Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέματα Β' Λυκείου

Άλγεβρα
Γεωμετρία
Διανύσματα

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των τόπων των Πανελληνίων εξετάσεων 1999 - 2004 μέχρι σήμερα, αναλυτικά με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αφιερωμένο

σε όλους εκείνους που θέλουν

να προσπαθήσουν

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα θέματα Β Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

© copyright κειμένου και εικονογράφησης: **Δαμιανός Μωραΐτης**
© copyright για την παρούσα έκδοση:
Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς»**

ISBN: 9786188597358

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε το 2007, και εκδίδεται σήμερα στο πλαίσιο της ψηφιοποίησης όλων όσων έγραψα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών για 42 συνεχόμενα χρόνια, γιατί η τεχνολογία μας παρέχει αυτήν την ευκολία. με σκοπό να καλύψει τα θέματα των εξετάσεων της Β Λυκείου που τότε υπήρχαν (1999 – 2004). Δεν εκδόθηκε ποτέ σε έντυπη μορφή γιατί ήταν δυσβάσταχτο κόστος.

Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζεται για ***πρώτη φορά,*** **μια *μοναδική στην κυριολεξία συλλογή*** που περιέχει:

Όλα τα θέματα των Μαθηματικών που δόθηκαν στην Άλγεβρα, την Γεωμετρία και τα Διανύσματα (κατεύθυνση) **από το 1999 έως το 2004**

Σε αυτή τη **μοναδική** και **πρωτοεμφανιζόμενη** συλλογή, περιλαμβάνονται **ΟΛΑ** τα θέματα Μαθηματικών που δόθηκαν σε **ΟΛΕΣ** τις Πανελλήνιες Εξετάσεις της Β' Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό διανέμεται δωρεάν για διδακτικούς σκοπούς

Λιβαδειά 2022

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Περιεχόμενα

	σελίδα
Κεφάλαιο 1 Τριγωνομετρία	9
Κεφάλαιο 1 Τριγωνομετρία Απαντήσεις	27
Κεφάλαιο 2 Πολυώνυμα	44
Κεφάλαιο 2 Πολυώνυμα Απαντήσεις	57
Κεφάλαιο 3 Πρόοδοι	77
Κεφάλαιο 3 Πρόοδοι Απαντήσεις	95
Κεφάλαιο 4 Εκθετικές -Λογαριθμικές	117
Κεφάλαιο 4 Εκθετικές - Λογαριθμικές Απαντήσεις	125

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Μωραΐτης Δαμιανός

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Όποιος, χωρίς να το γητήσεις, σου δίνει κάτι σήμερα, θα σου γητήσει πολλά αύριο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 1 Τριγωνομετρία

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος από την κορυφή Α είναι ίση με την πλευρά γ .

Να δείξετε ότι :

1. εφΒ = 3εφΓ

2. ημΑ = 2ημ(Β – Γ)

2. ***πανελλήνιες 1975***

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\beta = 4\gamma\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{A}{2}\right)\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)$.

Να δείξετε ότι :

1. Α = 2Γ

2. $\alpha^2 = \beta\gamma + \gamma^2$

3. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης: $\frac{3-4\text{συν}\chi}{2+4\text{συν}\chi}+\frac{2+\eta\mu\chi}{1-2\eta\mu\chi}>1$ στο διάστημα [0 , 2π].

ΘΕΜΑ 4ο

1. Να γράψετε την παράσταση : Α = ημ2χ + κ · συν2χ όπου **κ** σταθερός πραγματικός αριθμός στη μορφή Α= λ· ημψ όπου **λ** σταθερός αριθμός και ψ συνάρτηση του χ.

2. Να δείξετε ότι η παράσταση Β = (ημχ + συνχ)(ημχ + 2συνχ) μπορεί να γραφεί στη μορφή : Β= μ + ν· ημω όπου μ, ν σταθεροί αριθμοί και ω συνάρτηση του χ.

Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της Β για χ μεταβαλλόμενο στο διάστημα [0 , 2π].

4. ***πανελλήνιες 1978***

ΘΕΜΑ 3ο

1. Να δείξετε την ταυτότητα :

$\text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta + \text{συν}^2\gamma + \text{συν}^2(\alpha+\beta+\gamma) - 2 = 2\text{συν}(\alpha+\beta)\text{συν}(\beta+\gamma)\text{συν}(\gamma+\alpha)$.

2. Αν συνα = εφψ·εφω, συνβ = εφω·εφχ, συνγ = εφχ·εφψ και α + β + γ = π να δείξετε ότι :

$\eta\mu^2\chi + \eta\mu^2\psi + \eta\mu^2\omega = 1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Αν ω, φ, θ είναι αντίστοιχα οι οξείες γωνίες που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ τότε να δείξετε ότι :

1. $\sigma\varphi\theta = 2\sigma\varphi A + \sigma\varphi B$

2. $\sigma\varphi\varphi = 2\sigma\varphi A + \sigma\varphi\Gamma$

3. $2\sigma\varphi\omega = |\sigma\varphi B - \sigma\varphi\Gamma|$

4. $\sigma\varphi A = \dfrac{4\mu_\alpha^2 - \alpha^2}{4\alpha\mu_\alpha \eta\mu\omega}$.

5. ***πανελλήνιες 1979***

Το θέμα αφορά τις εξετάσεις που ακυρώθηκαν λόγω της διαρροής των θεμάτων.

ΘΕΜΑ 3ο

1. Από την **εφα** ενός τόξου **α** να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο, συνημίτονο του τόξου **2·α** .

2. Αν $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\varepsilon\varphi\dfrac{\beta}{2} = t$, $t \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το συν(α – β).

6. ***πανελλήνιες 1979***

ΘΕΜΑ 1ο

Να δειχθεί η ισότητα : $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$.

7. ***πανελλήνιες 1979***

Το θέμα αφορά τις εξετάσεις τις Γ΄ Λυκείου γιατί εκεί επίσης τριγωνομετρία.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2}(-1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+(4-4\sqrt{2})\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x = 0$

8. ***πανελλήνιες 1981***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από το συν2α να υπολογιστούν το ημα και συνα

β. Να αποδείξετε την ισότητα: $\varepsilon\varphi(45^\circ - \alpha) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. ***πανελλήνιες 1982***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν για τις γωνίες α, β, γ ισχύει η σχέση α + β + γ = κπ , όπου **κ** ακέραιος να δειχθεί ότι :

εφα + εφβ + εφγ = εφα·εφβ·εφγ . Δίνεται ότι $\alpha,\beta,\gamma \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

(έγινε παράδειγμα στο τρέχον σχολικό βιβλίο)

β. Για τις γωνίες χ, ψ να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση :

$$(\varepsilon\varphi^2\chi+\varepsilon\varphi^2\psi)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\chi}+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\psi}\right)\geq(\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi\chi}+\frac{1}{\varepsilon\varphi\psi}\right) \text{ με } \chi,\psi\neq\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in Z .$$

Πότε η σχέση ισχύει σαν ισότητα ; Εκτός ύλης

10. ***πανελλήνιες 1983***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδειχθεί ότι αν για τις γωνίες Α, Β, Γ ισχύει : Α + Β + Γ = π τότε θα ισχύει :

$\text{συν}^2A+\text{συν}^2B+\text{συν}^2\Gamma+2\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma=1$.

Β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\text{συν}^4\frac{\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$.

Τετάρτη 16 Ιουνίου

11. ***πανελλήνιες 1999***

ΘΕΜΑ 3ο

α. Να αποδείξετε ότι : ημ6χ + ημ4χ =2ημ5χσυνχ

Μονάδες 10

β. Να λύσετε την εξίσωση : ημ6χ + ημ4χ + 4ημ5χ = 0

Μονάδες 15

Το θέμα είναι σήμερα εκτός ύλης.

12. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999***

Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε τους τύπους :

α) ημ2α = 2ημα·συνα

Μονάδες 5

β) $\text{συν}2\alpha=\text{συν}^2\alpha-\text{ημ}^2\alpha=1-2\text{ημ}^2\alpha$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονάδες 7,5

Β. α) Να δείξετε ότι : $2\eta\mu 15^0 \sigma\upsilon\nu 15^0 = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 3

β) Να δείξετε ότι : $1 - 2\eta\mu^2 15^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες 3

γ) Η παράσταση $\left(\eta\mu^2 15^0 - \sigma\upsilon\nu^2 15^0\right)$ είναι ίση με

Α. 1 Β. $\frac{1}{2}$ Γ. 0 Δ. -1 Ε. $-\frac{1}{2}$

Μονάδες 6,5

13. ***Εσπερινά 2000*** ***Δευτέρα 29 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi = \eta\mu^2\chi$

Μονάδες 15

β. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**2.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μια λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi = \frac{3}{4}$ είναι η :

Α. $\chi = \frac{\pi}{3}$ **Β.** $\chi = 0$ **Γ.** $\chi = \frac{\pi}{6}$ **Δ.** $\chi = \frac{\pi}{4}$ **Ε.** $\chi = \frac{\pi}{2}$

Μονάδες 10

14. ***πανελλήνιες 2000*** ***Πέμπτη 22 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi - 2\eta\mu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi$, όπου χ πραγματικός αριθμός.

α. Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(\chi) = \rho\cdot\eta\mu(2\chi + \varphi) + \kappa$, όπου ρ, φ, κ πραγματικοί αριθμοί και $\rho > 0$. **Τον θέμα είναι σήμερα εκτός ύλης.**

Μονάδες 9

β. Αν $f(\chi) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ να βρεις για ποιες τιμές του χ η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

Μονάδες 6

γ. Να λύσεις την εξίσωση $f(\chi) - f\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ στο διάστημα $[0\ ,\ \pi]$.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. **επαναληπτικές 2000** **Σεπτέμβριος**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = -\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$, όπου **χ** πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή : $f(\chi) = \sqrt{2}\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right)$

Μονάδες 15

β. Να λυθεί η εξίσωση $-\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}$

Μονάδες 10

16. **εσπερινά επαναληπτικές 2000** **Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί και ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στο σωστό ανάπτυγμα.

ΣΤΗΛΗ Ι		ΣΤΗΛΗ ΙΙ	
Α.	ημ(α + β)	**1.**	ημα ημβ – συνα συνβ
Β.	ημ(α – β)	**2.**	συνα συνβ – ημα ημβ
Γ.	συν(α – β)	**3.**	ημα συνβ + συνα ημβ
Δ.	συν(α + β)	**4.**	συνα συνβ + ημα ημβ
		5.	ημα συνβ – συνα ημβ

Μονάδες 6

2) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα των παρακάτω ισοτήτων και δίπλα σε κάθε γράμμα να σημειώσετε αν η αντίστοιχη ισότητα είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

α) $\eta\mu2\alpha = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$ **β)** $\eta\mu2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$

γ) $\sigma\upsilon\nu2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ **δ)** $\sigma\upsilon\nu2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha - 1$

Μονάδες 6,5

Β. **1)** Να δείξετε ότι : $\eta\mu70^\circ\,\sigma\upsilon\nu20^\circ + \sigma\upsilon\nu70^\circ\,\eta\mu20^\circ = 1$

Μονάδες 6,5

2) Να δείξετε ότι : $2\,\eta\mu22{,}5^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. ***εσπερινά 2001*** ***Δευτέρα 28 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Να αποδείξετε ότι: ημ2α = 2 ημα συνα Μονάδες 4,5

β. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης Ι** είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης ΙΙ**.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι		**Στήλη ΙΙ**	
Α.	εφ(α + β)	**1.**	$2\,συν^2α - 1$
Β.	συν2α	**2.**	$2\,ημ^2α - 1$
Γ.	συν(α – β)	**3.**	συνα·συνβ + ημα· ημβ
Δ.	ημ(α + β)	**4.**	2 συνα
		5.	$\frac{εφα+εφβ}{1-εφα\cdot εφβ}$
		6.	ημα· συνβ + συνα· ημβ

Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{εφ20^0 + εφ25^0}{1-εφ20^0\cdot εφ25^0}$

Μονάδες 3

β) $ημ15^0\cdot συν15^0$

Μονάδες 3,5

γ) $συν55^0\cdot συν10^0 + ημ55^0\cdot ημ10°$

Μονάδες 3

δ) $2συν^215^0 - 1$

Μονάδες 3

18. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι : $5\cdot συν2α - 14\cdot συνα - 7 = 0$.

α. Να δείξετε ότι $συνα = -\frac{3}{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει $π \le α \le \frac{3π}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς **ημ2α**, **συν2α** και **εφ2α**.

Μονάδες 15

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** *Τρίτη 3 Ιουλίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$.

Μονάδες 6,5

Α. 2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu2\alpha$	**1.** $\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$
β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	**2.** $2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$
γ. $\eta\mu^2\alpha$	**3.** $\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$
δ. $\sigma\upsilon\nu2\alpha$	**4.** $2\eta\mu^2\alpha-1$
	5. $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$
	6. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$
	7. $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$

Μονάδες 6

Β. 1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση :

Αν $A=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)$ τότε η τιμή της παράστασης Α είναι:

α. 0 **β.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **γ.** -1 **δ.** 1 **ε.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 4,5

Β. 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Α. $\eta\mu^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ **Β.** $\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Γ. $\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu3\chi-\eta\mu3\chi\eta\mu\chi=\sigma\upsilon\nu2\chi$ **Α.** $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}-1=\frac{1}{2}$

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 1ο

α. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\text{συν}2\alpha - 1}{\text{ημ}2\alpha} = -\text{εφ}\alpha$

Μονάδες 13

β. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\text{συν}2\chi - 1}{\text{ημ}2\chi} = -1$

Μονάδες 12

21. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του πίνακα που ακολουθεί και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στο σωστό ανάπτυγμα.

ΣΤΗΛΗ Ι		**ΣΤΗΛΗ ΙΙ**	
Α.	συν2α	**1.**	2ημα συνα
Β.	ημ2α	**2.**	$1 - 2\text{ημ}^2\alpha$
Γ.	ημ(α – β)	**3.**	$1 - 2\text{συν}^2\alpha$
Δ.	συν(α – β)	**4.**	ημα συνβ – ημβ συνα
		5.	ημα ημβ – συνα συνβ
		6.	συνα συνβ + ημα ημβ
		7.	$\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta$

Μονάδες 6,5

2) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα **(α, β, γ)** των παρακάτω ισοτήτων και δίπλα σε κάθε γράμμα να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)**, αν η αντίστοιχη ισότητα είναι σωστή ή **(Λ),** αν είναι λανθασμένη.

