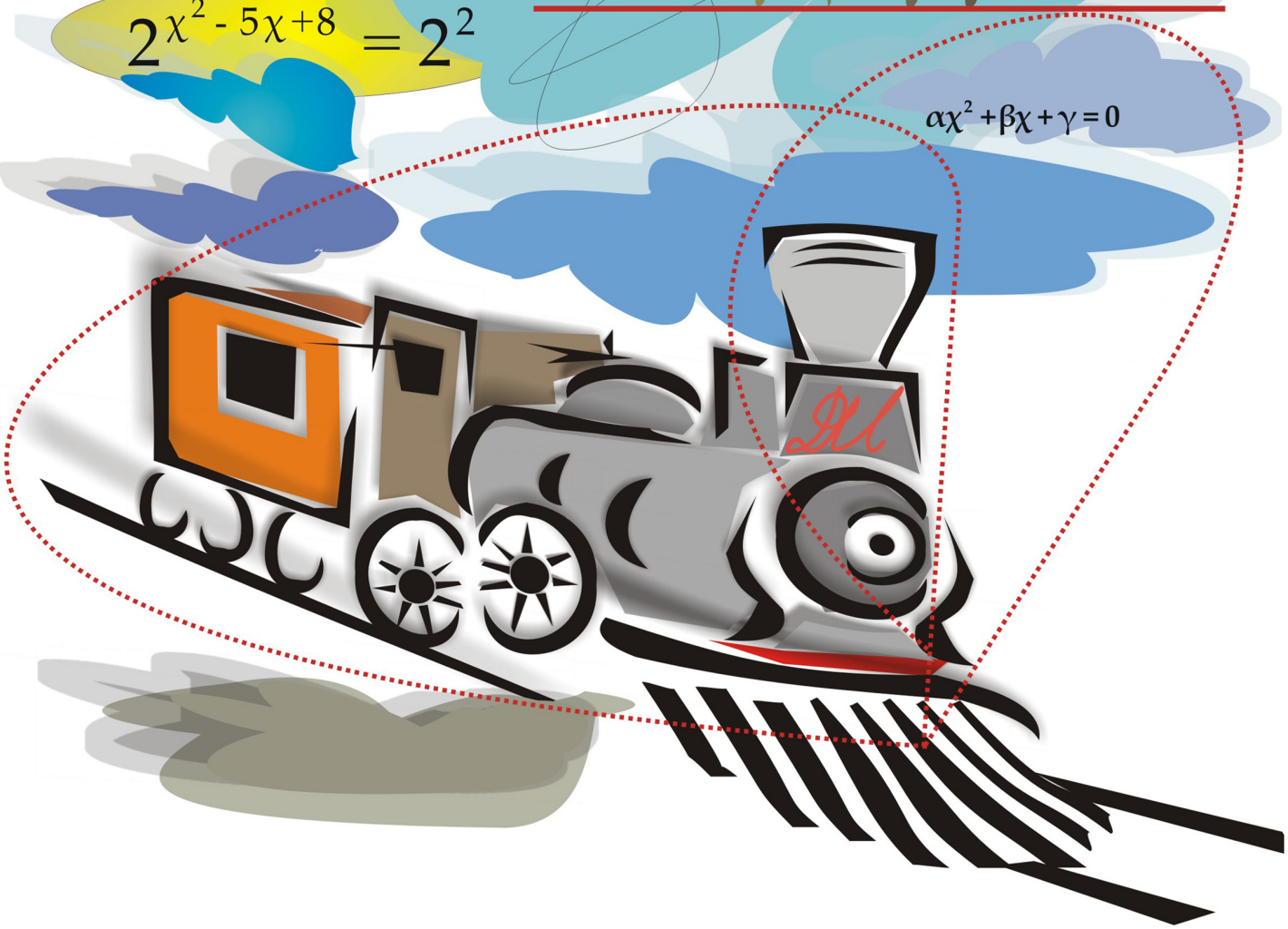
Δαμιανός Μωραΐτης

Τύπος $\sqrt{A(\chi)} \pm \sqrt{B(\chi)} = \Gamma(\chi)$ και υπογραμμίσεις

$A\chi + B\psi + \Gamma = 0$

$2^{\chi^2 - 5\chi + 8} = 2^2$

$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$



Τυπολόγιο Άλγεβρας Β! Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο

σε όλους εκείνους που θέλουν

να προσπαθήσουν

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Τύπος και υπογραμμίσεις

Τυπολόγιο Άλγεβρας Β! Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

© copyright κειμένου και εικονογράφησης:
Δαμιανός Μωραΐτης
© copyright για την παρούσα έκδοση:
Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς»**

ISBN: 9786188597303

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρόλογος

Το βιβλίο, περιέχει όλους τύπους που χρειάζονται στην Άλγεβρα της Β! Λυκείου

Στην διάρκεια της συγγραφής αυτού του βιβλίου κατά νου είχα το μαθητή ο οποίος ενδιαφέρεται να μάθει και ταυτόχρονα αγωνιά για την επιτυχία του.
Το βιβλίο αυτό αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, συμπλήρωμα της προσπάθειας που έγινε με τα δυο βιβλία με τίτλο «**Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής**», και άλλα τρία βιβλία με τίτλο «***Το Θέμα***», που αφορούν τα τα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων στα Μαθηματικά τις Γ' Λυκείου καθώς και τα αντίστοιχα στο μάθημα «**Αρχές Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων**» και **τα θέματα της Β' Λυκείου σε Άλγεβρα, Γεωμετρία και Κατεύθυνση.**

Φεβρουάριος 2022

Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. Σύνολα

- **Φυσικοί αριθμοί : σύνολο** $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
- **Ακέραιοι αριθμοί : σύνολο** $Z = \{\dots, -4, -3, -2 -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$
- **Ρητοί αριθμοί σύνολο** $Q = \{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta$ **ακέραιοι,** $\beta \neq 0 \}$. **Ρητός αριθμός** είναι κάθε αριθμός ο οποίος **είναι** ή **μπορεί να γραφεί ως κλάσμα** (ανάγωγο) με όρους ακέραιους αριθμούς.
- **Πραγματικοί αριθμοί (σύνολο P).** Περιέχει **Ρητούς** και **Άρρητους**.

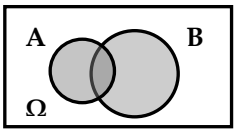
- Υπάρχουν και τα σύνολα N^*, Z^*, Q^*, P^* που σημαίνουν ότι και τα αντίστοιχα σύνολα αλλά δεν περιέχουν το μηδέν.
- Υπάρχουν και τα σύνολα Z_+, Q_+, P_+ που σημαίνουν ότι και τα αντίστοιχα σύνολα αλλά περιέχουν μόνον θετικούς αριθμούς.
- Υπάρχουν και τα σύνολα Z_-, Q_-, P_- που σημαίνουν ότι και τα αντίστοιχα σύνολα αλλά περιέχουν μόνον αρνητικούς αριθμούς.

Σχέσεις Συνόλων

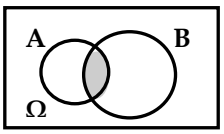
- **Ίσα Σύνολα** : Δυο Σύνολα **A, B** λέγονται ίσα (**A = B**) όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- **Υποσύνολο Συνόλου :** Ένα σύνολο **A** λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου **B** ($A \subseteq B$) όταν κάθε στοιχείο του **A** ανήκει και στο **B**.
- **Τομή Συνόλων :** Γράφουμε $A \cap B$ και εννοούμε τα **κοινά στοιχεία** των **A** και **B**.
- **Ένωση Συνόλων :** Γράφουμε $A \cup B$ και εννοούμε το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα στοιχεία των **A** και **B** (**κοινά και μη κοινά** τα κοινά τα γράφεις μια φορά).
- **Κενό Σύνολο :** Είναι το σύνολο που συμβολίζεται με $\varnothing$ και δεν περιέχει καθόλου στοιχεία.
- Για τα βασικά σύνολα ισχύει η σχέση : $N \subset Z \subset Q \subset P$

<u>Χαρακτηριστικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη θεωρία των συνόλων είναι:</u>
Το σύμβολο $\in$. Γράφουμε $\chi \in A$ και εννοούμε ότι ο αριθμός χ είναι στοιχείο του συνόλου Α.
Το σύμβολο $\notin$. Με το συμβολισμό $\chi \notin A$ εννοούμε ότι το χ δεν είναι στοιχείο του συνόλου Α.

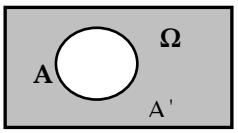
Πράξεις Συνόλων



- **Ένωση** δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο σύνολα. Συμβολικά **AUB**



- **Τομή** δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα (κοινά στοιχεία). Συμβολικά **A∩B**
- **Βασικό** λέγεται ένα σύνολο **Ω** όταν περιέχει κάθε άλλο σύνολο δηλαδή όταν όλα τα άλλα σύνολα είναι υποσύνολά του.



- **Συμπληρωματικό** ή **Συμπλήρωμα** ενός συνόλου Α είναι το σύνολο που συμβολίζεται με **A'** και περιέχει όλα τα στοιχεία του βασικού συνόλου **Ω** που δεν περιέχονται στο **A**.

Τα διαστήματα είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Μορφές: $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta], (-\infty, \alpha), (-\infty, \alpha], (\alpha, +\infty), [\alpha, +\infty)$ **και** $(-\infty, +\infty) = P$.
Χρησιμοποιούμε παρένθεση ή αγκύλη αν η ακραία τιμή δεν ανήκει ή αντίστοιχα ανήκει στο διάστημα.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Πράξεις – Ιδιότητες

Για την **πρόσθεση** και τον **πολλαπλασιασμό** ισχύουν οι ιδιότητες.

Πίνακας ιδιοτήτων πρόσθεσης		Πίνακας ιδιοτήτων πολλαπλασιασμού	
Ονομασία	**Συμβολισμός**	**Ονομασία**	**Συμβολισμός**
1. Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	**1.** Αντιμεταθετική	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$
2. Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	**2.** Προσεταιριστική	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$
3. Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	**3.** Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha\cdot 1=\alpha$
4. Αντίθετο στοιχείο : για κάθε $\alpha\in P$ υπάρχει ο αντίθετός του $-\alpha$ **ώστε** $\alpha+(-\alpha)=0$		**4.** Αντίστροφο στοιχείο : για κάθε αριθμό $\alpha\neq 0$ υπάρχει ο αντ/φος του ο $\frac{1}{\alpha}$ ώστε $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$	
		5. Απορροφητικό στοιχείο	$\alpha\cdot 0=0$
		6. Επιμεριστική ιδιότητα	$\alpha\cdot(\beta\pm\gamma)=\alpha\cdot\beta\pm\alpha\cdot\gamma$

<u>Παρατήρηση</u> στο R δύο πράξεις (<u>μόνο</u>) δεν είναι δυνατόν να κάνεις
<u>α) Να διαιρέσεις με το 0</u> και <u>β) Να βρεις την ρίζα αρνητικού αριθμού</u>.

