f(\chi)-2}{f(\chi)+1}$ οπότε $f(\chi)=\dfrac{g(\chi)+2}{-g(\chi)+1}=\dfrac{1+\dfrac{2}{g(\chi)}}{-1+\dfrac{1}{g(\chi)}}=\ldots$

9. Δίνεται ότι $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-\alpha\chi+\beta}{\chi-2}$.

i) Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε να είναι $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=2$

ii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{2\chi-\alpha}{\chi^2+\beta}=-\infty$

Παρ : **8**

10. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha-1)\chi+\beta-1}{\chi-3}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε να είναι : $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)=2$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-(\alpha-1)\chi+\beta-1}{(\chi-3)^3}$ Παρ : **8**

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε να είναι : $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)=+\infty$.

12. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi^3-\chi+1}+\alpha\chi+1}{\chi-3}$. Παρ : **9**

Να βρείτε το α έτσι ώστε το $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)\in \mathrm{R}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi^3-\chi+1}+\alpha\chi+1}{(\chi-3)^3}$. Παρ : **9**

Να βρείτε το α έτσι ώστε το $\lim\limits_{\chi\to 3}\varphi(\chi)=+\infty$.

14. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-3\chi+\lambda}{\chi-2}$. Παρ : **10**

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

15. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2-3\chi+\lambda}{(\chi-2)^2}$.

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

16. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\lambda\chi^2+(\lambda+1)\chi-3\lambda}{\chi^2+5\chi+6}$.

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το $\lim\limits_{\chi\to -3}\varphi(\chi)$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\sqrt{\chi+\lambda}-4}{\chi-2}$.

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

18. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^2+\lambda\chi+\lambda-1}{(\chi-1)^3}+\dfrac{\chi^2-(\lambda+1)\chi+\lambda}{\chi-1}$.

Για τις διάφορες τιμές του λ να εξετάσετε το όριο της $\varphi(\chi)$ όταν $\chi\to 1$ και όπου υπάρχει να βρεθεί.

19. Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=\varepsilon\varphi\chi$.

Παρ : **11**

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to\frac{3\pi}{2}}\varphi(\chi)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\frac{\pi}{2}}\varphi(\chi)$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}\varphi(\chi)$ με $\kappa\in Z$

20. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

Υποδ. ημαχ , συναχ ≤ 1 .
Παραδ : **1, 2, 3**

i) $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\eta\mu\chi-1}{\eta\mu 2\chi-1}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{5-2\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\chi^2+\eta\mu^2\chi}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2-\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi+\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\chi+\eta\mu\chi}$.

21. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

Υποδ. $\dfrac{\sigma\varphi\chi}{\eta\mu\chi}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}$,
$\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^3}=\dfrac{1}{\chi^2}\cdot\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$ κλπ.

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sigma\varphi\chi}{\eta\mu\chi}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^3}$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\varepsilon\varphi 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 2\chi}$.

22. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

Υποδ. $\dfrac{\chi+\eta\mu\chi}{\chi^3}=\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^3}$,
δες και προηγούμενη άσκηση

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi+\eta\mu\chi}{\chi^3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^4+\eta\mu\chi}{\chi^3}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi}{\chi^4}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}$ **v)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi+\eta\mu\chi}{\chi-\eta\mu\chi}$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

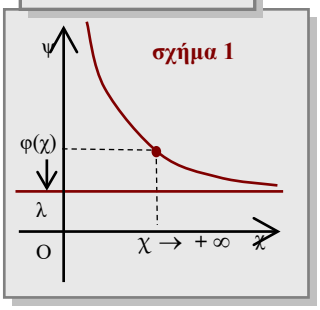
Όριο μιας συνάρτησης φ στο άπειρο.

✓ Στο **σχήμα 1** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(\alpha,+\infty)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ «μεγαλώνει» χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to+\infty$), οι τιμές της φ «πλησιάζουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς τον αριθμό λ (σχήμα 1), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to+\infty$.

Γεωμετρική ερμηνεία



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 1** λέμε ότι :

η φ έχει στο «συν άπειρο $(+\infty)$ ***» όριο το λ*** και γράφουμε :

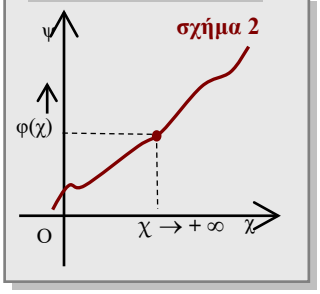
$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lambda$$

✓ Στο **σχήμα 2** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(\alpha,+\infty)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ «μεγαλώνει» χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to+\infty$), οι τιμές της φ επίσης «μεγαλώνουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 2), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to+\infty$.

Γεωμετρική ερμηνεία



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 2** λέμε ότι :

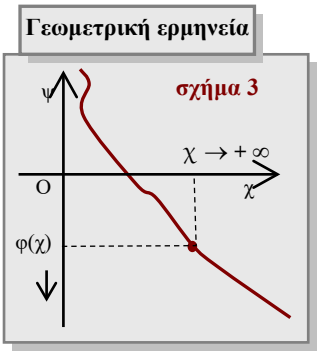
η φ έχει στο «***συν άπειρο*** $(+\infty)$ **» *όριο το «συν άπειρο*** $(+\infty)$ **»**

και γράφουμε : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Στο **σχήμα 3** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(\alpha,+\infty)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ «μεγαλώνει» χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to+\infty$), οι τιμές της φ «μικραίνουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 3), άρα **η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to+\infty$**.



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 3** λέμε ότι :

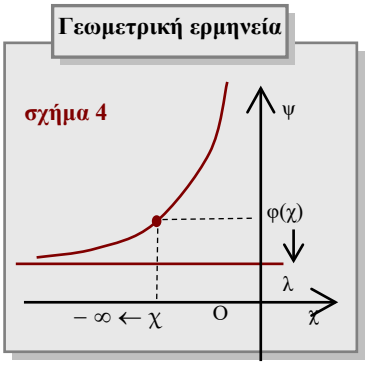
η φ έχει στο «***συν άπειρο*** $(+\infty)$» ***όριο το «πλην άπειρο*** $(-\infty)$»

και γράφουμε : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$

✓ Ανάλογοι «ορισμοί» ισχύουν και για την περίπτωση που το χ «μικραίνει» διαρκώς $(\chi\to-\infty)$:

✓ Στο **σχήμα 4** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(-\infty,\alpha)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ «μικραίνει» χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to-\infty$), οι τιμές της φ «πλησιάζουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς τον αριθμό λ (σχήμα 4), άρα **η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to-\infty$**.



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 4** λέμε ότι :

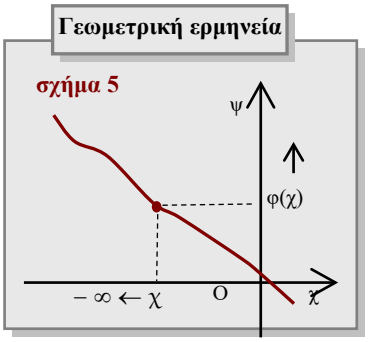
η φ έχει στο «πλην άπειρο $(-\infty)$***» όριο το λ και γράφουμε*** : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lambda$

Λιβαδειά

✓ Στο **σχήμα 5** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(-\infty,\alpha)$.

Παρατήρησε ότι καθώς το χ «μικραίνει» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to-\infty$), οι τιμές της φ «μεγαλώνουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 5), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to-\infty$.



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 5** λέμε ότι :

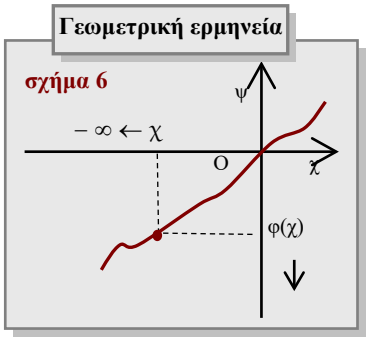
η φ έχει στο «πλην άπειρο $(-\infty)$ ***» όριο το «συν άπειρο*** $(+\infty)$ ***» και***

γράφουμε : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=+\infty$

✓ Στο **σχήμα 6** η συνάρτηση φ έχει Π Ο ένα διάστημα $A=(-\infty,\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το χ «μικραίνει» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (συμβολικά $\chi\to-\infty$), οι τιμές της φ «μικραίνουν» διαρκώς χωρίς περιορισμούς (σχήμα 6), άρα

η φ έχει σταθερή και συγκεκριμένη συμπεριφορά καθώς το $\chi\to-\infty$.



Για να δηλώσουμε (να περιγράψουμε ακριβώς) την συμπεριφορά της συνάρτησης του **σχήματος 6** λέμε ότι :

η φ έχει στο «πλην άπειρο $(-\infty)$ ***» όριο το «πλην άπειρο*** $(-\infty)$ ***»*** και

γράφουμε : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=-\infty$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Προσοχή Παρατηρήσεις :

1. Είναι αυτονόητο πως **για να έχει νόημα** το όριο μιας συνάρτησης **φ** όταν το $\chi \to +\infty$, θα πρέπει η **φ** να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ για να μπορεί ο χ να «μεγαλώνει» όσο θέλουμε.
2. Υπάρχει μόνο το αριστερό όριο μιας συνάρτησης **φ** στο $\chi \to +\infty$ και αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητο από το άκρο **α,** μας ενδιαφέρει γενικά να υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
3. Είναι αυτονόητο πως **για να έχει νόημα** το όριο μιας συνάρτησης **φ** όταν το $\chi \to -\infty$, θα πρέπει η **φ** να ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ για να μπορεί ο χ να «μικραίνει» όσο θέλουμε.
4. Υπάρχει μόνο το δεξιό όριο μιας συνάρτησης **φ** στο $\chi \to -\infty$ και αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητο από το άκρο **α,** μας ενδιαφέρει γενικά να υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$.
5. Για το όριο μιας συνάρτησης στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ισχύουν όλες οι ιδιότητες που μάθαμε για το όριο μιας συνάρτησης στο χ_0 με τις εξής **προϋποθέσεις :**
   - **i)** Οι συναρτήσεις ορίζονται σε **κατάλληλο** διάστημα.
   - **ii)** Υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια.
   - **iii)** Δεν προκύπτει (από την εφαρμογή της ιδιότητας) **απροσδιόριστη μορφή**.

Super S O S για τις ασκήσεις

Με εφαρμογή των πιο πάνω ιδιοτήτων προκύπτει ότι :

✓ $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \chi^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{1}{\chi^{\nu}} = 0$

✓ $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \chi^{\nu} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \boldsymbol{\nu} \textbf{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } \boldsymbol{\nu} \textbf{ περιτός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{1}{\chi^{\nu}} = 0$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Για την **πολυωνυμική συνάρτηση**

$$P(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_o\ ,\ \alpha_\nu\neq 0,\ \text{ισχύει :}$$

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}P(\chi)=\lim_{\chi\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu\chi^\nu\right)$$

✓ Για την **Ρητή συνάρτηση**

$$\Phi(\chi)=\frac{\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_o}{\beta_\mu\chi^\mu+\beta_{\mu-1}\chi^{\mu-1}+\cdots+\beta_1\chi+\beta_o}\ ,\ \alpha_\nu,\ \beta_\mu\neq 0,\ \text{ισχύει :}$$

$$\lim_{\chi\to\pm\infty}\Phi(\chi)=\lim_{\chi\to\pm\infty}\left(\frac{\alpha_\nu\chi^\nu}{\beta_\mu\chi^\mu}\right)=\lim_{\chi\to\pm\infty}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\chi^{\nu-\mu}\right)$$

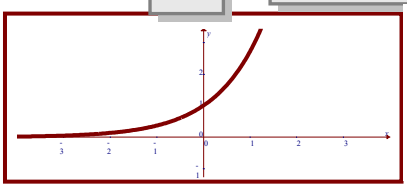
✓ Για την **Εκθετική συνάρτηση** $\Phi(\chi)=\alpha^\chi$ **ισχύει :**

i) $\alpha>1$ $\quad\lim_{\chi\to-\infty}\Phi(\chi)=0$ και $\lim_{\chi\to+\infty}\Phi(\chi)=+\infty$.

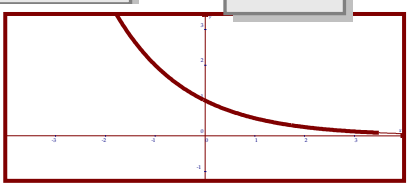
ii) $0<\alpha<1$ $\quad\lim_{\chi\to-\infty}\Phi(\chi)=+\infty$ και $\lim_{\chi\to+\infty}\Phi(\chi)=0$.

Γραφική παράσταση

$\alpha>1$



$0<\alpha<1$



✓ Ειδικά για την **Εκθετική συνάρτηση** $\Phi(\chi)=e^\chi$ **ισχύει :**

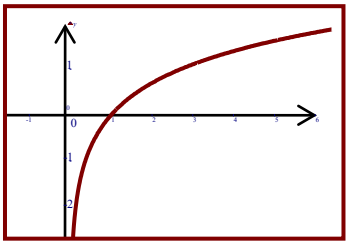
$$\lim_{\chi\to-\infty}\Phi(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}e^\chi=0\ \text{ και }\lim_{\chi\to+\infty}\Phi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}e^\chi=+\infty\ .$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Για τις **Λογαριθμικές συναρτήσεις** $\begin{cases}\Phi(\chi)=\log\chi\\ \Phi(\chi)=\ln\chi\end{cases}$ **ισχύει :**

$$\lim_{\chi\to+\infty}\Phi(\chi)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{\chi\to 0}\Phi(\chi)=\lim_{\chi\to 0^+}\Phi(\chi)=-\infty .$$

Γραφική παράσταση



Από την ύλη της Β! Λυκείου είναι γνωστός ο **ορισμός** της ακολουθίας.

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to R$.

Συμβολικά $\alpha(\nu)=\alpha_\nu$, ενώ η ακολουθία α συμβολίζεται με (α_ν).

Επειδή **κάθε ακολουθία είναι συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το $N^*=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$, μελετάμε τη συμπεριφορά της (το όριό της) για πολύ μεγάλες τιμές του ν, δηλαδή όταν $\nu\to+\infty$.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $\chi\to+\infty$, που είδαμε πιο πάνω, ισχύουν και για τις ακολουθίες, και επομένως τα όρια ακολουθιών υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και τα όρια των συναρτήσεων όταν $\chi\to+\infty$.



Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

1. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα :

i) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{\chi^2-4}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{-\chi^2+5\chi-6}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{2\chi-3}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{1-\chi^2}$

Απάντηση :

i) Έστω $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-4}$. Για το Π Ο έχεις : το χ^2-4 έχει ρίζες τους αριθμούς ± 2, άρα πίνακας προσήμου για το

το χ^2-4 είναι

$-\infty$		-2		2		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2-4\geq 0$ είναι $\chi\leq -2$ **ή** $\chi\geq 2$.

Άρα Π Ο το $A=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$ και το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$.

ii) Έστω $\varphi(\chi)=\sqrt{-\chi^2+5\chi-6}$. Για το Π Ο έχεις: Το $-\chi^2+5\chi-6$ έχει ρίζες $\rho_1=2$ και $\rho_2=3$ άρα πίνακας προσήμου για το

το $-\chi^2+5\chi-6$ είναι

$-\infty$		2		3		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $-\chi^2+5\chi-6\geq 0$ είναι $2\leq\chi\leq 3$.

Άρα Π Ο το $A=[2,3]$, άρα **δεν έχουν νόημα** τα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$ και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Έστω $\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi-3}$. Για το Π Ο έχεις : $2\chi-3\geq 0 \Leftrightarrow \chi\geq\frac{3}{2}$.

Άρα Π Ο το $A=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$ και **δεν έχει νόημα** το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$.

iv) Έστω $\varphi(\chi)=\sqrt{1-\chi^2}$. Για το Π Ο έχεις: Το $1-\chi^2$ έχει ρίζες $\rho_1=-1$ και $\rho_2=1$ άρα πίνακας προσήμου για το το $1-\chi^2$ είναι

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $1-\chi^2\geq 0$ είναι $\mathbf{-1\leq\chi\leq 1}$.

Άρα Π Ο το $A=[-1,1]$, άρα **δεν έχει νόημα** το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$ ούτε και το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$.

Παρατήρηση :

Είναι προφανές και από τα προηγούμενα, **θα βρίσκεις πάντα** το **πεδίο ορισμού**, δείχνοντας έτσι ότι η **φ** ορίζεται ***και σε ένα διάστημα*** **της μορφής** $(\alpha,+\infty)$ ή $(-\infty,\alpha)$ και άρα **έχει νόημα** το όριο της **φ** όταν το $\chi\to+\infty$ ή $\chi\to-\infty$ αντίστοιχα .

2. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)$

vii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)$

Απάντηση :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3\chi^4\right)=$

$3\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^4\right)=3(+\infty)=+\infty$.

ii) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(3\chi^4\right)=$

$3\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^4\right)=3(+\infty)=+\infty$.

iii) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2\chi^5\right)=$

$2\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^5\right)=2(+\infty)=+\infty$.

iv) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(2\chi^5\right)=$

$2\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^5\right)=2(-\infty)=-\infty$.

v) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-3\chi^4\right)=$

$-3\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^4\right)=-3(+\infty)=-\infty$.

vi) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-3\chi^4-4\chi^2+\chi-1\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-3\chi^4\right)=$

$-3\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^4\right)=-3(+\infty)=-\infty$.

vii) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-2\chi^5\right)=$

$-2\left(\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^5\right)=-2(+\infty)=-\infty$.

viii) Π Ο είναι το Α = R, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-2\chi^5+4\chi^4-\chi^2-1\right)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-2\chi^5\right)=$

$-2\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^5\right)=-2(-\infty)=+\infty$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Το όριο μιας ρητής συνάρτησης $\frac{P(x)}{Q(x)}$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ είναι :

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ **αν ο βαθμός του αριθμητή < από το βαθμό του παρονομαστή.** (Περίπτωση **i)** και **ii)**)

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ **Το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων αν ο βαθμός του αριθμητή = με το βαθμό του παρονομαστή.** (Περίπτωση **iii)** και **iv)**)

iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$ **αν ο βαθμός του αριθμητή > από το βαθμό του παρονομαστή.** (Περίπτωση **v)** και **vi)**)

3. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+x^3+5x+2}{2x+3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+x^3+5x+2}{2x+3}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+5}{x^2-1}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x+5}{3x^2-1}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^4-1}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x^2-1}$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A=R-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+x^3+5x+2}{2x+3}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^4}{2x}=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}x^3=-\frac{3}{2}(+\infty)=-\infty .$$

ii) Π Ο είναι το $A=R-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^4+x^3+5x+2}{2x+3}=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-3\chi^4}{2\chi} = -\frac{3}{2}\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\chi^3 = -\frac{3}{2}(-\infty) = +\infty .$$

iii) Π Ο είναι το $A = R-\{\pm1\}$, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2\chi^2+\chi+5}{\chi^2-1} = \lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2\chi^2}{\chi^2} =$

$2\lim\limits_{\chi\to+\infty}1 = 2$.

iv) Π Ο είναι το $A = R-\left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{2\chi^2+\chi+5}{3\chi^2-1} = \lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{2\chi^2}{3\chi^2} =$

$\dfrac{2}{3}\lim\limits_{\chi\to-\infty}1 = \dfrac{2}{3}$.

v) Π Ο είναι το $A = R-\{\pm1\}$, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2+5\chi+6}{\chi^4-1} = \lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2}{\chi^4} =$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{\chi^2} = 0$.

vi) Π Ο είναι το $A = R-\{\pm1\}$, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi-3}{\chi^2-1} = \lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi}{\chi^2} =$

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{1}{\chi} = 0$.

4. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}3e^{-\chi^2-1}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}3e^{-\chi^2-1}$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\chi^2-1}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\chi^2-1}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3\ln(2\chi-1)\right)$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\ln(\chi^2-1)-2\chi+1\right)$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A = R$, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right) = -2\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{3\chi+1}\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν θέσεις $u = 3\chi + 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} u = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(3\chi+1) = +\infty$, οπότε

$$-2\lim_{\chi\to+\infty}\left(e^{3\chi+1}\right) = -2\lim_{u\to+\infty}\left(e^{u}\right) = -2(+\infty) \Rightarrow \lim_{\chi\to+\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right) = -\infty .$$

ii) Π Ο είναι το $A = R$, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right) = -2\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{3\chi+1}\right)$.

Αν θέσεις $u = 3\chi + 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty} u = \lim\limits_{\chi\to-\infty}(3\chi+1) = -\infty$, οπότε

$$-2\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\left(e^{3\chi+1}\right) = -2\cdot\lim_{u\to-\infty}\left(e^{u}\right) = -2\cdot 0 \Rightarrow \lim_{\chi\to-\infty}\left(-2e^{3\chi+1}\right) = 0 .$$

iii) Π Ο είναι το $A = R$, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} 3e^{-\chi^2-1} = 3\lim\limits_{\chi\to+\infty} e^{-\chi^2-1}$.

Αν θέσεις $u = -\chi^2 - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} u = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(-\chi^2-1) = -\infty$, οπότε

$$3\cdot\lim_{\chi\to+\infty} e^{-\chi^2-1} = 3\cdot\lim_{u\to-\infty}\left(e^{u}\right) = 3\cdot 0 \Rightarrow \lim_{\chi\to+\infty} 3e^{-\chi^2-1} = 0 .$$

iv) Π Ο είναι το $A = R$, είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty} 3e^{-\chi^2-1} = 3\lim\limits_{\chi\to-\infty} e^{-\chi^2-1}$.

Αν θέσεις $u = -\chi^2 - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty} u = \lim\limits_{\chi\to-\infty}(-\chi^2-1) = -\infty$, οπότε

$$3\cdot\lim_{\chi\to-\infty} e^{-\chi^2-1} = 3\cdot\lim_{u\to-\infty}\left(e^{u}\right) = 3\cdot 0 \Rightarrow \lim_{\chi\to-\infty} 3e^{-\chi^2-1} = 0 .$$

v) Π Ο είναι το $A = R$, είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{-\chi^2-1} = 3\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\chi^2-1}$.