α. $\text{εφ}(\alpha + \beta) = \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta$

β. $\text{εφ}2\alpha = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1 - \text{εφ}^2\alpha}$

γ. $\text{εφ}(\alpha - \beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}\beta}$

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Να αποδείξετε ότι :

1) $1-2\eta\mu^2 22,5^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 4

2) $\eta\mu 55^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 25^\circ-\sigma\upsilon\nu 55^o\cdot\eta\mu 25^o=\frac{1}{2}$

Μονάδες 4

3) $\frac{2\varepsilon\varphi 15^o}{1-\varepsilon\varphi^2\ 15^o}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να αποδείξετε ότι: 2συνα ημ2α·συν3α + 2ημα·συν2α συν3α = ημ6α .

Μονάδες 15

β) Να λύσετε την εξίσωση : 2συνχ·ημ2χ συν3χ + 2ημχ ·συν2χ συν3χ – 1 = 0 .

Μονάδες 10

22. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Αν α. β είναι δύο γωνίες για τις οποίες ισχύει συνα ≠ 0, συνβ ≠ 0 και συν(α + β) ≠ 0 να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$.

Μονάδες 6,5

Α2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. ημα	**1.** 2ημασυνα
β. συν2α	**2.** $1-2\eta\mu^2\alpha$
γ. συν(α + β)	**3.** $2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$
	4. $1-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$
	5. συνα·συνβ – ημα·ημβ
	6. συνα ·ημβ + ημα· συνβ

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση :

Αν $A = \text{συν}\frac{\pi}{16}\text{συν}\frac{15\pi}{16} - \text{ημ}\frac{\pi}{16}\text{ημ}\frac{15\pi}{16}$ τότε η τιμή της παράστασης Α είναι:

α. 1 **β.** -1 **γ.** 0 **δ.** $\frac{1}{2}$ **ε.** $-\frac{1}{2}$

Μονάδες 6,5

Β2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $1 - 2\text{ημ}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ **β.** $2\text{ημ}\frac{\pi}{8}\text{συν}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **γ.** $\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} = \varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}$

Μονάδες 6

23.

Εσπερινά 2002

Παρασκευή 24 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$.

Μονάδες 10

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1**, **2**, **3** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$, όπου $\text{συν}\alpha \neq 0$, $\text{συν}\beta \neq 0$ και $\text{συν}(\alpha+\beta) \neq 0$.

2. $\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha$

3. $\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$

Μονάδες 6

Γ. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το σύνολο των λύσεων των παρακάτω βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων:

1. $\text{ημ}\chi = \alpha$, όπου $\alpha = \text{ημ}\theta$

Μονάδες 3

2. $\text{συν}\chi = \alpha$, όπου $\alpha = \text{συν}\theta$

Μονάδες 3

3. $\varepsilon\varphi\chi = \alpha$, όπου $\alpha = \varepsilon\varphi\theta$

Μονάδες 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Για τις οξείες γωνίες α, β δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$.

α) Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$.

Μονάδες 9

β) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = 1$.

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες 2α και 2β είναι συμπληρωματικές.

Μονάδες 8

24. πανελλήνιες 2002

Σάββατο 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

δ. $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

ε. $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$.

Μονάδες 6

25. εσπερινά επαναληπτικές 2002

Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

α. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \chi\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right) = \frac{1}{2}$

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

26. **επαναληπτικές 2002** *Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. ημ(α – β)	**1.** 2ημα·συνα
β. ημ2α	**2.** $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
γ. εφ2α	**3.** ημα·συνβ – ημβ·συνα
δ. εφ(α – β)	**4.** $\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$
	5. συνα·συνβ – ημα·ημβ
	6. $\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

Μονάδες 6

27. **πανελλήνιες 2003** *Πέμπτη 22 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Δ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ο τύπος που εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας 2α είναι:

α. $\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **β.** $\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **γ.** $\varepsilon\varphi 2\alpha=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Για κάθε πραγματικό αριθμό χ να αποδείξετε ότι : συνχ(ημ2χ + 4ημχ) = (συν2χ + 4συνχ + 1)ημχ

Μονάδες 12

και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς χ για τους οποίους συν2χ + 4συνχ + 1 = 0 .

Μονάδες 13

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

28. **εσπερινά 2003** *Παρασκευή 23 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1**, **2**, **3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. $\text{συν}2\alpha = 2\text{συν}^2\alpha + 1$

2. $\text{ημ}(\alpha - \beta) = \text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\beta - \text{συν}\alpha \cdot \text{ημ}\beta$

3. $\text{ημ}^2\alpha = \dfrac{1 - \text{συν}\,2\alpha}{2}$

4. $\text{εφ}\,2\alpha = \dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1 - \text{εφ}^2\alpha}$, όπου $\text{συν}\alpha \neq 0$ και $\text{συν}2\alpha \neq 0$

5. $\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\text{συν}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\text{ημ}\beta = \dfrac{1}{2}$, τότε :

α) να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α και συν2β

Μονάδες 10

β) να υπολογίσετε το $\text{συν}(\alpha - \beta)$ και

Μονάδες 5

γ) να αποδείξετε ότι $\text{συν}(\alpha - \beta) + \text{ημ}(\alpha - \beta) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Μονάδες 10

29. **εσπερινά επαναληπτικές 2003** *Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\text{συν}2\alpha = 1 - 2\text{ημ}^2\alpha$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να αποδείξετε ότι : $\text{ημ}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \text{ημ}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{ημ}\alpha$.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\text{ημ}\left(\chi + \dfrac{\pi}{4}\right) + \text{ημ}\left(\chi - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

Μονάδες 13

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Οι επαναληπτικές εξετάσεις του 2003 έγιναν εντελώς συμπωματικά τις ίδιες ακριβώς μέρες με τις εξετάσεις του 2002 και το θέμα αυτό εντελώς συμπωματικά είναι εντελώς παρόμοιο με το αντίστοιχο του 2002.

30. **επαναληπτικές 2003** ***Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.

Ο τύπος που εκφράζει το συν2α είναι:

α. $συν2α = συν^2α - ημ^2α$

β. $συν2α = 1 - 2συν^2α$

γ. $συν2α = 2ημ^2α - 1$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(χ) = (α+1)συν(β \cdot π \cdot χ)$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η μέγιστη τιμή της f(χ) είναι 3 και η περίοδός της είναι 4, να αποδείξετε ότι $α = 2$ και $β = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 13

β. Για τις τιμές $α = 2$ και $β = \frac{1}{2}$, να λύσετε την εξίσωση $f(χ) = \frac{3}{2}$.

Μονάδες 12

31. **πανελλήνιες 2004** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Δ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας, τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε με το είδος της μονοτονίας των συναρτήσεων $ψ = ημχ$ και $ψ = συνχ$

χ	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
$ψ = ημχ$					
$ψ = συνχ$					

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να λύσετε την εξίσωση $ημ2χ - \sqrt{3}συνχ = 0$

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι : $\frac{1 - συν2α}{2ημα + ημ2α} = εφ\frac{α}{2}$ για όλες τις τιμές του α που ορίζεται η ισότητα.

Μονάδες 12

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

32. ***εσπερινά 2004*** ***Παρασκευή 21 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης Ι** (για οποιεσδήποτε τιμές των γωνιών α, β) είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης ΙΙ** (δύο παραστάσεις στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν).

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
α. ημ(α + β)	**1.** 2ημα·συνα
β. συν(α + β)	**2.** συνα·συνβ + ημα·ημβ
γ. ημ2α	**3.** ημα·συνβ + ημβ·συνα
δ. συν2α	**4.** $συν^2α - ημ^2α$
	5. 1 + 2συν2α
	6. συνασυνβ – ημαημβ

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 8

Β. Με την προϋπόθεση ότι για τις γωνίες α, β ισχύει συνα ≠ 0 , συνβ ≠ 0 και συν(α + β) ≠ 0, να αποδείξετε ότι : $εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι :

α) $2συν^2\frac{χ}{2}=1+συνχ$

Μονάδες 5

β) $2συν^2\frac{χ}{2}(2-συνχ)=1+συνχ+ημ^2χ$

Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση : $1+συνχ+ημ^2χ=0$

Μονάδες 10

33. ***επαναληπτικές 2004*** ***Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

1. Αν συνα ≠ 0 , συνβ ≠ 0 και συν(α + β) ≠ 0, να δείξετε ότι : $εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}$

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συνάρτηση $f(\chi) = \rho \cdot \eta\mu\omega \cdot \chi$ έχει περίοδο $T = 2\omega\pi$ για οποιοδήποτε $\omega > 0$, $\rho > 0$.

Μονάδες 2

3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στον σωστό τύπο.

Αν γνωρίζουμε το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ ($\sigma\upsilon\nu 2\alpha \neq -1$), ο τύπος που εκφράζει την $\varepsilon\varphi^2\alpha$ είναι :

α. $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

β. $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

γ. $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi = 0$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 15

β. Ποιες από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(0 , 3\pi)$;

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 1 Τριγωνομετρία

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

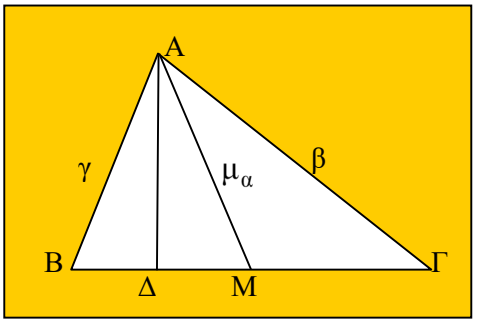
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ, του σχήματος πιοκάτω στο οποίο η διάμεσος από την κορυφή Α είναι ίση με την πλευρά γ .

Τότε $ΜΒ = ΜΓ$ και $ΑΜ = ΑΒ$ $\left(\text{ή } \mu_\alpha = \gamma\right)$.



1. Επειδή $ΑΜ = ΜΒ$ άρα το ΑΜΒ ισοσκελές

Στο ΑΒΓ φέρνω το ύψος ΑΔ από την κορυφή Α, προφανώς το ΑΔ είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΜΒ, οπότε το ΑΔ θα είναι ανάμεσα στις ΑΒ και ΑΜ όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\text{εφ}B = \dfrac{ΑΔ}{ΒΔ}$ και $\text{εφ}Γ = \dfrac{ΑΔ}{ΓΔ}$.

Όμως ΑΔ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΜΒ άρα και διάμεσος οπότε $ΔΒ = ΔΜ = \dfrac{1}{2}ΜΒ$ (1)

Επίσης $ΔΓ = ΔΜ + ΜΓ = ΜΓ + \dfrac{1}{2}ΜΒ = ΜΓ + \dfrac{1}{2}ΜΓ = \dfrac{3}{2}ΜΓ = \dfrac{3}{2}ΜΒ$ (2)

Από (1) και (2) είναι $ΒΔ = \dfrac{1}{3}ΔΓ$ άρα $\text{εφ}B = \dfrac{ΑΔ}{ΒΔ} = \dfrac{ΑΔ}{\frac{1}{3}ΔΓ} = 3\dfrac{ΑΔ}{ΔΓ} = 3\text{εφ}Γ \Leftrightarrow \text{εφ}B = 3\text{εφ}Γ$.

2. $\text{ημ}A = \text{ημ}\left(\pi - \left(B + Γ\right)\right) = \text{ημ}\left(B + Γ\right) = \text{ημ}B \cdot \text{συν}Γ + \text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ$ και επειδή $\text{εφ}B = 3\text{εφ}Γ \Leftrightarrow$

$\dfrac{\text{ημ}B}{\text{συν}B} = 3\dfrac{\text{ημ}Γ}{\text{συν}Γ} \Leftrightarrow \text{ημ}B \cdot \text{συν}Γ = 3\text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ$ άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$\text{ημ}A = \text{ημ}B \cdot \text{συν}Γ + \text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ = 3\text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ + \text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ \Leftrightarrow \text{ημ}A = 4\text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ$

Επίσης $2\text{ημ}\left(B - Γ\right) = 2\left(3\text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ - \text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ\right) = 4\text{συν}B \cdot \text{ημ}Γ$ οπότε ε[ειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα θα είναι και $\text{ημ}A = 2\text{ημ}(B - Γ)$

2. ***πανελλήνιες 1975***

ΘΕΜΑ 4ο

Εκτός ύλης

3. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 3ο

Εκτός ύλης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. ***πανελλήνιες 1978***

ΘΕΜΑ 3ο

Εκτός ύλης

5. ***πανελλήνιες 1979***

Το θέμα αφορά τις εξετάσεις που ακυρώθηκαν λόγω της διαρροής των θεμάτων.

ΘΕΜΑ 3ο

1. Είναι $1+\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και $\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=$

$\dfrac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha-1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}-\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu2\alpha=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και

$\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{\eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}\Leftrightarrow\eta\mu2\alpha=\varepsilon\varphi2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}\Leftrightarrow\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

2. Αν $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\varepsilon\varphi\dfrac{\beta}{2}=t$, $t\in\mathbb{R}$ τότε

υπολογίζω πρώτα το ημα, ημβ, συνβ που λείπουν και χρειάζονται για το συν(α – β).