➢ **Αναλογίες – Ιδιότητες αναλογιών :**

ι) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$ **ιι)** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ **ιιι)** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ **ιν)** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$

νι) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$ και $\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$ **νιι)** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots+\kappa}{\beta+\delta+\zeta+\cdots+\lambda}$

Ισχύουν επίσης οι εξής σημαντικές ιδιότητες :

1. $\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha+\gamma=\beta+\delta$ **2.** $\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta$ **3.** $\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha-\gamma=\beta-\delta$

4. $\left.\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha:\gamma=\beta:\delta,\ \gamma\neq 0$ **5.** $\alpha=\beta\Rightarrow\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ **6.** $\alpha=\beta\Rightarrow\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$

7. $\alpha+\gamma=\beta+\gamma\Rightarrow\alpha=\beta$
<u>ιδιότητα της διαγραφής πρόσθεσης</u>

8. $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma\Rightarrow\alpha=\beta,\ \gamma\neq 0$
<u>ιδιότητα της διαγραφής πολλαπλασιασμού</u>

3. Δυνάμεις

Δύναμη με βάση ρητό αριθμό α και εκθέτη φυσικό ν > 1 λέγεται το γινόμενο που αποτελείται από ν παράγοντες ίσους με τον α. Συμβολικά : $\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$

Ιδιότητες των δυνάμεων

• $\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\mu}=\alpha^{\nu+\mu}$	• $\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu}=\alpha^{\nu-\mu}$ $\alpha\neq 0,\ \nu-\mu>1$
• $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(\alpha\cdot\beta)^{\nu}$	• $\alpha^{\nu}:\beta^{\nu}=(\alpha:\beta)^{\nu},\ \beta\neq 0$
• $(\alpha^{\nu})^{\mu}=\alpha^{\nu\cdot\mu}$	• Αν $\alpha\neq 1$ τότε $\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu}\Rightarrow\mu=\nu$
• Για κάθε $\alpha,\beta\in P$ ισχύει $\alpha=\beta\Rightarrow\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$ • (Προσοχή) $\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\ \text{αν ν άρτιος}\\ \alpha=\pm\beta\ \text{αν ν περιττός}\end{cases}$	<u>Ορίζουμε</u> $\alpha^{1}=\alpha,\ \begin{cases}\alpha^{0}=1,\ \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}\\ \text{μόνο αν } \alpha\neq 0\end{cases}$ και $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ με $\alpha\geq 0$

Προσοχή στο 0^{0} και στο $0^{-\nu}$ που δεν ορίζονται και στα α^{1}, α^{0}, $\alpha^{-\nu}$ με $\alpha\neq 0$ που μοιάζουν με δυνάμεις αλλά δεν είναι.

<u>Παρατήρηση</u> Είναι $1^{\nu}=1$, $0^{\nu}=0$ για κάθε **ν**. Οι ιδιότητες των δυνάμεων καθώς και οι πιο πάνω ορισμοί ισχύουν και με έκθετες ακεραίους, με την προϋπόθεση όμως ότι έχουν νόημα ως παραστάσεις .

Θετικός αριθμός όταν υψωθεί σε οποιονδήποτε εκθέτη δίνει **θετικό αποτέλεσμα**. Ενώ όταν η βάση της δύναμης είναι αρνητική τότε αν υψώνεται **σε άρτιο (ν = 2κ)** εκθέτη δίνει θετικό αποτέλεσμα αλλά **σε περιττό (ν = 2 κ + 1)** εκθέτη δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Ταυτότητες

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	6. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	7. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
3. $(\alpha\pm\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\pm2\alpha\beta+2\alpha\gamma\pm2\beta\gamma$	8. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
4. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$	9. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
5. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	

5. Διάταξη στο R

Ορισμός : Λέμε ότι :

1. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0$
2. $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$
3. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0$

Ισχύουν οι εξής (σημαντικές) ιδιότητες :

• Αν $\alpha\in P^-$ και $\beta\in P^+$ τότε είναι $\alpha<0<\beta$	• $\alpha^2\geq0$ για κάθε $\alpha\in P$
• $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ άρα $\alpha>\gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)	• $\alpha>\beta$ άρα $\alpha\pm\gamma>\beta\pm\gamma$
• $\alpha>\beta$ τότε $\begin{cases}\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma & \text{αν } \gamma>0\\ \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma & \text{αν } \gamma<0\end{cases}$	• Δεν αφαιρούμε ποτέ ανισότητες
• Προσθέτουμε μόνο ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη : $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha+\gamma>\beta+\delta$	
• Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη μόνο ομοιόστροφες ανισότητες ομοσήμων αριθμών ως εξής :	
1. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ τότε $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$	2. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta<0$ τότε $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{cases}\Rightarrow\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\delta$
• $\alpha,\beta\geq0$ τότε $\alpha^\nu\geq\beta^\nu\Leftrightarrow\alpha\geq\beta$	
• $\alpha,\beta\geq0$ τότε $\alpha>\beta\Rightarrow\alpha^2>\beta^2$	• $\alpha,\beta<0$ τότε $\alpha>\beta\Rightarrow\alpha^2<\beta^2$

6. Απόλυτη τιμή - Ιδιότητες

Ορισμός :

Το σύμβολο $|\alpha|$ ονομάζεται απόλυτη τιμή του α και είναι $|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \text{αν } \alpha\geq0\\ -\alpha & \text{αν } \alpha<0\end{cases}$

Ιδιότητες

Για κάθε $\alpha,\beta\in P$ ισχύει :

• $\lvert\alpha\rvert\geq0$	• $\lvert\alpha\rvert\geq\alpha$ και $\lvert\alpha\rvert\geq-\alpha$
• $\lvert\alpha\rvert^2=\alpha^2$ και γενικότερα $\lvert\alpha\rvert^{2\kappa}=\alpha^{2\kappa}$	• $-\lvert\alpha\rvert\leq\alpha\leq\lvert\alpha\rvert$
• Αν $\theta>0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lvert\chi\rvert\leq\theta\Leftrightarrow-\theta\leq\chi\leq\theta$	• Αν $\theta>0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\lvert\chi\rvert\geq\theta\Leftrightarrow\chi\leq-\theta$ ή $\chi\geq\theta$
• $\lvert\alpha\cdot\beta\rvert=\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert$ Γενικότερα $\lvert\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdots\alpha_\nu\rvert=\lvert\alpha_1\rvert\cdot\lvert\alpha_2\rvert\cdot\lvert\alpha_3\rvert\cdots\lvert\alpha_1\rvert$	
• $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert=\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}$ Γενικότερα $\left\lvert\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\alpha_3}{\beta_3}\cdots\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right\rvert=\left\lvert\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right\rvert\cdot\left\lvert\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\rvert\cdot\left\lvert\frac{\alpha_3}{\beta_3}\right\rvert\cdots\left\lvert\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right\rvert$ $\beta_i\neq0$	
• $\lvert\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert\rvert\leq\lvert\alpha+\beta\rvert\leq\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. Ρίζες - ιδιότητες

Ορισμός :

Αν $\alpha \geq 0$ τότε **ν – οστή ρίζα του α** (συμβολικά $\sqrt[\nu]{\alpha}$) **ονομάζουμε τον αριθμό** $\beta \geq 0$ όταν $\beta^{\nu} = \alpha$

Ιδιότητες

Κάθε ρίζα $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)$ έχει νόημα μόνο **αν** $\alpha \geq 0$	$\sqrt[\nu]{\alpha} \geq 0$
$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ αν $\alpha \geq 0$ αλλά $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \lvert\alpha\rvert$	$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$
$\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ όταν $\alpha \geq 0, \beta > 0$	$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$ αν $\alpha \geq 0$
$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$	$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$ αν $\alpha \geq 0$
$\sqrt[\kappa \cdot \nu]{\alpha^{\kappa \cdot \mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ αν $\alpha \geq 0$	Αν $\alpha \geq \beta > 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \geq \sqrt[\nu]{\beta}$
$\sqrt{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha}$ και $\alpha = \sqrt[1]{\alpha}$	

Συζυγείς Παραστάσεις

Η $\sqrt{\alpha}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{\alpha}$	Η $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}$
Η $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ είναι συζυγής με την $\alpha \mp \sqrt{\beta}$	Η $\sqrt{\alpha} \pm \beta$ είναι συζυγής με την $\sqrt{\alpha} \mp \beta$
Η $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}$	Η $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}$
Η $\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$ είναι συζυγής με την $\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}$	

8. Εξισώσεις

Α. Πολυωνυμικές Εξισώσεις

1. 1ου βαθμού (μορφή $\alpha \cdot \chi = \beta$)

- Ακολουθείς τα **5 βήματα α)** Απαλοιφή παρονομαστών **β)** Βγάζεις παρενθέσεις **γ)** Χωρίζεις γνωστούς από αγνώστους **δ)** Αναγωγή όμοιων όρων **ε)** Διαιρείς με τον συντελεστή του αγνώστου.
- **Διερεύνηση** : **α)** $\alpha \neq 0$ μία λύση την $-\dfrac{\beta}{\alpha}$, **β)** $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ **αδύνατη** , **γ)** $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ **αόριστη**

2. 2ου βαθμού Εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, Τριώνυμο $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Διακρίνουσα : $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

- $\Delta > 0$. Τότε η εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$ <u>έχει 2 ρίζες</u> $\rho_1, \rho_2 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $S = \rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ $P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ <u>οι τύποι του **Vieta**</u> . Η εξίσωση γίνεται $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ και το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2)$
- $\Delta = 0$ Τότε η εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$ <u>έχει 1 διπλή ρίζα (ή δύο ρίζες ίσες)</u> $\rho = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = \alpha(\chi - \rho)^2$
- $\Delta < 0$. Τότε η εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$ <u>δεν έχει ρίζες πραγματικές</u> και το τριώνυμο $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma$ **δεν παραγοντοποιείται**

3. 3ου βαθμού ή μεγαλύτερου βαθμού

- <u>**Παραγοντοποιείς**</u> και την φέρνεις στη μορφή $A(\chi) \cdot B(\chi) \cdots K(\chi) = 0$ οπότε ισοδύναμα έχεις τις εξισώσεις $A(\chi) = 0,\ B(\chi) = 0,\ \cdots,\ K(\chi) = 0$ (οι οποίες είναι εξισώσεις 1ου ή 2ου βαθμού)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. Ειδικής μορφής

α) Διτετράγωνη : $\alpha\cdot\chi^4+\beta\cdot\chi^2+\gamma=0$

«**Βάζεις**» όπου χ^2 το ψ και λύνεις την 2βάθμια εξίσωση $\alpha\cdot\psi^2+\beta\cdot\psi+\gamma=0$ και στη συνέχεια λύνεις τις $\chi^2=\rho_1$, $\chi^2=\rho_2$

β) Διώνυμη μορφή : $\chi^\nu=\alpha$

ι) Αν ν άρτιος τότε $\begin{cases}\chi=\pm\sqrt[\nu]{\alpha} & \text{με } \alpha\ge 0\\ \text{αδύνατη} & \text{με } \alpha<0\end{cases}$, **ιι)** Αν ν περιττός τότε $\begin{cases}\chi=\sqrt[\nu]{\alpha} & \text{με } \alpha\ge 0\\ \chi=-\sqrt[\nu]{|\alpha|} & \text{με } \alpha<0\end{cases}$

Β. Εξισώσεις με απόλυτα

1. Μορφή $\kappa|A(\chi)|+\lambda=0$. Τη μετασχηματίζω στη μορφή $|A(\chi)|=\alpha$ οπότε αν είναι :