Αν θέσεις $u = -\chi^2 - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} u = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(-\chi^2-1) = -\infty$, οπότε

$3\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\chi^2-1} = 3\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{u}$. Όμως το $\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{u}$ είναι της μορφής $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\alpha^{\chi}$ με $0 < \alpha < 1$ άρα θα είναι $3\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{u} = 3(+\infty) \Rightarrow$

$$\lim_{\chi\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{-\chi^2-1} = +\infty .$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

vi) Π Ο είναι το Α = R .

Αν θέσεις $u = -\chi^2 - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} u = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(-\chi^2-1) = -\infty$, οπότε

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{-\chi^2-1} = \lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{u}$. Όμως το $\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{u}$ είναι της μορφής

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\alpha^{\chi}$ με $\alpha > 1$ άρα θα είναι $\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{u} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{-\chi^2-1} = 0$.

vii) Π Ο είναι το $A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, για να υπάρχει το $\ln(2\chi-1)$ άρα πρέπει

$2\chi - 1 > 0$) .

Αν θέσεις $u = 2\chi - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} u = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(2\chi-1) = +\infty$, οπότε

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3\ln(2\chi-1)\right) = 3\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u) = 3(+\infty) = +\infty.$

Γιατί το $\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)$ είναι της μορφής $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\ln\chi) = +\infty$.

viii) Π Ο είναι το $A = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ για να υπάρχει το $\ln(\chi^2-1)$ άρα πρέπει $\chi^2 - 1 > 0$ άρα ρίζες, πίνακας προσήμου κλπ οδηγούν στο Π Ο που αναφέρθηκε) .

Αν θέσεις $u = \chi^2 - 1$ είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty} u = \lim\limits_{\chi\to-\infty}(\chi^2-1) = +\infty$, οπότε είναι

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\ln(\chi^2-1) - 2\chi + 1\right) = \lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\ln(\chi^2-1)\right) + \lim\limits_{\chi\to-\infty}(-2\chi+1) =$

$\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u) + (+\infty) = +\infty + \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\ln(\chi^2-1) - 2\chi + 1\right) = +\infty$.

Γιατί το $\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)$ είναι της μορφής $\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln\chi) = +\infty$.

5. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi} = 0$ για κάθε α, β ∈ R.

Απάντηση :

Το Π Ο είναι το Α = R *

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $\left|\frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi}\right| = \frac{|\eta\mu(\alpha\chi)|}{|\beta\chi|} \le \frac{1}{|\beta\chi|}$ άρα $\left|\frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi}\right| \le \frac{1}{|\beta\chi|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|\beta\chi|} \le \frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi} \le \frac{1}{|\beta\chi|}$ και ταυτόχρονα είναι :

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|\beta\chi|}\right) = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{1}{|\beta\chi|} = 0$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{\eta\mu(\alpha\chi)}{\beta\chi} = 0$

6. Να δείξετε ότι ***δεν υπάρχουν τα όρια*** :

i) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\chi$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu\chi$

Απάντηση :

i) Το Π Ο είναι το **A = R .**

Το $\chi\to\pm\infty$ με πολλούς τρόπους, πχ : $\begin{cases}\chi\to\pm\infty \text{ και } \chi = 2\kappa\pi \\ \chi\to\pm\infty \text{ και } \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\end{cases}$.

Όμως $\chi\to\pm\infty$ και $\chi = 2\kappa\pi$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\chi = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu(2\kappa\pi) =$

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu 0 = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} 0 = 0$ και

$\chi\to\pm\infty$ και $\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\chi = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} 1 = 1$.

Όμως ***το όριο μιας συνάρτησης όταν υπάρχει είναι μοναδικό***. Άρα από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι δεν μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu\chi$

ii) Το Π Ο είναι το **A = R .**

Η απόδειξη είναι όμοια με το προηγούμενο ερώτημα.

7. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\frac{\chi^3+5\chi+2}{2\chi+3} + \frac{\chi^2-1}{\chi^2+4}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[2(\chi+3) - \frac{\chi^2+2\chi+2}{\chi+2}\right]$

Λ ι β α δ ε ι ά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

i) Το Π Ο είναι το $A = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, πρέπει $2\chi + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \frac{3}{2}$ και

$\chi^2 + 4 \neq 0$, που ισχύει για κάθε $\chi \in R$.

Είναι $\lim\limits_{\chi \to +\infty}\left(\frac{\chi^3 + 5\chi + 2}{2\chi + 3} + \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2 + 4}\right) = \lim\limits_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^3 + 5\chi + 2}{2\chi + 3} + \lim\limits_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^2 - 1}{\chi^2 + 4} =$

$\lim\limits_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^3}{2\chi} + \lim\limits_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^2}{\chi^2} = \lim\limits_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^2}{2} + 1 = +\infty$.

ii) Το Π Ο είναι το $A = R - \{-2\}$, πρέπει $\chi + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq -2$.

Είναι $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[2(\chi + 3) - \frac{\chi^2 + 2\chi + 2}{\chi + 2}\right] =$

$\lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[2(\chi + 3)\right] + \lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[-\frac{\chi^2 + 2\chi + 2}{\chi + 2}\right] =$

Όπου προκύπτει απροσδιοριστία προσπαθούμε ξανά κάνοντας πράξεις.

$\lim\limits_{\chi \to -\infty} 2\chi + \lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[-\frac{\chi^2}{\chi}\right] = -\infty + \lim\limits_{\chi \to -\infty}(-\chi) = -\infty + (+\infty)$

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ .

Άρα $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[2(\chi + 3) - \frac{\chi^2 + 2\chi + 2}{\chi + 2}\right] = \lim\limits_{\chi \to -\infty}\frac{2(\chi + 3)(\chi + 2) - (\chi^2 + 2\chi + 2)}{\chi + 2}$

$= \lim\limits_{\chi \to -\infty}\frac{2\chi^2 + 10\chi + 12 - \chi^2 - 2\chi - 2}{\chi + 2} = \lim\limits_{\chi \to -\infty}\frac{\chi^2 + 8\chi + 10}{\chi + 2} = \lim\limits_{\chi \to -\infty}\frac{\chi^2}{\chi} =$

$\lim\limits_{\chi \to -\infty}\chi = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to -\infty}\left[2(\chi + 3) - \frac{\chi^2 + 2\chi + 2}{\chi + 2}\right] = -\infty$.

8. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα, να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{\chi \to +\infty}\sqrt{\chi^2 - 3\chi + 2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\sqrt{\chi^2 + 5\chi + 7}$

iii) $\lim\limits_{\chi \to +\infty}\sqrt[3]{\chi^3 - \chi^2 + \chi + 1}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi \to -\infty}\sqrt[3]{\chi^3 - \chi^2 + \chi + 1}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Όταν στην εκφώνηση λέει «Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα» σημαίνει πως δεν έχεις την υποχρέωση να βρεις το Π Ο και να δείξεις πως έχει νόημα το όριο.

Απάντηση :

i) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+2\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}=\sqrt{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=+\infty$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+2\right)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}x^2}=\sqrt{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=+\infty$

iii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2+x+1}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2+x+1\right)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to+\infty}x^3}$

$=\sqrt[3]{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2+x+1}=+\infty$.

iv) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2+x+1}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2+x+1\right)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}x^3}$

$=\sqrt[3]{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Πρόσεξε την διαφοροποίηση στο $\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}x^3}$, επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και θα προέκυπτε απροσδιοριστία $\sqrt[3]{-\infty}$ έγραψα το $\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty}x^3}=\sqrt[3]{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}x\right)^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. Αυτό θα κάνεις κάθε φορά που θα έχεις απροσδιοριστία της μορφής $\sqrt[\nu]{-\infty}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατήρηση :

Στις ρητές συναρτήσεις της μορφής $\frac{\sqrt[\nu]{P(\chi)}}{\sqrt[\mu]{Q(\chi)}}$, $\frac{\sqrt[\nu]{P(\chi)}}{Q(\chi)}$, $\frac{P(\chi)}{\sqrt[\nu]{Q(\chi)}}$ βγάζεις κοινό παράγοντα, σε αριθμητή και παρονομαστή, τον μεγιστοβάθμιο όρο, κατόπιν βγάζεις αυτόν τον παράγοντα έξω από τη ρίζα ***βάζοντας απόλυτη τιμή*** (αν η ρίζα είναι άρτιας τάξης) και στην συνέχεια αφού βγάλεις και την απόλυτη τιμή κάνεις απλοποίηση.

Υπενθύμιση :

$|\chi|^{2\kappa}=\chi^{2\kappa}$, ενώ αν έχεις $|\chi|^{2\kappa+1}$ θα εξετάζεις που τείνει το χ και αν :

i) $\chi \to +\infty$ τότε μπορείς να υποθέσεις ότι $\chi > 0$ άρα $|\chi|^{2\kappa+1}=\chi^{2\kappa+1}$.

ii) $\chi \to -\infty$ τότε μπορείς να υποθέσεις ότι $\chi < 0$ άρα $|\chi|^{2\kappa+1}=-\chi^{2\kappa+1}$.

Δες τις επόμενες περιπτώσεις

9. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi^4+3\chi^2+4}}{2\chi+3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+3}{\sqrt{\chi^6+3\chi^2+4}}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{4\chi^2+5}}{2\chi+3}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+3}{\sqrt{4\chi^2+5}}$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, πρέπει $2\chi + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq -\frac{3}{2}$ και

$\chi^4 + 3\chi^2 + 4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\chi \in R$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi^4+3\chi^2+4}}{2\chi+3} = \lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi^4\left(1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}\right)}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)} =$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{|\chi|^2\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}$$ **(1)** και επειδή $|\chi|^2=\chi^2$

άρα από **(1)** είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{|\chi|^2\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\chi\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}}}{2+\frac{3}{\chi}}=(+\infty)\cdot\frac{\sqrt{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(1+\frac{3}{\chi^2}+\frac{4}{\chi^4}\right)}}{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=$$

$$(+\infty)\cdot\frac{\sqrt{1+0+0}}{2+0}=(+\infty)\cdot\frac{1}{2}=+\infty$$

ii) Π Ο είναι το Α =R , πρέπει $\chi^6+3\chi^2+4>0$, που ισχύει για κάθε $\chi\in R$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+3}{\sqrt{\chi^6+3\chi^2+4}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{\sqrt{\chi^6\left(1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}\right)}}=$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{|\chi|^3\sqrt{1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}}}$$ **(1)** και επειδή $\chi\to-\infty$

μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi<0$ άρα $|\chi|^3=-\chi^3$.

Άρα από **(1)** είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{|\chi|^3\sqrt{1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{-\chi^3\sqrt{1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}}}=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$-\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{\chi^2}\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{\chi}}{\sqrt{1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}}}=0\cdot\frac{\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{\sqrt{\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(1+\frac{3}{\chi^4}+\frac{4}{\chi^6}\right)}}=$$

$$0\cdot\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}}=0\cdot 2=0$$

iii) Π Ο είναι το $A=\mathrm{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$, πρέπει $2\chi+3\neq 0\Leftrightarrow\chi\neq\frac{3}{2}$ και $4\chi^2+5\geq 0$,

που ισχύει για κάθε $\chi\in\mathrm{R}$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{4\chi^2+5}}{2\chi+3}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{\chi^2\left(4+\frac{5}{\chi^2}\right)}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{|\chi|\sqrt{4+\frac{5}{\chi^2}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}$ **(1)**

και επειδή $\chi\to+\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi>0$ άρα

$|\chi|=\chi$. Άρα από **(1)** είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{|\chi|\sqrt{4+\frac{5}{\chi^2}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\sqrt{4+\frac{5}{\chi^2}}}{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{\chi^2}}}{2+\frac{3}{\chi}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(4+\frac{5}{\chi^2}\right)}}{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}=\frac{\sqrt{4+0}}{2+0}=\frac{2}{2}=1.$$

iv) Π Ο είναι το $A=\mathrm{R}$, πρέπει $4\chi^2+5>0$,. που ισχύει για κάθε $\chi\in\mathrm{R}$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{2\chi+3}{\sqrt{4\chi^2+5}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{\sqrt{\chi^2\left(4+\frac{5}{\chi^2}\right)}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)}{|\chi|\sqrt{4+\frac{5}{\chi^2}}}$ **(1)**

και επειδή $\chi\to-\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi<0$ άρα

$|\chi|=-\chi$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα **(1)** $\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi\left(2+\dfrac{3}{\chi}\right)}{|\chi|\sqrt{4+\dfrac{5}{\chi^2}}}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi\left(2+\dfrac{3}{\chi}\right)}{-\chi\sqrt{4+\dfrac{5}{\chi^2}}}=-\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{\chi}}{\sqrt{4+\dfrac{5}{\chi^2}}}=$

$-\dfrac{2+0}{\sqrt{4+0}}=-\dfrac{2}{2}=-1$.

Η άσκηση που ακολουθεί είναι συνδυασμός περισσοτέρων περιπτώσεων

10. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi-\sqrt{\chi^2+2}}{\chi+1}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi^2-\sqrt{\chi^4+9}}{\chi^2-\sqrt{\chi^4+3}}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{2\chi+3-\sqrt{4\chi^2+1}}{\chi+1}$.

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A=R-\{-1\}$, πρέπει $\chi+1\neq0\Leftrightarrow\chi\neq-1$.

Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις τα όρια αριθμητή και παρονομαστή βρίσκεσαι μπροστά σε απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{+\infty-(+\infty)}{+\infty}$.

Αυτή η απροσδιοριστία είναι κατά κάποιο τρόπο **«διπλή»** , με την έννοια ότι υπάρχει η απροσδιοριστία $+\infty-(+\infty)$ που εμφανίζεται στον αριθμητή και στην συνέχεια υπάρχει το $+\infty$ στον παρονομαστή.

Η δεύτερη απροσδιοριστία είναι ***πιθανολογούμενη*** και εξαρτάται από το πώς θα αρθεί η απροσδιοριστία του αριθμητή, γιατί αν μετά την άρση της απροσδιοριστίας στον αριθμητή (που είναι και «σίγουρη») προκύψει αριθμός, στον αριθμητή, τότε δεν θα υπάρχει η «δεύτερη» απροσδιοριστία μεταξύ αριθμητή – παρονομαστή.

Έτσι λοιπόν ξεκινάς από τον αριθμητή και πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με την συζυγή παράσταση του :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{(x+1)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2+2\right)}{(x+1)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2-2}{(x+1)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{(x+1)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=-2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}=0\cdot0=0.$

ii) Π Ο είναι το R γιατί είναι $x^4+9>0$ για κάθε $x\in R$ και $x^2-\sqrt{x^4+3}=0$

$\Leftrightarrow x^2=\sqrt{x^4+3}\Leftrightarrow x^4=x^4+3\Leftrightarrow 3=0$ που είναι αδύνατη.

Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις τα όρια αριθμητή και παρονομαστή βρίσκεσαι μπροστά σε απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{+\infty-(+\infty)}{+\infty-(+\infty)}$.

Αυτή η απροσδιοριστία αίρεται αν πολλαπλασιάσεις και διαιρέσεις με την συζυγή παράσταση και του αριθμητή και παρονομαστή ταυτόχρονα.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4+9}}{x^2-\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2-\sqrt{x^4+9}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(x^2-\sqrt{x^2+3}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+3}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^4-\left(x^4+9\right)\right)\left(x^2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(x^4-\left(x^2+3\right)\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-9\left(x^2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(x^4-x^2-3\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)}$

$=-9\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4\left(1+\dfrac{9}{x^4}\right)}\right)}=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2+|\chi|\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}}{\chi^4\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\left(\chi^2+|\chi|^2\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)} \quad \textbf{(1)}.$$

Είναι $|\chi|^2=\chi^2$ και επειδή το $\chi\to-\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi<0$ άρα $|\chi|=-\chi$.

Άρα από **(1)** είναι $-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2+|\chi|\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}}{\chi^4\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\left(\chi^2+|\chi|^2\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)}=$

$$-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2-\chi\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}}{\chi^4\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\left(\chi^2+\chi^2\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)}=$$

$$-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2\left(1-\frac{1}{\chi}\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}\right)}{\chi^4\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\cdot\chi^2\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)}=$$

$$-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2\left(1-\frac{1}{\chi}\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}\right)}{\chi^6\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)}=$$

$$-9\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{\chi^4}\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{\chi}\sqrt{1+\frac{3}{\chi^2}}}{\left(1-\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^4}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{\chi^4}}\right)}=$$

$$-9\cdot0\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1-0\cdot\sqrt{1+0}}{(1-0-0)\left(1+\sqrt{1+0}\right)}=0.$$

Λιβαδειά

iii) Π Ο είναι το $A = R - \{-1\}$, πρέπει $\chi + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq -1$.

Αν προσπαθήσεις να υπολογίσεις τα όρια αριθμητή και παρονομαστή βρίσκεσαι μπροστά σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{+\infty-(+\infty)}{+\infty}$

πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με την συζυγή παράσταση του αριθμητή:

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{2\chi+3-\sqrt{\chi^2+1}}{\chi+1}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left((2\chi+3)-\sqrt{\chi^2+1}\right)\left((2\chi+3)+\sqrt{\chi^2+1}\right)}{(\chi+1)\left((2\chi+3)+\sqrt{\chi^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(2\chi+3)^2-\left(\chi^2+1\right)}{(\chi+1)\left((2\chi+3)+\sqrt{\chi^2+1}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{4\chi^2+12\chi+9-\chi^2-1}{(\chi+1)\left((2\chi+3)+\sqrt{\chi^2+1}\right)}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{3\chi^2+12\chi+8}{(\chi+1)\left((2\chi+3)+\sqrt{\chi^2+1}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2\left(3+\frac{12}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\left(\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)+|\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi}}\right)}$$

Και επειδή το $\chi\to+\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi>0$ άρα $|\chi|=\chi$.

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2\left(3+\frac{12}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\left(\chi\left(2+\frac{3}{\chi}\right)+\chi\sqrt{1+\frac{1}{\chi}}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2\left(3+\frac{12}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\cdot\chi\cdot\left(2+\frac{3}{\chi}+\sqrt{1+\frac{1}{\chi}}\right)}$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2\left(3+\frac{12}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}\right)}{\chi^2\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\left(2+\frac{3}{\chi}+\sqrt{1+\frac{1}{\chi}}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{3+\frac{12}{\chi}+\frac{8}{\chi^2}}{\left(1+\frac{1}{\chi}\right)\left(2+\frac{3}{\chi}+\sqrt{1+\frac{1}{\chi}}\right)}=$$

$$\frac{3+0+0}{(1+0)\left(2+0+\sqrt{1+0}\right)}=\frac{3}{1(2+1)}=1\ .$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες για να υπολογισθεί ένα όριο, καθώς το $\chi \to \pm\infty$, πρέπει να απαλλάξεις μια παράσταση από τα απόλυτα γιατί διαφορετικά δεν υπολογίζεται το όριο πχ προκύπτει απροσδιοριστία.

Δες πόσο εύκολα απαλλάσσεις μια παράσταση από τα απόλυτα όταν το $\chi \to \pm\infty$. Έστω ότι στην παράσταση υπάρχουν τα απόλυτα : $|3\chi - 5|$, $|2\chi + 1|$ και το $\chi \to -\infty$.

Είναι $3\chi - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{5}{3}$, $2\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{1}{2}$, και επειδή το $\chi \to -\infty$ μπορείς να υποθέσεις ότι : $\chi < -\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$ οπότε είναι $|3\chi - 5| = -3\chi + 5$ και $|2\chi + 1| = -2\chi - 1$.

Από κει και πέρα δουλεύεις ανάλογα .

Δες την επόμενη άσκηση.

11. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\chi^2 + |\chi - 1| - 2}{2\chi + 3}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{|\chi^2 + 3\chi + 2| - \chi}{\chi^2 - \chi + 5}$

iii) $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{|\chi^2 - 2\chi|}{\chi - 2}$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, πρέπει $2\chi + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \frac{3}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή δεν χρειάζεται να απαλλάξεις την παράσταση από το απόλυτο γιατί είναι $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\chi^2 + |\chi - 1| - 2}{2\chi + 3} = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\chi^2}{2\chi} = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{\chi}{2} = +\infty$.

ii) Π Ο είναι το $A = R$, γιατί η εξίσωση $\chi^2 - \chi + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -19 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες.

Για να μπορέσεις να βρεις το όριο χρειάζεσαι τον μεγιστοβάθμιο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

παράγοντα του αριθμητή άρα πρέπει να φύγει το απόλυτο.

Εξετάζεις το πρόσημο της ποσότητας που είναι μέσα στο απόλυτο :

$\chi^2+3\chi+2$, ρίζες $\rho_1=-1$ και $\rho_2=-2$ άρα πίνακας προσήμου για το

το $\chi^2+3\chi+2$ είναι

$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$+$	0	$-$ 0	$+$

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2+3\chi+2>0$ είναι $\chi<-2$ ή $\chi>-1$.

Και επειδή το $\chi\to+\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi>1$

άρα $\left|\chi^2+3\chi+2\right|=\chi^2+3\chi+2$ οπότε είναι :

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left|\chi^2+3\chi+2\right|-\chi}{\chi^2-\chi+5}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2+3\chi+2-\chi}{\chi^2-\chi+5}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2}{\chi^2}=\lim_{\chi\to+\infty}1=1\,.$$

iii) Π Ο είναι το $A=R-\{2\}$, γιατί η εξίσωση $\chi-2=0\Leftrightarrow\chi=2$.

Εξετάζεις το πρόσημο της ποσότητας που είναι μέσα στο απόλυτο :

$\chi^2-2\chi$, ρίζες $\rho_1=0$ και $\rho_2=2$ άρα πίνακας προσήμου για το

το $\chi^2-2\chi$ είναι

$-\infty$	0	2	$+\infty$
$+$	0	$-$ 0	$+$

οπότε λύσεις της ανίσωσης : $\chi^2-2\chi>0$ είναι $\chi<0$ ή $\chi>2$.