$\eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha=1-\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1-\dfrac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}=\dfrac{\left(1+t^2\right)^2-\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}=$

$\dfrac{\left(1+t^2+1-t^2\right)\left(1+t^2-1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\Leftrightarrow\eta\mu^2\alpha=\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$ και επειδή $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ άρα $\eta\mu\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι :

$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και αν εφαρμόσεις τον τύπο για β, $\dfrac{\beta}{2}$ έχεις $\sigma\upsilon\nu\beta=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\dfrac{\beta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\dfrac{\beta}{2}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και αν εφαρμόσεις τον τύπο για β, $\dfrac{\beta}{2}$ έχεις $\eta\mu\beta=\dfrac{2\varepsilon\varphi^2\dfrac{\beta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\dfrac{\beta}{2}}\Leftrightarrow\eta\mu\beta=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\beta\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t^2}{1+t^2}=\dfrac{\left(1-t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}+\dfrac{2t^3}{\left(1+t^2\right)^2}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\left(1-t^2\right)^2+2t^3}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. ***πανελλήνιες 1979***

ΘΕΜΑ 1ο

Είναι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=$

$$\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$$

7. ***πανελλήνιες 1981***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1-2\cdot\eta\mu^2\alpha\Leftrightarrow 2\cdot\eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1\Leftrightarrow 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=\pm\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1}{2}}$

β. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}=\frac{\eta\mu(90^\circ-2\alpha)}{1+\sigma\upsilon\nu(90^\circ-2\alpha)}=\frac{\eta\mu 2(45^\circ-\alpha)}{1+\sigma\upsilon\nu 2(45^\circ-\alpha)}=\frac{2\cdot\eta\mu(45^\circ-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu^2(45^\circ-\alpha)}=$

$$\frac{\eta\mu(45^\circ-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha)}\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)$$

8. ***πανελλήνιες 1982***

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\alpha+\beta+\gamma=\kappa\pi\Leftrightarrow\alpha+\beta=\kappa\pi-\gamma\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ άρα έχει νόημα η εφ(α + β).

Επίσης λόγω των περιορισμών έχουν νόημα οι εφα, εφβ, εφγ έτσι λοιπόν ξεκινώντας από τη σχέση γωνιών θα φτάσεις σε σχέση τριγωνομετρικών αριθμών και συγκεκριμένα εφαπτομένων .

$$\alpha+\beta=\kappa\pi-\gamma\Leftrightarrow\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi(\kappa\pi-\gamma)=-\varepsilon\varphi\gamma\Leftrightarrow\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}=-\varepsilon\varphi\gamma\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=-\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma\Leftrightarrow\boxed{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma}$$

β. Εκτός ύλης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. ***πανελλήνιες 1983***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $A+B+\Gamma=\pi \Leftrightarrow A+B=\pi-\Gamma \Leftrightarrow \text{συν}(A+B)=\text{συν}(\pi-\Gamma)=-\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow$

$\text{συν}A\,\text{συν}B-\text{ημ}A\,\text{ημ}B=-\text{συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{συν}A\,\text{συν}B+\text{συν}\Gamma=\text{ημ}A\,\text{ημ}B \Leftrightarrow$

$(\text{συν}A\,\text{συν}B+\text{συν}\Gamma)^2=(\text{ημ}A\,\text{ημ}B)^2 \Leftrightarrow \text{συν}^2A\,\text{συν}^2B+2\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma+\text{συν}^2\Gamma=\text{ημ}^2A\,\text{ημ}^2B$

$\Leftrightarrow \text{συν}^2A\cdot\text{συν}^2B+2\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma+\text{συν}^2\Gamma=(1-\text{συν}^2A)(1-\text{συν}^2B) \Leftrightarrow$

$\cancel{\text{συν}^2A\,\text{συν}^2B}+2\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma+\text{συν}^2\Gamma=1-\text{συν}^2A-\text{συν}^2B+\cancel{\text{συν}^2A\,\text{συν}^2B} \Leftrightarrow$

$$\text{συν}^2A+\text{συν}^2B+\text{συν}^2\Gamma+2\text{συν}A\cdot\text{συν}B\cdot\text{συν}\Gamma=1$$

Β. Οι γωνίες $\frac{\pi}{8}$ και $\frac{3\pi}{8}$ είναι παραπληρωματικές $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\text{συν}^4\frac{3\pi}{8}=\text{ημ}^4\frac{\pi}{8}$

Επομένως $\text{συν}^4\frac{\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{3\pi}{8}=\text{συν}^4\frac{\pi}{8}+\text{ημ}^4\frac{\pi}{8}=\left(\text{συν}^2\frac{\pi}{8}+\text{ημ}^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\text{συν}^2\frac{\pi}{8}\cdot\text{ημ}^2\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow$

$$1^2-2\left(\text{συν}\frac{\pi}{8}\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{8}\right)^2=1-2\left(\frac{\text{συν}2\frac{\pi}{8}}{2}\right)^2=1-2\left(\frac{\text{συν}\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2=1-2\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}=1-\frac{\frac{2}{4}}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Τετάρτη 16 Ιουνίου

10. ***πανελλήνιες 1999***

ΘΕΜΑ 3ο

Τον θέμα είναι σήμερα εκτός ύλης.

11. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999***

Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε τους τύπους :

α) Θεωρία.

β) Θεωρία.

Β. α) Θεωρία.

β) Είναι : $1-2\text{ημ}^215^0=\text{συν}2\cdot15^0=\text{συν}30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ) Η παράσταση $\left(\text{ημ}15^0-\text{συν}15^0\right)^2$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$ άρα σωστό είναι το Β.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. **Εσπερινά 2000** **Δευτέρα 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Θεωρία $συν2χ = συν^2χ - ημ^2χ \Leftrightarrow συν^2χ - συν2χ = ημ^2χ$

β. Μια λύση της εξίσωσης $συν^2χ - συν2χ = \frac{3}{4}$ είναι η $: χ = \frac{π}{6}$ άρα σωστό είναι το Γ.

13. **πανελλήνιες 2000** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 3ο

β) Είναι $ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - 3 \le \sqrt{2} - 3$ άρα προφανώς η $f(χ) = \sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - 3$ έχει μέγιστη τιμή το $f(χ) = \sqrt{2} - 3$.

Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή, όταν το $\sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right)$ γίνεται μέγιστο και επειδή $\sqrt{2} > 0$ η f παίρνει τη

μέγιστη τιμή όταν το $ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) = ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2χ - \frac{π}{4} = 2λπ + \frac{π}{2} \\ 2χ - \frac{π}{4} = 2λπ + π - \frac{π}{2} \end{cases}$ ή με $λ \in Z \Leftrightarrow$

$2χ - \frac{π}{4} = 2λπ + \frac{π}{2}$ οπότε $2χ = 2λπ + \frac{π}{2} + \frac{π}{4} \Leftrightarrow 2χ = 2λπ + \frac{3π}{4} \Leftrightarrow χ = λπ + \frac{3π}{8}$.

Άρα η τιμή του χ για να έχει μέγιστο η συνάρτηση $f(χ) = \sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - 3$ είναι $λπ + \frac{3π}{8}$.

γ) Η $f(χ) - f\left(χ + \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - 3\right) - \left(\sqrt{2}ημ\left(2(χ + \frac{π}{4}) - \frac{π}{4}\right) - 3\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - 3 - \sqrt{2}ημ\left(2χ + \frac{π}{2} - \frac{π}{4}\right) + 3 = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - \sqrt{2}ημ\left(2χ + \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$ημ\left(2χ - \frac{π}{4}\right) - ημ\left(2χ + \frac{π}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow ημ2χ \cdot συν\frac{π}{4} - συν2χ \cdot ημ\frac{π}{4} - ημ2χ \cdot συν\frac{π}{4} - συν2χ \cdot ημ\frac{π}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$-2συν2χ \cdot ημ\frac{π}{4} = 1 \Leftrightarrow -2συν2χ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow συν2χ \cdot \sqrt{2} = -1 \Leftrightarrow συν2χ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$συν2χ = συν\frac{3π}{4} \Leftrightarrow 2χ = 2κπ \pm \frac{3π}{4} \Leftrightarrow χ = κπ \pm \frac{3π}{8}$ και θα πρέπει $0 \le κπ \pm \frac{3π}{8} \le π$

- Αν $χ = χ = κπ + \frac{3π}{8}$ θα πρέπει $0 \le κπ + \frac{3π}{8} \le π \Leftrightarrow 0 \le κ + \frac{3}{8} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le κ \le 1 - \frac{3}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le κ \le \frac{5}{8}$

  με $κ \in Z$ άρα $κ = 0$ επομένως $χ = \frac{3π}{8}$

συνέχεια

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

- Αν $\chi = \chi = \kappa\pi - \frac{3\pi}{8}$ θα πρέπει $0 \le \kappa\pi - \frac{3\pi}{8} \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa - \frac{3}{8} \le 1 \Leftrightarrow +\frac{3}{8} \le \kappa \le 1 + \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{8} \le \kappa \le \frac{11}{8}$

  με $\kappa \in Z$ άρα $\kappa = 1$ επομένως $\chi = \frac{5\pi}{8}$

14. ***επαναληπτικές 2000*** ***Σεπτέμβριος***

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $\sqrt{2}\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[\eta\mu\chi\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\chi\left(-\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[-\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\frac{\pi}{4}\right] =$

$\sqrt{2}\left[-\eta\mu\chi\frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\chi\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\eta\mu\chi\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\chi\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$ άρα η

$f(\chi) = -\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right)$

β. Η εξίσωση $-\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}$, αν χρησιμοποιήσεις το προηγούμενο ερώτημα γίνεται :

$-\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1.\ \chi + \frac{5\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2.\ \chi + \frac{5\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} \\ 2.\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \\ 2.\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4}$

15. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1) **Α. 3**

Β. 5

Γ. 4

Δ. 2

2) **α) Σ** **β) Λ** **γ) Σ** **δ) Λ**

Β. **1)** $\eta\mu70° \sigma\upsilon\nu20° + \sigma\upsilon\nu70° \eta\mu20° = \eta\mu(70° + 20°) = \eta\mu 90° = 1.$

2) $2\,\eta\mu22{,}5° \cdot \sigma\upsilon\nu22{,}5° = \eta\mu2 \cdot 22{,}5° = \eta\mu45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. **εσπερινά 2001** *Δευτέρα 28 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. *Θεωρία*. **Απόδειξη :** Είναι γνωστό ότι $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta$.

Αν στον τύπο αυτό θέσουμε β = α γίνεται $\eta\mu2\alpha=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha \Leftrightarrow \eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$

β) $A\leftrightarrow 5$
$B\leftrightarrow 2$
$\Gamma\leftrightarrow 3$
$\Delta\leftrightarrow 6$

Β. **α)** Είναι $\dfrac{\varepsilon\varphi20^\circ+\varepsilon\varphi25^\circ}{1-\varepsilon\varphi20^\circ\cdot\varepsilon\varphi25^\circ}=\varepsilon\varphi(20^\circ+25^\circ)=\varepsilon\varphi45^\circ=1$

β) Επειδή $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{1}{2}\eta\mu2\alpha$ άρα

$\eta\mu15^0\cdot\sigma\upsilon\nu15^0=\dfrac{1}{2}\eta\mu2\cdot15^0=\dfrac{1}{2}\eta\mu30^0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

γ) $\sigma\upsilon\nu55^\circ\,\sigma\upsilon\nu10^\circ+\eta\mu55^\circ\,\eta\mu10^\circ=\sigma\upsilon\nu(55^\circ-10^\circ)=\sigma\upsilon\nu45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^215^0-1=\sigma\upsilon\nu2\cdot15^0=\sigma\upsilon\nu30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 3

17. **πανελλήνιες 2001** *Σάββατο 9 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η δοσμένη σχέση $5\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha-14\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0$, αν αντικαταστήσεις το $\sigma\upsilon\nu2\alpha$ με $2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ γίνεται $5\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha-14\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0 \Leftrightarrow 5(2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)-14\,\sigma\upsilon\nu\alpha-7=0 \Leftrightarrow$
$10\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha-14\,\sigma\upsilon\nu\alpha-12=0 \Leftrightarrow 5\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha-7\,\sigma\upsilon\nu\alpha-6=0$, θέσε $\sigma\upsilon\nu\alpha=\psi$ με $-1\le\psi\le1$ και έχεις $5\psi^2-7\psi-6=0$.

Είναι $\Delta=\ldots=169>0$ άρα $\psi_1=\cdots=-\dfrac{3}{5}$ δεκτή γιατί $-1\le-\dfrac{3}{5}\le1$ και $\psi_2=\cdots=2$ απορρίπτεται. Άρα **$\sigma\upsilon\nu\alpha=-\dfrac{3}{5}$**

β) Ξεκινάς (όπως πάντα από την βασική τριγ. ταυτότητα) **$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$** $\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha+\dfrac{9}{25}=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$.

Λόγω του περιορισμού $\pi\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{2}$ (που σημαίνει ότι το ημα < 0) θα είναι **$\eta\mu\alpha=-\dfrac{4}{5}$**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

18. επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. *Θεωρία*

Α2.

α.	2
β.	6
γ.	1
δ.	5

Β1. **β**

Β2.

Α. Λάθος **Β.** Σωστό **Γ.** Λάθος **Α.** Λάθος

19. εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Δευτέρα 9 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1ο

α. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{-2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = -\varepsilon\varphi\alpha$

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1}{\eta\mu 2\chi} = -\varepsilon\varphi\chi$ άρα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - 1}{\eta\mu 2\chi} = -1 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi\chi = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$$

20. εσπερινά επαναληπτικές 2001

Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1)
Α. 2
Β. 1
Γ. 4
Δ. 6

2)
α. Λ

β. Σ

γ. Λ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Να αποδείξετε ότι :

1) $1-2\eta\mu^2 22,5^o = \sigma\upsilon\nu 2\cdot 22,5^o = \sigma\upsilon\nu 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\eta\mu 55^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 25^\circ - \sigma\upsilon\nu 55^o \cdot \eta\mu 25^o = \eta\mu(55^\circ - 25^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

3) $\frac{2\varepsilon\varphi 15^o}{1-\varepsilon\varphi^2\ 15^o} = 2\varepsilon\varphi 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $2\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 3\alpha + 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha\ \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\sigma\upsilon\nu 3\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha) =$
$2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\eta\mu(2\alpha+\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\eta\mu 3\alpha = \eta\mu 6\alpha$.

β) $2\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\eta\mu 2\chi\ \sigma\upsilon\nu 3\chi + 2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu 2\chi\ \sigma\upsilon\nu 3\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 6\alpha = -1 \Leftrightarrow \eta\mu 6\alpha = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 6\alpha = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ 6\alpha = 2\kappa\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{3\pi}{12} \\ \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{\kappa\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

21. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 13ο

Α1. Θεωρία

Α2.