ι) $\alpha<0$ τότε η $|A(\chi)|=\alpha$ δεν έχει λύση διότι $|A(\chi)|\ge 0$ **για κάθε $\chi\in P$**

ιι) $\alpha\ge 0$ τότε $|A(\chi)|=\alpha \Leftrightarrow$ $A(\chi)=\alpha$ **(1)** ; $A(\chi)=-\alpha$ **(2)**

Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι λύσεις των εξισώσεων **(1)** και **(2)**

- Πολύ χρήσιμη είναι η αντικατάσταση $|A(\chi)|=\omega$, $(\omega>0)$ στην αρχική εξίσωση

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $5|2\chi-1|+3(-3|2\chi-1|+2)=12-7|2\chi-1|$ **(1)**

Θέτω $|2\chi-1|=\omega$ οπότε η **(1)** γίνεται $5\omega+3(-3\omega+2)=12-7\omega \Leftrightarrow 5\omega-9\omega+6=12-7\omega \Leftrightarrow$ $5\omega-9\omega+7\omega=12-6 \Leftrightarrow 3\omega=6 \Leftrightarrow \omega=3$ οπότε $|2\chi-1|=3 \Leftrightarrow$ ι) $2\chi-1=3 \Leftrightarrow 2\chi=4 \Leftrightarrow \chi=2$ ή ιι) $2\chi-1=-3 \Leftrightarrow 2\chi=-4 \Leftrightarrow \chi=-1$

2. Μορφή $|A(\chi)|=|B(\chi)| :\Leftrightarrow$ $A(\chi)=B(\chi)$ **(1)** ; $A(\chi)=-B(\chi)$ **(2)**

Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι λύσεις των εξισώσεων **(1)** και **(2)**

Παραλλαγή της είναι η $|A(\chi)|=B(\chi)$, η οποία λύνεται όμοια με τον περιορισμό όμως **$B(\chi)\ge 0$.**

Παράδειγμα : Να λυθεί η εξίσωση $|2\chi-1|+3|\chi+2|=15$ **(1)**

Λύση : Πρώτα σχηματίζεις τον πιο κάτω πίνακα βγάζοντας τα απόλυτα

χ	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2\chi-1$	$1-2\chi$	$1-2\chi$	0	$2\chi-1$
$\chi+2$	$-\chi-2$	0	$\chi+2$	$\chi+2$

Άρα (με βάση τον πίνακα) $|2\chi-1|+3|\chi+2|=\begin{cases}=1-2x+3(-x-2)=-5x-5 & \textbf{(ι)} \quad \text{αν } \chi\le 2\\ =1-2x+3(x+2)=x+7 & \textbf{(ιι)} \quad \text{αν } 2\le\chi\le\frac{1}{2}\\ =2x-1+3(x+2)=5x+5 & \textbf{(ιιι)} \quad \text{αν } \chi\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

ι) $-5x-5=15 \Leftrightarrow -5x=20 \Leftrightarrow \chi=-4$ δεκτή γιατί $-4<-2$

οπότε η **(1)** γίνεται ιι) $x+7=15 \Leftrightarrow x=8$ απορίπτεται γιατί πρέπει $2\le\chi\le\frac{1}{2}$

ιιι) $5x+5 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow \chi=2$ δεκτή γιατί $2>\frac{1}{2}$

Γ. Άρρητες εξισώσεις

α) Μορφή $\sqrt[\nu]{A(\chi)}=B(\chi)$

Πρέπει $A(\chi)\ge 0$ για να έχει νόημα η ρίζα και $B(\chi)\ge 0$ γιατί αλλιώς η εξίσωση είναι αδύνατη. Υψώνουμε στη νι – οστή δύναμη για να «φύγει» η ρίζα και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Μορφή $\sqrt[\nu]{A(\chi)} = \sqrt[\mu]{B(\chi)}$

Πρέπει $A(\chi) \geq 0$ και $B(\chi) \geq 0$ για να έχουν νόημα οι ρίζες.
Υψώνουμε στη δύναμη $\nu \cdot \mu$ για να «φύγουν» οι ρίζες και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

γ) Μορφή $\sqrt{A(\chi)} \pm \sqrt{B(\chi)} = \Gamma(\chi)$

Πρέπει $A(\chi),\ B(\chi) \geq 0$ για να έχουν νόημα οι ρίζες.
Υψώνουμε στο τετράγωνο, απομονώνουμε (στο ένα μέλος) το ριζικό που προκύπτει και ξανά υψώνουμε στο τετράγωνο, οπότε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Δ. Εκθετικές εξισώσεις

Είναι οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται στον εκθέτη και για να βρεις τις λύσεις, τις μετασχηματίζεις στην μορφή

1. $\alpha^{f(\chi)} = \alpha^{\kappa} \Leftrightarrow f(\chi) = \kappa$, την οποία και λύνεις εύκολα.

2. $\alpha^{f(\chi)} = \beta^{\kappa} \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{f(\chi)}\right) = \ln\left(\beta^{\kappa}\right) \Leftrightarrow f(\chi)\cdot\ln\alpha = \kappa\cdot\ln\beta \Leftrightarrow f(\chi) = \dfrac{\kappa\cdot\ln\beta}{\ln\alpha}$, την οποία και λύνεις.

Π. χ. η $2^{\chi^2-5\chi+8} = 4 \Leftrightarrow 2^{\chi^2-5\chi+8} = 2^2 \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 8 = 2 \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$

9. Ανισώσεις

Α. Πολυωνυμικές Ανισώσεις

1. 1ου βαθμού ανίσωση (μορφή $\alpha\cdot\chi \geq \beta,\ \alpha\cdot\chi > \beta,\ \alpha\cdot\chi < \beta,\ \alpha\cdot\chi \leq \beta$

- Ακολουθείς τα **5 βήματα α)** Απαλοιφή παρονομαστών **β)** Βγάζεις παρενθέσεις **γ)** Χωρίζεις γνωστούς από αγνώστους **δ)** Αναγωγή όμοιων όρων **ε) Διαιρείς με τον συντελεστή του αγνώστου (αλλάζοντας την φορά της ανισότητας αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός)**.

2. 2ου βαθμού ανίσωση.

- Τα μεταφέρουμε όλα έτσι ώστε το 1ο μέλος να γίνει $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma$ φροντίζουμε ώστε ο συντελεστής του χ^2 να είναι θετικός ($\alpha > 0$) (αλλάζοντας αν χρειαστεί τα πρόσημα στα δύο μέλη και ταυτόχρονα τη φορά της ανίσωσης) και τότε διακρίνουμε της εξής περιπτώσεις :
- $\Delta > 0$ Τότε το τριώνυμο $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma$ έχει 2 ρίζες ρ_1, ρ_2 και ισχύει ο πίνακας προσήμου :

χ	$-\infty$	ρ_1		ρ_2	$+\infty$
$\varphi(\chi)$	+		−		+

$\varphi(\rho_1) = 0$ $\varphi(\rho_1) = 0$

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η αν $\alpha > 0$ (κι' αν δεν είναι $\alpha > 0$ φροντίζεις να γίνει)

1) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma > 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$

2) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma \geq 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in (-\infty, \rho_1] \cup [\rho_2, +\infty)$

3) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma < 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in (\rho_1, \rho_2)$

4) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma \leq 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in [\rho_1, \rho_2]$

- $\Delta = 0$ Τότε το τριώνυμο $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma$ έχει 1 ρίζα ρ και ισχύει ο πίνακας προσήμου :

χ	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$\varphi(\chi)$	+		+

$\varphi(\rho) = 0$

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η αν $\alpha > 0$ (κι' αν δεν είναι $\alpha > 0$ φροντίζεις να γίνει)

1) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma > 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in (-\infty, \rho) \cup (\rho, +\infty) = P - \{\rho\}$

2) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma \geq 0$ έχει λύσεις τα $\chi \in (-\infty, \rho] \cup [\rho, +\infty) = P$ είναι **ταυτότητα**

3) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma < 0$ **είναι αδύνατη**

4) Η ανίσωση $\alpha\cdot\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma \leq 0$ έχει **μοναδική λύση $\chi = \rho$.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- $\Delta < 0$ Τότε το τριώνυμο $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma$ <u>δεν έχει ρίζες στο P</u> και ισχύει ο πίνακας προσήμου :

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(\chi)$	+	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η αν $\alpha > 0$ (κι' αν δεν είναι $\alpha > 0$ φροντίζεις να γίνει)

1) Οι ανισώσεις $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma > 0$ και $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma \geq 0$ έχουν λύσεις όλα τα $\chi \in P$ **(ταυτότητες)**

2) Οι ανισώσεις $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma < 0$ και $\alpha\cdot\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma \leq 0$ **είναι αδύνατες**

3. Βαθμού μεγαλύτερου του 2

- Παραγοντοποιείς και την φέρνεις στη μορφή $A(\chi)\cdot B(\chi)\cdots K(\chi) > 0$ Βρίσκεις τα διαστήματα στα οποία ο κάθε παράγοντας από τους $A(\chi)$, $B(\chi)$, κλπ είναι θετικός ή αρνητικός και σχηματίζεις πίνακα με τα πρόσημα. Από τον πίνακα βρίσκεις τα διαστήματα που είναι λύσεις της ανίσωσης.

Π. χ. Να λυθεί η ανίσωση $2\chi^3 - 7\chi^2 - 17\chi + 10 < 0$.

Λύση : Η ανίσωση (μετά την παραγοντοποίησή της) γράφεται $(\chi-5)(\chi+2)(2\chi-1) < 0$ οπότε :

χ	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$\chi-5$		−		−		−	0	+	
$\chi+2$		−	0	+		+		+	
$2\chi-1$		−		−	0	+		+	
$(\chi-5)(\chi+2)(2\chi-1)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα από τον πίνακα είναι φανερό ότι λύσεις της $(\chi-5)(\chi+2)(2\chi-1) < 0$ τα $\chi \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 5)$

4. Κλασματική (μορφή $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} > 0$ ή $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} < 0$

Τη μετατρέπουμε στην ισοδύναμη μορφή $A(\chi)\cdot B(\chi) > 0$ (αντίστοιχα $A(\chi)\cdot B(\chi) < 0$) και δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση σχηματίζεις τον πίνακα κλπ.

Β. Ανισώσεις με απόλυτα

Καταλήγουμε σε μία από τις μορφές $|A(\chi)| < \theta$ ή $|A(\chi)| > \theta$ οπότε

- Η $|A(\chi)| < \theta \Leftrightarrow -\theta < A(\chi) < \theta$ και συναληθεύουμε τις δύο ανισότητες $A(\chi) > -\theta$, $A(\chi) < \theta$

Έστω ότι καταλήγεις στην $|3\chi+2| < 7$

Λύση : $|3\chi+2| < 7 \Leftrightarrow -7 < 3\chi+2 < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi+2 < 7 \Leftrightarrow 3\chi < 5 \Leftrightarrow \chi < \frac{5}{3} \\ 3\chi+2 > -7 \Leftrightarrow 3\chi > -9 \Leftrightarrow \chi > -3 \end{cases}$ λύσεις $\chi \in (-3, \frac{5}{3})$

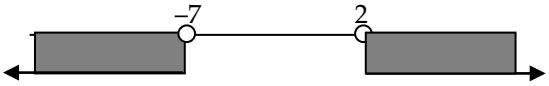
Γραφικά οι λύσεις είναι

- Η $|A(\chi)| > \theta \Leftrightarrow A(\chi) < -\theta$, $A(\chi) > \theta$ οπότε οι λύσεις είναι οι λύσεις και των δυο ανισώσεων.