Και επειδή το $\chi\to-\infty$ μπορείς να υποθέσεις με βεβαιότητα πως το $\chi<0$

άρα $\left|\chi^2-2\chi\right|=-\chi^2+2\chi$ οπότε είναι :

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\left|\chi^2-2\chi\right|}{\chi-2}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-\chi^2+2\chi}{\chi-2}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-\chi^2}{\chi}=\lim_{\chi\to-\infty}(-\chi)=+\infty\,.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στις συναρτήσεις της μορφής $\sqrt[\nu]{P(\chi)} \pm \sqrt[\mu]{Q(\chi)}$, $P(\chi) \pm \sqrt[\mu]{Q(\chi)}$,

προσπαθείς με την ιδιότητα $\lim\limits_{\chi \to \pm\infty} \left(f(\chi) \pm g(\chi)\right)$ και αν προκύπτει

απροσδιοριστία πολλαπλασιάζεις και διαιρείς (ταυτόχρονα) με την συζυγή παράσταση της παράστασης που έχεις, πχ

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

Στη συνέχεια βέβαια βγάζεις κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον μεγιστοβάθμιο όρο, . . . κλπ

12. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \left(\sqrt{\chi^2 + 3\chi + 4} + \sqrt{\chi^2 + 2}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \left(\sqrt{\chi^2 + 3\chi + 4} - \sqrt{\chi^2 + 2}\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} - 3\chi$ **iv)** $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \left(-2\chi^2 + \sqrt{\chi^2 + 1}\right)$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A = R$, γιατί η εξίσωση $\chi^2 + 3\chi + 4 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες και επομένως είναι $\chi^2 + 3\chi + 4 > 0$ για κάθε $\chi \in R$, το ίδιο ισχύει και για το $\chi^2 + 2$.

$$\lim_{\chi \to -\infty} \left(\sqrt{\chi^2 + 3\chi + 4} + \sqrt{\chi^2 + 2}\right) = \lim_{\chi \to -\infty} \sqrt{\chi^2 + 3\chi + 4} + \lim_{\chi \to -\infty} \sqrt{\chi^2 + 2} =$$

$+\infty + \infty = +\infty.$

Προφανώς εδώ δεν δημιουργείται απροσδιοριστία, δεν συμβαίνει το ίδιο όμως και στα επόμενα :

ii) Π Ο είναι το $A = R$, γιατί η εξίσωση $\chi^2 + 3\chi + 4 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες και επομένως είναι $\chi^2 + 3\chi + 4 > 0$ για κάθε $\chi \in R$, το ίδιο ισχύει και για το $\chi^2 + 2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}-\sqrt{\chi^2+2}\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\sqrt{\chi^2+3\chi+4}-\lim_{\chi\to+\infty}\sqrt{\chi^2+2}=$$

$+\infty-(+\infty)=+\infty-\infty$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

Για να άρεις την απροσδιοριστία, πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με την συζυγή παράσταση : $\lim_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}-\sqrt{\chi^2+2}\right)=$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}-\sqrt{\chi^2+2}\right)\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}+\sqrt{\chi^2+2}\right)}{\sqrt{\chi^2+3\chi+4}+\sqrt{\chi^2+2}}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2+3\chi+4-\left(\chi^2+2\right)}{\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}+\sqrt{\chi^2+2}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^2+3\chi+4-\chi^2-2}{\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}+\sqrt{\chi^2+2}\right)}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{3\chi+2}{\left(\sqrt{\chi^2+3\chi+4}+\sqrt{\chi^2+2}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\left(3+\frac{2}{\chi}\right)}{\left(|\chi|\sqrt{1+\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi^2}}+|\chi|\sqrt{1+\frac{2}{\chi^2}}\right)}$$

$$=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\left(3+\frac{2}{\chi}\right)}{|\chi|\left(\sqrt{1+\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{\chi^2}}\right)}.$$

Και επειδή $\chi\to+\infty$ μπορείς να υποθέσεις πως το $\chi>0$ άρα $|\chi|=\chi$

Άρα $\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\left(3+\frac{2}{\chi}\right)}{|\chi|\left(\sqrt{1+\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{\chi^2}}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi\left(3+\frac{2}{\chi}\right)}{\chi\left(\sqrt{1+\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{\chi^2}}\right)}=$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{\chi}}{\sqrt{1+\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\chi^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{\chi^2}}}=\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Π Ο είναι το $A = R$, γιατί η εξίσωση $2\chi^2 + \chi + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -23 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες και επομένως είναι $2\chi^2 + \chi + 3 > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

$$\lim_{\chi \to +\infty} \sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} - 3\chi = \lim_{\chi \to +\infty} \sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} - \lim_{\chi \to +\infty} 3\chi = +\infty - (+\infty)$$

$= +\infty - \infty$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

Για να άρεις την απροσδιοριστία, πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με την συζυγή παράσταση :

$$\lim_{\chi \to +\infty} \sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} - 3\chi = \lim_{\chi \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} - 3\chi\right)\left(\sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} + 3\chi\right)}{\sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} + 3\chi}$$

$$= \lim_{\chi \to +\infty} \frac{2\chi^2 + \chi + 3 - 9\chi^2}{\sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} + 3\chi} = \lim_{\chi \to +\infty} \frac{-7\chi^2 + \chi + 3}{\sqrt{2\chi^2 + \chi + 3} + 3\chi} =$$

$$\lim_{\chi \to +\infty} \frac{\chi^2\left(-7 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}\right)}{|\chi|\sqrt{2 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi}} + 3\chi} .$$

Και επειδή $\chi \to +\infty$ μπορείς να υποθέσεις πως το $\chi > 0$ άρα $|\chi| = \chi$

Άρα $$\lim_{\chi \to +\infty} \frac{\chi^2\left(-7 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}\right)}{|\chi|\sqrt{2 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi}} + 3\chi} = \lim_{\chi \to +\infty} \frac{\chi^2\left(-7 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}\right)}{\chi\sqrt{2 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi}} + 3\chi} =$$

$$\lim_{\chi \to +\infty} \frac{\chi^2\left(-7 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}\right)}{\chi\left(\sqrt{2 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi}} + 3\right)} = \lim_{\chi \to +\infty} \chi \cdot \lim_{\chi \to +\infty} \frac{-7 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi^2}}{\sqrt{2 + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\chi}} + 3} =$$

$$(+\infty)\frac{-7 + 0 + 0}{\sqrt{2 + 0 + 0} + 3} = (+\infty)(+\infty)\frac{-7}{\sqrt{2} + 3} = -\infty.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iv) Π Ο είναι το $A = R$, γιατί η εξίσωση $\chi^2 + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = -4 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες, επομένως είναι $\chi^2 + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in R$.

$$\lim_{\chi \to -\infty}\left(-2\chi^2 + \sqrt{\chi^2+1}\right) = \lim_{\chi \to -\infty}\left(-2\chi^2\right) + \lim_{\chi \to -\infty}\sqrt{\chi^2+1} = -\infty + (+\infty) =$$

$-\infty + \infty$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

Για να άρεις την απροσδιοριστία, πολλαπλασιάζεις και διαιρείς με την συζυγή παράσταση :

$$\lim_{\chi \to -\infty}\left(-2\chi^2 + \sqrt{\chi^2+1}\right) = \lim_{\chi \to +\infty}\frac{\left(-2\chi^2 + \sqrt{\chi^2+1}\right)\left(-2\chi^2 - \sqrt{\chi^2+1}\right)}{-2\chi^2 - \sqrt{\chi^2+1}} =$$

$$\lim_{\chi \to +\infty}\frac{\left(-2\chi^2\right)^2 - \left(\sqrt{\chi^2+1}\right)^2}{-2\chi^2 - \sqrt{\chi^2+1}} = \lim_{\chi \to +\infty}\frac{4\chi^4 - \left(\chi^2+1\right)}{-2\chi^2 - \sqrt{\chi^2+1}} =$$

$$\lim_{\chi \to +\infty}\frac{4\chi^4 - \chi^2 + 1}{-2\chi^2 - \sqrt{\chi^2+1}} = \lim_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^4\left(4 - \frac{1}{\chi^2} + \frac{3}{\chi^4}\right)}{-2\chi^2 - |\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}} \quad \textbf{(1)} .$$

Και επειδή $\chi \to +\infty$ μπορείς να υποθέσεις πως το $\chi > 0$ άρα $|\chi| = \chi$.

Άρα $$\lim_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^4\left(4 - \frac{1}{\chi^2} + \frac{3}{\chi^4}\right)}{-2\chi^2 - |\chi|\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}} = \lim_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^4\left(4 - \frac{1}{\chi^2} + \frac{3}{\chi^4}\right)}{-2\chi^2 - \chi\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}} =$$

$$\lim_{\chi \to +\infty}\frac{\chi^4\left(4 - \frac{1}{\chi^2} + \frac{3}{\chi^4}\right)}{\chi^2\left(-2 - \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}}{\chi}\right)} = \lim_{\chi \to +\infty}\chi^2 \cdot \lim_{\chi \to +\infty}\frac{4 - \frac{1}{\chi^2} + \frac{3}{\chi^4}}{-2 - \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\chi^2}}}{\chi}} =$$

$$(+\infty)\frac{4-0+0}{-2-0} = (+\infty)(-2) = -\infty .$$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Αν $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left[\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+2\right]=5$ να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)$.

Απάντηση :

Στις ασκήσεις αυτής της μορφής ακολουθείς την γνωστή μέθοδο από το όριο όταν το $\chi\to\chi_0$, δηλαδή θα θέσεις την παράσταση

$\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+2=f(\chi)$ οπότε $\varphi(\chi)=\dfrac{f(\chi)-2}{\chi^4+2\chi^2+5}$ **(1)**,

Η **(1)** έχει νόημα διότι όταν το $\chi\to+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ $(\text{αντίστοιχα } (-\infty,\alpha))$ στο οποίο η $\chi^4+2\chi^2+5$ να μην μηδενίζεται άρα μπορείς να διαιρέσεις με το $\chi^4+2\chi^2+5$. Όμως $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left[\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+2\right]=5\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}f(\chi)=5$ και από **(1)** είναι : $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi^4+2\chi^2+5}$,

επειδή $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(f(\chi)-2\right)=5-2=3$ και $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)=+\infty$ θα

είναι $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)-2}{\chi^4+2\chi^2+5}=\dfrac{3}{+\infty}=0$.

14. Αν $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left[\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+\chi^3-5\right]=-11$ να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)$.

Απάντηση :

Θα θέσεις την παράσταση $\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+\chi^3-5=f(\chi)\Leftrightarrow$

$\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)=f(\chi)-\chi^3+5$. Όταν το $\chi\to+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ $(\text{αντίστοιχα } (-\infty,\alpha))$ στο οποίο η $\chi^4+2\chi^2+5$ να μην μηδενίζεται άρα μπορείς να διαιρέσεις με το $\chi^4+2\chi^2+5$ και τα δυο μέλη οπότε :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\varphi(\chi)=\dfrac{f(\chi)-\chi^3+5}{\chi^4+2\chi^2+5}$ **(1)** . Όμως $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left[\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)\varphi(\chi)+\chi^3-5\right]=-11$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=-11$ και από **(1)** είναι : $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)-\chi^3+5}{\chi^4+2\chi^2+5}$

$=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^4+2\chi^2+5}+\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{-\chi^3+5}{\chi^4+2\chi^2+5}$. Επειδή $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=-11$ και

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(\chi^4+2\chi^2+5\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^4+2\chi^2+5}=0$, επίσης

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{-\chi^3+5}{\chi^4+2\chi^2+5}=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{-\chi^3}{\chi^4}=-\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{1}{\chi}=0$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^4+2\chi^2+5}+\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{-\chi^3+5}{\chi^4+2\chi^2+5}=0+0=0$

Προσοχή

Όταν στη διαδικασία λύσης μιας άσκησης χρειάζεται να διαιρέσεις με μια παράσταση που εξαρτάται από το χ, είναι απαραίτητο να **διευκρινίζεις** (όπως προηγουμένως) ότι αυτή η παράσταση δεν είναι μηδέν. Αυτό γίνεται με αναφορά στο που τείνει το χ, όπως είδες και όπως θα δεις και στα επόμενα παραδείγματα .

15. Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{3\chi^4-\varphi(\chi)+1}{\chi^4\varphi(\chi)+2}=1$ δείξετε ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=3$.

Απάντηση :

Θα θέσεις την παράσταση $\dfrac{3\chi^4-\varphi(\chi)+1}{\chi^4\varphi(\chi)+2}=f(\chi)$ άρα

$3\chi^4-\varphi(\chi)+1=f(\chi)\left(\chi^4\varphi(\chi)+2\right)\Leftrightarrow 3\chi^4-\varphi(\chi)+1=\chi^4 f(\chi)\varphi(\chi)+2f(\chi)\Leftrightarrow$

$\chi^4 f(\chi)\varphi(\chi)+\varphi(\chi)=3\chi^4-2f(\chi)+1\Leftrightarrow\left(\chi^4\cdot f(\chi)+1\right)\varphi(\chi)=3\chi^4-2f(\chi)+1$

Όταν το $\chi\to+\infty$ θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ στο οποίο η

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi^4 \cdot f(\chi)+1$ να μην μηδενίζεται,

άρα μπορείς να διαιρέσεις και τα δυο μέλη με το $\chi^4 \cdot f(\chi)+1$ και είναι

$\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi^4+1-2f(\chi)}{\chi^4 f(\chi)+1}$ **(1).** Όμως $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{3\chi^4-\varphi(\chi)+1}{\chi^4\varphi(\chi)+2}=1 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=1$ και από **(1)** είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{3\chi^4+1-2f(\chi)}{\chi^4 f(\chi)+1}=$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^4\left(3+\dfrac{1}{\chi^4}-2\dfrac{f(\chi)}{\chi^4}\right)}{\chi^4\left(f(\chi)+\dfrac{1}{\chi^4}\right)}$ **(2)** .

Όμως $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty} f(\chi)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^4}=0$ άρα **(2)** $\Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^4\left(3+\dfrac{1}{\chi^4}-2\dfrac{f(\chi)}{\chi^4}\right)}{\chi^4\left(f(\chi)+\dfrac{1}{\chi^4}\right)}=\dfrac{3+0-2\cdot 0}{1+0}=3$

16. Αν $f(\chi)=\dfrac{\chi^2\varphi(\chi)-5\chi+1}{\chi^3-\varphi(\chi)+1}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=2$, να δείξετε ότι

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$.

Απάντηση :

$f(\chi)=\dfrac{\chi^2\varphi(\chi)-5\chi+1}{\chi^3-\varphi(\chi)+1} \Leftrightarrow \chi^3 f(\chi)-f(\chi)\cdot\varphi(\chi)+f(\chi)=\chi^2\varphi(\chi)-5\chi+1 \Leftrightarrow$

$\chi^2\varphi(\chi)+f(\chi)\cdot\varphi(\chi)=\chi^3 f(\chi)+f(\chi)+5\chi-1 \Leftrightarrow$

$\left(\chi^2+f(\chi)\right)\varphi(\chi)=\chi^3 f(\chi)+f(\chi)+5\chi-1$.

Όταν το $\chi\to+\infty$ θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ στο οποίο η

$\chi^2+f(\chi)$ να μην μηδενίζεται, άρα μπορείς να διαιρέσεις και τα δυο μέλη

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

με το $\chi^2+f(\chi)$ οπότε : $\varphi(\chi)=\dfrac{\chi^3 f(\chi)+f(\chi)+5\chi-1}{\chi^2+f(\chi)} \Rightarrow$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^3 f(\chi)+f(\chi)+5\chi-1}{\chi^2+f(\chi)}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^3\left(f(\chi)+\dfrac{f(\chi)}{\chi^3}+\dfrac{5}{\chi^2}-\dfrac{1}{\chi^3}\right)}{\chi^2\left(1+\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}\right)}=\lim_{\chi\to+\infty}\chi\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)+\dfrac{f(\chi)}{\chi^3}+\dfrac{5}{\chi^2}-\dfrac{1}{\chi^3}}{1+\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}} \quad \textbf{(1)}$$

Και επειδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^3}=0$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^2}=0$ άρα **(1)**

$$\Leftrightarrow \lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=(+\infty)\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\frac{2+0+0-0}{1+0}=+\infty .$$

17. Αν $f(\chi)=\dfrac{\alpha\chi^{2\kappa}-5\varphi(\chi)+1}{\chi^{2\kappa}\varphi(\chi)+2}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}f(\chi)=\beta$, να δείξετε ότι

$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Απάντηση :

Από $f(\chi)=\dfrac{\alpha\chi^{2\kappa}-5\varphi(\chi)+1}{\chi^{2\kappa}\varphi(\chi)+2} \Leftrightarrow$

$$\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)\cdot\varphi(\chi)+2f(\chi)=\alpha\chi^{2\kappa}-5\varphi(\chi)+1 \Leftrightarrow$$

$$\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)\cdot\varphi(\chi)+5\varphi(\chi)=\alpha\chi^{2\kappa}-2f(\chi)+1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)+5\right)\varphi(\chi)=\alpha\chi^{2\kappa}-2f(\chi)+1 .$$

Όταν το $\chi\to+\infty$ θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ στο οποίο η $\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)+5$ να μην μηδενίζεται, άρα μπορείς να διαιρέσεις και τα δυο μέλη με το $\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)+5$ οπότε : $\varphi(\chi)=\dfrac{\alpha\chi^{2\kappa}-2f(\chi)+1}{\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)+5} \Rightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\alpha\chi^{2\kappa}-2f(\chi)+1}{\chi^{2\kappa}\cdot f(\chi)+5}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi^{2\kappa}\left(\alpha-2\frac{f(\chi)}{\chi^{2\kappa}}+\frac{1}{\chi^{2\kappa}}\right)}{\chi^{2\kappa}\left(f(\chi)+\frac{5}{\chi^{2\kappa}}\right)}=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\alpha-2\frac{f(\chi)}{\chi^{2\kappa}}+\frac{1}{\chi^{2\kappa}}}{f(\chi)+\frac{5}{\chi^{2\kappa}}}=\frac{\alpha-2\cdot0+0}{\beta+0}=\frac{\alpha}{\beta}\ ,\ \text{γιατί}\ \lim_{\chi\to+\infty}f(\chi)=\beta,$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi^{2\kappa}}=0,\ \lim_{\chi\to+\infty}\frac{5}{\chi^{2\kappa}}=0.$$

18. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$ να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\alpha^2-1)\chi^5-5\chi^2+1}{\alpha\chi^2+3\chi+2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\alpha\chi^5+\chi^2-3}{(\alpha-2)\chi^6+3\chi^4+3\alpha+1}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\sqrt{2\chi^2+3}+\alpha\chi$.

Απάντηση :

i) Θέσε $\varphi(\chi)=\dfrac{(\alpha^2-1)\chi^5-5\chi^2+1}{\alpha\chi^2+3\chi+2}$. Επειδή $\chi\to+\infty$ μπορείς να υποθέσεις ότι η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$ τέτοιο ώστε ο παρονομαστής $\alpha\chi^2+3\chi+2\neq0$.

Συνήθως σε τέτοιες ασκήσεις ή δίνεται διάστημα κατάλληλο ή αναφέρεται η φράση «με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η συνάρτηση και έχει νόημα το όριο».

✓ **Παρατήρηση :**

Στις ρητές συναρτήσεις το όριο εξαρτάται από το βαθμό των όρων του κλάσματος και γι' αυτό παρατηρείς αν οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων εξαρτώνται από παράμετρο.

Η λύση της άσκησης θα ξεκινά με την διερεύνηση : ποιες τιμές της παραμέτρου μηδενίζουν τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων ;

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $\alpha^2-1=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=1}$ ή $\boldsymbol{\alpha=-1}$ και $\boldsymbol{\alpha=0}$ οι τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων.

✓ Αν $\boldsymbol{\alpha\neq 1,\ \alpha\neq -1,\ \alpha\neq 0}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha^2-1)x^5-5x^2+1}{\alpha x^2+3x+2}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha^2-1)x^5}{\alpha x^2}=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}(+\infty)$

Στο σημείο αυτό πρέπει να μελετήσεις το πρόσημο του $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$ ή

ισοδύναμα του $\alpha(\alpha^2-1)=\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$ όπως φαίνεται στον πιο κάτω

πίνακα..

α	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
α	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\alpha-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\alpha+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

1ον $\alpha<-1$ τότε $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}<0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}(+\infty)=-\infty$.

2ον $-1<\alpha<0$ τότε $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}(+\infty)=+\infty$.

3ον $0<\alpha<1$ τότε $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}<0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}(+\infty)=-\infty$.

4ον $\alpha>1$ τότε $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}(+\infty)=+\infty$.

✓ Αν $\boldsymbol{\alpha=-1}$ τότε $\varphi(x)=\dfrac{-5x^2+1}{-x^2+3x+2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+1}{-x^2+3x+2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2}{-x^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=5$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Αν $\alpha = 0$ τότε $\varphi(\chi) = \dfrac{-\chi^5 - 5\chi^2 + 1}{3\chi + 2} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{-\chi^5 - 5\chi^2 + 1}{3\chi + 2}$

$= \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{-\chi^5}{3\chi} = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \left(-\chi^4\right) \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = -\infty$.

✓ Αν $\alpha = 1$ $\varphi(\chi) = \dfrac{-5\chi^2 + 1}{\chi^2 + 3\chi + 2} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{-5\chi^2 + 1}{\chi^2 + 3\chi + 2}$

$= \lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{-5\chi^2}{\chi^2} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = -5$

ii) Θέσε $\varphi(\chi) = \dfrac{\alpha\chi^5 + \chi^2 - 3}{(\alpha - 2)\chi^6 + 3\chi^4 + 3\alpha + 1}$. Επειδή $\chi \to -\infty$ μπορείς να υποθέσεις ότι η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \kappa)$ τέτοιο ώστε ο παρονομαστής $(\alpha - 2)\chi^6 + 3\chi^4 + 3\alpha + 1 \neq 0$.