Στήλη Α	
α.	3
β.	2
γ.	5

Β1. **β.**

Β2. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό

22. ***Εσπερινά 2002*** ***Παρασκευή 24 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία. Απόδειξη : Είναι γνωστό ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$.
Αν στον τύπο θέσουμε β = α γίνεται $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$

Β. $1 \leftrightarrow \Sigma$
$2 \leftrightarrow \Lambda$
$3 \leftrightarrow \Sigma$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γ.

1. $\eta\mu\chi=\alpha,\quad$ όπου $\alpha=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ \chi=2\kappa\pi+\pi-\theta\end{cases}$

2. $\sigma\upsilon\nu\chi=\alpha,\quad$ όπου $\alpha=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ \chi=2\kappa\pi-\theta\end{cases}$ ή συνοπτικά $\chi=2\kappa\pi\pm\theta$

3. $\varepsilon\varphi\chi=\alpha,\quad$ όπου $\alpha=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ \chi=2\kappa\pi+\pi+\theta\end{cases}$ ή συνοπτικά $\chi=\kappa\pi+\theta$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τις οξείες γωνίες α, β δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{3}$ τότε :

α) $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}{1+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}=\frac{1}{7}.$

β) $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$

γ) Είναι $\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ και

$$\varepsilon\varphi2\beta=\frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta}=\frac{2\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

Παρατήρησε ότι $\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{4}{3},\ \sigma\varphi2\beta=\frac{1}{\varepsilon\varphi2\beta}=\frac{4}{3}$ άρα $\varepsilon\varphi2\alpha=\sigma\varphi2\beta$ άρα οι γωνίες 2α και 2β είναι συμπληρωματικές.

23. ***πανελλήνιες 2002*** ***Σάββατο 8 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **α) Λάθος** **β) Σωστό** **γ) Σωστό**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. **εσπερινά επαναληπτικές 2002** *Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{6}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

β. Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\eta\mu\alpha$, $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\eta\mu\alpha$ άρα

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\eta\mu\alpha=$$

$$2\eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\alpha=2\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha\,.$$

γ. $\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\chi\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}-\chi\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\chi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}\,.$

25. **επαναληπτικές 2002** *Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Γ.

α.	3
β.	1
γ.	4
δ.	6

26. **πανελλήνιες 2003** *Πέμπτη 22 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Δ. Η σωστή απάντηση είναι α

ΘΕΜΑ 2ο

Είναι $\sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu2\chi+4\eta\mu\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\eta\mu2\chi+4\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\chi\cdot2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+4\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=$
$2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi+4\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu\chi(2\sigma\upsilon\nu^2\chi+4\sigma\upsilon\nu\chi)=\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu2\chi+1+4\sigma\upsilon\nu\chi)$

επίσης $\sigma\upsilon\nu2\chi+1+4\sigma\upsilon\nu\chi=0\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu^2\chi-1+1+4\sigma\upsilon\nu\chi=0\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu^2\chi+4\sigma\upsilon\nu\chi=0\Leftrightarrow$
$2\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi+2)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\chi=0$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi=-2$.

Η $\sigma\upsilon\nu\chi=-2$ είναι αδύνατη., η $\sigma\upsilon\nu\chi=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\chi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$ με $\kappa\in Z$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. **εσπερινά 2003** *Παρασκευή 23 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. $1 \leftrightarrow \Lambda$
$2 \leftrightarrow \Sigma$
$3 \leftrightarrow \Sigma$
$4 \leftrightarrow \Sigma$
$5 \leftrightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

- Επειδή ημ2α = 2ημα συνα και δίνεται το $\text{συνα} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, θα υπολογίσεις το ημα.

$\eta\mu^2\alpha = 1 - \text{συν}^2\alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή **α οξεία** άρα $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα ημ2α = 2ημα συνα $\Leftrightarrow$ $\eta\mu 2\alpha = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu 2\alpha = 1}$

Για το $\text{συν}2\beta = 1 - 2\eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \text{συν}2\beta = 1 - 2\frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\text{συν}2\beta = \frac{1}{2}}$

β) $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνα} \cdot \text{συνβ} + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$, άρα εκτός από το $\text{συνα} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και το $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$ χρειάζεσαι και τα ημα, συνβ. Το ημα το υπολόγισες στο ερώτημα α) και είναι **συνα** $= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Για το συνβ έχω : $\text{συν}^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \text{συν}^2\beta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \text{συν}\beta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και επειδή **β οξεία** άρα θα είναι $\text{συν}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Τελικά $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνα} \cdot \text{συνβ} + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right) = \text{συν}15^0$

Μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση στο ίδιο θέμα που αποφεύγει, στη συγκεκριμένη άσκηση όλους αυτούς τους υπολογισμούς :

Παρατηρώ ότι $\text{συνα} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, α οξεία γωνία άρα $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ άρα $\boldsymbol{\eta\mu 2\alpha = \eta\mu 2\frac{\pi}{4} = \eta\mu\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\eta\mu 2\alpha = 1}}$

Επίσης $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$ και β οξεία άρα $\boldsymbol{\beta = \frac{\pi}{6}}$ και επομένως $\boldsymbol{\text{συν}2\beta = \text{συν}2\frac{\pi}{6} = \text{συν}\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\text{συν}2\beta = \frac{1}{2}}}$

β) $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}(45^0 - 30^0) = \text{συν}15^0$ και

Τελικά $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συνα} \cdot \text{συνβ} + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right) = \boldsymbol{\text{συν}15^0}$

γ) $\text{συν}\left(\alpha - \beta\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$, $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \text{συνβ} - \text{συνα} \cdot \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)$

Άρα $\text{συν}(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

28.

ΘΕΜΑ 1ο

εσπερινά επαναληπτικές 2003

Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου

Α. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha$,

$\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\cdot-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha$ άρα

$\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\cdot-\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha=$

$\eta\mu\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha=\sqrt{2}\,\eta\mu\alpha$.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$.

$$\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\eta\mu\chi=1\Leftrightarrow\eta\mu\chi=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\chi=\eta\mu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\\ \chi=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\\ \chi=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

29.

επαναληπτικές 2003

Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

3. Η σωστή απάντηση είναι **α**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=(\alpha+1)\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)$ για το $\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)$ έχω $-1\le\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)\le1$ **(1)** οπότε διακρίνω δυο περιπτώσεις

ι) $\alpha+1>0\Leftrightarrow\alpha>-1$ τότε **(1)** $\Leftrightarrow$ $-(\alpha+1)\le(\alpha+1)\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)\le(\alpha+1)$ οπότε μέγιστο το $\alpha+1$ άρα θα πρέπει $\alpha+1=3\Leftrightarrow$ **$\alpha=2$** που είναι δεκτή.

ιι) $\alpha+1<0\Leftrightarrow\alpha<-1$ τότε **(1)** $\Leftrightarrow$ $-(\alpha+1)\ge-(\alpha+1)\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)\ge(\alpha+1)\Leftrightarrow$
$(\alpha+1)\le(\alpha+1)\sigma\upsilon\nu(\beta\cdot\pi\cdot\chi)\le-(\alpha+1)$

οπότε μέγιστο το $-(\alpha+1)$ άρα θα πρέπει $-\alpha-1=3\Leftrightarrow-\alpha=4\Leftrightarrow$ **$\alpha=-4$** που είναι δεκτή.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Η περίπτωση α = 0 αποκλείεται γιατί τότε η f(χ) = 0 σταθερή άρα δεν θα υπήρχε μέγιστο.

Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι $\frac{2\pi}{|\beta\pi|}$ άρα θα πρέπει $\frac{2\pi}{|\beta\pi|}=4 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{|\beta|\pi}=4 \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta|}=4 \Leftrightarrow$

$|\beta|=\frac{2}{4} \Leftrightarrow |\beta|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=\pm\frac{1}{2}$

Τελικά η f(χ) έχει μέγιστο το 3 όταν α = 2 ή α = – 2 και όχι μόνο όταν α = 2
επίσης η f(χ) έχει περίοδο 4 όταν $\beta = \pm\frac{1}{2}$ και όχι μόνο αν $\beta=\frac{1}{2}$

<u>και ας δόθηκε όπως δόθηκε το θέμα και ακόμη δεν έχουν δει καν οι «υπεύθυνοι» ότι το θέμα είναι λάθος.</u>

β. Αν $\alpha = 2$ και $\beta=\frac{1}{2}$, τότε η $f(\chi)=3\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}\chi)$ άρα η εξίσωση $f(\chi)=\frac{3}{2}$ γίνεται

$3\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}\chi)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}\chi)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}\chi)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\chi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\chi=2\kappa\pm\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\chi=4\kappa\pm\frac{2}{3}$

30.

πανελλήνιες 2004 ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Δ.

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\psi=\eta\mu\chi$	↗	↘	↗	↘	
$\psi=\sigma\upsilon\nu\chi$	↘	↘	↗	↗	

ΘΕΜΑ 2ο

α) $\eta\mu 2\chi-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi\left(2\eta\mu\chi-\sqrt{3}\right)=0$.

1ον $\sigma\upsilon\nu\chi=0 \Leftrightarrow \chi=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

2ον $2\eta\mu\chi-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi=\eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ \chi=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ \chi=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\end{cases}$

β) $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}=$

$\frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

31. ***εσπερινά 2004*** ***Παρασκευή 21 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

α.	3
β.	6
γ.	1
δ.	4

Β. Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

Α. **α)** από θεωρία $συνχ = 2συν^2\frac{χ}{2} - 1 \Leftrightarrow 2συν^2\frac{χ}{2} = 1 + συνχ$

β) Είναι $2συν^2\frac{χ}{2}(2 - συνχ) = 1 + συνχ + ημ^2χ$ και αν χρησιμοποιήσεις το προηγούμενο ερώτημα θα έχεις $(1+συνχ)(2-συνχ) = 1 + συνχ + ημ^2χ \Leftrightarrow (1+συνχ)(2-συνχ) - 1 - συνχ - ημ^2χ = 0$

$\Leftrightarrow 2 - συνχ + 2συνχ - συν^2χ - 1 - συνχ - ημ^2χ = 0 \Leftrightarrow 2 - συν^2χ - 1 - ημ^2χ = 0 \Leftrightarrow$

$1 - συν^2χ - ημ^2χ = 0 \Leftrightarrow συν^2χ + ημ^2χ = 1$.

Β. $1 + συνχ + ημ^2χ = 0$ και αν χρησιμοποιήσεις το **β** από το προηγούμενο ερώτημα θα έχεις :

$$2συν^2\frac{χ}{2}(2 - συνχ) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 1^{ον} & 2συν^2\frac{χ}{2} = 0 \\ 2^{ον} & 2 - συνχ = 0 \end{matrix}.$$

Άρα $1^{ον}$ $2συν^2\frac{χ}{2} = 0 \Leftrightarrow συν\frac{χ}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{χ}{2} = κπ + \frac{π}{2}$ και

$2^{ον}$ $2 - συνχ = 0 \Leftrightarrow συνχ = 2$ αδύνατη γιατί $-1 \le συνχ \le 1$

32. ***επαναληπτικές 2001*** ***Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

1. Θεωρία

2 **α.** Λάθος.

3. **β.** $εφ^2α = \frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi$ και επειδή προφανώς δεν είναι $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, γιατί αλλιώς από την εξίσωση θα προέκυπτε **και** $\eta\mu\chi = 0$ πράγμα αδύνατο, οπότε $\eta\mu\chi = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow$

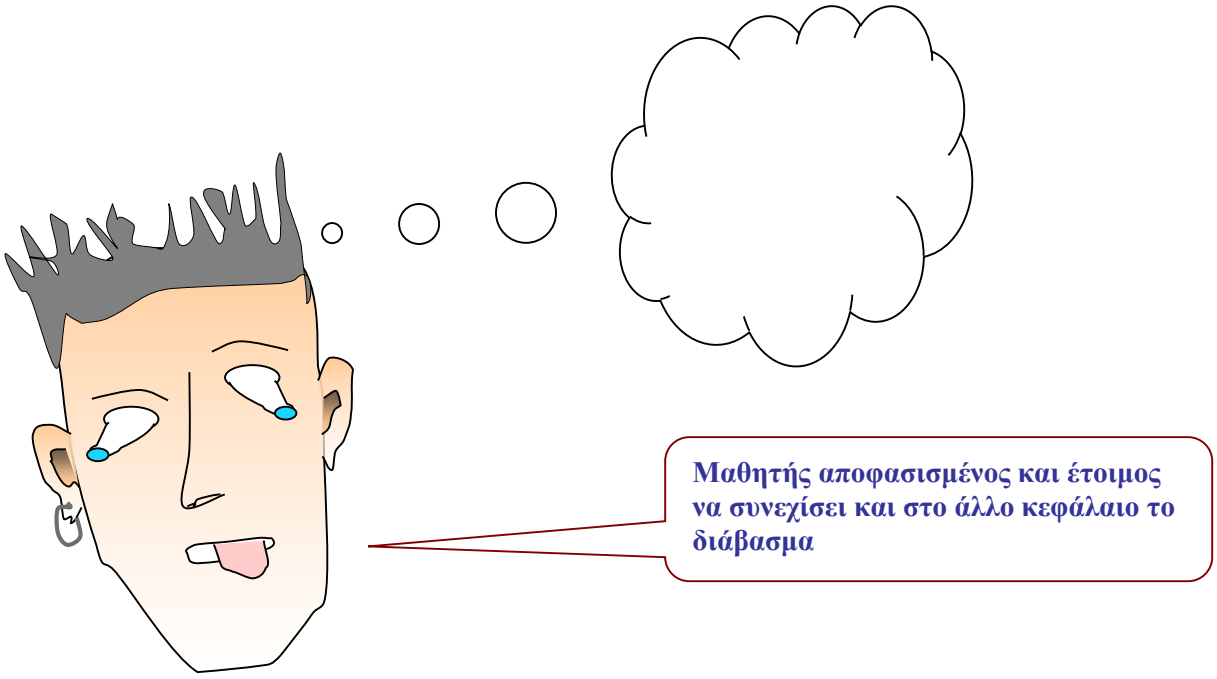
$\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}}$

β. Πρέπει $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \in (0\ ,\ 3\pi) \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 3\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa + \frac{1}{3} < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < 3 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{3} < \kappa < \frac{8}{3} \Leftrightarrow -0{,}3 < \kappa < 2{,}66$ και επειδή $\kappa \in Z$ άρα $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης που ανήκουν στο $(0\ ,\ 3\pi)$ είναι : $\chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$

$\kappa = 0 \Leftrightarrow \boxed{\chi = \frac{\pi}{3}}$ ή $\kappa = 1 \Leftrightarrow \boxed{\chi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}}$ ή $\kappa = 2 \Leftrightarrow \boxed{\chi = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}}$



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 2 Πολυώνυμα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Ένα πολυώνυμο σ(χ) βαθμού **ν** λαμβάνει την ίδια τιμή ξ για ν + 1 τουλάχιστον διαφορετικές τιμές του χ . Να δείξετε ότι το σ(χ) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

β. Έστω ότι $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι διαφορετικοί ανά δυο. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και ότι αυτό δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1 .