Έστω ότι καταλήγεις στην $|2\chi+5| > 9$

Λύση : $|2\chi+5| > 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi+5 > 9 \Leftrightarrow 2\chi > 4 \Leftrightarrow \chi > 2 \\ 2\chi+5 < -9 \Leftrightarrow 2\chi > -14 \Leftrightarrow \chi < -7 \end{cases}$ λύσεις $\chi \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

Γραφικά οι λύσεις είναι



<u>Παρατήρηση :</u> Σε όλες αυτές τις ανισώσεις μπορεί αντί των συμβόλων > ή < να έχουμε τα σύμβολα $\leq$ ή $\geq$ αντίστοιχα οπότε δουλεύεις με ακριβώς ίδιο τρόπο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δ. Εκθετικές ανισώσεις

Είναι οι ανισώσεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται στον εκθέτη και για να τις λύσω τις μετασχηματίζω π. χ. στην μορφή $\alpha^{f(x)} > \alpha^{\kappa}$ ισοδύναμα έχω την **f(χ) > κ αν α > 1 ή f(χ) > κ αν α < 1** τις οποίες και λύνω.

δες παραδείγματα στην επόμενη σελίδα

1. $2^{\chi^2-5\chi+8} \le 4 \Leftrightarrow 2^{\chi^2-5\chi+8} \le 2^2 \Leftrightarrow \chi^2-5\chi+8 \le 2$ (γιατί $2>1$) $\Leftrightarrow \chi^2-5\chi+6 \le 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi \in [2, 3]$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\chi^2-3\chi+5} \le \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\chi^2-3\chi+5} \le \left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \chi^2-3\chi+5 \ge 3$ (γιατί $\frac{1}{3}<1$) $\Leftrightarrow \chi^2-3\chi+2 \ge 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\chi \le 1$ ή $\chi \ge 2 \Leftrightarrow \chi \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

10. Συστήματα

Ορισμός :

Σύστημα είναι ένα σύνολο από εξισώσεις για τις οποίες αναζητούμε την κοινή λύση ή τις κοινές λύσεις αν υπάρχουν.

- **Επίλυση** συστήματος είναι η διαδικασία για να βρω την ή τις λύσεις.
- **Γραμμικό** ονομάζεται ένα σύστημα που όλοι οι όροι του είναι 1ου βαθμού
- Αν υπάρχει **μια λύση** το σύστημα λέγεται **Συμβατό** .
- Αν υπάρχουν **άπειρες λύσεις** το σύστημα λέγεται **Αόριστο** ή **Ταυτότητα.**
- Αν **δεν υπάρχουν λύσεις** λέμε ότι το σύστημα είναι **Αδύνατο.**

Μέθοδοι επίλυσης συστημάτων

Α. Συστήματα με δύο αγνώστους.

Υπάρχουν 4 τρόποι για να λύσεις ένα σύστημα

1. Μέθοδος «Αντικατάστασης»

- Επειδή είναι πολύ απλή μέθοδος προτείνεται ως «**τυφλοσούρτης**».

Παράδειγμα : Να λυθεί το $\begin{cases} 2\chi+\psi=4 \\ 3\chi+\psi=5 \end{cases}$ **(Σ).** Το (Σ) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi+\psi=4 \\ \psi=5-3\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi+5-3\chi=4 \\ \psi=5-3\chi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -\chi=-1 \\ \psi=5-3\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=1 \\ \psi=5-3\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=1 \\ \psi=5-3\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=1 \\ \psi=2 \end{cases}$

2. Μέθοδος «Αντίθετων συντελεστών»

- «Έξυπνη» μέθοδος αλλά πολύ εύκολη σε λάθη

3. Μέθοδος «Σύγκρισης»

- Πολύ χρήσιμη μέθοδος για την επίλυση συστημάτων στη Β ! και Γ ! Λυκείου, ειδικά συστημάτων που προέρχονται από εξισώσεις γραμμών (κύκλος, έλλειψη κλπ), δες παράδειγμα :

Να λυθεί το $\begin{cases} 2\chi+\psi=4 \\ \psi=5-3\chi \end{cases}$ **(Σ).** Το (Σ) $\Leftrightarrow \begin{cases} \psi=4-2\chi \\ \psi=5-3\chi \end{cases}$ επειδή τα 1α μέλη είναι ίσα άρα $4-2\chi=5-3\chi$

$\Leftrightarrow 3\chi-2\chi=5-4 \Leftrightarrow \chi=1,$ και από την 2η εξίσωση έχω $\psi=5-3\cdot 1 \Leftrightarrow \psi=2$

4. Μέθοδος «Οριζουσών»

Δίνεται το **(Σ)** $\begin{cases} \alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1 \\ \alpha_2\chi+\beta_2\psi=\gamma_2 \end{cases}$. Έστω $D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_\chi=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_\psi=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ τότε :

- Αν $D \ne 0$ τότε $\chi_0=\frac{D_\chi}{D}$ $\psi_0=\frac{D_\psi}{D}$
- Αν $D=0$ τότε σε συμφέρει να αλλάξεις «διαδικασία» και ακολουθώντας την μέθοδο της αντικατάστασης οπότε θα καταλήξεις π. χ. σε αόριστη εξίσωση οπότε το σύστημα (Σ) είναι αόριστο, ή σε αδύνατη εξίσωση οπότε το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Συστήματα με περισσότερους αγνώστους.

Τέτοια συστήματα καλά είναι να λύνονται με την μέθοδο της αντικατάστασης, δηλαδή λύνεις μία από τις εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστάς στις άλλες, αυτό το συνεχίζεις μέχρι να μείνει μια εξίσωση με έναν άγνωστο. Την λύνεις και αρχίζεις τις αντικαταστάσεις με ανάποδη σειρά μέχρι να βρεις όλους τους αγνώστους.
Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι τα συστήματα που χρειάζονται «τέχνασμα» για να λυθούν.

Β 1. Συστήματα που λύνονται με τέχνασμα.

Περίπτωση 1 Να λυθούν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\quad \begin{aligned} \chi+\psi&=3\\ \psi+\omega&=5\\ \omega+\chi&=4 \end{aligned} \qquad\qquad (\Sigma_2)\quad \begin{aligned} \chi+\psi+\theta&=9 \quad (1)\\ \psi+\theta+\omega&=12 \quad (2)\\ \theta+\omega+\chi&=11 \quad (3)\\ \omega+\chi+\psi&=10 \quad (4) \end{aligned}$$

Για να λύσω ένα τέτοιο σύστημα προσθέτω όλες τις εξισώσεις και αφού βρω το $\chi+\psi+\omega$ στο (Σ_1) ή το $\chi+\psi+\theta+\omega$ στο (Σ_2) κατόπιν αφαιρώ από το $\chi+\psi+\omega$ κάθε μία εξίσωση οπότε υπολογίζεται ένας άγνωστος κάθε φορά π. χ. για το (Σ_2) αν προσθέσω τις 4 εξισώσεις κατά μέλη έχω $3\cdot\chi+3\cdot\psi+3\cdot\theta+3\cdot\omega=42 \Leftrightarrow$
$\chi+\psi+\theta+\omega=14$ (5) άρα (5) – (1) $\Leftrightarrow \omega=5$, (5) – (2) $\Leftrightarrow \chi=2$, (5) – (3) $\Leftrightarrow \psi=3$,
(5) – (4) $\Leftrightarrow \theta=4$. Όμοια και το (Σ_1).

Περίπτωση 2 Συστήματα της μορφής $(\Sigma)\ \begin{aligned}\chi\cdot\psi&=\alpha\\ \psi\cdot\omega&=\beta\\ \omega\cdot\chi&=\gamma\end{aligned}$ με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$ λύνονται αν πολλαπλασιάσω κατά μέλη τις 3 εξισώσεις οπότε έχω την $(\chi\cdot\psi\cdot\omega)^2=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ (1)
Στην (1) παρατηρούμε ότι $\chi\cdot\psi\cdot\omega\neq 0$ αφού είναι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$. Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις :

ι) $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma<0$ τότε το (Σ) δεν έχει λύση διότι $(\chi\cdot\psi\cdot\omega)^2\geq 0$ και
ιι) $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\geq 0$ άρα η (1) γίνεται $\chi\cdot\psi\cdot\omega=\sqrt{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$ (2) ή $\chi\cdot\psi\cdot\omega=-\sqrt{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$ (3) επομένως η λύση του συστήματος ανάγεται στη λύση δύο συστημάτων (1) και (2) το ένα και (1) και (3) το άλλο.
Τότε βρίσκω τα χ, ψ, ω αν κάθε φορά διαιρώ την (2) ή την (3) αντίστοιχα με κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος (Σ)

Γ. Συστήματα ειδικής μορφής.

Είναι τα συστήματα συνήθως με δυο εξισώσεις που η μια είναι 2ου βαθμού και η άλλη 1ου .
Σ' αυτές τις περιπτώσεις λύνεις την πρωτοβάθμια και αντικαθιστάς στη δευτεροβάθμια όπως πχ

Παράδειγμα : Να λυθεί το σύστημα $\begin{aligned}2\chi^2-\psi^2&=-2\\ \chi+\psi&=3\end{aligned}$

Λύνω την γραμμική εξίσωση ως προς έναν από τους δύο αγνώστους π. χ. τον χ και αντικαθιστώ στην άλλη έτσι έχω $\chi+\psi=3 \Leftrightarrow \chi=3-\psi$ τότε η άλλη γίνεται $2(3-\psi)^2-\psi^2=-2 \Leftrightarrow 2(9-6\psi+\psi^2)=-2$ $\Leftrightarrow 18-12\psi+2\psi^2-\psi^2+2=0 \Leftrightarrow \psi^2-12\psi+20=0 \Leftrightarrow \psi=2$ ή $\psi=10$ οπότε για το χ έχω $\chi=3-2=1$ ή $\chi=3-10=-7$. Άρα λύσεις τα (1 , 2) ή (–7 , 10).

11. Συναρτήσεις

Ορισμός :

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Οι συναρτήσεις παριστάνονται με τα μικρά Ελληνικά και Λατινικά γράμματα φ, θ, σ, f, g, h κτλ..

Αν φ είναι μια συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β τότε :

- Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της φ.

Αν με τη συνάρτηση φ το $\chi\in A$ αντιστοιχίζεται στο $\psi\in B$, το φ(χ) λέγεται **τιμή της φ στο** χ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- Το χ ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή,** ενώ το ψ, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο χ ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**
- Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές της φ για όλα τα χ ∈ Α, λέγεται **σύνολο τιμών** της φ και **το συμβολίζουμε με φ(Α).**

Για να ορίσεις μια συνάρτηση φ πρέπει να σου δοθούν τρία στοιχεία:

- **Το πεδίο ορισμού της Α**
- **Το σύνολο Β και**
- **Το φ(χ) για κάθε χ ∈ Α**

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση φ δίνοντας μόνον τον αλγεβρικό της τύπο.
Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- **Το πεδίο ορισμού Α της φ** είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του Ρ στα οποία το φ(χ) έχει νόημα. Δηλαδή αν υπάρχουν παρονομαστές θα εξαιρούμε από το Ρ εκείνα τα χ που μηδενίζουν τους παρονομαστές και αν υπάρχουν ρίζες θα δεχόμαστε εκείνα τα χ που κάνουν θετικές τις υπόριζες ποσότητες
- **Το σύνολο Β** είναι ολόκληρο το σύνολοΡ των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα : Να βρεις το πεδίο ορισμού, το πεδίο τιμών της συνάρτησης $\varphi(\chi)=\frac{1}{\chi-3}+\sqrt{\chi+2}$

Λύση Η παράσταση φ(χ) έχει νόημα, όταν: χ ≠ 3 (λόγω παρονομαστή) και ταυτόχρονα χ ≥ – 2 (λόγω ρίζας) . Άρα τελικά Π. Ο. είναι το Α = [– 2 , + ∞) – { 3 } .
Πεδίο τιμών της φ είναι ολόκληρο το Ρ .