Είναι $\alpha = 0$, $\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ οι τιμές της παραμέτρου που μηδενίζουν τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων.

✓ Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 2$ τότε $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{\alpha\chi^5 + \chi^2 - 3}{(\alpha - 2)\chi^6 + 3\chi^4 + 3\alpha + 1} =$

$\lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{\alpha\chi^5}{(\alpha - 2)\chi^6} = \dfrac{\alpha}{(\alpha - 2)} \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{1}{\chi} = \dfrac{\alpha}{(\alpha - 2)} \cdot 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = 0$.

✓ Αν $\alpha = 0$ τότε $\varphi(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 3}{-2\chi^6 + 3\chi^4 + 3\alpha + 1} \Rightarrow$

$\lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{\chi^2 - 3}{-2\chi^6 + 3\chi^4 + 3\alpha + 1} = \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{\chi^2}{-2\chi^6} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = 0$.

✓ Αν $\alpha = 2$ τότε $\varphi(\chi) = \dfrac{2\chi^5 + \chi^2 - 3}{3\chi^4 + 3\alpha + 1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{2\chi^5 + \chi^2 - 3}{3\chi^4 + 3\alpha + 1} = \lim\limits_{\chi \to -\infty} \dfrac{2\chi^5}{3\chi^4} \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi) = -\infty$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Θέσε $\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi^2+3}+\alpha\chi$. Επειδή $\chi^2+3>0$ για κάθε $\chi\in R$ άρα Π Ο το $A=R$.

Είναι $\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi^2+3}+\alpha\chi=\sqrt{\chi^2\left(2+\frac{3}{\chi^2}\right)}+\alpha\chi=|\chi|\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}}+\alpha\chi$.

Όταν το $\chi\to+\infty$ άρα $\chi>0\Leftrightarrow|\chi|=\chi$ άρα

$\varphi(\chi)=\chi\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}}+\alpha\chi=\chi\left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}}+\alpha\right)$. Άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[\chi\cdot\left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}}+\alpha\right)\right]=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi\cdot\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}}+\alpha\right)=$

$(+\infty)\left(\sqrt{2+0}+\alpha\right)=(+\infty)\left(\alpha+\sqrt{2}\right)$.

Έτσι λοιπόν :

✓ $\alpha>-\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{2}>0\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$.

✓ $\alpha<-\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{2}<0\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$.

✓ $\alpha=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\alpha+\sqrt{2}=0\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=(+\infty)\cdot0$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

Αν $\alpha=-\sqrt{2}\Rightarrow\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi^2+3}-\sqrt{2}\chi$ και για να άρεις την απροσδιοριστία θα πολλαπλασιάσεις και θα διαιρέσεις με την συζυγή παράσταση.

$\varphi(\chi)=\frac{\left(\sqrt{2\chi^2+3}-\sqrt{2}\chi\right)\left(\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi\right)}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi}=\frac{2\chi^2+3-2\chi^2}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi}=$

$\frac{3}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\chi}$.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\chi\right)=\sqrt{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2\chi^2+3\right)}+\sqrt{2}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=+\infty$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\frac{3}{+\infty}=0$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ έτσι ώστε τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \sqrt{2\chi^2+3} + \alpha\chi$ **ii)** $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \sqrt{3-\chi} - \alpha\chi$ και

iii) $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \sqrt{\chi^2 - 3\chi + 5} + \alpha\chi^2 + \chi$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απάντηση :

i) Θέσε $\varphi(\chi) = \sqrt{2\chi^2+3} + \alpha\chi$. Επειδή $2\chi^2 + 3 > 0$ για κάθε $\chi \in R$ άρα Π Ο το $A = R$.

Είναι $\varphi(\chi) = \sqrt{2\chi^2+3} + \alpha\chi = \sqrt{\chi^2\left(2+\frac{3}{\chi^2}\right)} + \alpha\chi = |\chi|\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}} + \alpha\chi$.

Όταν το $\chi \to +\infty$ άρα $\chi > 0 \Leftrightarrow |\chi| = \chi$ άρα

$$\varphi(\chi) = \chi\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}} + \alpha\chi = \chi\left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}} + \alpha\right).$$

Άρα $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to +\infty}\left[\chi \cdot \left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}} + \alpha\right)\right] = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \chi \cdot \lim\limits_{\chi \to +\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{\chi^2}} + \alpha\right)$

$= (+\infty)\left(\sqrt{2+0} + \alpha\right) = (+\infty)\left(\alpha + \sqrt{2}\right)$.

Έτσι λοιπόν :

✓ $\alpha > -\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = +\infty$.

✓ $\alpha < -\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha + \sqrt{2} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = -\infty$.

✓ $\alpha = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = (+\infty)\cdot 0$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ.

Βλέπεις λοιπόν πως η μόνη περίπτωση που έχει πιθανότητες το $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) \in R$ είναι όταν $\alpha = -\sqrt{2}$.

Αν $\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \varphi(\chi) = \sqrt{2\chi^2+3} - \sqrt{2}\chi$ και για να άρεις την απροσδιοριστία θα πολλαπλασιάσεις και θα διαιρέσεις με την συζυγή παράσταση.

Λιβαδειά

$$\varphi(\chi)=\frac{\left(\sqrt{2\chi^2+3}-\sqrt{2}\chi\right)\left(\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi\right)}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi}=\frac{2\chi^2+3-2\chi^2}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\cdot\chi}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\chi}\ .$$

Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\sqrt{2\chi^2+3}+\sqrt{2}\chi\right)=\sqrt{\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(2\chi^2+3\right)}+\sqrt{2}\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi=+\infty$ άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\frac{3}{+\infty}=0$. **Άρα για να είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\in\mathbf{R}$ πρέπει $\alpha=-\sqrt{2}$.**

ii) Θέσε $\varphi(\chi)=\sqrt{3-\chi}-\alpha\chi$. Επειδή $3-\chi>0\Leftrightarrow\chi<3$ άρα Π Ο το

$A=(-\infty,3)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$.

Είναι $\varphi(\chi)=\sqrt{3-\chi}-\alpha\chi=\sqrt{\chi^2\left(\frac{3}{\chi^2}-\frac{\chi}{\chi^2}\right)}-\alpha\chi=|\chi|\sqrt{\frac{3}{\chi^2}-\frac{1}{\chi}}-\alpha\chi$.

Όταν το $\chi\to-\infty$ είναι $\chi<0\Leftrightarrow|\chi|=-\chi$ άρα

$$\varphi(\chi)=-\chi\sqrt{\frac{3}{\chi^2}-\frac{1}{\chi}}-\alpha\chi=-\chi\left(\sqrt{\frac{3}{\chi^2}-\frac{1}{\chi}}+\alpha\right).$$

Άρα $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[-\chi\left(\sqrt{\frac{3}{\chi^2}-\frac{1}{\chi}}-\alpha\right)\right]=$

$-\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi\cdot\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{\chi^2}-\frac{1}{\chi}}-\alpha\right)=-(-\infty)\left(\sqrt{0-0}+\alpha\right)=(+\infty)\alpha$. Άρα:

✓ **$\alpha>0\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$** .

✓ **$\alpha<0\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$** .

✓ **$\alpha=0\Leftrightarrow\varphi(\chi)=\sqrt{3-\chi}-0\cdot\chi=\sqrt{3-\chi}$** και $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\sqrt{3-\chi}$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του α έτσι ώστε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\in\mathbf{R}$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

iii) Θέσε $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\alpha\chi^2+\chi$. Επειδή $\chi^2-3\chi+5>0$ γιατί έχει διακρίνουσα $\Delta=-20<0$ άρα είναι θετικό για κάθε $\chi\in R$, άρα Π Ο το $A=R$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$.

Είναι $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\alpha\chi^2+\chi=\sqrt{\chi^4\left(\frac{\chi^2}{\chi^4}-\frac{3\chi}{\chi^4}+\frac{5}{\chi^4}\right)}+\alpha\chi^2+\chi=$

$\chi^2\left(\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^3}+\frac{5}{\chi^4}}+\alpha+\frac{1}{\chi}\right)$.

Άρα $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left[\chi^2\left(\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^3}+\frac{5}{\chi^4}}+\alpha+\frac{1}{\chi}\right)\right]=$

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\chi^2\cdot\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-\frac{3}{\chi^3}+\frac{5}{\chi^4}}+\alpha+\frac{1}{\chi}\right)=(+\infty)\left(\sqrt{0-0+0}+\alpha+0\right)=$

$(+\infty)\alpha$. Έτσι λοιπόν :

- ✓ **$\alpha>0\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$** .
- ✓ **$\alpha<0\Leftrightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$** .
- ✓ **$\alpha=0\Leftrightarrow\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\chi\Leftrightarrow$** και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=(+\infty)+(-\infty)=$

$+\infty-\infty$ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ .

Βλέπεις λοιπόν πως η μόνη περίπτωση που έχει πιθανότητες το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\in R$ είναι όταν $\alpha=0$.

Αν λοιπόν $\alpha=0\Leftrightarrow\varphi(\chi)=\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\chi$ και

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\chi\right)=$

$\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{\chi^2-3\chi+5}+\chi\right)\left(\sqrt{\chi^2-3\chi+5}-\chi\right)}{\sqrt{\chi^2-3\chi+5}-\chi}=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi^2-3\chi+5-\chi^2}{\sqrt{\chi^2-3\chi+5\chi}-\chi}=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-3\chi+5}{\sqrt{\chi^2\left(1-\frac{3}{\chi^2}+\frac{5}{\chi^2}\right)}-\chi}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-3\chi+5}{|\chi|\sqrt{1-\frac{3}{\chi^2}+\frac{5}{\chi^2}}-\chi}\quad\textbf{(1)}\,.$$

Επειδή $\chi\to-\infty$ άρα $\chi<0\Leftrightarrow|\chi|=-\chi$ άρα

$$\lim_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-3\chi+5}{-\chi\sqrt{1-\frac{3}{\chi^2}+\frac{5}{\chi^2}}-\chi}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi\left(-3+\frac{5}{\chi}\right)}{\chi\left(-\sqrt{1-\frac{3}{\chi^2}+\frac{5}{\chi^2}}-1\right)}$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-3+\frac{5}{\chi}}{-\sqrt{1-\frac{3}{\chi^2}+\frac{5}{\chi^2}}-1}=\frac{-3+0}{-\sqrt{1-0+0}-1}\Leftrightarrow\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

Άρα όταν $\alpha=0$ είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)\in\mathbf{R}$.

20. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε να ισχύει :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{2\chi^2+1}{\chi+1}+\alpha\chi+\beta=1$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1}{\chi^2+1}+\alpha\chi+\beta=5$.

Απάντηση :

i) Θέτεις $\varphi(\chi)=\frac{2\chi^2+1}{\chi+1}+\alpha\chi+\beta$. Είναι $\chi+1=0\Leftrightarrow\chi=-1$ άρα Π Ο το

$A=R-\{-1\}$.

Επομένως η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(\kappa,+\infty)$ οπότε έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$

Είναι

$$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{2\chi^2+1}{\chi+1}+\alpha\chi+\beta\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{\chi^2\left(2+\frac{1}{\chi^2}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)}+\alpha\chi+\beta\right)=$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{\chi\left(2+\frac{1}{\chi}\right)}{1+\frac{1}{\chi}}+\alpha\chi+\beta\right)=\lim_{\chi\to+\infty}\left[\chi\left(\frac{2+\frac{1}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}+\alpha+\frac{\beta}{\chi}\right)\right]=$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}\chi\cdot\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}+\alpha+\frac{\beta}{\chi}\right)=(+\infty)\left(\frac{2+0}{1+0}+\alpha+0\right)=\mathbf{(+\infty)(\alpha+2)}$$

Έτσι λοιπόν :

✓ $\boldsymbol{\alpha>-2}\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$.

✓ $\boldsymbol{\alpha<-2}\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$.

✓ $\boldsymbol{\alpha=-2}\ \Leftrightarrow\ \varphi(\chi)=\frac{2\chi^2+1}{\chi+1}-2\chi+\beta=\frac{2\chi^2+1-(\chi+1)(2\chi+\beta)}{\chi+1}=$

$$\frac{2\chi^2+1-2\chi^2-\beta\chi-2\chi-\beta}{\chi+1}=\frac{-(\beta+2)\chi+1-\beta}{\chi+1}=\frac{\chi\left(-\beta-2+\frac{1-\beta}{\chi}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)}=$$

$$\frac{-\beta-2+\frac{1-\beta}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}\ \Leftrightarrow\ \lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{-\beta-2+\frac{1-\beta}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}=\frac{-\beta-2+0}{1+0}=-\beta-2.$$

Με βάση την εκφώνηση είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=1$ άρα $-\beta-2=1\ \Leftrightarrow\ \beta=-3$.

Επομένως για να είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{2\chi^2+1}{\chi+1}+\alpha\chi+\beta=1$ πρέπει $\boldsymbol{\alpha=-2}$, $\boldsymbol{\beta=-3}$.

ii) Θέτεις $\varphi(\chi)=\frac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1}{\chi^2+1}+\alpha\chi+\beta$. Είναι $\chi^2+1\neq0$ για κάθε $\chi\in R$

άρα Π Ο το Α = R. Επομένως η φ ορίζεται **και** σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\kappa)$ άρα έχει νόημα το $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1}{\chi^2+1}+\alpha\chi+\beta\right)=$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{\chi^3\left(3+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}\right)}{\chi^2\left(1+\frac{1}{\chi^2}\right)}+\alpha\chi+\beta\right)=$$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{\chi\left(3+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}\right)}{1+\frac{1}{\chi^2}}+\alpha\chi+\beta\right)=$$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left[\chi\left(\frac{3+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi^2}}+\alpha+\frac{\beta}{\chi}\right)\right]=$$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\chi\cdot\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi^2}}+\alpha+\frac{\beta}{\chi}\right)=(-\infty)\left(\frac{3+0+0+0}{1+0}+\alpha+0\right)$$

$=$ **$(-\infty)(\alpha+3)$.** Έτσι λοιπόν :

✓ **$\alpha>-3$** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=-\infty$.

✓ **$\alpha>-3$** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=+\infty$.

✓ **$\alpha=-3$** $\Leftrightarrow$ $\varphi(\chi)=\dfrac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1}{\chi^2+1}-3\chi+\beta=$

$$\varphi(\chi)=\frac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1+\left(\chi^2+1\right)(-3\chi+\beta)}{\chi^2+1}=$$

$$\frac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1-3\chi^3+\beta\chi^2-3\chi+\beta}{\chi^2+1}=\frac{2\chi^2+\chi+1+\beta\chi^2-3\chi+\beta}{\chi^2+1}=$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{(\beta+2)\chi^2-2\chi+1+\beta}{\chi^2+1}=\frac{\chi\left(\beta+2-\frac{2}{\chi}+\frac{1-\beta}{\chi^2}\right)}{\chi\left(1+\frac{1}{\chi}\right)}=\frac{-(\beta+2)+\frac{1-\beta}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}\ \textbf{(1).}$$

$$\lim_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{-(\beta+2)+\frac{1-\beta}{\chi}}{1+\frac{1}{\chi}}=\frac{-(\beta+2)+0}{1+0}=-(\beta+2).$$

Με βάση την εκφώνηση είναι $\lim_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=5$ άρα $-\beta-2=1\Leftrightarrow\beta=-7$.

Επομένως αν $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{3\chi^3+2\chi^2+\chi+1}{\chi^2+1}+\alpha\chi+\beta=5$ πρέπει **α = – 2, β = – 3**.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

		Σ	**Λ**
1.	Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=+\infty$ και $\theta(\chi)<0$ κοντά στο χ_0, τότε πάντα ισχύει : $\lim_{\chi\to\chi_0}(\varphi(\chi)\cdot\theta(\chi))=-\infty$.	☐	☐
2.	Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=+\infty$, τότε $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{1}{\varphi(\chi)}=0$.	☐	☐
3.	Αν $\lim_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=0$ και $\varphi(\chi)>0$ κοντά στο χ_0, τότε $\lim_{\chi\to\chi_0}\frac{1}{\varphi(\chi)}=+\infty$.	☐	☐
4.	Αν $\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$ τότε $\varphi(\chi)>0$ όταν $\chi>\chi_0$, όπου χ_0 κατάλληλη τιμή.	☐	☐

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=-\infty$ τότε $\varphi(\chi)<0$ όταν $\chi>\chi_0$, όπου χ_0 κατάλληλη τιμή.

6. Αν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)=\lambda$, $\lambda\neq 0$, τότε $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\dfrac{1}{\varphi(\chi)}=\dfrac{1}{\lambda}$.

7. Αν η συνάρτηση $\varphi:[0,+\infty)\to R$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντα ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=+\infty$

Δες θεωρία και Ορισμούς

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Από τις παρακάτω ισότητες να βρείτε αυτήν που είναι λάθος

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{|\chi|}=+\infty$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi-5}{\chi^2}=-\infty$ **iii)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{3}{\chi}=+\infty$

iv) $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{1-\text{συν}^2\chi}=+\infty$ **v)** $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^3}=+\infty$ **vi)** Τίποτε απ' όλα αυτά.

2. Αν $\varphi(\chi)=\dfrac{\pi\chi}{2\chi-1}$, τότε το $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\text{συν}(\varphi(\chi))$ είναι ίσο με :

i) 1 **ii)** $\dfrac{\pi}{2}$ **iii)** 0 **iv)** –1 **v)** $\dfrac{1}{2}$ **vi)** Τίποτε απ' όλα αυτά



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

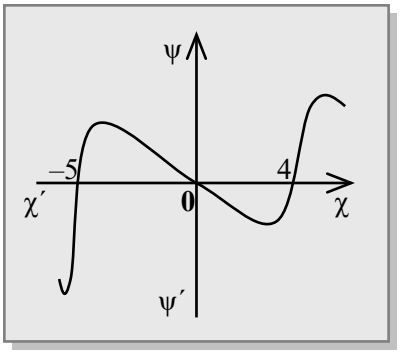
1. Να εξετάσετε πια από τα παρακάτω όρια έχουν νόημα :

Παρ. 1 Σελ 170

i) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{\chi^4+4}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\sqrt{-\chi^2+2\chi-1}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sqrt{3-5\chi}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\sqrt{625-\chi^4}$

2. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



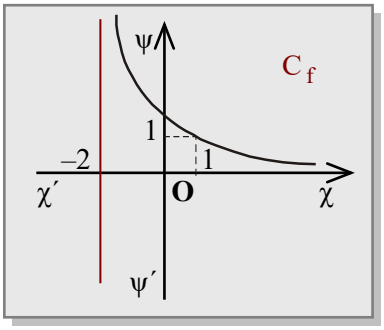
Να βρείτε τα όρια:

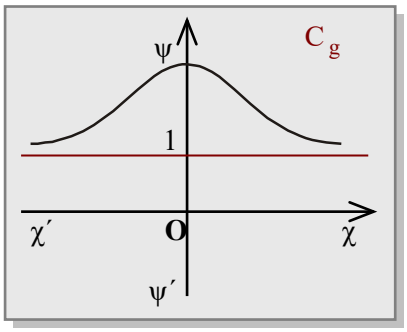
i) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-5}\varphi(\chi)$

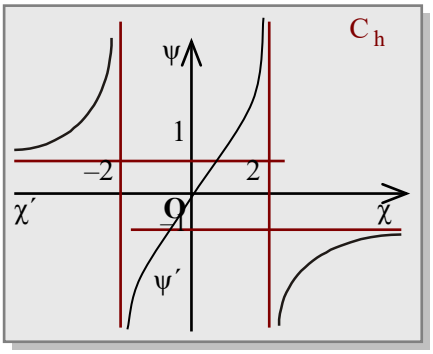
iii) $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to 4}\varphi(\chi)$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$.

3. Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.







Δες θεωρία και Ορισμούς

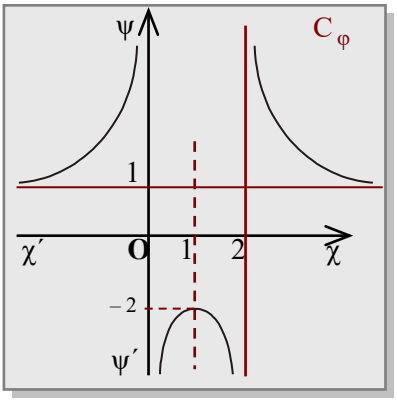
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

ii) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{\chi\to-2} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to1} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)$,

$\lim\limits_{\chi\to-\infty} g(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty} g(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty} h(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty} h(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to-2} h(\chi)$.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτηση φ έχει που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της φ.

ii) Να βρεθούν τα όρια : $\lim\limits_{\chi\to-\infty} \varphi(\chi)$,

$\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to0^+} \varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to0^-} \varphi(\chi)$

$\lim\limits_{\chi\to2^+} \varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to2^-} \varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to1} \varphi(\chi)$

5. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : **Παρ. 2**

i) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi^2-3\chi+1\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^2-3\chi+1\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^3-5\chi^2-\chi+3\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi^3-5\chi^2-\chi+3\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(4\chi^3-\chi^4-1+\chi\right)$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(4\chi^3-\chi^4-1+\chi\right)$

vii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(-1-\chi^2+2\chi^4-\chi^5\right)$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(-1-\chi^2+2\chi^4-\chi^5\right)$

6. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4\chi^3-\chi^4-1+\chi}{2+3\chi^2}$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{4\chi^3-\chi^4-1+\chi}{2+3\chi^2}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\chi^2+\chi^3+5\chi}{\chi^3+3\chi}$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\chi^2+\chi^3+5\chi}{\chi^3+3\chi}$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4\chi^3-\chi^4-1+\chi}{2\chi^2+3\chi^6}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{4\chi^3-\chi^4-1+\chi}{2\chi^2+3\chi^6}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια::

Παρ. 3

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{4\chi^3(\chi+1)(\chi-2)(2\chi+3)}{3\chi^5+2\chi^7}$

ii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha\chi^4(\chi+\kappa)(\chi+\lambda)(\chi+\mu)(\chi+\nu)}{\beta\chi^8+\gamma\chi^7+\delta}$ **, α, β, γ, δ ≠ 0**

iii) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\dfrac{(\chi-1)^2(\chi-2)^2\cdot\ \cdot\ \cdot(\chi-2004)^2}{\left(\chi^2+1\right)^{2004}}$

iv) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{(\chi-1)^2+(\chi-2)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+(\chi-\nu)^2}{(\chi+1)^2+(\chi+2)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+(\chi+\nu)^2}$

8. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

Παρ. 4

i) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{\chi^2+3\chi+1}-2\right)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{\chi^2+3\chi+1}-2\chi+3\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(e^{-\chi-2}-e^{\frac{2}{\chi}}+12\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(e^{\frac{2}{\chi}}-3e^{-\chi-2}\right)$

v) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\chi-1}$ **vi)** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\dfrac{12}{7}\right)^{\frac{1}{-\chi-1}}$

vii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\ln\left(\chi^2-1\right)-1\right)$ **viii)** $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\ln\left(\chi^2+\chi+5\right)-3\chi\right)$

viii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha^\chi}{\alpha^\chi+1}$, αν $\alpha>0$. **iχ)** $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\alpha^\chi+2^{\chi+1}}{\alpha^{\chi+1}+2^\chi}$, αν $\alpha>0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\ln\left(\dfrac{\chi^2+\kappa^2}{\chi}\right)$, $\kappa>0$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\varphi(\chi)$.

ii) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{\chi\to0}\varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$.

iii) Να δείξετε ότι η $\varphi(\chi)-\ell n\chi>0$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\varphi(\chi)-\ell n\chi\right)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. Αν $\varphi(\chi)=\ell n\left(\dfrac{\chi-5}{2\chi}\right)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to 5}\varphi(\chi)$.