Το θέμα ταιριάζει πολύ περισσότερο στο τέταρτο κεφάλαιο της κατεύθυνσης περί θεωρίας αριθμών και επομένως θα το δείτε και εκεί

2. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 3ο

α) Πολυώνυμο Π(χ) έχει την ιδιότητα : Π(χ) = Π(1 – χ).
Δείξτε ότι το πολυώνυμο Π(χ) – Π(0) διαιρείται από το πολυώνυμο χ(χ – 1)

β) Πολυώνυμο Ρ(χ) έχει την ιδιότητα Ρ(χ) = Ρ(χ – 1).
Δείξτε ότι το πολυώνυμο Ρ(χ) είναι σταθερό πολυώνυμο

3. ***πανελλήνιες 1999*** ***Τετάρτη 16 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω Ρ(χ) ένα πολυώνυμο του χ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν π(χ) είναι το πηλίκο και υ(χ) το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου Ρ(χ) με το πολυώνυμο (χ – ρ), τότε :

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του Ρ(χ) με το (χ – ρ).

Μονάδες 2,5

β. Το υπόλοιπο υ(χ) είναι :

Α. Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το Ρ(χ).
Β. Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
Γ. Σταθερό πολυώνυμο.
Δ. Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο.

Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου Ρ(χ) με το (χ – ρ) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για χ = ρ. Είναι δηλαδή υ = Ρ(ρ)

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Έστω το πολυώνυμο $P(\chi)=\kappa^2\chi^3-3\kappa\chi^2+\kappa\chi+1$, όπου κ πραγματικός αριθμός. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του κ το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(χ) με το (χ – 1) είναι ίσο με το μηδέν;

Α. $\kappa=0$ Β. $\kappa=-1$ Γ. $\kappa=1$ Δ. $\kappa=2$ Ε. $\kappa=-2$

Μονάδες 12,5

4. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999*** ***Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3-\chi^2-4\chi+4$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ = 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(χ)

Μονάδες 5

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(χ) με το πολυώνυμο (χ – 1)

Μονάδες 7

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\chi^3+4=\chi^2+4\chi$

Μονάδες 8

δ. Να λύσετε την ανίσωση : $P(\chi)\geq 0$

Μονάδες 5

5. ***Εσπερινά 2000*** ***Δευτέρα 29 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi-6$.

α. Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $\chi=3$.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το $\chi-3$.

Μονάδες 10

γ. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το χ – 3.

Μονάδες 8

6. ***πανελλήνιες 2000*** ***Πέμπτη 22 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(\chi)=\alpha\chi^3+(\beta-1)\chi^2-3\chi-2\beta+6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(χ) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(χ) με το χ + 1 είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι α = 2 και β = 4.

Μονάδες 15

β. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α), να λύσετε την εξίσωση $P(\chi)=0$.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **επαναληπτικές 2000** Σεπτέμβριος

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(χ) έχει παράγοντα το χ – ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(χ), δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Μονάδες 12,5

ΒΙ. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που περιέχει έναν παράγοντα του πολυωνύμου της στήλης Α.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\chi^3-3\chi+2$	**1.** $\chi-\alpha$
β. χ^2-9	**2.** $\chi+\alpha$
γ. $\chi^3-2\alpha^2\cdot\chi+\alpha^3$	**3.** $\chi-3$
	4. $\chi-1$

Μονάδες 7,5

Β2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^{2000}+\lambda\chi-2$, όπου λ πραγματικός αριθμός, έχει παράγοντα το χ – 1, τότε το **λ** είναι:

Α. – 1 **Β.** 1 **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** – 2

Μονάδες 12,5

8. **εσπερινά επαναληπτικές 2000** Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-\lambda$ για το οποίο ισχύει $P(1)=0$.

α. Να δείξετε ότι λ = 2.

Μονάδες 10

β. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**3.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μια ρίζα του πολυωνύμου $P(\chi)$ είναι η

Α. $\chi=0$ **Β.** $\chi=3$ **Γ.** $\chi=-2$ **Δ.** $\chi=2$ **Ε.** $\chi=-3$

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το χ – 2.

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. ***εσπερινά 2001*** ***Δευτέρα 28 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $F(\chi)=\chi^3-\chi^2+3\chi-3$

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $F(\chi)$ με το $\chi-2$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $F(\chi)$ με το $\chi-1$.

Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $F(\chi)=0$.

Μονάδες 9

10. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\chi+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Μονάδες 6,5

Α.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω πολυώνυμο $P(\chi)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το P(χ) έχει παράγοντα το χ – ρ και π(χ) είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το χ – ρ, τότε:

α. $P(\chi)=(\chi-\rho)\pi(\chi)+1$.

β. $\pi(\chi)=(\chi-\rho)P(\chi)$.

γ. Ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το χ – ρ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho)=0$.

Μονάδες 6

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3\chi^3-5\chi+6=0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4\chi^4+5\chi^2+7\chi+4=0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6\chi^6-3\chi^3+2\chi^2-\chi+2=0$ δεν έχει ρίζα το – 3 .

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο $P(\chi)=(4\chi+5)^{2004}+\chi^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $\chi+1$ **β.** $\chi-1$ **γ.** χ **δ.** $\chi+\frac{5}{4}$.

Μονάδες 6,5

11. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Τρίτη 3 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο f(χ) όπου $f(\chi)=\chi^4+5^{2\lambda-1}\chi^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\lambda}\chi-1$.

Α. Αν $\chi-1$ παράγοντας του f(χ), τότε να βρείτε το λ

Μονάδες 13

Β. Για $\lambda=\frac{1}{2}$

α. Να δείξετε ότι $(\chi-1)^2$ είναι παράγοντας του $f(\chi)=\chi^4+5^{2\lambda-1}\chi^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\lambda}\chi-1$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης : $f(\chi)=\chi^4+5^{2\lambda-1}\chi^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\lambda}\chi-1$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ.

Μονάδες 6

12. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $f(\chi)=\chi^2+3$, $g(\chi)=2\chi^2+1$, $\varphi(\chi)=\chi^2+5$.

α. Να βρείτε τα πολυώνυμα $f(\chi)+g(\chi)$, $f(\chi)\cdot g(\chi)-\varphi(\chi)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(\chi)\cdot g(\chi)-\varphi(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi-2$.

Μονάδες 8

13. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $F(\chi)=3\chi^3-\chi^2+3\chi-\kappa$.

α. Να βρείτε το κ , αν το $F(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi-1$.

Μονάδες 10

β. Αν κ = 6, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $F(\chi):(\chi-2)$.

Μονάδες 15

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $f(\chi)=\chi^4-\chi^3-\chi^2-\chi-2$, $\chi\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι το $\chi+1$ είναι παράγοντας του f(χ) και να βρείτε το πηλίκο π(χ) της διαίρεσης του $f(\chi)$ με το $\chi+1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι το $\chi-2$ είναι παράγοντας του $\pi(\chi)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(\chi)$ με το $\chi-2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(\chi)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ.

Μονάδες 9

15. ***Εσπερινά 2002*** ***Παρασκευή 24 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(\chi)=\chi^3-(\kappa+1)\chi^2+(\kappa-1)\chi+2$ $\kappa\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $P(2)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

Μονάδες 8

β. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(χ) με το πολυώνυμο $\chi+3$.

Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση $P(\chi)=\chi-2$.

Μονάδες 9

16. ***πανελλήνιες 2002*** ***Σάββατο 8 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο υ της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ με το $\chi-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $\chi=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Μονάδες 9

Υπάρχει ακριβώς ίδια ερώτηση με τις εξετάσεις του 1999 πιο πριν και με τις **Επαναληπτικές των Εσπερινών** τον Σεπτέμβριο του 2002.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\kappa\chi^3-(\kappa+\lambda)\chi^2+\lambda\chi+1$.

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right)=7$ και $P(-1)=23$, να αποδείξετε ότι $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$.

Μονάδες 8

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(\chi)$, για $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$, με το πολυώνυμο $2\chi+1$ και να γραφεί το $P(\chi)$ με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(\chi)>7$ για $\kappa=-6$ και $\lambda=-5$.

Μονάδες 9

17. **εσπερινά επαναληπτικές 2002** — ***Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ με το $\chi-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $\chi=\rho$, δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Μονάδες 9

Υπάρχει ακριβώς ίδια ερώτηση με τις εξετάσεις του 1999 πιο πριν και με τις **Πανελλήνιες 2002**.

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **Σ**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(\chi)=\alpha_\kappa\chi^\kappa+\alpha_{\kappa-1}\chi^{\kappa-1}+\cdots+\alpha_1\chi^1+\alpha_0$ με $\alpha_\kappa\neq 0$ είναι $\kappa-1$.

2. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

3. Στην ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων $\Delta(\chi)=\delta(\chi)\pi(\chi)+\upsilon(\chi)$ το υπόλοιπο $\upsilon(\chi)$ έχει βαθμό ίσο με το βαθμό του διαιρέτη $\delta(\chi)$, (όπου $\Delta(\chi)$ ο διαιρετέος, $\delta(\chi)$ ο διαιρέτης με $\delta(\chi)\neq 0$, $\pi(\chi)$ το πηλίκο και $\upsilon(\chi)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης).

4. Αν ένα πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi-\rho$, τότε το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$.

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(\chi)=(\kappa-3)\chi^3+(\kappa+\lambda)\chi^2+(31-\lambda)\chi+24$, $Q(\chi)=\chi^3+9\chi^2+26\chi+24$

όπου κ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές των κ, λ τα πολυώνυμα $P(\chi)$, $Q(\chi)$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $Q(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi+1$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(\chi)$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $Q(\chi)=0$ δεν έχει θετική ρίζα.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

18. ***επαναληπτικές 2002*** ***Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(\chi)=\chi^3-6\chi^2+11\chi-6$.

α. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου P(χ) για $\chi=-1$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το πολυώνυμο χ – 1.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(\chi)<0$.

Μονάδες 10

19. ***πανελλήνιες 2003*** ***Πέμπτη 22 Μαΐου***

Τον Μάιο του 2003 δεν υπήρχε «καθαρό» θέμα με πολυώνυμα.

20. ***εσπερινά 2003*** ***Παρασκευή 23 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(\chi)=\chi^3-2\chi^2+\kappa\chi+1$ όπου κ πραγματικός αριθμός.

α. Για κ = – 3, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το πολυώνυμο χ – 3.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες το πολυώνυμο P(χ) έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Μονάδες 10

γ. Για κ = 0, να λύσετε την εξίσωση P(χ) = 0 .

Μονάδες 5

21. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** ***Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi+2$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι: $P(2004)+P(-2004)=4$.

Μονάδες 4

β. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $Q(\chi)=\chi$.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi-1$ είναι $\upsilon=\alpha+\beta+2$.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ) Αν α = 1 και το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε να υπολογίσετε το β και να λύσετε την εξίσωση $P(\chi)=0$.

Μονάδες 10

22. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

4. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες :

α. Αν $P(\chi)=\alpha_\kappa\chi^\kappa+\alpha_{\kappa-1}\chi^{\kappa-1}+\cdots+\alpha_1\chi^1+\alpha_0$ είναι ένα πολυώνυμο με $\alpha_\kappa\neq 0$, τότε ο αριθμός κ λέγεται ..... του πολυωνύμου P(χ).

β. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η διαίρεση λέγεται ..... .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $P(\chi)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο χ^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α. Να αποδείξετε ότι $P(\chi)=\chi^3+\chi$.

Μονάδες 14

β. Να λύσετε την ανίσωση : $\left(P(\chi)-2\right)^3+\left(P(\chi)-2\right)^2+P(\chi)>2$.

Μονάδες 11

23. ***πανελλήνιες 2004*** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Αν υ(χ) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου Δ(χ) δια του δ(χ) όπου δ(χ) και υ(χ) είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε ο βαθμός του υ(χ) είναι μικρότερος από τον βαθμό του δ(χ).

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^4-8\chi^3+(5\alpha-1)\chi^2+8\chi-3\alpha-6$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να κάνετε την διαίρεση του P(χ) δια του χ^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Για α = 3, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(\chi)=0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(\chi)$ είναι κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.

Μονάδες 12

24. ***εσπερινά 2004*** ***Παρασκευή 21 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(\chi)=4\alpha^2\chi^3+\frac{8}{3}(1-\alpha^2)\chi^2-\chi-2$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, με $\alpha>0$, για το οποίο ισχύει :

$P(1)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=\frac{1}{2}$.