- Όταν μια συνάρτηση είναι πολλαπλού τύπου βρίσκω το Π. Ο. ενώνοντας όλα τα επί μέρους διαστήματα.
- **Αν Μ(χ , ψ) σημείο του επιπέδου** τότε

Αν είναι το χ = 0 σημαίνει ότι **το Μ ανήκει** στον άξονα χ' χ.
Αν είναι το ψ = 0 σημαίνει ότι **το Μ ανήκει** στον άξονα ψ' ψ .
Το M_1 συμμετρικό του Μ ως προς τον χ' χ έχει συντεταγμένες **(χ , – ψ)**
Το M_2 συμμετρικό του Μ ως προς τον ψ' ψ έχει συντεταγμένες **(– χ , ψ)**
Το M_3 συμμετρικό του Μ ως προς το **Ο** έχει συντεταγμένες **(– χ , – ψ)**
Το M_4 συμμετρικό του Μ ως προς τη **διχοτόμο 1ου , 3ου** τεταρτημορίου έχει συντεταγμένες **(ψ , χ)**

- Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ τότε **η απόσταση** $(AB)=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$
- **Γραφική Παράσταση συνάρτησης φ με τύπο ψ = φ(χ) λέγεται το σύνολο των σημείων** $M(\chi,\varphi(\chi))$. Δηλαδή τα σημεία του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις της ψ = φ(χ).

Αν $\psi=\alpha_1\chi+\beta_1$ **και** $\psi=\alpha_2\chi+\beta_2$ **δυο ευθείες** ε_1 και ε_2 **τότε** $\begin{cases}\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 & \text{και}\\ \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\alpha_2=-1\end{cases}$

Ορισμοί

Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο **Α** θα λέγεται **άρτια**
εάν Για κάθε **χ ∈ Α** 1) **– χ ∈ Α**
και 2) **φ(– χ) = φ(χ)**

Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο **Α** θα λέγεται **περιττή**
εάν Για κάθε **χ ∈ Α** 1) **– χ ∈ Α**
και 2) **φ(– χ) = – φ(χ)**

Μια συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :
Για κάθε **χ_1,χ_2 ∈ Δ ισχύει :** Αν **$\chi_1<\chi_2$ τότε φ(χ_1) < φ(χ_2)**

Μια συνάρτηση **φ** θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ όταν :
Για κάθε **χ_1,χ_2 ∈ Δ ισχύει :** Αν **$\chi_1<\chi_2$ τότε φ(χ_1) > φ(χ_2)**

Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** στο **χ_0 ∈ Α** το **φ(χ_0)**
όταν : **φ(χ) ≤ φ(χ_0) για κάθε χ ∈ Α**

Μια συνάρτηση **φ** με Πεδίο Ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** στο **χ_0 ∈ Α** το **φ(χ_0)**
όταν : **φ(χ) ≤ φ(χ_0) για κάθε χ ∈ Α**

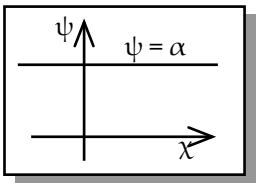
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- **Η Μελέτη συνάρτησης** περιλαμβάνει κυρίως τα εξής βήματα :

1. Βρίσκεις το Πεδίο Ορισμού.
2. Βρίσκεις το Πεδίο Τιμών (αν είναι εύκολο).
3. Εξετάζεις αν είναι άρτια ή περιττή (βρίσκεις τις συμμετρίες).
4. Εξετάζεις την μονοτονία της και βρίσκεις τα ακρότατα αν υπάρχουν.
5. Φτιάχνεις πίνακα αντίστοιχων τιμών.
6. Σχεδιάζεις τη γραφική της παράσταση.

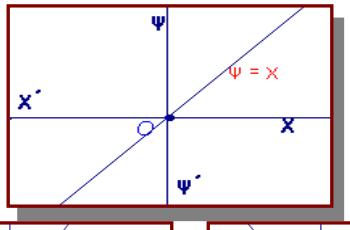
Βασικές πραγματικές συναρτήσεις

1. Σταθερή συνάρτηση f : A —> P με f(χ) = α



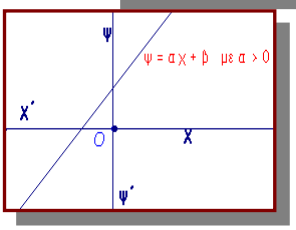
- Πεδίο Ορισμού D_f = P.
- Σύνολο τιμών f(P) = {α}
- Η γραφική παράσταση της f αν A=P είναι η ευθεία με εξίσωση **ψ=α**

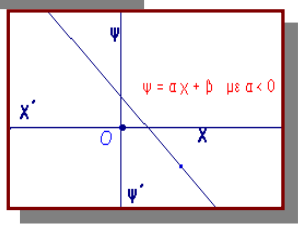
2. Ταυτοτική συνάρτηση f : A —> P με f(χ) = χ



- Πεδίο Ορισμού D_f = P
- Σύνολο τιμών f(P) = P .
- Η γραφική παράσταση της f αν D_f = P είναι η ευθεία με εξίσωση ψ = χ (διχοτόμος της γωνιάς χΟψ).
- Γνησίως αύξουσα

3. Συνάρτηση f : A —> P με f(χ) = αχ + β





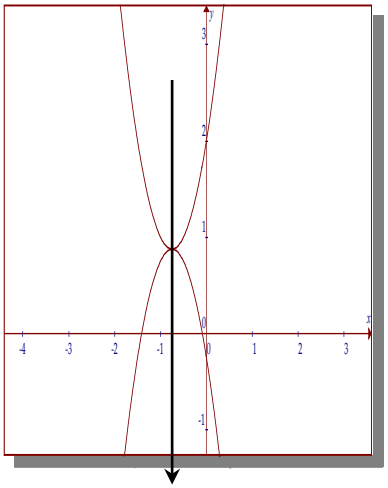
- Πεδίο Ορισμού D_f = P
- Σύνολο τιμών f(R) = P
- Η γραφική παράσταση της f αν D_f = P είναι η ευθεία με εξίσωση ψ = αχ + β.
- Γνησίως αύξουσα με α > 0 , Γνησίως φθίνουσα με α < 0.

4. Συνάρτηση 2ου βαθμού f : A —>P με f(x) = αχ² + βχ + γ , α ≠ 0

Γενικότερα για τις συναρτήσεις (x) = αχ² + βχ + γ με α > 0 και α < 0 ισχύουν

α) ψ = φ(χ) = αχ² +βχ + γ με α > 0 β) ψ = φ(χ) = αχ² +βχ + γ με α < 0

- Πεδίο Ορισμού **D_f = P**
- Σύνολο τιμών **f(R) = P**
- **Έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία χ = $-\frac{\beta}{2\alpha}$**



Γνησίως **φθίνουσα** στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$ | Γνησίως **αύξουσα** στο $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha})$

Γνησίως **αύξουσα** στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$ | Γνησίως **φθίνουσα** στο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$

Ελάχιστο το ψ = $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ | **Μέγιστο** το ψ = $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Παραβολή με κορυφή το $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Συνοπτικά

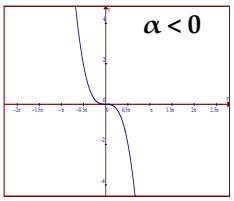
χ	- ∞	−β/2α	+ ∞
ψ	↘		↗

χ	- ∞	−β/2α	+ ∞
ψ	↗		↘

Ελάχιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ **Μέγιστο** $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$

5. Συνάρτηση 3ου βαθμού f : A —>P με f(x) = αχ³ , α ≠ 0

- Πεδίο Ορισμού **D_f = P** , Σύνολο τιμών **f(R) = P**



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

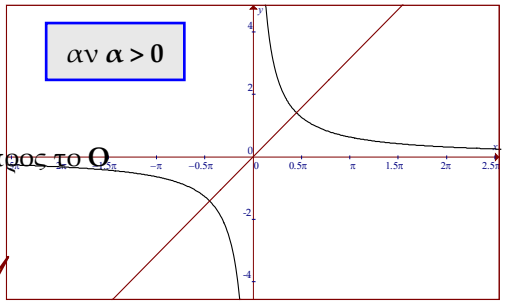
- Περιττή συνάρτηση , άρα έχει κέντρο συμμετρίας το **Ο**
- Με **α > 0** είναι γνησίως αύξουσα, ενώ με **α < 0** είναι γνησίως φθίνουσα

6. Πολυωνυμική συνάρτηση f : A —>P με $f(x) = \alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$
όπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in P$ και $\alpha_\nu \neq 0$ $\nu \in N$.

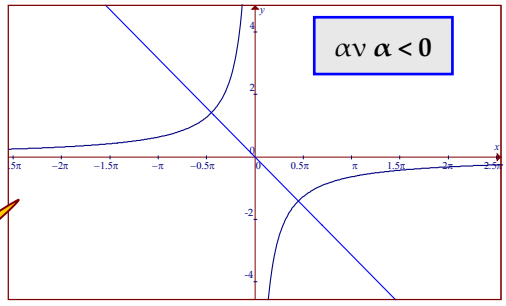
- Πεδίο Ορισμού $D_f = P$
- Σύνολο τιμών **f(R) = P**
- Είναι **άρτια** όταν περιέχει **μόνο άρτιες** δυνάμεις του χ και **περιττή όταν** περιέχει **μόνο περιττές** δυνάμεις του χ.
- Η γραφική παράσταση της f είναι ανάλογη με τη μορφή του πολυωνύμου
- Δεν έχει ασύμπτωτες

7. Η συνάρτηση f : A —> P* με $f(\chi) = \dfrac{\alpha}{\chi}$ όπου $0 \neq \alpha \in P$

- **Λέγεται ισοσκελής υπερβολή.**
- Πεδίο Ορισμού $D_f = P - \{0\} = P^*$
- Σύνολο τιμών **f(P) = P**
- Είναι **περιττή συνάρτηση**.
- Αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς το **Ο**
- Έχει ως ασύμπτωτες τους 4 ημιάξονες



- Αν **α > 0** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο (– ∞ , 0) και **γνησίως φθίνουσα** στο (0 , +∞)
- Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = P^*$ είναι
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ψ = χ (διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου)