11. Να δείξετε ότι **Παρ. 5**

i) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\left(\dfrac{\eta\mu 2\chi}{3\chi}-\alpha\right)=-\alpha$ για κάθε $\alpha\in R$.

ii) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu 2\chi}{3\chi}-\alpha\chi+\beta\right)=+\infty$ για κάθε $\alpha<0$.

12. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν τα όρια : **Παρ. 6**

i) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu 2\chi+3$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\chi\right)$

iii) $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\chi^2+1\right)$ **iv)** $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\eta\mu^2\left(\chi+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

13. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια: κριτήριο παρεμβολής.

i) $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(\chi\cdot\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)$ **Παρ. 5**

ii) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi^2+2\chi-5}$

iii) $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\dfrac{\eta\mu\left(\chi^4+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\chi^4+\dfrac{\pi}{4}}$

iv) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\cdot\eta\mu\dfrac{1}{\chi}\right)$

$$t=\frac{1}{\chi}\Leftrightarrow\chi\cdot\eta\mu\frac{1}{\chi}=\frac{\eta\mu t}{t}$$

v) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\cdot\eta\mu^{\lambda}\dfrac{1}{\chi}\right)$ με $\lambda\in N^*$ και $\lambda\geq 2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : **Παρ. 7**

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+1}{x+1}-\dfrac{3x^3-1}{3x+2}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x\left(x^2+2x+2\right)}{3x^2+2}-\dfrac{x}{2}\right]$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x\sqrt{x^2+2}}{x+1}-x\right]$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x\sqrt{x^2+2}}{3x+2}-\dfrac{x}{3}\right]$

15. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια: **Παρ. 8**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2\kappa}-3x^{\kappa}+2}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+7}}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^{2\kappa+1}-x^{2\kappa}+1}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-x^2+x+1}}$

16. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : **Παρ. 9, 10**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x+3}{x-3}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2-1}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-x+3}{x+3}$

17. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια : **Παρ. 9, 10**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{\sqrt{2x^2+3}}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{x^4+x^2+4}}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt{2x^2+3}}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5}}$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sqrt{2-x}}{2x^2+3}$ **vi)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^5+(x-1)^4}{(x+1)^4+(x+1)^2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρ. 11

18. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+|x-1|}{x-|x-1|}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-|x-1|}{x+|x-1|}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-3x+2|-x}{x^2-2x+3}$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-|x+1|+x}{3x^2+|3-2x|}$

Δες παρατήρηση σελ 316 και Παρ. 12

19. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$

Παρ. 12, 13, 14, 15,16, 17

20. Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x^3-3x\right)\varphi(x)-3\right]=-3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)$.

21. Αν $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x^2+2x-1\right)\varphi(x)+2x-1\right]=-1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)$.

22. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\varphi(x)+1}{x^2\varphi(x)-2}=1$ δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$.

23. Αν $f(x)=\dfrac{2x^2+3x\cdot\varphi(x)-3}{x^3-2x^2\varphi(x)+1}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$, να δείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$.

24. Αν $f(x)=\dfrac{x^2\varphi(x)-5x+1}{x^3+1-\varphi(x)}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, να δείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty$.

25. Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x^8-5x^3\varphi(x)+\kappa}{x^8\varphi(x)+1}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta$, να δείξετε ότι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

26. Για τις διάφορες τιμές του α, λ ∈ R να βρείτε τα όρια : **Παρ. 18**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^3-x^2+1}{(\alpha^2-1)x^2+x+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2\alpha^2-\alpha)x^5+x^2-3\lambda}{\alpha x^4+1}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\alpha^2-1)x^3+(\alpha-1)x-1\right)$.

27. Για τις διάφορες τιμές των α, β ∈ R να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^3+(\alpha+1)x+1}{\alpha x^2+1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\alpha x^3-(\alpha+1)x+\alpha+1\right)$.

28. Να βρείτε τις τιμές του α ∈ R έτσι ώστε τα όρια : **Παρ. 19**

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-2\alpha x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}+\alpha x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\alpha x^2+1\right)$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

29. Να βρείτε τις τιμές των α, β ∈ R έτσι ώστε να ισχύει : **Παρ. 20**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}+\alpha x+\beta=1$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}+\alpha x+\beta=1$.



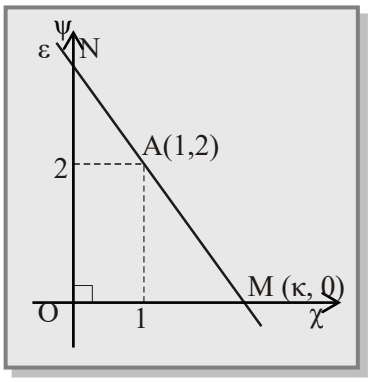
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου.

Ο αριθμός $N(t)$ των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο : $N(t) = M\left(1 - e^{-0,5 \cdot t}\right)$ όπου Μ ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Μπορείτε να καταλάβετε τι σκέφτηκε ;

2. Μια ευθεία **(ε)** περνάει από το σημείο $A(1, 2)$ και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οψ στα Μ και Ν αντιστοίχως.



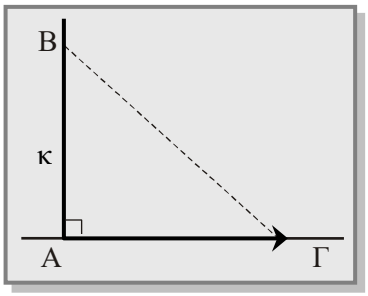
i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου Μ.

ii) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \to +\infty$ και όταν $\kappa \to 1$.

3. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος **κ**.

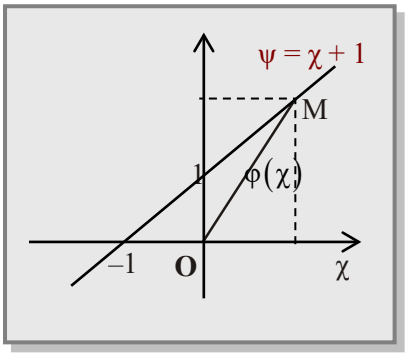
Το σημείο Γ απομακρύνεται από το Α κινούμενο επάνω στον χ΄χ κατά τη φορά του βέλους.

Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ΒΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν "ίσα".



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση $\psi = \chi + 1$ και το σημείο της Μ με τετμημένη χ.



Η απόσταση από το σημείο Ο δίνεται από τη συνάρτηση :

$\varphi(\chi) = (OM) = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ για κάθε $\chi \in R$.

i) Για ποια τιμή του x ισχύει $\varphi(\chi) = 1$;

Υπολόγισε πρώτα την φ σε συνάρτηση μόνο του χ.

ii) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi)$, $\lim\limits_{\chi \to -\infty} \varphi(\chi)$.

iii) Να αποδείξετε ότι : $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \left(\varphi(\chi) - \sqrt{2}\left(\chi + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

5. Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα υ μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t, δίνεται από τη σχέση :

$\upsilon(t) = \kappa\left(1 - e^{-t}\right)$ όπου κ μια **θετική** σταθερά.

i) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} \upsilon(t)$.

ii) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ σε συνεχή βροχόπτωση μεγάλης διάρκειας.

6. Οι μονάδες μέτρησης απαγορευμένης ουσίας στα ούρα ενός «αθλητή» t ώρες μετά την λήψη της δίνονται, κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση :

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2} + \frac{3}{2}}, & 0 < t \le 5 \\ -\frac{1}{4}e^4 \cdot t + \frac{9}{4}e^4, & t > 5 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την λήψη της απαγορευμένης ουσίας ελήφθη μια άλλη ουσία «μάσκα» η οποία «σκεπάζει» την πρώτη).

i) Να βρείτε τις μονάδες της απαγορευμένης ουσίας μία ώρα μετά την

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

λήψη της ($e \approx 2,7$) .

ii) Μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μονάδες της απαγορευμένης ουσίας τη χρονική στιγμή $t_0 = 5$

iii) Πότε η «μάσκα» θα καλύψει πλήρως την απαγορευμένη ουσία ;

7. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12 % και εκτιμάται ότι σε χ έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $\varphi(\chi) = \dfrac{16\chi + 36}{2\chi + 3}$.

i) Να αποδείξετε ότι : $\varphi(\chi) = 8 + \dfrac{12}{2\chi + 3}$.

ii) Μετά από αρκετά χρόνια (πρακτικά άπειρα), ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας ;

iii) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8 % .

Οι «ξύπνιοι» γράφουν στους τοίχους
και οδηγούν μηχανάκι.
Οι έξυπνοι οδηγούν τη ζωή τους
και γράφουν εκεί που πρέπει

Σκέψου μόνο πόσους ξύπνιους «συμμαθητές» είχε …
ο Αϊνστάιν.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τα πλεονεκτήματα της τηλεόρασης . . . και
. . . τα μειονεκτήματα των βιβλίων

1. Τα βιβλία πρέπει διαρκώς να τα κουβαλάς όπου πας, ενώ την τηλεόραση ποτέ.

2. Τα βιβλία σε μαθαίνουν ένα σωρό άχρηστα πράγματα, ενώ η τηλεόραση σε κάνει να ξεχνάς και αυτά που ξέρεις και επομένως δεν κινδυνεύεις από ζαλάδες, πονοκεφάλους ή ιλίγγους άσε που «έχεις κεφάλι ελαφρύ» για να το κουνάς όπως θες.

3. Τα βιβλία πρέπει να τα ανοίγεις με τα χέρια ενώ την τηλεόραση με το τηλεκοντρόλ.

4. Με τα βιβλία πρέπει να σκέφτεσαι και αυτό κουράζει και είναι γνωστά τα αποτελέσματα της κούρασης (κανείς δεν πέθανε από ξάπλα ! … ρίξε και καμιά ματιά γύρω σου καημένε, που ζεις πια).

5. Με τα βιβλία κινδυνεύεις να μπεις και σε καμιά σχολή και αυτό σημαίνει πως θα συνεχίσεις να «βλέπεις» το ίδιο έργο με τα βιβλία, ενώ με την τηλεόραση αλλάζεις έργο όποτε θες.

6. Άμα κλείνεις την τηλεόραση δε σου φωνάζει κανείς (το αντίθετο), ενώ άμα καμιά φορά ανοίξεις βιβλίο και το κλείσεις, η μάνα σου σε τρελαίνει στην γκρίνια «που δεν ανοίγεις βιβλίο και τι θα γίνεις» και όλα αυτά τα απαίσια που λένε οι μεγάλοι.

7. Άμα διαβάζεις όλοι σου λένε απερίσκεπτα «Συνέχισε παιδάκι μου μη σταματάς» ξεχνώντας ότι μπορεί και να παραμορφωθείς (για τέτοιες ιστορίες είμαστε τώρα).

8. Η μόρφωση και η παραμόρφωση έχουν την ίδια ρίζα και διαφέρουν ένα παρά.

9. Τι να τα κάνεις τα βιβλία, άμα έχεις μυαλό στο διάβασμα θα το χαραμίσεις ; Άμα έχεις μυαλό θα πας σ΄ ένα Reality και αν σου κάτσει, κονόμησες και σε ξέρει κι΄ όλη η Ελλάδα. Ενώ αν πάρεις μερικά πτυχία και θελήσεις να πας σε επιστημονικό συνέδριο πληρώνεις, άσε που θα σε ξέρει μόνο η μάνα σου άντε και κανένας όμοιος με σένα

10. Άμα διαβάσεις πολύ στη ζωή σου το μόνο που θα κονομήσεις σίγουρα είναι πρεσβυωπία άντε το πολύ – πολύ να καταντήσεις σοφός, ενώ άμα γίνεις ποδοσφαιριστής, καλαθοσφαιριστής ή πας σε Reality ή παίξεις σε κανένα 17^{ης} ατηγορίας Serial γίνεσαι σίγουρα βουλευτής ή και υφυπουργός παιδείας ακόμη (οπότε μπορείς να λες ασυνταξίες, μέχρι και βλακείες).

Για όλους αυτούς τους λόγους και γι΄ άλλους πολλούς, πρόσεξε τι κάνεις από δω και πέρα . . . μη σε παρασύρει κανείς.

Από το εγχειρίδιο του «ξύπνιου» μαθητή
για την επίβλεψη Δ. Μ.

Λ ι β α δ ε ι ά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

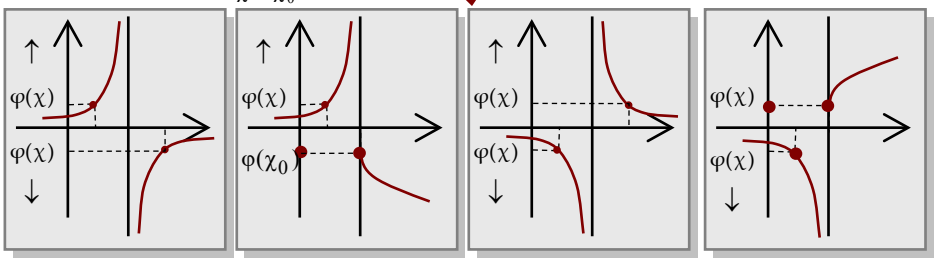
Συνέχεια μιας συνάρτησης φ στο x_0.

Ορισμός της συνέχειας.

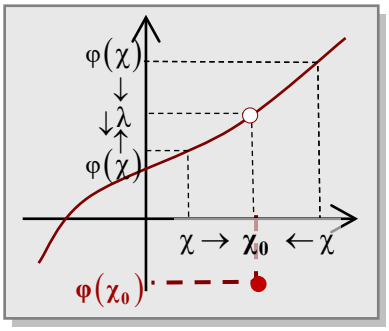
Έστω μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και $x_0 \in A$.

Για το $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ μπορεί να ισχύει ένα από τα επόμενα :

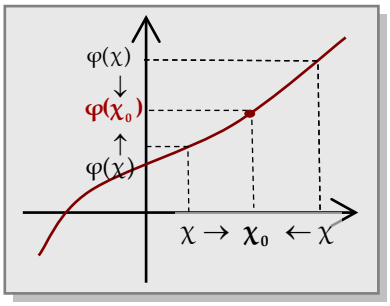
i) **Δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$



ii) **Υπάρχει το** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lambda \neq \varphi(x_0)$.



iii) **Υπάρχει το** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ και είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.



Για να ξεχωρίσουμε την τελευταία περίπτωση δίνουμε τον εξής **ορισμό :**

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έστω μια συνάρτηση φ με **πεδίο ορισμού** ένα σύνολο **Α** και $\chi_0 \in A$.

Θα λέμε ότι η φ είναι συνεχής στο χ_0, όταν $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi) = \varphi(\chi_0)$.

Παρατηρήσεις

- ✓ Ενώ το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)$, κάτω από προϋποθέσεις, υπάρχει και όταν το $\chi_0 \notin A$, η συνέχεια μιας συνάρτησης έχει νόημα μόνον αν $\chi_0 \in A$.
- ✓ Μια συνάρτηση **δεν είναι συνεχής στο** $\chi_0 \in A$ όταν :

  i) **Δεν υπάρχει το** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)$.

  ii) **Υπάρχει το** $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi)$ αλλά είναι $\lim\limits_{\chi\to\chi_0} \varphi(\chi) = \lambda \neq \varphi(\chi_0)$.

- ✓ Γεωμετρικά , **η συνέχεια μιας συνάρτησης στο** χ_0 σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_φ της φ, **δεν διακόπτεται πουθενά,** παρά μόνο στα σημεία που « **λείπουν** » από το πεδίο ορισμού της

Παραδείγματα :

1. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις :

i) $\varphi(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 4}$, στο $\chi_0 = 2$

ii) $\varphi(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\chi^2} & \text{αν } \chi \neq 0 \\ 0 & \text{αν } \chi = 0 \end{cases}$, στο $\chi_0 = 0$

iii) $\varphi(\chi) = \begin{cases} 2\chi + 1, & \chi \leq 0 \\ -2\chi, & \chi > 0 \end{cases}$ στο $\chi_0 = 0$

iv) $\varphi(\chi) = \begin{cases} 2\chi + 1, & \chi \neq 1 \\ -2, & \chi = 1 \end{cases}$ στο $\chi_0 = 1$

Απάντηση :

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Π Ο είναι το $A=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, (προκύπτει από την λύση της $\chi^2-2\geq 0 \rightarrow$ ρίζες $\rightarrow$ πίνακα προσήμου).

Είναι $\varphi(2)=\sqrt{2^2-4}=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 2}\sqrt{\chi^2-4}=\sqrt{\lim\limits_{\chi\to 2}(\chi^2-4)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=\sqrt{0}=0$, άρα $\lim\limits_{\chi\to 2}\varphi(\chi)=\varphi(2)$, επομένως η **φ *είναι συνεχής*** στο $\chi_0=2$.

ii) Π Ο είναι το $A=R$. Είναι: $\varphi(0)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{1}{3\chi^2}=+\infty$,

άρα $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)\neq 0=\varphi(0)$, επομένως η **φ *δεν είναι συνεχής*** στο $\chi_0=0$.

iii) Π Ο είναι το $A=R$. Είναι: $\varphi(0)=2\cdot 0+1=1$ και

$\lim\limits_{\chi\to 0^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}(-2\chi)=0$ αλλά $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0}(2\chi+1)=1$, επειδή προφανώς $\lim\limits_{\chi\to 0^-}\varphi(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 0^+}\varphi(\chi)$ άρα ***δεν υπάρχει*** το $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$ και επομένως η φ ***δεν είναι συνεχής*** στο $\chi_0=0$.

iv) Π Ο είναι το $A=R$. Είναι: $\varphi(1)=-2$ και $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}(2\chi+1)=3$,

άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)\neq\varphi(1)$, επομένως η φ **δεν είναι συνεχής** στο $\chi_0=1$.

Συνεχής συνάρτηση λέγεται μια **συνάρτηση φ** η οποία είναι **συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της**.

Super **S O S**

✓ Κάθε **πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής**, αφού για κάθε $\chi_0\in R$ ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}P(\chi)=P(\chi_0)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε χ_0 **του πεδίου ορισμού της** ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}=\frac{P(\chi_0)}{Q(\chi_0)}$.

✓ Οι συναρτήσεις $\mathbf{f(\chi)=\eta\mu\chi}$ και $\mathbf{g(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi}$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $\chi_0 \in R$ ισχύει $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\eta\mu\chi=\eta\mu\chi_0$ και $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\chi_0$ αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις $\mathbf{f(\chi)=\alpha^{\chi}}$ με $\mathbf{0<\alpha\neq 1}$, $\mathbf{\varphi(\chi)=e^{\chi}}$ και $\mathbf{g(\chi)=\ln\chi}$ είναι συνεχείς .

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Από τον ορισμό της συνέχειας στο χ_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις **f** και **g είναι συνεχείς στο** χ_0, τότε και οι συναρτήσεις :

$\mathbf{f+g}$, $\mathbf{\kappa\cdot f}$, $\kappa\in R$, $\mathbf{f\cdot g}$, $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ με $g(\chi_0)\neq 0$, $|\mathbf{f}|$ και $\sqrt[\nu]{f}$ είναι επίσης **συνεχείς στο** χ_0, με την προϋπόθεση, βέβαια ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το χ_0.

Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα δηλαδή μπορεί πχ το άθροισμα $\mathbf{f+g}$ να είναι συνεχής συνάρτηση αλλά αυτό δεν σημαίνει πως σίγουρα και η f και η g είναι συνεχείς συναρτήσεις.

✓ Από τον συνδυασμό των πιο πάνω προκύπτει ότι :

Οι συναρτήσεις $\mathbf{f(\chi)=\varepsilon\varphi\chi}$ και $\mathbf{g(\chi)=\sigma\varphi\chi}$ είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων στο πεδίο ορισμού της κάθε μιας.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παραδείγματα :

2. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς οι συναρτήσεις :

i) $\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi-1}$ **ii)** $\varphi(\chi)=|3\chi+1|$ **iii)** $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\chi+\chi^2$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το $A=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\sqrt{2\chi-1}$ είναι **συνεχής** επειδή είναι ***ρίζα*** της συνάρτησης $g(\chi)=2\chi-1$ που είναι συνεχής .

ii) Π Ο είναι το A = R . Η συνάρτηση $\varphi(\chi)=|3\chi+1|$ είναι **συνεχής** επειδή είναι **απόλυτη τιμή** της συνάρτησης $g(\chi)=3\chi+1$ που είναι συνεχής .

iii) Π Ο είναι το A = R . Η συνάρτηση $\varphi(\chi)=2\sigma\upsilon\nu\chi+\chi^2$ είναι **συνεχής** ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Παρατίθεται χωρίς απόδειξη το θεώρημα :

Αν η συνάρτηση **f είναι συνεχής στο** χ_0 και η συνάρτηση **g είναι συνεχής στο** $f(\chi_0)$, τότε η σύνθεσή τους **gof** είναι συνεχής στο χ_0 .