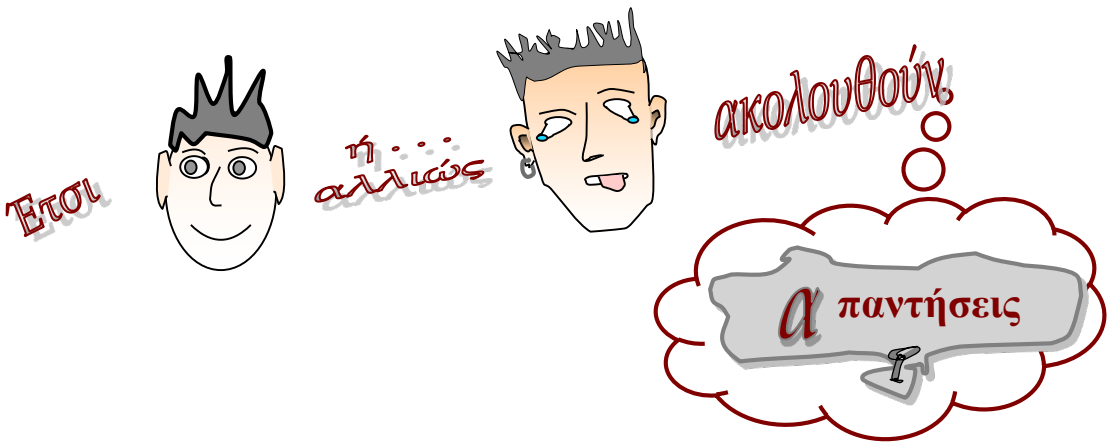
Μονάδες 10

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi-1$.

Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $P(\chi)=0$.

Μονάδες 7



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 2 Πολυώνυμα

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

α. Έστω ότι το πολυώνυμο $\sigma(\chi)$ είναι βαθμού $\nu \neq 0$ και υπάρχουν $\nu + 1$ τουλάχιστον διαφορετικές τιμές $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+1}$ έτσι ώστε να λαμβάνει την ίδια τιμή ξ, δηλαδή να ισχύει :

$\sigma(\chi_1)=\xi, \sigma(\chi_2)=\xi, \cdots, \sigma(\chi_{\nu+1})=\xi \Leftrightarrow \sigma(\chi_1)-\xi=0, \sigma(\chi_2)-\xi=0, \cdots, \sigma(\chi_{\nu+1})-\xi=0$.

Θεώρησε το πολυώνυμο $P(\chi) = \sigma(\chi) - \xi$ το οποίο προφανώς είναι βαθμού $\nu \neq 0$ και επιπλέον είναι : $P(\chi_1)=0, P(\chi_2)=0, \cdots, P(\chi_{\nu+1})=0$, άρα το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει τουλάχιστον $\nu + 1$ ρίζες, τις $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+1}$ επομένως θα έχει ως παράγοντες τα :

$(\chi-\chi_1), (\chi-\chi_2), \cdots, (\chi-\chi_{\nu+1})$ και θα γράφεται

$P(\chi)=(\chi-\chi_1)\cdot(\chi-\chi_2)\cdot \cdots \cdot(\chi-\chi_{\nu+1})\pi(\chi)$.

Το πρώτο μέλος της ισότητας είναι ν βαθμού και το 2ο μέλος είναι $\nu + 1$ βαθμού, ***ΑΤΟΠΟ*** .

Κατέληξες σε άτοπο επειδή υπέθεσες πως το $\sigma(\chi)$ είναι βαθμού $\nu \neq 0$, επομένως το $\sigma(\chi)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού δηλαδή σταθερό πολυώνυμο

β. Είναι $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2 \geq 0$ και $1>0$ άρα $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι το $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1 δηλαδή έστω ότι :

$(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1=P_1(\chi)\cdot P_2(\chi)$, τότε θα είναι $P_1(\alpha_1)\cdot P_2(\alpha_1)=1$, $P_1(\alpha_2)\cdot P_2(\alpha_2)=1$, $P_1(\alpha_\nu)\cdot P_2(\alpha_\nu)=1$ και επειδή τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι διαφορετικοί ανά δυο, αν υποθέσεις πως έστω ένας από αυτούς είναι ίσος με 1 τότε όλοι οι όλοι θα είναι διαφορετικοί από το 1.

Έστω ο $\alpha_\kappa \neq 1$ τότε θα είναι $P_1(\alpha_\kappa)\cdot P_2(\alpha_\kappa)=1$ ***ΑΤΟΠΟ*** γιατί τα $P_1(\chi)$, $P_2(\chi)$ είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1 και επομένως τα $P_1(\alpha_\kappa)$, $P_2(\alpha_\kappa)$ είναι ακέραιοι αριθμοί άρα $P_1(\alpha_\kappa)\cdot P_2(\alpha_\kappa)=1$ σημαίνει πως $P_1(\alpha_\kappa)=1$ και $P_2(\alpha_\kappa)=1$ όμως τα $P_1(\alpha_\kappa), P_2(\alpha_\kappa)$ είναι ακέραιοι αριθμοί διαφορετικοί από το 1, γιατί μια αλγεβρικοί παράσταση $\alpha_\nu\alpha_\kappa^\nu+\alpha_\nu\alpha_\kappa^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\alpha_\kappa+\alpha_0$ όπου $\alpha_\kappa \neq 1$ δεν είναι δυνατόν να ισούται με 1.

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε πως το $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1, άρα η αλήθεια είναι πως αυτό **δεν** μπορεί να συμβεί.

Το θέμα ταιριάζει πολύ περισσότερο στο τέταρτο κεφάλαιο της κατεύθυνσης περί θεωρίας αριθμών και επομένως θα το δείτε και εκεί

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού Π(χ) = Π(1 – χ) για κάθε χ ∈ R, άρα και για χ = 0 δηλαδή Π(0) = Π(1).

Έστω το P(χ) = Π(χ) – Π(1 – χ) τότε P(0) = Π(0) – Π(1) = 0, άρα το P(χ) διαιρείται με το χ – 0 = χ, επίσης P(1) = Π(1) – Π(1 – 1) = Π(0) – Π(0) = 0, άρα το P(χ) διαιρείται και με το χ – 1, επομένως το P(χ) = Π(χ) – Π(1 – χ) διαιρείται με το χ(χ – 1)

Η ιδιότητα «Αν ένα πολυώνυμο διαιρείται με το χ – α και με το χ – β τότε θα διαιρείται και με το (χ – α)(χ – β)» τότε ήταν στην εξεταστέα ύλη σήμερα δεν αναφέρεται καν παρ' όλο που είναι πολύ χρήσιμη, επειδή μπορεί να σου χρειαστεί δες την πολύ σύντομη απόδειξή της :

* Έστω ότι το πολυώνυμο $P(\chi)$ διαιρείται με το χ – α και με το χ – β, α ≠ β τότε $P(\alpha)=0$ και $P(\beta)=0$

$P(\alpha)=0$ διαιρείται με το χ – α σημαίνει επίσης ότι $P(\chi)=(\chi-\alpha)\pi(\chi) \Leftrightarrow P(\beta)=(\beta-\alpha)\pi(\beta) \Leftrightarrow$

$0=(\beta-\alpha)\pi(\beta)$ άρα $\pi(\beta)=0$ επομένως το π(χ) έχει παράγοντα το (χ – β) άρα $\pi(\chi)=(\chi-\beta)\pi_1(\chi)$

Τελικά $P(\chi)=(\chi-\alpha)\pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)\pi_1(\chi)$ άρα το $P(\chi)$ διαιρείται με το $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)$

Β. Έστω πολυώνυμο $P(\chi)$ βαθμού ν ≠ 0 με την ιδιότητα $P(\chi)=P(\chi-1)$.

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις θα έχεις :

$P(0)=P(-1), P(1)=P(0), P(2)=P(1)$ …. άρα σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το πολυώνυμο :

$\Pi(\chi)=P(\chi)-P(\chi-1)$ θα διαιρείται με το $(\chi+1)\chi(\chi-1)(\chi-1)\cdots(\chi-\nu)$ άρα

$\Pi(\chi)=P(\chi)-P(\chi-1)=(\chi+1)\chi(\chi-1)(\chi-1)\cdots(\chi-\nu)\pi(\chi)$ ***ΑΤΟΠΟ*** διότι το

$\Pi(\chi)=P(\chi)-P(\chi-1)$ είναι ν βαθμού και το $(\chi+1)\chi(\chi-1)(\chi-1)\cdots(\chi-\nu)\pi(\chi)$ είναι βαθμού μ > ν

άρα το $P(\chi)$ είναι βαθμού ν = 0 δηλαδή είναι σταθερό πολυώνυμο .

Δες και την απόδειξη, από το παρόμοιο, θέμα του 1974.

3. ***πανελλήνιες 1999*** ***Τετάρτη 16 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το διώνυμο (χ – ρ) είναι :

P(χ) = (χ – ρ)π(χ) + υ(χ).

β. Επειδή ο διαιρέτης (χ – ρ) είναι πρώτου βαθμού και το υπόλοιπο είναι πάντοτε μικρότερου βαθμού από το διαιρέτη σωστή είναι η απάντηση Γ.

γ. Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(χ) με το διώνυμο χ – ρ έχουμε:

P(χ) = (χ - ρ)π(χ) + υ(χ)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή ο διαιρέτης (χ – ρ) είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης υ(χ) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο (σταθερός αριθμός δηλαδή ανεξάρτητος του χ).

Έτσι, έχουμε : **P(χ) = (χ – ρ)π(χ) + υ** **(1)**

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου χ = ρ και έχουμε :

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = \upsilon.$$

Β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(χ) με το (χ – 1) είναι :

$\upsilon = P(1) = \kappa^2 \cdot 1^3 - 3\kappa \cdot 1^2 + \kappa \cdot 1 + 1 = \kappa^2 - 3\kappa + \kappa + 1 = = \kappa^2 - 2\kappa + 1$

Από την υπόθεση έχουμε ότι : $\upsilon = 0 \Leftrightarrow P(1) = 0$

Άρα πρέπει $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ Επομένως σωστή απάντηση είναι η Γ.

4. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999*** ***Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. **α.** Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0$

β. Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $P(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4$, με το δεδομένο ότι το ρ = 1 θα έχεις

	1	–1	– 4	4	**ρ = 1**
↓		1	0	– 4	
	1	0	– 4	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4$ με το διώνυμο χ – 1 είναι $\pi(\chi) = \chi^2 - 4$

δηλαδή είναι $P(\chi) = (\chi^2 - 4)(\chi - 1)$

γ. Είναι $\chi^3 + 4 = \chi^2 + 4\chi \Leftrightarrow \chi^3 - \chi^2 - 4\chi + 4 = 0 \Leftrightarrow (\chi^2 - 4)(\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - 1 = 0 \\ \chi^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 \\ \chi = \pm 2 \end{cases}$

δ. **Συμβουλή :** Ανισώσεις με βαθμό μεγαλύτερο από 2 λύνονται **πάντα** με πίνακα προσήμου.

i) Είναι $\chi - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$

ii) Για το τριώνυμο 2ου βαθμού $\chi^2 - 4$ είναι $\rho_1 = -2$ και $\rho_2 = 2$ άρα

ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

– ∞		– 2		2		+ ∞
	+		–		+	

ο πίνακας μεταβολών του P(χ) :

χ	– ∞		– 2		1		2		+ ∞
χ – 1		–		–		+		+	
$\chi^2 - 4$		+		–		–		+	
P(χ)		–		+		–		+	

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η **P(χ) ≥ 0** λύσεις είναι τα **χ ∈ [– 2 , 1]U[2 , + ∞).**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **Εσπερινά 2000** *Δευτέρα 29 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi-6$.

α. $P(3)=3^3-3\cdot3^2+2\cdot3-6=27-27+6-6$, άρα $P(3)=0$

β. Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi-6$, με το δεδομένο ότι το ρ = 3 θα έχεις

	1	–3	2	–6	**ρ = 3**
↓		3	0	6	
	1	0	2	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+2\chi-6$ με το διώνυμο $\chi-3$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+2$.

γ. $P(\chi)=(\chi^2+2)(\chi-3)$.

6. **πανελλήνιες 2000** *Πέμπτη 22 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

α. Επειδή ο αριθμός χ = 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(χ) θα έχουμε P(1) = 0, κι αφού η διαίρεση του P(χ) με το χ + 1 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι : P(– 1) = 2.

Οπότε : $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot1^3+(\beta-1)\cdot1^2-3\cdot1-2\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha+(\beta-1)-3-2\beta+6=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-2$ **(1)**

και $P(-1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot(-1)^3+(\beta-1)\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-2\beta+6=2 \Leftrightarrow -\alpha+(\beta-1)+3-2\beta+6=2 \Leftrightarrow$

$-\alpha-\beta=-6$ **(2)** .

από **(1)** και **(2)** είναι **α = 2 και β = 4**

β. Όταν α = 2 και β = 4 το πολυώνυμο P(χ) γράφεται : $P(\chi)=2\chi^3+3\chi^2-3\chi-2$, οπότε :

$P(\chi)=0 \Leftrightarrow 2\chi^3+3\chi^2-3\chi-2=0$.

Παραγοντοποιείς το 1ο μέλος και έχεις $2(\chi^3-1)+3\chi(\chi-1)=0 \Leftrightarrow 2(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)+3\chi(\chi-1)=0 \Leftrightarrow$

$(\chi-1)(2\chi^2+2\chi+2+3\chi)=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(2\chi^2+5\chi+2)=0 \Leftrightarrow \chi-1=0$ ή $2\chi^2+5\chi+2=0$

$\chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1$, και $2\chi^2+5\chi+2=0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \chi=-2$ η $\chi=\frac{1}{2}$

* Ξέροντας ότι P(1) = 0 μπορείς να εφαρμόσεις Horner στο $P(\chi)=2\chi^3+3\chi^2-3\chi-2$ για να το παραγοντοποιήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **επαναληπτικές 2000** Σεπτέμβριος

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β1.

α. 4.
β. 3.
γ. 1.

Β2. Αν το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^{2000}+\lambda\chi-2$, έχει παράγοντα το $\chi-1$, τότε θα πρέπει $P(1)=0 \Leftrightarrow$ $1^{2000}+\lambda\cdot 1\chi-2=0 \Leftrightarrow 1+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ άρα : **Β.** είναι η σωστή απάντηση .

8. **εσπερινά επαναληπτικές 2000** Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $\chi^3+2\chi^2-\chi-\lambda$ για το οποίο ισχύει $P(1)=0$.

α. $P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3+2\cdot 1^2-1-\lambda=0 \Leftrightarrow 1+2-1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=2$

β. Αν $\lambda=2$ τότε $P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$ οπότε αποκλείονται, αυτόματα, οι 0, 3, –3 και μένουν οι αριθμοί 2, –2. Από αυτούς μόνον ο –2 μηδενίζει το P(χ) άρα η **Γ.** είναι η σωστή απάντηση.