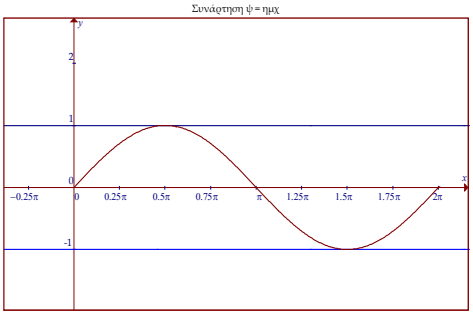


- Αν **α < 0** είναι **γνησίως αύξουσα** στο (– ∞ , 0) και **γνησίως αύξουσα** στο (0 , +∞)
- Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = P^*$ είναι
- Έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ψ = – χ (διχοτόμο 2ου και 4ου τεταρτημορίου)

8. Ρητή συνάρτηση f : A —> P με $f(\chi) = \dfrac{P(\chi)}{Q(\chi)}$ όπου P, Q πολυωνυμικές συναρτήσεις

- Πεδίο Ορισμού $D_f = P - \{\chi \in R : Q(x) = 0\}$
- Σύνολο τιμών **f(P) = P**
- Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = P$ είναι ανάλογη με τη μορφή της συνάρτησης

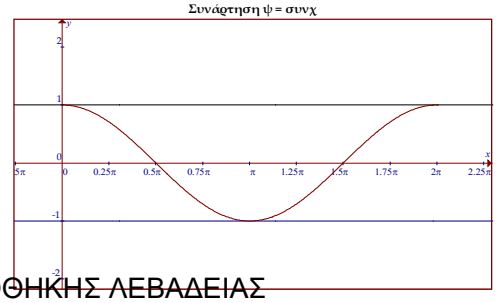
9. Συνάρτηση ημίτονο f : A —> P με f(χ) = ημχ



- Πεδίο Ορισμού $D_f = P$
- Σύνολο τιμών **f(P) = [– 1 , 1]**
- Είναι **περιττή** , είναι **περιοδική** με περίοδο **T = 2π**
- **Διάστημα μελέτης : Δ = [0 , 2π]** ή **Δ = [– π , π]**
- ***Γνησίως αύξουσα*** στα $\left[0 \ , \ \dfrac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{3\pi}{2} \ , \ 2\pi\right]$ και ***γνησίως φθίνουσα*** στα διαστήματα $\left[\dfrac{\pi}{2} \ , \ \pi\right]$ και $\left[\pi \ , \ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

10. Συνάρτηση συνημίτονο f : A —> P με f(χ) = συνχ

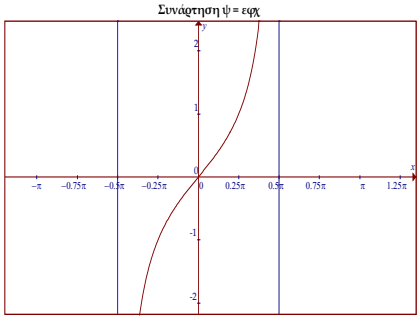
- Πεδίο Ορισμού $D_f = P$.
- Σύνολο τιμών **f(R) = [-1, 1]**



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

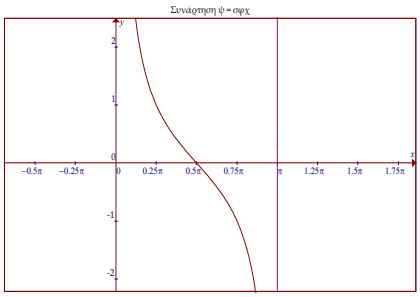
- Είναι **άρτια**, είναι **περιοδική** με περίοδο **T = 2π**
- **Διάστημα μελέτης** : **Δ = [0 , 2π]** ή **Δ = [– π , π]**
- ***Γνησίως φθίνουσα*** στο διάστημα **[0 , π]** και ***γνησίως αύξουσα*** στο διάστημα **[π , 2π].**

11. Συνάρτηση εφαπτόμενη f : A —> P με $f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi = \dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$



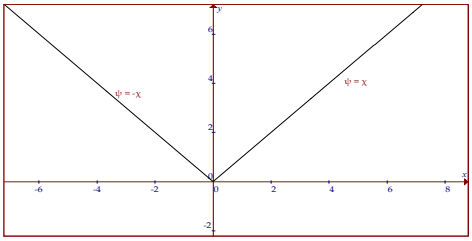
- Πεδίο Ορισμού $D_f = P - \left\{\kappa\cdot\pi + \dfrac{\pi}{2} \;,\; \kappa \in Z\right\}$
- Σύνολο τιμών **f(P) = P**
- Είναι **περιττή** , είναι **περιοδική** με περίοδο **T = π**
- **Διάστημα μελέτης** $\Delta = \left(-\dfrac{\pi}{2} \;,\; \dfrac{\pi}{2}\right)$ **(γνησίως αύξουσα σ' αυτό)**

12. Συνάρτηση συνεφαπτόμενη f : A —> P με $f(\chi) = \sigma\varphi\chi = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$



- Πεδίο Ορισμού $D_f = P - \{\kappa\cdot\pi \;,\; \kappa \in Z\}$
- Σύνολο τιμών **f(P) = P**
- Είναι **περιττή** , είναι **περιοδική** με περίοδο **T = π**
- **Διάστημα μελέτης Δ = [0 , π] (γνησίως φθίνουσα σ' αυτό)**

13. Συνάρτηση απόλυτη τιμή f : A —> P με $f(x) = |\chi| = \begin{cases} \chi & \text{αν } \chi \geq 0 \\ -\chi & \text{αν } \chi < 0 \end{cases}$



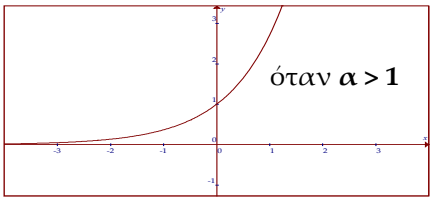
- Πεδίο Ορισμού **D_f = P**
- Σύνολο τιμών **f(R) = P**
- Είναι **άρτια**
- **Η γραφική παράσταση της f είναι 2 <u>ημιευθείες</u>**

(διχοτόμοι γωνίας I και II τεταρτημορίου)

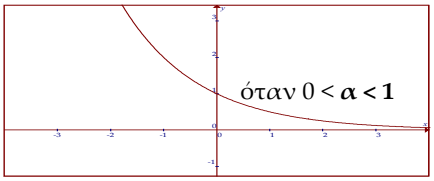
- **Βασικές ιδιότητες**

Δες προηγούμενα ιδιότητες απόλυτης τιμής

14. Εκθετική $f : A \to P^*_+$ με $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ $0 < \alpha \neq 1$



- Πεδίο Ορισμού **D_f = P**
- Σύνολο τιμών **f(R) = P^*_+ = (0, + ∞)**
- Η γραφική παράσταση της f είναι :
- **Βασικές ιδιότητες**

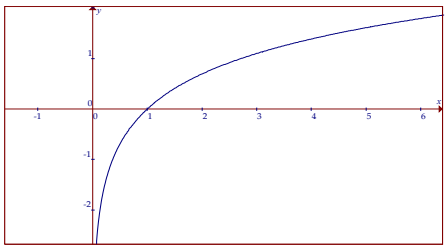


1. **Η f είναι συνάρτηση "1 – 1 και επί"**
2. **Αν α = 1 η f είναι σταθερή**
3. **Αν α > 1 η f είναι γνησίως αύξουσα στο P**
4. **Αν 0 < α < 1 η f είναι γνησίως φθίνουσα στο P**
5. **Αν χ ∈R τότε αχ > 0 (γι' αυτό και f(A) = P *)**

<u>Όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ ισχύουν και για την συνάρτηση $f(\chi) = e^{\chi}$</u>

15. Λογαριθμική συνάρτηση $f : P^*_+ \to P$ με f(x) = logx,

Λογαριθμική συνάρτηση $f : P^*_+ \to P$ με f(x) = lnx



- Πεδίο Ορισμού **$D_f = P^*_+$ = (0, + ∞)**
- Σύνολο τιμών **f(P) = P**
- Η γραφική παράσταση της f είναι :
- **Βασικές ιδιότητες**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **Οι συναρτήσεις log χ, lnχ είναι "1 – 1 και επί"**
2. **Είναι γνησίως αύξουσες στο P_+^* .**
3. **Για κάθε $\chi \in P_+^*$ ισχύουν οι ισοδυναμίες** $\ln x = \psi \Leftrightarrow \chi = e^{\psi}$ και $\log_\alpha x = \psi \Leftrightarrow \chi = \alpha^{\psi}$

Δες επίσης (στα προηγούμενα) τις ιδιότητες λογαρίθμων

16. **Η συνάρτηση f : A—>P , $f(\chi) = \chi^{\alpha}$, $\alpha \in P$**

- Πεδίο Ορισμού : Εξαρτάται από το α π. χ. η $\varphi(\chi)=\chi^{\sqrt{3}}$ και η $\varphi(\chi)=\chi^{\frac{3}{5}}$ έχουν $D_f = P_+$ όπως και οι περισσότερες συναρτήσεις αυτής της μορφής, υπάρχουν και εξαιρέσεις όπως π.χ. η $\varphi(\chi)=\sqrt[5]{\chi^4}$ η οποία έχει $D_f = P$
- Σύνολο τιμών $f(P) = P_+$
- Η γραφική παράσταση της f δεν είναι συγκεκριμένη, εξαρτάται από την τιμή του α.

12. Πολυώνυμα

Ορισμός : Κάθε αλγεβρική παράσταση στην οποία δεν υπάρχει παρονομαστής ή ρίζα που να εξαρτώνται από τη μεταβλητή χ λέγεται **ακέραιο πολυώνυμο του χ** και συμβολίζεται :

$$P(\chi) = \alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi^1 + \alpha_0$$

- Έστω τα πολυώνυμα : $\alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\chi^1 + \alpha_0$ και $\beta_\mu \chi^\mu + \beta_{\mu-1}\chi^{\mu-1} + \cdots + \beta_1\chi^1 + \beta_0$ $\nu \geq \mu$.