Παράδειγμα :

Η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu\left(2\chi+\frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(\chi)=2\chi+\frac{\pi}{4}$ και $g(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$.

Συνέχεια μιας συνάρτησης σε διάστημα.

✓ Μια συνάρτηση φ θα την λέμε **συνεχή σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής **σε κάθε σημείο του** (α,β) .

Δαμιανός Μωραΐτης

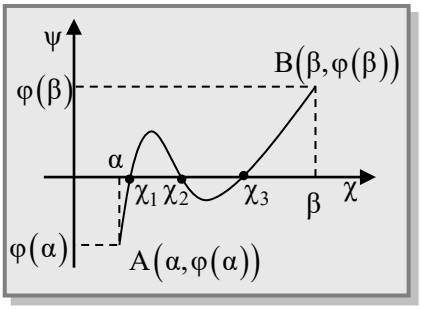
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Μια συνάρτηση **φ** θα την λέμε **συνεχή σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής **σε κάθε σημείο του** (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}\varphi(\chi)=\varphi(\alpha)$ και $\lim\limits_{\chi\to\beta^-}\varphi(\chi)=\varphi(\beta)$.

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$.

Τα παρακάτω θεωρήματα εκφράζουν δυο βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα του Bolzano



Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης **φ** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,\varphi(\alpha))$ και $B(\beta,\varphi(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα χ΄χ, αφού $\varphi(\alpha)<0$ και $\varphi(\beta)>0$, η γραφική παράσταση της **φ** θα τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Έστω μια συνάρτηση **φ**, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Αν :

✓ η **φ** είναι **συνεχής** στο $[\alpha,\beta]$ (στο κλειστό) και, επιπλέον, ισχύει

✓ $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)<0$,

τότε **υπάρχει ένα, τουλάχιστον,** $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $\varphi(\chi_0)=0$.

Ή αλλιώς πως η εξίσωση $\varphi(\chi)=0$ **έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα** (α,β).

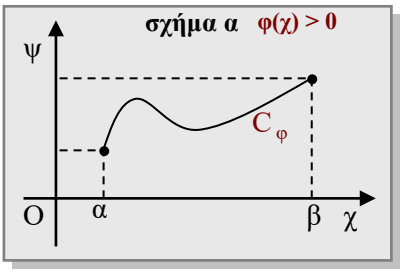
Λιβαδειά

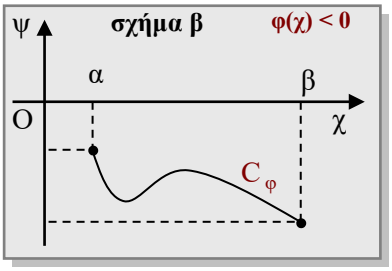
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις Super **S O S** για τα παραδείγματα και τις ασκήσεις

Από το θεώρημα του Bolzano είναι φανερό ότι :

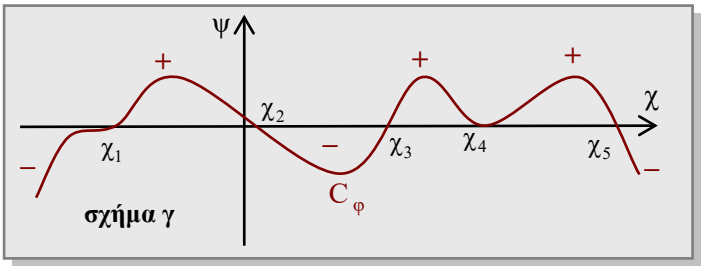
✓ Μια συνάρτηση **φ** που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή **θα είναι θετική για κάθε χ ∈ Δ** και η γραφική της παράσταση C_φ θα βρίσκεται **ολόκληρη πάνω από τον χ΄χ** δες **σχήμα α,** ή **θα είναι αρνητική** για κάθε **χ ∈ Δ** και η γραφική της παράσταση C_φ θα βρίσκεται **ολόκληρη κάτω από τον χ΄χ** , δες **σχήμα β.**





Γενικά δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε **διατηρεί το πρόσημό της** σ' ολόκληρο το διάστημα Δ .

✓ Μια συνεχής συνάρτηση **φ διατηρεί το πρόσημό της** σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της , δες προσεκτικά το σχήμα γ.



Αυτό σε διευκολύνει στο να βρίσκεις το πρόσημο της **φ** για τις διάφορες τιμές του χ.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Για να προσδιορίσεις το πρόσημο της **φ** κάνεις τα εξής :

1ον Βρίσκεις τις ρίζες της **φ**.

2ον Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της, διαλέγεις έναν αριθμό και βρίσκεις το πρόσημο της **φ** στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της **φ** σ' ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.

Παραδείγματα :

3. Να βρεθεί το πρόσημο της $\varphi(\chi)=2\eta\mu\chi-1$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Αρχικά υπολογίζεις τις ρίζες της $\varphi(\chi)=0$ στο $[0,2\pi]$.

Είναι $2\eta\mu\chi-1=0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \chi=\frac{\pi}{6}$ ή $\chi=\frac{5\pi}{6}$.

Έτσι οι ρίζες της **φ** χωρίζουν το διάστημα $[0,2\pi]$ που είναι το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$.

Διαλέγεις έναν αριθμό **σε κάθε ένα από αυτά** και βρίσκεις το πρόσημό του, αυτό το πρόσημο είναι και το πρόσημο της **φ** στο αντίστοιχο διάστημα.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της **φ** σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$
Αριθμός που διάλεξες	**0**	$\frac{\pi}{2}$	**2π**
Τιμή της φ στον αριθμό που διάλεξες	**$-1<0$**	**$1>0$**	**$-1<0$**
Πρόσημο της **φ** στο αντίστοιχο διάστημα	–	+	–

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$ η $\varphi(\chi) < 0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ η $\varphi(\chi) > 0$.

4. Να βρεθεί το πρόσημο της $\varphi(\chi) = e^{\chi} - e$, $\chi \in R$.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $\varphi(\chi) = 0$ στο R .

Είναι $e^{\chi} - e = 0 \Leftrightarrow e^{\chi} = e \Leftrightarrow \chi = 1$. Έτσι δημιουργούνται δυο διαστήματα : $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

✓ Αν $\chi \in (-\infty, 1)$ τότε είναι πχ $\varphi(0) = e^0 - e = 1 - e < 0$ και

✓ Αν $\chi \in (1, +\infty)$ τότε είναι πχ $\varphi(3) = e^3 - e > 0$.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της **φ** σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Αριθμός που διάλεξες	**0**	**3**
Τιμή της φ στον αριθμό που διάλεξες	**$1 - e < 0$**	**$e^3 - e > 0$**
Πρόσημο της **φ** στο αντίστοιχο διάστημα	–	+

Επομένως, στο διάστημα $(-\infty, 1)$ η $\varphi(\chi) < 0$, ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ η $\varphi(\chi) > 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Super **S O S**

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι γενίκευση του θεωρήματος του **Bolzano** και είναι γνωστό ως **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**.

Έστω μια συνάρτηση φ, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν :

- ✓ η φ είναι **συνεχής** στο $[\alpha, \beta]$ (στο κλειστό) και, επιπλέον, ισχύει
- ✓ $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$,

τότε για **κάθε αριθμό** η μεταξύ **των** $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$ **υπάρχει ένας, τουλάχιστον,** $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $\varphi(\chi_0) = \eta$.

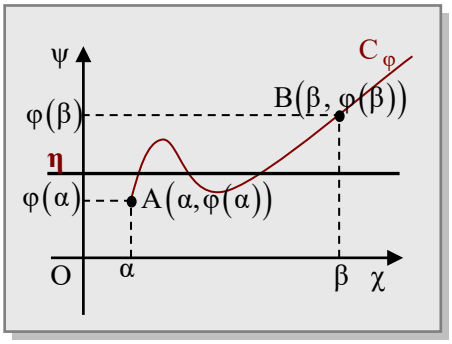
Ή αλλιώς πως η εξίσωση $\varphi(\chi) = \eta$ **έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα** (α, β).

Απόδειξη :

Έστω $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Τότε ορίζεται το διάστημα $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ και είναι :

$\eta \in (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \Leftrightarrow \varphi(\alpha) < \eta < \varphi(\beta)$,

δες και σχήμα δίπλα.



Αν θεωρήσεις τη συνάρτηση **g** με

$g(\chi) = \varphi(\chi) - \eta$, $\chi \in [\alpha, \beta]$, παρατήρησε ότι :

- ✓ η **g** είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- ✓ $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$, αφού :

$g(\alpha) = \varphi(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = \varphi(\beta) - \eta > 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του **Bolzano** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$g(\chi_0) = 0 \Rightarrow \varphi(\chi_0) - \eta = 0 \Rightarrow \varphi(\chi_0) = \eta$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις :

Στο προηγούμενο θεώρημα η συνέχεια είναι απαραίτητη προϋπόθεση, έτσι λοιπόν αν μια συνάρτηση **φ *δεν είναι συνεχής*** στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ***δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές***.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι :

- ✓ **Η εικόνα** $\varphi(\Delta)$ ενός **διαστήματος Δ** μέσω **μιας συνεχούς** και **μη σταθερής συνάρτησης φ** είναι πάντοτε ένα **διάστημα**.
- ✓ Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Super **S O S**

Αν **φ** είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η **φ** παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή ***M*** και μια ελάχιστη τιμή ***m***.

Δηλαδή, ***υπάρχουν*** $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε : αν $m = \varphi(\chi_1)$ και $M = \varphi(\chi_2)$ να ισχύει $\mathbf{m \le \varphi(\chi) \le M}$, για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

- ✓ Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης **φ** με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου **m** η ελάχιστη τιμή και **M** η μέγιστη τιμή της **φ**.
- ✓ Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

1ον Αν μια συνάρτηση φ είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της φ, στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου $A = \lim\limits_{\chi \to \alpha^+} \varphi(\chi)$ και $B = \lim\limits_{\chi \to \beta^-} \varphi(\chi)$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2ον Αν η **φ** είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της **φ** στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

Παραδείγματα :

5. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$, με $\chi \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ και ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu\chi \le 1$, άρα το πεδίο τιμών της είναι το $[-1, 1]$.

6. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\eta\mu\chi + 1$, με $\chi \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-2, 4]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$και $-1 \le \eta\mu\chi \le 1 \Leftrightarrow$ $-3 \le 3\eta\mu\chi \le 3 \Leftrightarrow -2 \le 3\eta\mu\chi + 1 \le 4$ άρα αν $m = -2$ και $M = 4$ τότε το σύνολο τιμών της φ θα είναι το $[m, M] = [-2, 4]$.

7. Το σύνολο τιμών της $\varphi(\chi) = e^{2\chi+1}$, $\chi \in (0, +\infty)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση είναι το διάστημα $(A, B) = (e, +\infty)$, όπου $A = \lim\limits_{\chi \to 0^+} \varphi(\chi) = e^{2\cdot 0+1} = e$ και $B = \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi) = +\infty$.

8. Το σύνολο τιμών της $\varphi(\chi) = \ell n\chi$, $\chi \in (0, e]$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση είναι το διάστημα $(A, \varphi(e)] = (-\infty, 1]$ όπου $A = \lim\limits_{\chi \to 0^+} \varphi(\chi) = -\infty$ και $\varphi(e) = \ell ne = 1$.

Παρατηρήσεις super **S O S :**

✓ Μια συνάρτηση **φ** είναι **συνεχής** ή είναι **ασυνεχής μόνο στα χ που ανήκουν στο Π Ο**, για αυτό πρέπει να βρίσκεις **πάντα το Π Ο**, για να ξέρεις σε ποια σημεία θα «ψάξεις» τη συνέχεια.

Λιβαδειά

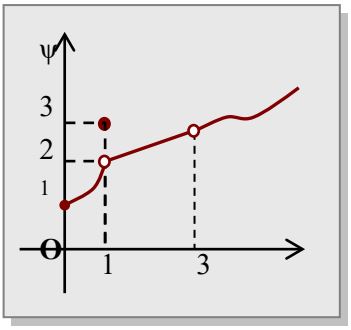
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- ✓ Θα «παίξουν» πολύ οι συναρτήσεις **πολλαπλού** τύπου, γι' αυτό πολύ συχνά θα χρειαστεί να υπολογίσεις τα πλευρικά όρια μια συνάρτησης.
- ✓ Θα χρειαστείς όλα τα «κόλπα» που έμαθες στον υπολογισμό των διαφόρων ορίων.

Παραδείγματα :

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ.

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της.



Απάντηση :

Π Ο είναι το $A=[0,3)\cup(3,+\infty)$.

Έτσι λοιπόν θα αναζητήσεις την συνέχεια ή την ασυνέχεια στο $\chi_0=1$. Στο $\chi_0=3$ που **δεν ορίζεται** η συνάρτηση δεν εξετάζεις την συνέχεια και προφανώς η συνάρτηση **δεν** χαρακτηρίζεται ασυνεχής.

Όσον αφορά το $\chi_0=1$ η συνάρτηση είναι **ασυνεχής** γιατί από το σχήμα φαίνεται ότι $\varphi(1)=3$, ενώ $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=2$ άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=2\neq 3=\varphi(1)$.

10. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $\varphi(\chi)=\begin{cases}2\chi-1, & \chi<1\\ -\chi+1, & \chi\geq 1\end{cases}$

στο $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Π Ο είναι το **A = R** . Για να εξετάσεις τη συνέχεια θα βρεις το $\varphi(1)=-1+1=0$ και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

Επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο στο $\chi_0=1$, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

$$\lim_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1}(2\chi-1)=1 \text{ και } \lim_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1}(-\chi+1)=0$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)\neq\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)$.

Άρα δεν υπάρχει το όριο στο $\chi_0=1$ άρα η φ είναι ασυνεχής στο $\chi_0=1$.

11. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $\varphi(\chi)=\begin{cases}3\chi-1, & \chi<1\\ \chi+1, & \chi\geq 1\end{cases}$

στο $\chi_0=1$.

Απάντηση :

Π Ο είναι το **A = R** . Για να εξετάσεις τη συνέχεια θα βρεις το

$\varphi(1)=1+1=2$ και το $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)$.

Επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο στο $\chi_0=1$, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}(3\chi-1)=2$ και $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi+1)=2$

οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)$.

Άρα υπάρχει το όριο στο $\chi_0=1$ και είναι $\lim\limits_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=2=\varphi(1)$

άρα η φ είναι συνεχής στο $\chi_0=1$.

12. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{3\eta\mu\chi-2\chi}{\chi}, & \chi<0\\ \chi^2-2\chi+1, & \chi\geq 0\end{cases}$

στο $\chi_0=0$.

Απάντηση :

Π Ο είναι το **A = R** . Για να εξετάσεις τη συνέχεια θα βρεις το

$\varphi(0)=0^2-2\cdot 0+1=1$ και το $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$.

Επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο στο $\chi_0=0$, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

$$\lim_{\chi\to 0^-}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 0^-}\left(\frac{3\eta\mu\chi-2\chi}{\chi}\right)=\lim_{\chi\to 0^-}\left(3\frac{\eta\mu\chi}{\chi}-\frac{2\chi}{\chi}\right)=$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$3\lim\limits_{\chi\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}-\lim\limits_{\chi\to 0^-}2=3\cdot 1-2=1$ και $\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\left(\chi^2-2\chi+1\right)=1$

οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi\to 0^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\varphi(\chi)$

Άρα υπάρχει το όριο στο $\chi_0=0$ και είναι : $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=1=\varphi(0)$ άρα η φ είναι συνεχής στο $\chi_0=0$.

Παρατήρηση :

Είναι προφανές ότι εξετάζεις την συνέχεια στο συγκεκριμένο σημείο που σου ζητάει και δεν σε ενδιαφέρει το υπόλοιπο Π Ο.

Αυτό όμως δεν συμβαίνει στις πιο κάτω ασκήσεις.

Παρατήρησε τη διαφορά στην εκφώνηση (Δες και παραδείγματα πιο κάτω).

13. Να μελετήσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\begin{cases}2\chi^2+\chi+1, & \chi<-1\\ -\chi+1, & \chi\geq -1\end{cases}$ **ii)** $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2+\chi-2}{\chi+2}, & \chi\neq -2\\ 3\ , & \chi=-2\end{cases}$

iii) $\varphi(\chi)=\begin{cases}2e^2+\chi+1, & \chi<0\\ \chi^2-2\chi+3, & \chi\geq 0\end{cases}$ **iv)** $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} & \chi>0\\ 1 & \chi=0\\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi-1}{\chi}+1 & \chi<0\end{cases}$

Απάντηση :

i) Π Ο είναι το Α = R.

✓ Στο διάστημα $(-\infty,-1)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική .

✓ Στο διάστημα $(-1,+\infty)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική .

✓ Στο σημείο $\chi_0=-1$ είναι : $\varphi(-1)=2$ και επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{\chi\to -1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}(-\chi+1)=2$ και $\lim\limits_{\chi\to -1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to -1}\left(2\chi^2+\chi+1\right)=2$

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi\to-1^+}\varphi(\chi)=2=\lim\limits_{\chi\to-1^-}\varphi(\chi)$. Άρα υπάρχει το όριο στο $\chi_0=-1$ και είναι : $\lim\limits_{\chi\to-1}\varphi(\chi)=2=\varphi(-1)$ άρα φ είναι συνεχής ***και στο*** $\chi_0=-1$ άρα ***συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της***.

ii) Π Ο είναι το Α = R.

- ✓ Στο διάστημα $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ η φ είναι συνεχής ως ρητή.
- ✓ Στο σημείο $\chi_0=-2$ είναι : $\varphi(-2)=3$ και η $\varphi(\chi)$ είναι της μορφής $\frac{P(\chi)}{Q(\chi)}$, με $P(-2)=0$ και $Q(-2)=0$ άρα

$$\lim_{\chi\to-2}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to-2}\left(\frac{\chi^2+\chi-2}{\chi+2}\right)=\lim_{\chi\to-2}\frac{(\chi-1)(\chi+2)}{\chi+2}=\lim_{\chi\to-2}(\chi-1)\Rightarrow$$

$\lim\limits_{\chi\to-2}\varphi(\chi)=-3$.

Οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi\to-2}\varphi(\chi)\neq\varphi(-2)$, **άρα η φ ασυνεχής** στο $\chi_0=-2$.

iii) Π Ο είναι το Α = R.

- ✓ Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η φ είναι συνεχής ως άθροισμα εκθετικής και πολυωνυμικής.
- ✓ Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- ✓ Στο σημείο $\chi_0=0$ είναι : $\varphi(0)=0^2-2\cdot0+3=3$ και τα πλευρικά όρια :

$$\lim_{\chi\to0^+}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to0}\left(\chi^2-2\chi+3\right)=3 \text{ και } \lim_{\chi\to0^-}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to0}\left(2e^2+\chi+1\right)\Rightarrow$$

$\lim\limits_{\chi\to0^-}\varphi(\chi)=2e^0+0+1=3$ οπότε είναι προφανές ότι :

$\lim\limits_{\chi\to0^+}\varphi(\chi)=3=\lim\limits_{\chi\to0^-}\varphi(\chi)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα υπάρχει το όριο στο $\chi_0 = 0$ και είναι : $\lim\limits_{\chi \to 0} \varphi(\chi) = 3 = \varphi(0)$ άρα η φ συνεχής και στο $\chi_0 = 0$ άρα συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

iv) Π Ο είναι το Α = R.

- ✓ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η φ είναι συνεχής ως πηλίκο ημιτονοειδούς και πολυωνυμικής .
- ✓ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η φ είναι ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
- ✓ Στο σημείο $\chi_0 = 0$ είναι : $\varphi(0) = 1$, βρίσκεις τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{\chi \to 0^+} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1$ και $\lim\limits_{\chi \to 0^-} \varphi((\chi)) = \lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\chi} + 1 = 0 + 1 = 1$ οπότε είναι προφανές ότι : $\lim\limits_{\chi \to 0^+} \varphi(\chi) = 1 = \lim\limits_{\chi \to 0^-} \varphi(\chi)$

Άρα υπάρχει το όριο στο $\chi_0 = 0$ και είναι : $\lim\limits_{\chi \to 0} \varphi(\chi) = 1 = \varphi(0)$ άρα η φ συνεχής και στο $\chi_0 = 0$ άρα συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

14. Με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα, να μελετήσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi) = \eta\mu\left(\chi^2 + 3\chi + 5\right)$ **ii)** $\varphi(\chi) = \ln\left(e^{\chi^2+3} + \chi + 5)\right)$

iii) $\varphi(\chi) = \ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu\chi\right)\right)$ **iv)** $\varphi(\chi) = \eta\mu\left[\ln\left(e^{P(\chi)} + Q(\chi)\right)\right]$

Απάντηση :

i) Το Π Ο, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι **κατάλληλο διάστημα Α** .

Στο διάστημα Α αν θεωρήσεις τις $\varphi_1(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 5$ και $\varphi_2(\chi) = \eta\mu\chi$ η φ είναι σύνθεση τους.

Πράγματι είναι : $\varphi(\chi) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(\chi) = \varphi_2(\varphi_1(\chi)) =$

$\varphi_2\left(\chi^2 + 3\chi + 5\right) = \eta\mu\left(\chi^2 + 3\chi + 5\right)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Έστω $\chi_0 \in A$. Η $\varphi_1(\chi) = \chi^2 + 3\chi + 5$ ως πολυωνυμική, είναι συνεχής σε κάθε $\chi \in R$ άρα και στο $\chi_0 \in \mathbf{A}$ και η $\varphi_2(\chi) = \eta\mu\chi$ ως ημιτονοειδής είναι συνεχής σ' όλο το R, άρα και στο $\varphi_1(\chi_0)$.