γ. Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$, με το δεδομένο ότι το ρ = 2 θα έχεις

	1	2	–1	–2	**ρ = 2**
↓		2	8	14	
	1	4	7	12	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+4\chi+7$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. ***εσπερινά 2001*** ***Δευτέρα 28 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $F(\chi)=\chi^3-\chi^2+3\chi-3$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι :

$\upsilon=F(2)\Leftrightarrow \upsilon=2^3-2^2+3\cdot 2-3\Leftrightarrow \upsilon=8-4+6-3\Leftrightarrow \upsilon=7$.

β. Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $F(\chi)=\chi^3-\chi^2+3\chi-3$, με το δεδομένο ότι το ρ = 1 θα έχεις

	1	–1	3	–3	**ρ = 1**
↓		1	0	3	
	1	0	3	0	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $F(\chi)=\chi^3-\chi^2+3\chi-3$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+3$.

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα, επειδή $\upsilon=F(1)=0$, άρα το 1 είναι μια ρίζα της $F(\chi)=0$ και επί πλέον $F(\chi)=(\chi-1)(\chi^2+3)$.

Άρα $F(\chi)=0\Leftrightarrow(\chi-1)(\chi^2+3)=0\Leftrightarrow\chi=1$ μοναδική ρίζα, γιατί $\chi^2+3\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$

10. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν ο $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε είναι : $\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\rho+\alpha_0=0\Leftrightarrow$

$\alpha_0=-\alpha_\nu\rho^\nu-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}-\cdots-\alpha_1\rho\Leftrightarrow\alpha_0=\rho\left(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-\cdots-\alpha_1\right)$ **(1)** $\Leftrightarrow$

Επειδή οι $\rho, \alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \cdots \alpha_1$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ολόκληρη η παράσταση :

$-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-\cdots-\alpha_1$ είναι ακέραιος αριθμός και επειδή από την ισότητα **(1)** είναι φανερό ότι ο ρ είναι διαιρέτης ολόκληρου του $2^{ου}$ μέλους (αφού το ρ είναι παράγοντας του$2^{ου}$ μέλους) άρα το ρ θα διαιρεί και το $1^ο$ μέλος δηλαδή τον α_0

Α.2. Η σωστή απάντηση είναι η **δ**.

Β.1. $\alpha\leftrightarrow\Lambda,\ \beta\leftrightarrow\Lambda,\ \gamma\leftrightarrow\Sigma$

Β.2. Η σωστή απάντηση είναι η **α**.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** *Τρίτη 3 Ιουλίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο f(χ) όπου $f(\chi)=\chi^4+5^{2\lambda-1}\chi^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\lambda}\chi-1$.

Α) Αν $\chi-1$ παράγοντας του $f(\chi)=\chi^4+5^{2\lambda-1}\chi^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\lambda}\chi-1$ τότε $f(1)=0 \Leftrightarrow$

$$1^4+5^{2\lambda-1}1^3-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}1^2+25^{\lambda}1-1=0 \Leftrightarrow 5^{2\lambda-1}-2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}+25^{\lambda}=0 \Leftrightarrow 5^{2\lambda-1}+\left[(5)^2\right]^{\lambda}=2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5^{2\lambda}}{5}+5^{2\lambda}=2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow 5^{2\lambda}+5\cdot5^{2\lambda}=5\cdot2\cdot3^{\lambda+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 6\cdot5^{2\lambda}=10\cdot3^{\frac{2\lambda+1}{2}} \Leftrightarrow 3\cdot5^{2\lambda}=5\cdot3^{\frac{2\lambda+1}{2}} \Leftrightarrow \frac{5^{2\lambda}}{5}=\frac{3^{\frac{2\lambda+1}{2}}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 5^{2\lambda-1}=3^{\frac{2\lambda+1}{2}-1} \Leftrightarrow 5^{2\lambda-1}=3^{\frac{2\lambda-1}{2}} \Leftrightarrow 2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Β)

α. Για $\lambda=\frac{1}{2}$ είναι $f(\chi)=\chi^4+5^{2\frac{1}{2}-1}\chi^3-2\cdot3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\chi^2+25^{\frac{1}{2}}\chi-1 \Leftrightarrow f(\chi)=\chi^4+5^0\chi^3-2\cdot3^1\chi^2+5\chi-1$

$$\Leftrightarrow f(\chi)=\chi^4+\chi^3-6\chi^2+5\chi-1$$

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $f(\chi)=\chi^4+\chi^3-6\chi^2+5\chi-1$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 1** θα έχεις

1	1	– 6	5	– 1	**ρ = 1**
↓	1	2	– 4	1	
1	2	– 4	1	0	

Παρατήρησε ότι το υπόλοιπο είναι 0. Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $f(\chi)=\chi^4+\chi^3-6\chi^2+5\chi-1$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^3+2\chi^2-4\chi+1$ δηλαδή είναι $f(\chi)=(\chi^3+2\chi^2-4\chi+1)(\chi-1)$

Αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner για το $\pi(\chi)=\chi^3+2\chi^2-4\chi+1$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 1** θα έχεις

1	2	– 4	1	**ρ = 1**
↓	1	3	– 1	
1	3	– 1	0	

Παρατήρησε ότι το υπόλοιπο είναι 0. Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(\chi)=\chi^3+2\chi^2-4\chi+1$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi_1(\chi)=\chi^2+3\chi-1$ δηλαδή είναι $\pi(\chi)=(\chi^2+3\chi-1)(\chi-1)$

Άρα τελικά $f(\chi)=(\chi^3+2\chi^2-4\chi+1)(\chi-1)=(\chi^2+3\chi-1)(\chi-1)(\chi-1) \Leftrightarrow f(\chi)=(\chi^2+3\chi-1)(\chi-1)^2$

άρα το $(\chi-1)^2$ παράγοντας του $f(\chi)=\chi^4+\chi^3-6\chi^2+5\chi-1$

β. Για να βρεις τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης : $f(\chi)=\chi^4+\chi^3-6\chi^2+5\chi-1$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ πρέπει να λύσεις την ανίσωση

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$f(\chi)>0 \Leftrightarrow (\chi^2+3\chi-1)(\chi-1)^2>0 \Leftrightarrow \chi^2+3\chi-1>0$ και $\chi\neq 1$ διότι $(\chi-1)^2\geq 0$ οπότε $(\chi-1)^2>0$ μόνο αν $\chi\neq 1$.

Η $\chi^2+3\chi-1>0$ έχεις : ρίζες $\rho_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ και $\rho_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

Για το τριώνυμο 2ου βαθμού $\chi^2+3\chi-1$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
	+		−		+	

Άρα λύσεις της ανίσωσης $f(\chi)>0$,όπως φαίνεται από τον πίνακα είναι τα

$\chi\in\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$ και δεν πρέπει να ξεχάσεις ότι $\chi\neq 1$ γιατί για $\chi=1$ είναι $f(\chi)=0$

12. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(\chi)+g(\chi)=\chi^2+3+2\chi^2+1=3\chi^2+4$,

$f(\chi)\cdot g(\chi)-\varphi(\chi)=(\chi^2+3)(2\chi^2+1)-(\chi^2+5)=2\chi^4+\chi^2+6\chi^2+3-\chi^2-5=2\chi^4+6\chi^2-2$

$f(\chi)\cdot g(\chi)-\varphi(\chi)=2\chi^4+6\chi^2-2$

β. $\upsilon=f(2)\cdot g(2)-\varphi(2)=2\cdot 2^4+6\cdot 2^2-2=32+24-2=54$

13. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν το $F(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi-1$ τότε θα είναι $F(1)=0\Leftrightarrow 3\cdot 1^3-1^2+3\cdot 1-\kappa=0\Leftrightarrow \kappa=5$

β. Αν $\kappa=6$, τότε $F(\chi)=3\chi^3-\chi^2+3\chi-6$ και αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner για το $F(\chi)$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 2** θα έχεις

3	−1	3	−6	**ρ = 2**
↓	6	10	26	
3	5	13	20	

Επομένως το μεν υπόλοιπο είναι 20, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $F(\chi)=3\chi^3-\chi^2+3\chi-6$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι $\pi(\chi)=3\chi^2+5\chi+13$ δηλαδή είναι $F(\chi)=(\chi-2)(3\chi^2+5\chi+13)+20$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f(-1)=(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2-(-1)-2=1+1-1+1-2=0$,άρα το $\chi+1$ είναι παράγοντας του $f(\chi)$.

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $f(\chi)=\chi^4-\chi^3-\chi^2-\chi-2$, με το δεδομένο ότι το **ρ = – 1** θα έχεις

1	–1	–1	–1	– 2	**ρ = – 1**
↓	–1	2	– 1	2	
1	–2	1	–2	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης του $f(\chi)$ με το $\chi+1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^3-2\chi^2+\chi-2$ και το υπόλοιπο είναι 0, δηλαδή είναι $f(\chi)=(\chi^3-2\chi^2+\chi-2)(\chi+1)$.

β. Είναι $\pi(2)=2^3-2\cdot2^2+2-2=8-8=0$ άρα το $\chi-2$ είναι παράγοντας του $\pi(\chi)$

αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner για το $\pi(\chi)=\chi^3-2\chi^2+\chi-2$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 2** θα έχεις

1	–2	1	–2	**ρ = 2**
↓	2	0	2	
1	0	1	0	

Επομένως το μεν υπόλοιπο είναι 0, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(\chi)=\chi^3-2\chi^2+\chi-2$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι $\pi_1(\chi)=\chi^2+1$ άρα $\pi(\chi)=\chi^3-2\chi^2+\chi-2=(\chi-2)(\chi^2+1)$.

γ. Για να βρεις τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(\chi)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ θα πρέπει να λύσεις την ανίσωση $f(\chi)>0$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι $f(\chi)=(\chi^3-2\chi^2+\chi-2)(\chi+1)=(\chi+1)(\chi-2)(\chi^2+1)$

Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$\chi+1$	–	+	+	
$\chi-2$	–	–	+	
χ^2+1	+	+	+	
$f(\chi)$	+	–	+	

Όπως φαίνεται από τον πιο πάνω πίνακα για την **f(χ) > 0** λύσεις είναι τα **χ ∈ (– ∞ , –1)U(2 , + ∞).**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. **Εσπερινά 2002** *Παρασκευή 24 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3-(\kappa+1)2^2+(\kappa-1)2+2=0 \Leftrightarrow 8-4\kappa-4+2\kappa-2+2=0 \Leftrightarrow -2\kappa=-4 \Leftrightarrow \boxed{\kappa=2}$

β. Αν $\kappa=2$ το $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2$ οπότε αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner, με το δεδομένο ότι

το **ρ = – 3** θα έχεις

				ρ = – 3
1	–3	1	2	
↓	–3	18	–57	
1	–6	19	–55	

Επομένως το μεν υπόλοιπο είναι –55, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2$ με το διώνυμο $\chi+3$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2-6\chi+19$ άρα $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2=(\chi+3)(\chi^2-6\chi+19)-57$.

γ.

✓ ***1ος τρόπος*** Επειδή $P(2)=0$, $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2$ οπότε αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner, με το δεδομένο ότι το **ρ = 2** θα έχεις

				ρ = 2
1	–3	1	2	
↓	2	–2	–2	
1	–1	–1	0	

Επομένως το υπόλοιπο είναι 0, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2-\chi-1$ άρα $P(\chi)=\chi^3-3\chi^2+\chi+2=(\chi-2)(\chi^2-\chi-1)$.

άρα $P(\chi)=\chi-2 \Leftrightarrow (\chi-2)(\chi^2-\chi-1)-(\chi-2)=0 \Leftrightarrow (\chi-2)\left[(\chi^2-\chi-1)-1\right]=0 \Leftrightarrow$

$(\chi-2)(\chi^2-\chi-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi-2=0\\ \chi^2-\chi-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\\ \chi=-1,\ \chi=2\end{cases}$.

✓ ***2ος τρόπος*** Είναι $P(2)=0$ άρα $P(2)=2-2 \Leftrightarrow 0=0$ επομένως η $\chi=2$ είναι μια λύση της

$P(\chi)=\chi-2 \Leftrightarrow \chi^3-3\chi^2+\chi+2=\chi-2 \Leftrightarrow \chi^3-3\chi^2+4=0$

Αν για το $\chi^3-3\chi^2+4$ εφαρμόσεις το σχήμα Horner, με το δεδομένο ότι το **ρ = 2** θα έχεις

				ρ = 2
1	–3	0	4	
↓	2	–2	–4	
1	–1	–2	0	

Επομένως το υπόλοιπο είναι 0, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $\chi^3-3\chi^2+4$ με το διώνυμο $\chi-2$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2-\chi-2$ άρα $\chi^3-3\chi^2+4=(\chi-2)(\chi^2-\chi-2)$.

Άρα $\chi^3-3\chi^2+4=0 \Leftrightarrow (\chi-2)(\chi^2-\chi-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi-2=0\\ \chi^2-\chi-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=2\\ \chi=-1,\ \chi=2\end{cases}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. ***πανελλήνιες 2002*** ***Σάββατο 8 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Ρ(χ) με το διώνυμο χ – ρ έχουμε:

Ρ(χ) = (χ - ρ)π(χ) + υ(χ)

Επειδή ο διαιρέτης (χ – ρ) είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης υ(χ) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο (σταθερός αριθμός δηλαδή ανεξάρτητος του χ).

Έτσι, έχουμε : **Ρ(χ) = (χ – ρ)π(χ) + υ** **(1)**

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου χ = ρ και έχουμε :

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = \upsilon.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \Leftrightarrow \kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa+\lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 7$

$$-\frac{\kappa}{8} - \frac{1}{4}(\kappa+\lambda) - \frac{1}{2}\lambda + 1 = 7 \Leftrightarrow -\kappa - 2(\kappa+\lambda) - 4\lambda + 81\cdot = 8\cdot 7 \Leftrightarrow -3\kappa - 6\lambda = 56 - 8 \Leftrightarrow 3\kappa + 6\lambda = -48$$

$\kappa + 2\lambda = -16$ **(1)**.