Αυτά θα λέγονται «**εκ ταυτότητος ίσα**» ή απλά **ίσα πολυώνυμα για κάθε $\chi \in \Re$** εάν και μόνο εάν : $\alpha_\nu = \beta_\mu$, $\alpha_{\nu-1} = \beta_{\mu-1}$, $\cdots$ $\alpha_0 = \beta_0$ και $\alpha_{\mu+1} = \alpha_{\mu+1} = \cdots = \alpha_\nu = 0$ δηλαδή (με λόγια) τα πολυώνυμα θα είναι ίσα για κάθε $\chi \in \Re$ μόνο όταν **οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων στα δυο πολυώνυμα είναι ίσοι** και αν «περισσεύουν» στο ένα κάποιοι όροι τότε αυτοί θα έχουν συντελεστή 0

- **Μηδενικό λέγεται το πολυώνυμο που έχει όλους τους συντελεστές του ίσους με 0**
- **Βαθμός του πολυωνύμου λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης του όρου που έχει συντελεστή σίγουρα διαφορετικό του μηδενός (≠ 0). Αλλιώς κάνεις υποθέσεις)**
- **Για τη διαίρεση ισχύει η ταυτότητα Δ(χ) = δ(χ).π(χ) + υ(χ)** όπου **υ(χ) μηδενικό πολυώνυμο (σταθερός αριθμός) ή πολυώνυμο μικρότερου βαθμού από τον διαιρέτη δ(χ)**
- **Αν ο διαιρέτης ενός πολυωνύμου P(χ) είναι δ(χ) = χ – ρ τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται :** $\Pi(\chi) = (\chi - \rho).\pi(\chi) + \upsilon$ **και το** $\upsilon = P(\rho)$
- **Αν το ρ είναι <u>ακέραια</u> ρίζα του P(χ) τότε το ρ θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου.**

13. Πρόοδοι

A) Αριθμητική πρόοδος ή πρόοδος κατά διαφορά :

Ορισμός : Αριθμητική πρόοδος είναι η ακολουθία αριθμών στην οποία κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού ω : $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$

Αν $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega \Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \omega$ (εξ' ου και η ονομασία πρόοδος κατά διαφορά)

- $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$
- $\Sigma_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu$ ή $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\cdot\nu$
- Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $2\beta = \alpha + \gamma$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

B) Γεωμετρική πρόοδος ή πρόοδος κατά πηλίκο :

Ορισμός : **Γεωμετρική πρόοδος είναι η ακολουθία αριθμών $\neq 0$ στην οποία κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε αριθμό $\lambda \neq 0$ συμβολικά $\alpha_\nu = \lambda \cdot \alpha_{\nu-1}$**

Αν $\alpha_\nu = \lambda \cdot \alpha_{\nu-1} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \lambda$ (εξ' ου και η ονομασία πρόοδος κατά πηλίκο)

- $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$
- $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$, **αν** $|\lambda| < 1$ **τότε** $\Sigma_\infty = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$
- Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρική ς προόδου τότε $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

14. Λογάριθμοι

Έστω η εξίσωση $\alpha^\chi = \theta$ όπου $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$. Αποδεικνύεται ότι έχει μοναδική λύση.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $\alpha^\chi = \theta$** ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση το α**

και συμβολικά είναι : $\alpha^\chi = \theta \Leftrightarrow \chi = \log_\alpha \theta$

Δηλαδή ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον **α** για να βρούμε το θ.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $10^\chi = \theta$** ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση το 10**

και συμβολικά είναι : $10^\chi = \theta \Leftrightarrow \chi = \log\theta$

Δηλαδή ο $\log\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το **10** για να βρούμε το θ.

Ορισμός : **Τη μοναδική λύση της εξίσωσης $e^\chi = \theta$** ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση το e**

και συμβολικά είναι : $e^\chi = \theta \Leftrightarrow \chi = \ln\theta$

Δηλαδή ο $\ln\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον **e** για να βρούμε το θ.

Ιδιότητες

i. $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$	$\log 10^\chi = \chi$	$\ln e^\chi = \chi$	Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\beta \neq 1$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$
ii. $\alpha^{\log_\alpha \chi} = \chi$	$\alpha^{\log \chi} = \chi$	$e^{\ln \chi} = \chi$	
iii. $\log_\alpha 1 = 0$	$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$	
iv. $\log_\alpha \alpha = 1$	$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$	

- Αν $0 < \alpha \neq 1$, $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in P$ ισχύουν οι ιδιότητες :

Λογάριθμοι με βάση το α	Λογάριθμοι με βάση το 10	Λογάριθμοι με βάση e
i. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$	$\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$	$\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$
ii. $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$	$\log \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log\theta_1 - \log\theta_2$	$\ln \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \ln\theta_1 - \ln\theta_2$
iii. $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$	$\log\theta^\kappa = \kappa \cdot \log\theta$	$\ln\theta^\kappa = \kappa \cdot \ln\theta$

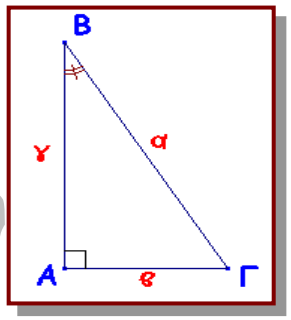
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω .

$$\eta\mu B = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\beta}{\alpha}\ ,\ \sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Προσκείμενη κάθετη}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\beta}{\gamma}\ ,\ \sigma\varphi B = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Προσκείμενη κάθετη}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

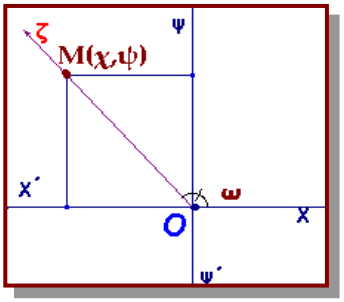


Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω όπου $0^o \le \omega \le 360^o$ και γωνίας μεγαλύτερης από 360°

Αν Μ στην τελική πλευρά της γωνίας τότε $OM = \rho = \sqrt{\chi^2 + \psi^2} > 0$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{Τεταγμένη του Μ}}{\text{Απόσταση ΟΜ}} = \frac{\psi}{\rho}\ ,\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{Τετμημένη του Μ}}{\text{Απόσταση ΟΜ}} = \frac{\chi}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{Τεταγμένη του Μ}}{\text{Τετμημένη του Μ}} = \frac{\psi}{\chi}, \chi \ne 0\ \ \sigma\varphi\omega = \frac{\text{Τετμημένη του Μ}}{\text{Τεταγμένη του Μ}} = \frac{\chi}{\psi}, \psi \ne 0$$



Οι λόγοι $(\frac{\psi}{\rho}, \frac{\chi}{\rho}, \frac{\psi}{\chi}, \frac{\chi}{\psi})$ εξαρτώνται **αποκλειστικά** από την γωνία ω και όχι από την θέση του Μ.

Τύπος μετατροπής μοίρες ⟷ ακτίνια $\frac{\mu^o}{180^o} = \frac{\alpha}{\pi}$

Πίνακας αντιστοίχισης μοίρες ⟷ ακτίνια για «γνωστές» γωνίες

μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Πίνακας Τριγωνομετρικών αριθμών «γνωστών» γωνιών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Μοίρες	Ακτίνια	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Για να «στήσω» το πινακάκι φτιάχνω το ημίτονο από τον τύπο $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}$ με $\omega = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$, $\kappa = 0, 1, 2, 3, 4$ δηλ $\eta\mu 0^0 = 0$, $\eta\mu 30^0 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$, $\eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 90^0 = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Το συνω είναι το ημω αναποδογυρισμένο και η εφαπτομένη, συνεφαπτομένη προκύπτουν από τους τύπους

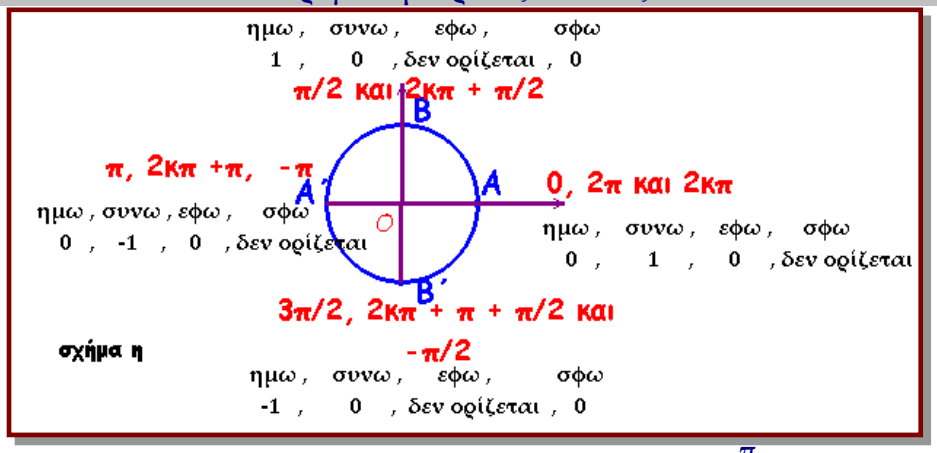
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \boxed{\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}$$

Σχέσεις γωνιών και τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνίες Αντίθετες ω και $-\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega, \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$ Τα ίδια συνημίτονα και αντίθετα όλα τα άλλα
Παραπληρωματικές γωνίες ω και $\pi - \omega$	$\eta\mu(\pi-\omega) = \eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu(\pi-\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\varphi(\pi-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega, \sigma\varphi(\pi-\omega) = -\sigma\varphi\omega$ Τα ίδια ημίτονα και αντίθετα όλα τα άλλα
Γωνίες με διαφορά 180° ή π ω και $\pi + \omega$	$\eta\mu(\pi+\omega) = -\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu(\pi+\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega, \varepsilon\varphi(\pi+\omega) = \varepsilon\varphi\omega, \sigma\varphi(\pi+\omega) = \sigma\varphi\omega$ Αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα ίδια όλα τα άλλα
Γωνίες Συμπληρωματικές ω και $\frac{\pi}{2} - \omega$	$\eta\mu(\frac{\pi}{2}-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega) = \eta\mu\omega, \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-\omega) = \sigma\varphi\omega, \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-\omega) = \varepsilon\varphi\omega$ Το ημ της μιας ίσο με το συν της άλλης, η εφ ίση με τη σφ της άλλης
Γωνίες ω και $\frac{\pi}{2} + \omega$	$\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\omega) = -\eta\mu\omega, \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega) = -\sigma\varphi\omega, \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

Τριγωνομετρικός κύκλος



Κάθε γωνία θ γράφεται σε μία από τις μορφές $\theta = \kappa\pi \pm \omega$ ή $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \pm \omega$ $\kappa \in Z$, άρτιος ή περιττός και ω στο 1^0 τεταρτημόριο). Βρίσκεις σε ποιο τεταρτημόριο τελειώνει η γωνία θ και αν η μορφή είναι :

$\theta = \kappa\pi \pm \omega$ (δηλαδή δεν περιέχεται $\frac{\pi}{2}$ στην μορφή της) τότε ανάλογα με τα πρόσημα των τριγωνομετρικών της αριθμών αυτοί θα είναι **ίδιοι** (όσοι είναι θετικοί) ή **αντίθετοι** (όσοι είναι αρνητικοί) με της ω.

Ενώ αν η μορφή είναι $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \pm \omega$ (δηλαδή περιέχεται $\frac{\pi}{2}$ στην μορφή της) τότε εκτός από πιθανή αλλαγή στο πρόσημο θα έχω και αλλαγή στον τριγωνομετρικό αριθμό δηλαδή

$\eta\mu\theta = \pm\, \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \pm\, \eta\mu\theta$ **και** $\varepsilon\varphi\theta = \pm\, \sigma\varphi\omega$, $\sigma\varphi\theta = \pm\, \varepsilon\varphi\theta$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Συνάρτηση ημίτονο

ημχ : Π. Ο. Α = **R**, **περιττή**, **περιοδική** με περίοδο **2π.** **Η** $\varphi(\chi) = \alpha \cdot \eta\mu(\kappa \cdot \chi) + \beta$ έχει **μέγιστο** το $\beta + |\alpha|$ και **ελάχιστο** το $\beta - |\alpha|$, περίοδο $\frac{2\pi}{|\kappa|}$

Πίνακας μεταβολών του ημχ

χ	0^0		90^0		180^0		270^0		360^0
ημχ	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

Συνάρτηση συνημίτονο

συνχ : Π. Ο. **Α =R, ΑΡΤΙΑ, περιοδική** με περίοδο **2π.** **Η** $\varphi(\chi) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot \chi) + \beta$ έχει **μέγιστο** το $\beta + |\alpha|$ και **ελάχιστο** το, $\beta - |\alpha|$, περίοδο $\frac{2\pi}{|\kappa|}$

Πίνακας μεταβολών του συνχ

χ	0^0		90^0		180^0		270^0		360^0
συνχ	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συνάρτηση εφαπτομένη

εφχ : Π. Ο. $A = R - \{ \kappa\pi + \pi/2 \}$, περιττή, περιοδική με περίοδο π.