Άρα και η φ που είναι η σύνθεση τους θα είναι συνεχής σε κάθε $\chi_0 \in \mathbf{A}$ άρα η **φ είναι συνεχής στο** Α.

ii) Το Π Ο, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι **κατάλληλο διάστημα Α** .

Στο διάστημα Α αν θεωρήσεις τις $\varphi_1(\chi) = e^{\chi^2+3} + \chi + 5$ και $\varphi_2(\chi) = \ln\chi$ η φ είναι σύνθεση τους. Πράγματι είναι :

$$\varphi(\chi) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(\chi) = \varphi_2(\varphi_1(\chi)) = \varphi_2\left(e^{\chi^2+3} + \chi + 5\right) = \ln\left(\chi^2 + 3\chi + 5\right)$$

Έστω $\chi_0 \in A$. Η $\varphi_1(\chi) = e^{\chi^2+3} + \chi + 5$ ως άθροισμα εκθετικής και πολυωνυμικής, είναι συνεχής σε κάθε $\chi \in R$ άρα και στο $\chi_0 \in A$ και η $\varphi_2(\chi) = \ln\chi$ ως λογαριθμική είναι συνεχής σ' όλο το Πεδίο ορισμού της, άρα και στο $\varphi_1(\chi_0)$.

Άρα και η φ που είναι η σύνθεση τους θα είναι συνεχής σε κάθε $\chi_0 \in \mathbf{A}$ άρα η **φ είναι συνεχής στο** Α.

iii) , iv) Με εντελώς όμοιο τρόπο και με κατάλληλες προσαρμογές λύνονται και οι περιπτώσεις αυτές.

Παρατήρηση :

Όλες οι **συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων** είναι **συνεχής συναρτήσεις .**

Το «δύσκολο» είναι να βρεις το κατάλληλο πεδίο ορισμού και τις «συνιστώσες» της.

Η απάντηση που δόθηκε στο πιο πάνω παράδειγμα αποτελεί **στερεότυπη** μέθοδο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}(2\lambda-1)\chi^2-1, & \chi<1\\ \lambda^2\chi-1, & \chi\geq 1\end{cases}$.

Να βρείτε το λ έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

Απάντηση :

Π Ο είναι το **A = R** .

✓ Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

✓ Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

✓ Στο σημείο $\chi_0=1$ είναι : $\varphi(1)=\lambda^2-1$ και επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left((2\lambda-1)\chi^2-1\right)=2\lambda-1-1=2\lambda-2$ και

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\lambda^2\chi-1\right)=\lambda^2-1$, οπότε για να είναι η φ συνεχής στο

$\chi_0=1$ πρέπει $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)\Rightarrow 2\lambda-2=\lambda^2-1\Leftrightarrow$

$\lambda^2-1-2\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow$ **λ = 1**.

Επαλήθευση :

Αν λ = 1 $\Leftrightarrow\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi^2-1, & \chi<1\\ \chi-1, & \chi\geq 1\end{cases}$ και $\lim\limits_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\chi^2-1\right)=0$,

$\lim\limits_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 1}(\chi-1)=0$ και $\varphi(1)=0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2-\alpha\chi+\beta}{\chi-1}, & \chi<1\\ -2\alpha+\beta+\gamma, & \chi=1\\ \alpha\chi+\gamma-3, & \chi>1\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε η συνάρτηση φ να είναι συνεχής .

Απάντηση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Π Ο είναι το **A = R** .

✓ Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ η φ είναι συνεχής ως ρητή .

✓ Στο διάστημα $(1, +\infty)$ η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

✓ Στο σημείο $\chi_0 = 1$ είναι : $\varphi(1) = -2\alpha + \beta + \gamma$ και επειδή η $\varphi(\chi)$ αλλάζει τύπο, θα βρεις τα πλευρικά όρια :

Είναι $\lim\limits_{\chi \to 1^+} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 1} (\alpha\chi + \gamma - 3) \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to 1^+} \varphi(\chi) = \alpha + \gamma - 3$

Επίσης από την $\varphi(\chi) = \dfrac{\chi^2 - \alpha\chi + \beta}{\chi - 1} \Rightarrow \chi^2 - \alpha\chi + \beta = \varphi(\chi)(\chi - 1) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\chi \to 1^-} (\chi^2 - \alpha\chi + \beta) = \lim\limits_{\chi \to 1^-} \varphi(\chi) \lim\limits_{\chi \to 1^-} (\chi - 1) \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to 1^-} (\chi^2 - \alpha\chi + \beta) = 0 \Rightarrow$

$1 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = \alpha - 1}$ **(1)** .

Τότε $\varphi(\chi) = \dfrac{\chi^2 - \alpha\chi + \alpha - 1}{\chi - 1} = \dfrac{\chi^2 - 1 - \alpha\chi + \alpha}{\chi - 1} \Leftrightarrow \dfrac{(\chi - 1)(\chi + 1) - \alpha(\chi - 1)}{\chi - 1}$

$= \dfrac{(\chi - 1)(\chi + 1 - \alpha)}{\chi - 1} = \chi + 1 - \alpha$ άρα $\lim\limits_{\chi \to 1^-} \varphi(\chi) = 2 - \alpha$.

Για να υπάρχει το $\lim\limits_{\chi \to 1} \varphi(\chi)$ πρέπει $\lim\limits_{\chi \to 1^-} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 1^+} \varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi \to 1} \varphi(\chi) \Rightarrow$

$\boldsymbol{2 - \alpha = \alpha + \gamma - 3}$ **(2)** .

Για να είναι συνεχής η φ πρέπει $\lim\limits_{\chi \to 1} \varphi(\chi) = \varphi(1) \Rightarrow \lim\limits_{\chi \to 1^-} \varphi(\chi) = \varphi(1) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{2 - \alpha = -2\alpha + \beta + \gamma}$ **(3)**

Οι εξισώσεις **(1)**, **(2)** , **(3)** αποτελούν σύστημα : $\begin{cases} \beta = \alpha - 1 \\ 2 - \alpha = \alpha + \gamma - 3 \\ 2 - \alpha = -2\alpha + \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \beta = \alpha - 1 \\ -2\alpha - \gamma = -5 \\ 2 - \alpha = -2\alpha + \alpha - 1 + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 1 \\ 2\alpha + \gamma = 5 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha - 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 3 \end{cases}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επαλήθευση :

$$\textbf{Αν}\ \begin{cases}\beta=0\\ \alpha=1\\ \gamma=3\end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2-\chi}{\chi-1}, & \chi<1\\ 1, & \chi=1\\ \chi, & \chi>1\end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\chi)=\begin{cases}\chi, & \chi<1\\ 1, & \chi=1\\ \chi, & \chi>1\end{cases} \quad \text{και}$$

$$\lim_{\chi\to 1^-}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1^+}\varphi(\chi)=1=\varphi(1).$$

17. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R και ισχύει η εξίσωση :

$\chi^2+\text{συν}\chi+\chi\cdot\varphi(\chi)-1=0$ για κάθε $\chi\in R$.

i) Να βρείτε το $\varphi(0)$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της φ.

Παρατήρηση S O S :

Σε όλες τις περιπτώσεις που σου δίνει μια **συνεχή συνάρτηση φ** και μια σχέση για αυτήν και ζητάει να βρεις κάποιο $\varphi(\chi_0)$, θα το βρίσκεις πάντα ως $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)$ με δυο τρόπους :

✓ Αν δίνει **ισότητα** τότε για $\chi\neq\chi_0$ λύνεις ως προς $\varphi(\chi)$ και βρίσκεις το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)$.

✓ Αν δίνει **ανισότητα**, τότε για $\chi\neq\chi_0$ λύνεις την ανισότητα ως προς $\varphi(\chi)$ και βρίσκεις το $\lim\limits_{\chi\to\chi_0}\varphi(\chi)$ με **το κριτήριο παρεμβολής**.

Απάντηση :

i) Η σχέση $\chi^2+\text{συν}\chi+\chi\cdot\varphi(\chi)-1=0\Leftrightarrow \chi\cdot\varphi(\chi)=-\chi^2-\text{συν}\chi+1$.

Αν **$\chi\neq 0$** τότε $\varphi(\chi)=\chi-\dfrac{\text{συν}\chi-1}{\chi}$.

Αφού η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R άρα θα είναι συνεχής και στο 0.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\Leftrightarrow$

$\varphi(0)=0-0=0$.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η φ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο R με τύπο $\varphi(x)=\begin{cases}x-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x} & \text{αν } x\neq 0\\ 0 & \text{αν } x=0\end{cases}$

18. Η συνάρτηση φ είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Να βρείτε το $\varphi(0)$ αν για κάθε $x\neq 0$ ισχύει :

$x\left(1+3\sigma\upsilon\nu x+x\varphi(x)\right)=x^2+4x$.

Απάντηση :

Η σχέση $x\left(1+3\sigma\upsilon\nu x+x\varphi(x)\right)=x^2+4x\Leftrightarrow$

$x+3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu x+x^2\varphi(x)=x^2+4x\Leftrightarrow x^2\varphi(x)=x^2+3x-3\cdot x\cdot\sigma\upsilon\nu x$.

Αν $x\neq 0$ τότε $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{3x(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x^2}\Leftrightarrow\varphi(x)=1-3\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$.

Αφού η συνάρτηση φ είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, θα είναι συνεχής και στο 0.

Άρα $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\Rightarrow$

$\varphi(0)=1-3\cdot 0=1$.

19. Η συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $1+3\sigma\upsilon\nu x\leq\varphi(x)\leq 4$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο 0 .

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

Αν στη σχέση $1+3\sigma\upsilon\nu\chi \le \varphi(\chi) \le 4$ βάλεις $\chi = 0$ έχεις

$1+3\sigma\upsilon\nu 0 \le \varphi(0) \le 4 \Leftrightarrow 4 \le \varphi(0) \le 4 \Rightarrow \varphi(0) = 4$ **(1)**.

Είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}(1+3\sigma\upsilon\nu\chi) = 1+3\lim\limits_{\chi\to 0}\sigma\upsilon\nu\chi = 1+3 = 4$, $\lim\limits_{\chi\to 0} 4 = 4$ άρα από τη σχέση $1+3\sigma\upsilon\nu\chi \le \varphi(\chi) \le 4$ και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi) = 4$ **(2)** .

Από **(1)** και **(2)** είναι $\varphi(0) = 4 = \lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$ άρα η **φ ειναι συνεχής στο 0**.

20. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R. Να βρείτε το $\varphi(0)$ αν για κάθε $\chi \in R$ με $\chi \neq 0$ ισχύει : $\left|\chi^2 + 2\chi\varphi(\chi) + \eta\mu\chi\right| \le \chi^3$

Απάντηση :

Η σχέση $\left|\chi^2 + 2\chi\varphi(\chi) + \eta\mu\chi\right| \le \chi^3 \Leftrightarrow -\chi^3 \le \chi^2 + 2\chi\varphi(\chi) + \eta\mu\chi \le \chi^3 \Leftrightarrow$

$-\chi^3 - \chi^2 - \eta\mu\chi \le 2\chi\varphi(\chi) \le \chi^3 - \chi^2 - \eta\mu\chi$.

Αν $\chi \neq 0$ τότε $-\dfrac{\chi^3}{2\chi} - \dfrac{\chi^2}{2\chi} - \dfrac{\eta\mu\chi}{2\chi} \le \varphi(\chi) \le \dfrac{\chi^3}{2\chi} - -\dfrac{\chi^2}{2\chi} - \dfrac{\eta\mu\chi}{2\chi} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{\chi^2}{2} - \dfrac{\chi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi} \le \varphi(\chi) \le \dfrac{\chi^2}{2} - \dfrac{\chi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}$.

Αφού η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R άρα θα είναι συνεχής και στο 0 άρα $\varphi(0) = \lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)$.

Όμως $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(-\dfrac{\chi^2}{2} - \dfrac{\chi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right) = -0 - 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ και

$\lim\limits_{\chi\to 0}\left(-\dfrac{\chi^2}{2} - \dfrac{\chi}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu\chi}{\chi}\right) = 0 - 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ άρα από τη σχέση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$-\frac{\chi^2}{2}-\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\le\varphi(\chi)\le\frac{\chi^2}{2}-\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ και με εφαρμογή του

κριτηρίου παρεμβολής είναι $\lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=-\frac{1}{2}$.

Η συνάρτηση φ σύμφωνα με την εκφώνηση είναι συνεχής άρα

$$\varphi(0)=\lim_{\chi\to 0}\varphi(\chi)=-\frac{1}{2}.$$

21. Αν η συνάρτηση φ είναι ορισμένη και συνεχής στο R και επιπλέον ισχύουν : $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}=1$, $\varphi(\chi)>0$ στο $(0,3)$, να βρείτε τα :

i) $\varphi(1)$

ii) $\lim\limits_{\chi\to 1}\frac{\sqrt{\varphi(\chi)}-1}{\chi-1}$

Απάντηση :

i) Αν $\chi\ne 1$ και θέσεις $f(\chi)=\frac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}$ τότε

1ον $\lim\limits_{\chi\to 1}f(\chi)=1$ και

2ον $\varphi(\chi)-1=f(\chi)(\chi-1)\Leftrightarrow\varphi(\chi)=f(\chi)(\chi-1)+1\Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=\lim_{\chi\to 1}f(\chi)\lim_{\chi\to 1}(\chi-1)+\lim_{\chi\to 1}1=\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=1(1-1)+1=1.$$

Και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(0,3)$ άρα και στο 1 άρα είναι

$$\varphi(1)=\lim_{\chi\to 1}\varphi(\chi)=1.$$

ii) Αν $\chi\ne 1$ τότε $\frac{\sqrt{\varphi(\chi)}-1}{\chi-1}=\frac{\left(\sqrt{\varphi(\chi)}-1\right)\left(\sqrt{\varphi(\chi)}+1\right)}{(\chi-1)\left(\sqrt{\varphi(\chi)}+1\right)}=$

$$\frac{\varphi(\chi)-1^2}{(\chi-1)\left(\sqrt{\varphi(\chi)}+1\right)}=\frac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}\frac{1}{\sqrt{\varphi(\chi)}+1}.$$

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα $\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\varphi(\chi)}-1}{\chi-1}=\lim\limits_{\chi\to 1}\left(\dfrac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(\chi)}+1}\right)=$

$\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\varphi(\chi)-1}{\chi-1}\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{\varphi(\chi)}+1}=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}\Leftrightarrow \lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\sqrt{\varphi(\chi)}-1}{\chi-1}=\dfrac{1}{2}.$

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2+2\eta\mu\chi-1=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Απάντηση :

Η άσκηση «μυρίζει» Bolzano επειδή ακριβώς αναφέρει «μια τουλάχιστον λύση», δίνει και το διάστημα άρα :

Ονομάζεις $\varphi(\chi)=\chi^2+2\eta\mu\chi-1$ (εννοείται πως αν δεν είναι όλα στο 1ο μέλος, τα φέρνεις) και είναι :

- ✓ Η $\varphi(\chi)=\chi^2+2\eta\mu\chi-1$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- ✓ $\varphi(0)=0^2+2\eta\mu 0-1=-1<0$,

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2+2\eta\mu\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\pi^2}{4}+2\cdot 1-1=\dfrac{\pi^2}{4}+1>0$.

Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$

Επομένως ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** άρα η εξίσωση $\varphi(\chi)=0\Leftrightarrow\chi^2+2\eta\mu\chi-1=0$ έχει στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ μια τουλάχιστον λύση.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3+2\chi+1=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

Απάντηση :

Η άσκηση «μυρίζει» Bolzano επειδή ακριβώς αναφέρει «μια τουλάχιστον λύση», όμως δε δίνει και το διάστημα .

Όταν σου ζητάει να αποδείξεις ότι υπάρχουν λύσεις ή λύση και δεν δίνει κατάλληλο διάστημα τότε έχεις δυο τρόπους για να δουλέψεις :

1ος τρόπος : Να βρεις (να μαντέψεις καλλίτερα) ένα κατάλληλο διάστημα, στο οποίο να ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano**.

2ος τρόπος : Να εφαρμόσεις μια απλή «λογική» διαδικασία αποδεικνύοντας πως **υπάρχει** (χωρίς να προσδιορίζεται ακριβώς) κάποιο κατάλληλο διάστημα στο οποίο ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano.**

1ος τρόπος : Ονομάζεις $\varphi(\chi)=\chi^3+2\chi+1$ (εννοείται πως αν δεν είναι όλα στο 1ο μέλος, τα φέρνεις) και «μαντεύεις» το διάστημα $(-1,\,0)$.

✓ Η $\varphi(\chi)=\chi^3+2\chi+1$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[-1,\,0]$.

✓ $\varphi(-1)=(-1)^3+2(-1)+1=-2<0,\ \varphi(0)=(0)^3+2(0)+1=1>0$.

Άρα $\varphi(-1)\varphi(0)<0$.

Επομένως ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο διάστημα $[-1,\,0]$ άρα η εξίσωση $\varphi(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^3+2\chi+1=0$ έχει στο ανοικτό διάστημα $(-1,\,0)$ άρα και στο R μια τουλάχιστον λύση.

2ος τρόπος : Ονομάζεις $\varphi(\chi)=\chi^3+2\chi+1$.

Η $\varphi(\chi)=\chi^3+2\chi+1$ είναι συνεχής συνάρτηση στο R άρα και σε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\chi^3+\chi^2+1\right)=-\infty$ άρα θα υπάρχει κάποιο $\chi_1<0$ έτσι ώστε $\varphi(\chi_1)<0$.

✓ Είναι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi^3+\chi^2+1\right)=+\infty$ άρα θα υπάρχει κάποιο $\chi_2>0$ έτσι ώστε $\varphi(\chi_2)>0$.

✓ Είναι $\chi_1<0<\chi_2$ άρα υπάρχει διάστημα $[\chi_1,\chi_2]$ στο οποίο η φ να είναι συνεχής και ταυτόχρονα $\varphi(\chi_1)\cdot\varphi(\chi_2)<0$.

Επομένως ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο διάστημα $[\chi_1,\chi_2]$ άρα η εξίσωση $\varphi(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^3+2\chi+1=0$ έχει στο διάστημα (χ_1,χ_2), άρα και στο R, μια τουλάχιστον λύση.

24. Δίνεται η συνάρτηση φ ορισμένη και συνεχής σ' όλο το R .
Αν η γραφική τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία: $A(-2,0)$ και $B(3,0)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(\chi)=\alpha\cdot\chi$ **(1)** έχει μια τουλάχιστον λύση στο R για κάθε $\alpha\in R$.

Απάντηση :

Η άσκηση «μυρίζει» Bolzano επειδή ακριβώς αναφέρει «μια τουλάχιστον λύση» . Ονομάζεις $h(\chi)=\varphi(\chi)-\alpha\chi$.

Η $h(\chi)=\varphi(\chi)-\alpha\chi$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[-2,3]$.

✓ $h(-2)=\varphi(-2)-\alpha(-2)=0+2\alpha=2\alpha$, $h(3)=\varphi(3)-\alpha(3)=0-3\alpha=-3\alpha$ αφού $\varphi(-2)=0$ και $\varphi(3)=0$ μιας και η γραφική παράσταση περνάει από τα $A(-2,0)$ και $B(3,0)$. Άρα $h(-2)\cdot h(3)=-6\alpha^2\le 0$ **(2)**

1ον Αν **α = 0** Τότε η εξίσωση **(1)** γίνεται $\varphi(\chi)=0$ και είναι προφανές, από την εκφώνηση πως έχει δυο λύσεις, τις $\chi_1=-2$, $\chi_2=3$.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2ον Αν $\alpha \neq 0$ Τότε η **(2)** γίνεται $h(-2)\cdot h(3) = -6\alpha^2 < 0$ και επομένως για την $h(\chi) = \varphi(\chi) - \alpha\chi$ άρα και για την $\varphi(\chi) = \alpha\cdot\chi$ ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο $[-2, 3]$ άρα ανοικτό διάστημα $(-2, 3)$ άρα και στο R μια τουλάχιστον λύση.

Έτσι σε κάθε περίπτωση η $\varphi(\chi) = \alpha\cdot\chi$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο R.

Παρατήρηση :

Αν η **συνάρτηση φ** είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) \leq 0$ και όχι $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) < 0$, όπως απαιτεί το **Θ. Bolzano,** τότε εξετάζεις δυο περιπτώσεις :

- ✓ Αν $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\alpha) = 0$ τότε $\varphi(\alpha) = 0$ ή $\varphi(\beta) = 0$ και είναι προφανές πως η $\varphi(\chi) = 0$ έχει μέχρι και δυο λύσεις, τις : $\varphi(\alpha)$ ή $\varphi(\beta)$.
- ✓ Αν $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\alpha) < 0$ τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο $[\alpha, \beta]$ οπότε η $\varphi(\chi) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα (α, β).

25. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σ' όλο το R .
Αν $g(\chi) = 2f(\chi) - 3$, $f(1) = 5$ και $f(5) = 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο R .

Απάντηση :

Η άσκηση «μυρίζει» Bolzano επειδή ακριβώς αναφέρει «μια τουλάχιστον λύση» .

Ονομάζεις $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ και είναι :

- ✓ $g(1) = 2f(1) - 3 = 2\cdot 5 - 3 = 7$ άρα $h(1) = f(1) - g(1) = 5 - 7 \Rightarrow h(1) = -2$.
- ✓ $g(5) = 2f(5) - 3 = 2\cdot 1 - 3 = -1$ άρα $h(5) = f(5) - g(5) = 1 - (-1) \Rightarrow h(5) = 2$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Η $h(\chi)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[1, 5]$ και.

✓ $h(1)\cdot h(5) = -2\cdot 2 = -4$. Άρα $h(1)\cdot h(5) < 0$.