Η $\varphi(\chi) = \alpha \cdot \varepsilon\varphi(\kappa \cdot \chi) + \beta$ έχει περίοδο $\frac{\pi}{|\kappa|}$

Πίνακας μεταβολών της εφχ

χ	-90^0	0^0	90^0
εφχ	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Συνάρτηση συνεφαπτομένη

σφχ : Π. Ο. $A = R - \{ \kappa\pi \}$, περιττή, περιοδική με περίοδο π.

Η $\varphi(\chi) = \alpha \cdot \sigma\varphi(\kappa \cdot \chi) + \beta$ έχει περίοδο $\frac{\pi}{|\kappa|}$

Πίνακας μεταβολών της σφχ

χ	0^0	90^0	180^0
σφχ	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

$$\eta\mu\chi = \alpha \text{ με } |\alpha| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha \text{ με } |\alpha| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \theta$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\varphi\chi = \alpha \\ \sigma\varphi\chi = \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi = 2\kappa\pi + \theta \text{ ή } \chi = 2\kappa\pi + \pi + \theta \\ \text{συνοπτικά } \chi = \lambda\pi \end{pmatrix}$$

1) $\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$	11) $\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi$
2) $\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{2}$	12) $\sigma\upsilon\nu\chi = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi$
3) $\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi$	13) $\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
4) $\eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$	14) $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$
5) $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$	15) $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$
6) $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$	16) $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$
7) $(\varepsilon\varphi\chi = 1$ ή $\sigma\varphi\chi = 1) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$	17) $(\varepsilon\varphi\chi = -1$ ή $\sigma\varphi\chi = -1) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$
8) $\varepsilon\varphi\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi$ (η σφχ δεν ορίζεται)	18) $\sigma\varphi\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ (η εφχ δεν ορίζεται)
9) $\varepsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$	19) $\sigma\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$
10) $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$	20) $\sigma\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

Οι γωνίες $\varphi = 2\kappa\cdot\pi + \omega$ και ω έχουν **όλους τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς ίδιους** και επιπλέον οι γωνίες $\varphi = \kappa\cdot\pi + \omega$ και ω έχουν **ίδιες εφαπτόμενες και συνεφαπτόμενες**

$\eta\mu(2\kappa\cdot\pi + \omega) = \eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\cdot\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\varepsilon\varphi(2\kappa\cdot\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(2\kappa\cdot\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$

αλλά και $\varepsilon\varphi(\kappa\cdot\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(\kappa\cdot\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Βασικοί τύποι μετασχηματισμών τριγωνομετρικών αριθμών

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \quad 1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}, \quad 1 + \sigma\varphi^2\omega = \frac{1}{\eta\mu^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2\omega}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\ ,\quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\quad \varepsilon\varphi\omega\,\sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}\ \text{και}\ \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega}$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος – Διαφοράς και διπλασίου τόξου

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$	$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$
$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$	$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$	$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$
$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}$
$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

Το 2α είναι διπλάσιο του α
Το 4α είναι διπλάσιο του 2α
Το 6α είναι διπλάσιο του 3α
Το $2\kappa\alpha$ είναι διπλάσιο του $\kappa\alpha$
όταν $\kappa = 1, 2, 3, \cdots$

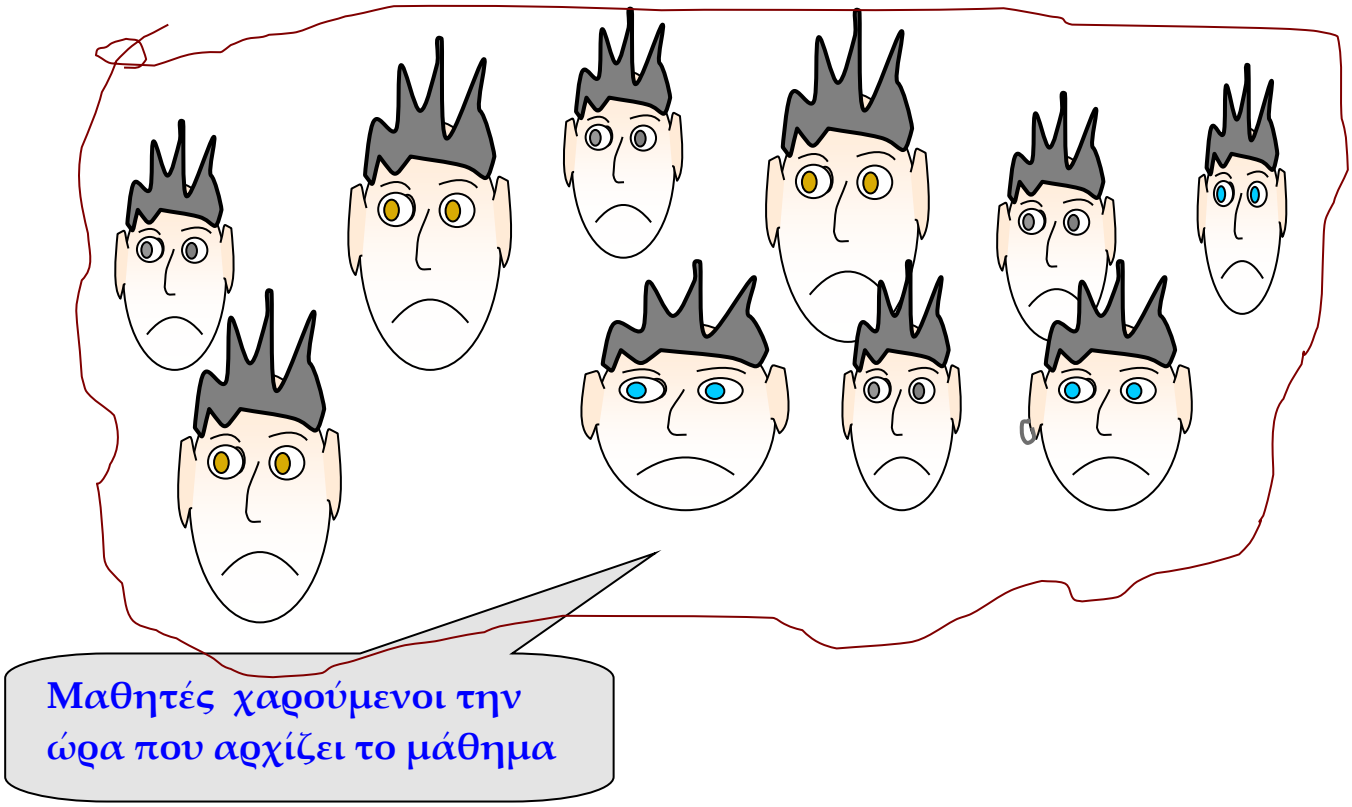
Το α είναι διπλάσιο του $\dfrac{\alpha}{2}$
Το $\dfrac{\alpha}{2}$ είναι διπλάσιο του $\dfrac{\alpha}{4}$
Το $\dfrac{\alpha}{4}$ είναι διπλάσιο του $\dfrac{\alpha}{8}$
Το $\dfrac{\alpha}{\kappa}$ είναι διπλάσιο του $\dfrac{\alpha}{2\kappa}$
όταν $\kappa = 1, 2, 3, \cdots$

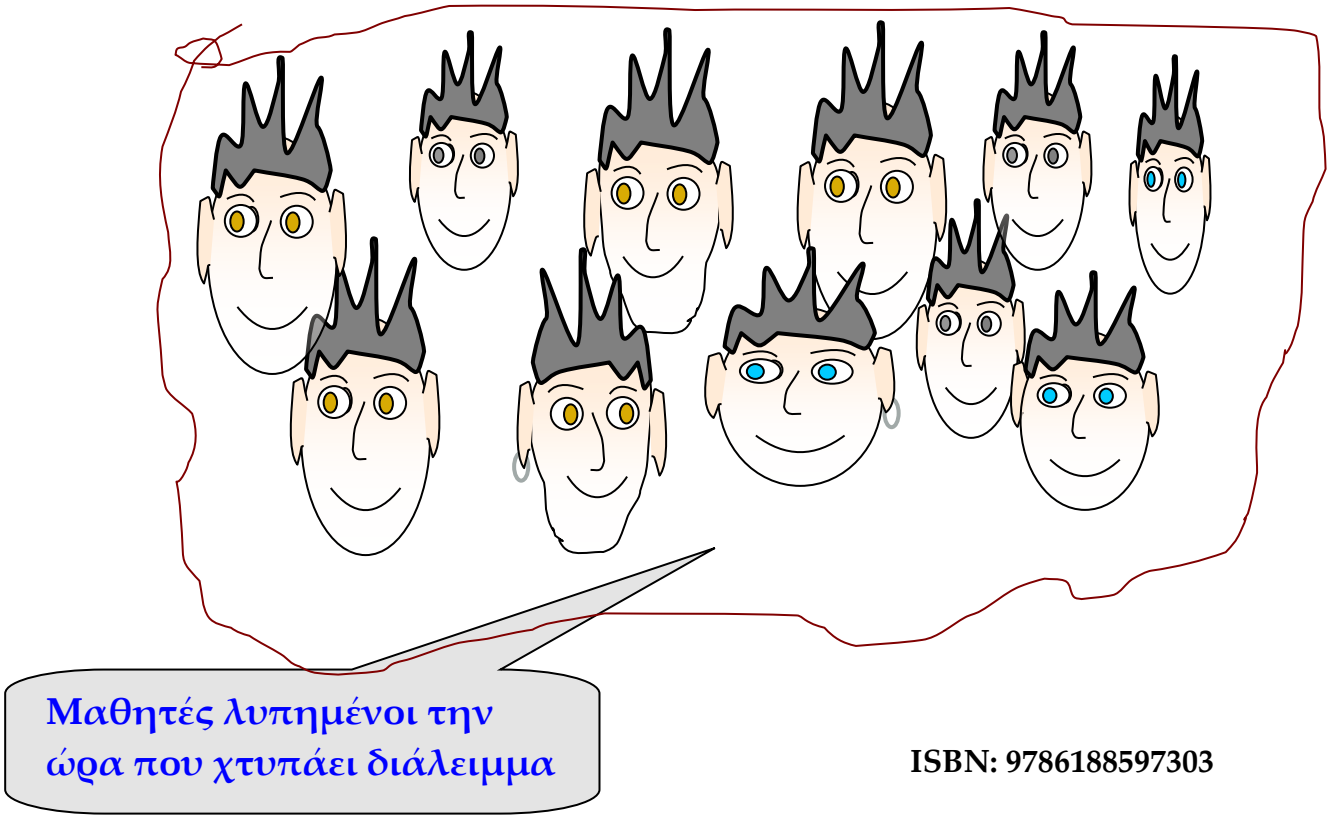
Μόνον ένας τρόπος υπάρχει για να μάθεις αυτό που έχεις καταλάβει :

Να το διαβάσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η αντίφαση των συναισθημάτων ή το συναίσθημα της αντίφασης





ISBN: 9786188597303

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