άρα για την $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ.**

Bolzano στο $[1, 5]$ άρα έχει στο ανοικτό διάστημα $(1, 5)$ μια τουλάχιστον λύση δηλαδή υπάρχει $\chi_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε $h(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f(\chi_0) - g(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow f(\chi_0) = g(\chi_0)$ άρα μια τουλάχιστον λύση για την $f(\chi) = g(\chi)$ στο $(1, 5)$, άρα και στο R.

26. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων : $f(\chi) = \ell n(\chi + 2)$ και $g(\chi) = 3\chi - 2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Απάντηση :

Η άσκηση «μυρίζει» Bolzano επειδή λέει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο δηλαδή «μια τουλάχιστον λύση» .

✓ Η f έχει Π Ο το $(-2, +\infty)$ και η g έχει Π Ο το R.

Για να αποδείξεις πως οι γρ. παραστάσεις τέμνονται αρκεί να βρεις χ_0 τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = g(\chi_0) \Leftrightarrow f(\chi_0) - g(\chi_0) = 0$, δηλαδή αρκεί να δείξεις πως η εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ έχει λύση

Ονομάζεις $\varphi(\chi) = f(\chi) - g(\chi) \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \ell n(\chi + 2) - 3\chi + 2$ και «μαντεύεις» το διάστημα $(-1, 0)$

✓ Η $\varphi(\chi) = \ell n(\chi + 2) - 3\chi + 2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[-1, 0]$.

✓ $\varphi(-1) = \ell n(1) - 3(-1) + 2 = 0 + 3 + 2 = 5 > 0$,

$\varphi(0) = \ell n2 - 3\cdot 0 + 2 = \ell n2 + 2$ αφού $\begin{cases} 2 > 1 \\ \ell n\chi \text{ γνησίως αύξουσα} \end{cases} \Rightarrow$

$\ell n2 > \ell n1$. Άρα $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$.

Δ α μ ι α ν ό ς M ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επομένως ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του **Θ. Bolzano** στο διάστημα $[-1, 0]$ άρα η εξίσωση $\varphi(\chi)=0 \Leftrightarrow f(\chi)-g(\chi)=0 \Leftrightarrow f(\chi)=g(\chi)$ έχει στο διάστημα $(-1, 0)$, άρα και στο R, μια τουλάχιστον λύση άρα και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=\ell n(\chi+2)$ και $g(\chi)=3\chi-2$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο..

27. Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$\varphi(\chi)=\sigma\varphi\chi-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{στο } \chi\in(0, \pi).$$

Ξαναδές : Παραδείγματα σελ 141 – 142

Απάντηση :

i) Αρχικά υπολογίζεις τις ρίζες της $\varphi(\chi)=0$ στο $(0, \pi)$.

Είναι $\sigma\varphi\chi-\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi=\sigma\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi=\frac{\pi}{3}$.

Έτσι οι ρίζες της **φ** χωρίζουν το διάστημα $(0, \pi)$ που είναι το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα : $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

Διαλέγεις έναν αριθμό **σε κάθε ένα από αυτά** και βρίσκεις το πρόσημό της $\varphi(\chi)$. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της **φ** σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
αριθμός που διάλεξες	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
τιμή της φ στον αριθμό που διάλεξες	$1-\frac{\sqrt{3}}{3} > 0$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$
πρόσημο της **φ** στο αντίστοιχο διάστημα	+	–

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επομένως, στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ η $\varphi(\chi) > 0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ η $\varphi(\chi) < 0$.

28. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων :

Ξαναδές :Θεωρία και παρατηρήσεις σελ 143

i) $\varphi(\chi) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi$, στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ **ii)** $\varphi(\chi) = \ln\chi - 1$ στο $\left(1, e^2\right)$.

Απάντηση :

i) Η συνάρτηση συνχ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ άρα η $-2\sigma\upsilon\nu\chi$ όπως και η $\varphi(\chi) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι γνησίως αύξουσες στο ίδιο διάστημα άρα σύνολο τιμών της φ είναι το (A, B) όπου $A = \lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi) =$

$\lim\limits_{\chi\to 0}(1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi) \Leftrightarrow A = 1 - 2\cdot 1 = -1$ και $B = \lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{3}}\varphi(\chi) =$

$\lim\limits_{\chi\to\frac{\pi}{3}}(1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi) \Leftrightarrow B = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 1 - 1 = 0$ άρα

Π Τ το $(A, B) = (-1, 0)$.

ii) Η συνάρτηση $\ell n\chi$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και η $\varphi(\chi) = \ell n\chi - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο ίδιο διάστημα άρα σύνολο τιμών της φ το (A, B) όπου $A = \lim\limits_{\chi\to 0}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to 0}(\ln\chi - 1) = -\infty$ και

$B = \lim\limits_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi) = \lim\limits_{\chi\to+\infty}(\ln\chi - 1) = +\infty$ άρα Π Τ το

$(A, B) = (-\infty, +\infty) = R$.

29. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι 1 – 1 στο $[\alpha, \beta]$, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Απάντηση :

Έστω χ_1, χ_2, χ_3 με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ και φ **όχι γνησίως μονότονη** τότε

αποκλείονται τα $\begin{cases} \varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2) < \varphi(\chi_3) \\ \varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2) > \varphi(\chi_3) \end{cases}$ άρα θα είναι πχ

$\varphi(\chi_2) < \varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_3)$, άρα με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών

θα υπάρχει τουλάχιστον ένα χ_0 έτσι ώστε $\chi_1 < \chi_2 < \chi_0 < \chi_3$ οπότε

$\chi_0 \neq \chi_1$ και για το οποίο να ισχύει $\varphi(\chi_0) = \varphi(\chi_1)$.

Άτοπο γιατί η φ είναι $1-1$, με όμοιο τρόπο αποκλείεται να είναι

$\varphi(\chi_3) < \varphi(\chi_2) < \varphi(\chi_1)$ ή $\varphi(\chi_1) = \varphi(\chi_2)$ και κάθε άλλος συνδυασμός.

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε √ στο Σωστό (**Σ**) ή στο Λάθος (**Λ**)

Σ **Λ**

1. Αν μια συνάρτηση φ :

i) Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

ii) Η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$ δεν έχει ρίζα στο (α, β)

iii) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\varphi(\xi) < 0$.

Τότε θα ισχύει $\varphi(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$.

2. Αν μια συνάρτηση φ :

i) Είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

ii) Παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $\varphi(\chi_1)$ και $\varphi(\chi_2)$, $\chi_1, \chi_2 \in [\alpha, \beta]$

Τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $\varphi(\chi_1)$ και $\varphi(\chi_2)$.

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Αν μια συνάρτηση φ :

i) Είναι συνεχής στο R .

ii) Ισχύει $\varphi(\chi_1)=1$ και $\varphi(\chi_2)=4$

Τότε υπάρχει $\chi_0 \in (\chi_1, \chi_2)$ έτσι ώστε $\varphi(\chi_0)=e$ $(e \approx 2,75)$.

4. Αν μια συνάρτηση φ :

i) Είναι συνεχής στο R .

ii) Είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Τότε το σύνολο τιμών της είναι: $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

5. Αν μια συνάρτηση φ :

i) Είναι συνεχής στο R .

ii) Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Τότε το σύνολο τιμών της είναι : $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$.

6. Κάθε συνάρτηση φ ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$.

7. Αν η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{\chi \to 0} \varphi(\chi), \lim\limits_{\chi \to +\infty} \varphi(\chi)\right)$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0 με $\varphi(\chi_0) \neq 0$, τότε κοντά στο χ_0 οι τιμές της φ είναι ομόσημες του $\varphi(\chi_0)$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο χ_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ **δεν** είναι συνεχής στο χ_0.

Δ α μ ι α ν ό ς Μ ω ρ α ΐ τ η ς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. ▭ ▭

11. Αν οι συναρτήσεις f, g δεν είναι συνεχείς στο σημείο χ_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε η συνάρτηση $f+g$ **δεν** είναι συνεχής στο χ_0. ▭ ▭

12. Αν η συνάρτηση φ είναι συνεχής σ' ένα σημείο χ_0 του πεδίου ορισμού της, τότε και η φ^2 είναι συνεχής στο χ_0. ▭ ▭

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν $f(\chi), g(\chi)$ συνεχείς με $f(\chi)\le g(\chi)$ για κάθε $\chi\in(1,3)$ και τα $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi)$, $\lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει :

i) $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi) > \lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$ **ii)** $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi) \le \lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$

iv) $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi) \ge \lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$ **v)** $\lim\limits_{\chi\to 2} f(\chi) < \lim\limits_{\chi\to 2} g(\chi)$.

2. Για τη συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2-5\chi+6}{\chi-3} & \text{αν } \chi\neq 3\\ 1 & \text{αν } \chi=3\end{cases}$ ισχύει :

i) η φ δεν είναι συνεχής στο 3 **ii)** η φ είναι συνεχής στο 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Αν η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)>0$ τότε από τις παρακάτω προτάσεις σωστή είναι πάντοτε η :

i) $\varphi(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ **ii)** Δεν υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\varphi(\xi)=0$.

iii) Η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο **iv)** Η C_φ δεν τέμνει τον ψ΄ψ ποτέ

vi) Τίποτε απ' όλα αυτά.

4. Έστω μια συνάρτηση φ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

i) $[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]$ **ii)** $[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]$ **iii)** $[\beta,\alpha]$

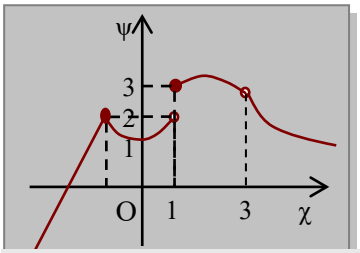
iv) $(\varphi(\beta),\varphi(\alpha))$ **v)** Το R **vi)** Τίποτε απ' όλα αυτά.



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ :

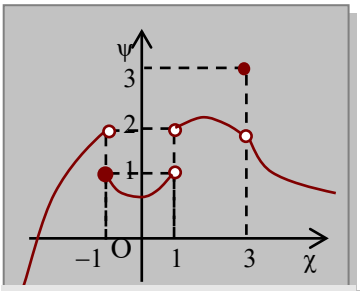
Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της.



Δες Θεωρία σελ 137 και παρ.1

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ :

Να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της.



Δες Θεωρία, παρ. σελ 138 και **παραδείγματα 2, 3, 4**

3. Να εξετάσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=\begin{cases}2\chi^2+\chi+1 & \text{αν } \chi<-1\\ -\chi+5 & \text{αν } \chi\geq -1\end{cases}$ στο $\chi_0=-1$

ii) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2+\chi-2}{\chi+2} & \text{αν } \chi\neq -2\\ 3 & \text{αν } \chi=-2\end{cases}$ στο $\chi_0=2$

iii) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi\eta\mu\dfrac{1}{\chi} & \text{αν } \chi\neq 0\\ 0 & \text{αν } \chi\geq 0\end{cases}$ στο $\chi_0=0$

iv) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi-1}{\chi+1} & \text{αν } \chi<-1\\ \chi+\eta\mu(\pi\chi) & \text{αν } \chi>-1\end{cases}$ στο $\chi_0=1$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Να μελετήσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων :

παραδείγματα 5, 6

παρ 9, 10, 11, 12, 13

i) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{2\chi^2-\eta\mu\chi}{\chi} & \text{αν } \chi<0\\ \chi^2-2\chi+1 & \text{αν } \chi\geq 0\end{cases}$

ii) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\chi^2+4}-2}{\chi^2} & \text{αν } \chi\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{αν } \chi=0\end{cases}$

iii) $\varphi(\chi)=\begin{cases}2e^{3\chi}+\chi+1 & \text{αν } \chi<0\\ -3\chi^{e}+2\chi+3 & \text{αν } \chi\geq 0\end{cases}$

iv) $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi}{\eta\mu\chi} & \text{αν } \chi>0\\ 1 & \text{αν } \chi=0\\ \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\chi-2}{\chi}-1 & \text{αν } \chi<0\end{cases}$

5. Με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται ορίζονται σε κατάλληλα διαστήματα, να μελετήσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων :

δες : **Σύνθεση, συνέχεια, παρ 5, 6, παρατήρηση** σελ 236

i) $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu^2\left(\eta\mu\left(\chi^2+3\chi+5\right)\right)$ **ii)** $\varphi(\chi)=\ln\left(e^{\chi^2+3}+\chi+5\right)$

iii) $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu\left(\eta\mu\left(\ln(\chi-1)\right)\right)$ **iv)** $\varphi(\chi)=\ln\left[\eta\mu\left(e^{P(\chi)}+Q(\chi)\right)\right]$

vi) $\varphi(\chi)=\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)$ **vii)** $\varphi(\chi)=\ln\left[\ln\left(\dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}\right)\right]$

6. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\alpha\chi^2-3\alpha & \text{αν } \chi\leq 1\\ \alpha\chi-\alpha & \text{αν } \chi>1\end{cases}$.

παρ 7, 8

Να βρείτε το α έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}(\alpha-1)\chi^2-2\beta\chi+\alpha+\beta & \text{αν } \chi<1\\ 0 & \text{αν } \chi=1\\ \alpha\chi+\beta & \text{αν } \chi>1\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

8. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\alpha\chi+\beta & \text{αν } \chi<1\\ \alpha+\beta & \text{αν } \chi=1\\ \beta\chi^2+\alpha & \text{αν } \chi>1\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

9. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\chi^2+\alpha\chi+\beta & \text{αν } \chi<0\\ \chi+2\beta-1 & \text{αν } \chi\geq 0\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

10. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\chi^2+\alpha\chi+\beta}{\chi-3} & \text{αν } \chi\neq 3\\ 1 & \text{αν } \chi=3\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

11. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\chi+1}-\alpha+\beta}{\chi} & \text{αν } \chi<0\\ \dfrac{2\alpha+\beta+\gamma}{2} & \text{αν } \chi=0\\ \alpha\chi+\gamma-\dfrac{1}{2} & \text{αν } \chi>0\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β, γ έτσι ώστε η συνάρτηση φ να είναι συνεχής .

12. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\begin{cases}\alpha\eta\mu\chi & \text{αν } \chi\leq-\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\eta\mu\chi & \text{αν } -\dfrac{\pi}{2}<\chi<\dfrac{\pi}{2}\\ \beta+\sigma\upsilon\nu\chi & \text{αν } \chi\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η φ συνάρτηση να είναι συνεχής .

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R . **παρ 17, 18, 19, . . .**

Να βρείτε το $\varphi(0)$ αν για κάθε $\chi \in R$ με $\chi \neq 0$ ισχύει :

$$\chi^2\left[1+\varphi(\chi)\right]=\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\chi\,.$$

14. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R.

Αν για κάθε $\chi \in R$ ισχύει : $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi\cdot\varphi(\chi)-\eta\mu\chi}{\chi^2}=3$

να βρείτε το $\varphi(0)$

15. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R και ισχύει $\eta\mu\chi+\chi\cdot\varphi(\chi)=3\chi^2+5$ για κάθε $\chi \in R$.

i) Να δείξετε ότι $\varphi(0)=4$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της φ.

16. Η συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε $\chi \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $2\sigma\upsilon\nu\chi\le\varphi(\chi)\le 2+\eta\mu\chi$.

i) Να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $\chi_0=0$.

ii) Να δείξετε ότι είναι ασυνεχής στο $\chi_0=\dfrac{\pi}{3}$.

17. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R και ισχύει $2\chi-\chi^4\le\varphi(\chi)\le 2\chi$ για κάθε $\chi \in R$.

i) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $\chi_0=0$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\varphi(\chi)}{\chi}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Υπόδειξη :
Να διαιρέσεις με $|\chi|$

18. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R.

Αν για κάθε $\chi \in R$ με $\chi \neq 0$ ισχύει : $|\chi\varphi(\chi) - \eta\mu\chi| \leq \chi^2 \left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\chi}\right|$

να δείξετε ότι $\varphi(0) = 1$

Υπόδειξη :
Να διαιρέσεις με $|\eta\mu\chi|$

19. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο R.

Αν για κάθε $\chi \in R$ ισχύει : $|\eta\mu\chi \cdot \varphi(\chi) - 2\chi| < 1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi$

να βρείτε το $\varphi(0)$

20. Αν η συνάρτηση φ είναι ορισμένη και συνεχής και επί πλέον ισχύουν :

$\lim\limits_{\chi \to 2} \frac{\varphi(\chi) - 4}{\chi - 2} = 6$, $\varphi(\chi) > 0$ στο $(0, 3)$, να βρείτε :

i) το $\varphi(2)$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to 2} \frac{\sqrt{\varphi(\chi)} - 2}{\chi - 2}$.

21. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3 + \eta\mu\chi - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^5 + \chi + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

23. Δίνεται η συνάρτηση φ ορισμένη και συνεχής σ' όλο το R .

Αν η γραφική τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία: $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(\chi) = 3\alpha \cdot \chi$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο R για κάθε $\alpha \in R$.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σ' όλο το R .

Αν $g(\chi) = 3f(\chi) - 4$, $f(1) = 6$ και $f(6) = 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = g(\chi)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο R .

Λιβαδειά

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

25. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$f(\chi)=\ell n(\chi+1)$ και $g(\chi)=2\chi-1$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

26. Να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης :

$$\varphi(\chi)=\sigma\varphi\chi-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{αν } \chi\in(0,\pi).$$

Ξαναδές :
Παραδείγματα
σελ 249–251

27. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων :

i) $\varphi(\chi)=1-2\sigma\upsilon\nu\chi$ στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

ii) $\varphi(\chi)=\ln\chi-1$ στο $\left(1,e^2\right)$

Γενικά Θέματα

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\sqrt{\chi+1}$ και $g(\chi)=\begin{cases}2\chi+1 & \chi\geq-1\\ 4\chi-5 & \chi<-1\end{cases}$

Να εξετάσετε τη συνέχεια των συναρτήσεων f, g, $g\circ f$ στο $\chi_0=-1$.

2. Αν για τη συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού το R ισχύει η σχέση :

$\varphi(\chi+\psi)=\varphi(\chi)+\varphi(\psi)$ για κάθε χ, ψ ∈ R τότε :

i) Να βρείτε το $\varphi(0)$.

ii) Αν η φ είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\ell n(1-\ell n\chi)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της D_φ.

ii) Να βρείτε τα όρια της στα άκρα του πεδίου ορισμού της D_φ.

iii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_φ.

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Αν $\left|\varphi(\chi-1)\right| \le |\chi| - 1$ για κάθε $\chi \in \mathrm{R}$, να αποδείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο 1.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους :

$$\mathrm{f}(\chi) = \sqrt{\chi - 1} \quad \text{και} \quad \mathrm{g}(\chi) = \sqrt{4 - \chi}\,.$$

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ και $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $\chi_0 = 2$.

iii) Να εξετάσετε αν οι $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$ και $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ είναι και αυτές συνεχείς στο $\chi_0 = 2$.

6. Να δείξετε ότι:

i) η εξίσωση $(\chi+1)^{2\chi+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.

ii) η εξίσωση $\chi^3 - 6\chi^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ell n\chi + e^{\chi} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

8. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathrm{f}(\chi) = \chi$ και $\mathrm{g}(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

9. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση φ στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύει ότι $\varphi(0) = 1$, $\varphi(2) = -2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = -4$ και $\varphi(8) = 1$.

i) Όταν $\chi \in (0, 8)$ να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της φ θα τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$.

ii) Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα [0 , 2] και [4 , 6] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [2 , 4] και [6 , 8], τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. Θεωρούμε την εξίσωση : $\frac{\kappa^2}{\chi}+\frac{\lambda^2}{\chi+1}+\frac{\mu^2}{\chi-1}=0$ με κ, λ, μ ≠ 0

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.

ii) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1 και ρ_2, να δείξετε ότι : $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\kappa^2}$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^{2\nu+1}-2\chi+1$ με $\nu \geq 2$.

i) Να αποδείξετε ότι το $P(\chi)$ διαιρείται με το $\chi-1$.

ii) Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

iii) Αν $Q(\chi)$ το παραπάνω πηλίκο, να αποδείξετε ότι το $Q(\chi)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

iv) Να δικαιολογήσετε ότι και το $P(\chi)$ έχει τις ίδιες ρίζες στο διάστημα $(0,1)$.

12. Έστω φ μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,\alpha]$ με $\varphi(0)=\varphi(\alpha)$.

Να αποδείξετε ότι :

i) Η $f(\chi)=\varphi(\chi)-\varphi\left(\chi+\frac{\alpha}{2}\right)$ είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$.

ii) Η εξίσωση $\varphi(\chi)=\varphi\left(\chi+\frac{\alpha}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$.

13. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\varphi(\chi)=\chi^5+\chi+1$ με $\chi \in [-1,0]$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(\chi)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Δαμιανός Μωραΐτης

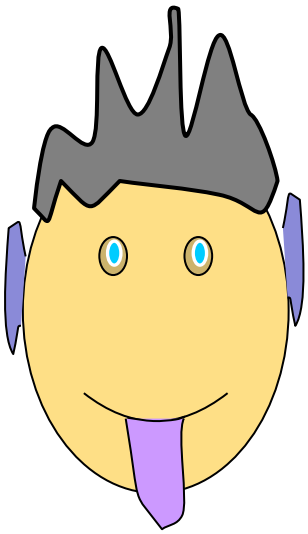
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η πρωτότυπη σύλληψη που εφαρμόζεται σε μια – δυο περιπτώσεις ***αποτελεί τρικ.***

Όταν όμως εφαρμόζεται σε περισσότερες περιπτώσεις ***αποτελεί μέθοδο.***

Να θυμάσαι επίσης πως δεν διαγωνίζεσαι για την έξυπνη ή την ωραία ή τη γρήγορη λύση, διαγωνίζεσαι για την σωστή και μεθοδική λύση

Δ. Μ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Το Θέμα

στις συναρτήσεις στη στατιστική και στις πιθανότητες



Δαμανός Μωραΐτης
Μαθηματικός

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ





Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