$P(-1) = 23 \Leftrightarrow \kappa(-1)^3 - (\kappa+\lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 = 23 \Leftrightarrow -\kappa - (\kappa+\lambda) - \lambda + 1 = 23 \Leftrightarrow$

$-2\kappa - 2\lambda + 1 = 23 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = -11$ **(1).**

Οι **(1)** και **(2)** αποτελούν σύστημα : $\begin{cases} \kappa + 2\lambda = -16 \\ \kappa + \lambda = -11 \end{cases}$ με αφαίρεση **(1)** – **(2)** βρίσκεις **λ = – 5** και μετά από **(2)** ⇔ **κ – 6**

β) Όταν κ = – 6 και λ = – 5 το $P(\chi)$ γίνεται $P(\chi) = -6\chi^3 - (-11)\chi^2 - 5\chi + 1 \Leftrightarrow$

$P(\chi) = -6\chi^3 + 11\chi^2 - 5\chi + 1$, είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του χ, είναι πλήρες πολυώνυμο άρα μπορείς να προχωρήσεις στην διαίρεση με το 2χ + 1 η οποία γίνεται ως εξής :

$-6\chi^3 + 11\chi^2 - 5\chi + 1$	$2\chi + 1$
$-6\chi^3 + 3\chi^2$	$-3\chi^2 + 7\chi^2 - 6$
$14\chi^2 - 5\chi + 1$	
$-14\chi^2 - 7\chi$	
$-12\chi + 1$	
$+12\chi + 6$	
$\upsilon = 7$	

Επομένως $P(\chi) = -6\chi^3 + 11\chi^2 - 5\chi + 1 = (2\chi + 1)(-3\chi^2 + 7\chi^2 - 6) + 7$

γ) Η ανίσωση $P(\chi) > 7 \Leftrightarrow (2\chi + 1)(-3\chi^2 + 7\chi^2 - 6) + 7 > 7 \Leftrightarrow (2\chi + 1)(-3\chi^2 + 7\chi^2 - 6) > 0$

i) Είναι $2\chi + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\chi > -1 \Leftrightarrow \chi > \frac{1}{2}$

ii) Για το $-3\chi^2 + 7\chi - 6$ που είναι τριώνυμο 2ου βαθμού έχεις :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

είναι $\Delta = 7^2 - 4(-3)(-6) = 49 - 72 = -23 < 0$ και $\alpha = -3 < 0$ άρα ισχύει

ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\chi^2 + 3\chi - 1$	$-$	

Οπότε, συνολικά, ισχύει ο πίνακας :

χ	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2\chi + 1$	$-$	$+$	
$-3\chi^2 + 7\chi - 6$	$-$	$-$	
$P(\chi)$	$+$	$-$	

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η $P(\chi) > 7$ λύσεις είναι τα $\chi \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

17. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Από την ταυτότητα της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ με το διώνυμο $\chi - \rho$ έχουμε:

$$\mathbf{P(\chi) = (\chi - \rho)\pi(\chi) + \upsilon(\chi)}$$

Επειδή ο διαιρέτης $(\chi - \rho)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης $\upsilon(\chi)$ είναι ένα σταθερό πολυώνυμο (σταθερός αριθμός δηλαδή ανεξάρτητος του χ).

Έτσι, έχουμε : $\mathbf{P(\chi) = (\chi - \rho)\pi(\chi) + \upsilon}$ **(1)**

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $\chi = \rho$ και έχουμε :

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = 0 \cdot \pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = \upsilon.$$

Β. **1. Λ,** **2. Σ,** **3. Λ,** **4. Σ**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(\chi) = (\kappa - 3)\chi^3 + (\kappa + \lambda)\chi^2 + (31 - \lambda)\chi + 24$, $Q(\chi) = \chi^3 + 9\chi^2 + 26\chi + 24$

όπου κ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Για να είναι ίσα δυο πολυώνυμα θα πρέπει να είναι ίσοι οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων,

$$\text{άρα } \begin{cases} \kappa - 3 = 1 \\ \kappa + \lambda = 9 \\ 31 - \lambda = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 4 \\ \lambda = 5 \\ \lambda = 5 \end{cases} \text{ άρα } \mathbf{\kappa = 5 \text{ και } \lambda = 5}$$

β. $\upsilon = Q(-1) = (-1)^3 + 9(-1)^2 + 26(-1) + 24 = -1 + 9 - 26 + 24 = 6$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. $Q(-2)=(-2)^3+9(-2)^2+26(-2)+24=-8+36-52+24=0$, επομένως ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(\chi)$.

δ. Ένα τρόπος είναι να επιχειρήσεις να βρεις τις ρίζες, όμως στην πορεία θα αποδειχθεί πως δεν είναι πάντα το καλλίτερο. Τον συγκεκριμένο τύπο ερώτησης θα τον συναντήσεις και στην επόμενη τάξη με λίγο διαφορετική μορφή και θα τον απαντάς μελετώντας το πρόσημο, εδώ θα ακολουθήσεις τον πρώτο τρόπο :

Για το $Q(\chi)=\chi^3+9\chi^2+26\chi+24$ θα εφαρμόσεις το σχήμα Horner, με το δεδομένο ότι το **ρ = – 2.**

	1	9	26	24	**ρ = – 2**
↓		–2	–14	–24	
	1	7	12	0	

Επομένως το μεν υπόλοιπο είναι 0, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $Q(\chi)=\chi^3+9\chi^2+26\chi+24$ με το διώνυμο $\chi+2$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+7\chi+12$ άρα $Q(\chi)=\chi^3+9\chi^2+26\chi+24=(\chi+2)(\chi^2+7\chi+12)$.

Το $\chi^2+7\chi+12$ έχει ρίζες -4 και -3 άρα το $Q(\chi)=\chi^3+9\chi^2+26\chi+24$ έχει ρίζες $-4,-3,-2<0$.

18. επαναληπτικές 2002

Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(\chi)=\chi^3-6\chi^2+11\chi-6$.

α. $P(-1)=(-1)^3-6(-1)^2+11(-1)-6=-1-6-11-6=-24$

β. Για το $P(\chi)=\chi^3-6\chi^2+11\chi-6$ θα εφαρμόσεις το σχήμα Horner, με το δεδομένο ότι το **ρ = 1.**

	1	–6	11	–6	**ρ = 1**
↓		1	–5	6	
	1	–5	6	0	

Επομένως το υπόλοιπο είναι 0, το δε πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)=\chi^3-6\chi^2+11\chi-6$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2-5\chi+6$ άρα $P(\chi)=\chi^3-6\chi^2+11\chi-6=(\chi-1)(\chi^2-5\chi+6)$.

γ. $P(\chi)<0\Leftrightarrow(\chi-1)(\chi^2-5\chi+6)<0$

- ✓ $\chi-1\geq 0\Leftrightarrow\chi\geq 1$
- ✓ Το $\chi^2-5\chi+6$ έχει ρίζες $\rho_1=2$ και $\rho_2=3$ άρα

ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

$-\infty$		2		3		$+\infty$
	+		–		+	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα, συνολικά, ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$		2		1		3	$+\infty$
$\chi-1$		$-$	$-$	$+$	$+$			
$\chi^2-5\chi+6$		$+$	$-$	$-$	$+$			
$P(\chi)$		$-$	$+$	$-$	$+$			

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η $P(\chi)<0$ λύσεις είναι τα $\chi \in (-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$.

19. ***πανελλήνιες 2003*** ***Πέμπτη 22 Μαΐου***

Τον Μάιο του 2003 δεν υπήρχε «καθαρό» θέμα με πολυώνυμα, υπήρχε μόνο μια ερώτηση που είχε σχέση με το επόμενο κεφάλαιο περί προόδων.

20. ***εσπερινά 2003*** ***Παρασκευή 23 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 4ο

α. Όταν $\kappa=-3$, το $P(\chi)$ γίνεται $P(\chi)=\chi^3-2\chi^2-3\chi+1$ οπότε εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho=3$ θα έχεις

	1	-2	-3	1	**ρ = 3**
↓		3	3	0	
	1	1	0	1	

Παρατήρησε ότι το υπόλοιπο είναι $\upsilon=1$ και το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το διώνυμο $\chi-3$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+\chi$ δηλαδή είναι $P(\chi)=(\chi-3)(\chi^2+\chi)+1$

β. Αν έχει μια τουλάχιστον ρίζα, αυτή θα περιέχεται μεταξύ των διαιρετών του σταθερού όρου, διαιρέτες του σταθερού όρου είναι το 1 και το -1.

Αυτό σημαίνει ότι το κ είναι τέτοιο ώστε το $P(1)=0$ **ή** $P(-1)=0$.

Άρα $P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-2\cdot 1^2+\kappa\cdot 1+1=0 \Leftrightarrow$ **κ = 0** και

$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3-2\cdot(-1)^2+\kappa\cdot(-1)+1=0 \Leftrightarrow -1-2-\kappa+1=0$ **κ = – 2** και

γ) Όταν $\kappa=0$ το $P(\chi)$ γίνεται $P(\chi)=\chi^3-2\chi^2+1$, οπότε για να λύσεις αυτήν την εξίσωση έχεις δυο επιλογές

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Να παραγοντοποιήσεις με τον παλιό «κλασικό» τρόπο (με ομαδοποίηση) δηλαδή : $\chi^3-2\chi^2+1=0$

$\Leftrightarrow \chi^3-\chi^2-\chi^2+1=0 \Leftrightarrow \chi^2(\chi-1)-(\chi^2-1)=0 \Leftrightarrow \chi^2(\chi-1)-(\chi-1)(\chi+1)=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi^2-\chi-1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\chi-1=0 \quad \text{ή}\\ \chi-\chi-1=0 \ \text{αδύνατη}\end{cases} \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\chi=1}$ μοναδική λύση

ii) Να παρατηρήσεις πως $P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3-2\cdot 1^2+\kappa\cdot 1+1=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa=0}$ σχέση που σημαίνει πως όταν αντίστροφα το **κ = 0** τότε το 1 ρίζα του $P(\chi)$.

Έτσι λοιπόν εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $\chi^3-2\chi^2+1=\chi^3-2\chi^2+0\chi+1$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 1** θα έχεις

				ρ = 1
	1	– 1	– 1	
1	– 1	– 1	**0**	

Παρατήρησε ότι το υπόλοιπο είναι 0, κάτι που περιμέναμε άλλωστε. Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2-\chi-1$ δηλαδή είναι $P(\chi)=(\chi-1)(\chi^2-\chi-1)$.

$P(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^3-2\chi^2+1=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi^2-\chi-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi-1=0 \quad \text{ή}\\ \chi-\chi-1=0 \ \text{αδύνατη}\end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=1}$

μοναδική λύση

21. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** ***Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi+2 \Leftrightarrow P(2004)+P(-2004)=\alpha\cdot 2004^3+\beta\cdot 2004+2+\alpha\cdot(-2004)^3+\beta\cdot(-2004)+2$

$= \alpha\cdot 2004^3+\beta\cdot 2004-\alpha\cdot 2004^3-\beta\cdot 2004+4 \Leftrightarrow P(2004)+P(-2004)=4$.

β. $P(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi+2 \Leftrightarrow P(\chi)=\chi(\alpha\chi^2+\beta)+2$ άρα το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $Q(\chi)=\chi$ είναι $\pi(\chi)=\alpha\chi^2+\beta$ και το υπόλοιπο $\upsilon=2$.

γ. $\upsilon=P(1)=\alpha\cdot 1^3+\beta\cdot 1+2=\alpha+\beta+2$

δ) Αν $\alpha=1$ το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3+\beta\chi+2$ και αν έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε

$\upsilon=P(1)=0 \Leftrightarrow 1+\beta+2=0$ $\beta=-3$. Τότε $P(\chi)=\chi^3-3\chi+2$ και $P(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^3-3\chi+2=0$

$\chi^3-\chi-2\chi+2=0 \Leftrightarrow \chi(\chi^2-1)-2(\chi-1)=0 \Leftrightarrow \chi(\chi-1)(\chi+1)-2(\chi-1)=0 \Leftrightarrow$

$(\chi-1)[\chi(\chi+1)-2]=0 \Leftrightarrow (\chi-1)[\chi^2+\chi-2]=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi-1=0\\ \chi^2+\chi-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi=1 \ \text{ή} \ \chi=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi=-2\end{cases}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

22. **επαναληπτικές 2003** *Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

4. **α.** Αν $P(\chi)=\alpha_\kappa\chi^\kappa+\alpha_{\kappa-1}\chi^{\kappa-1}+\cdots+\alpha_1\chi^1+\alpha_0$ ένα πολυώνυμο με $\alpha_\kappa\neq 0$, τότε ο αριθμός κ Λέγεται ***βαθμός*** του πολυωνύμου P(x).

β. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε η διαίρεση λέγεται ***τέλεια*** .

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αν το $P(\chi)$ διαιρείται με το χ^2+1 και έχει ρίζα το 0 αυτό σημαίνει πως έχει παράγοντες τους χ^2+1, (αφού διαιρείται) και $\chi-0=\chi$ (αφού έχει ρίζα το 0) άρα θα έχει παράγοντα το $\chi(\chi^2+1)$.

Όμως το γινόμενο $\chi(\chi^2+1)$ είναι 3ου βαθμού όπως και το $P(\chi)$, άρα το $P(\chi)=\alpha\cdot\chi(\chi^2+1)\Leftrightarrow$

$P(\chi)=\alpha\chi^3+\alpha\chi$ και επειδή η εκφώνηση λέει πως πρέπει το $P(\chi)$ να έχει άθροισμα συντελεστών 2 θα πρέπει $\alpha+\alpha=2\Leftrightarrow$ **α = 1** άρα $P(\chi)=\chi^3+\chi$.

β. $(P(\chi)-2)^3+(P(\chi)-2)^2+P(\chi)>2\Leftrightarrow(P(\chi)-2)^3+(P(\chi)-2)^2+P(\chi)-2>0$. **(1)**

Αν θέσεις $P(\chi)-2=\omega$ από **(1)** $\Leftrightarrow\omega^3+\omega^2+\omega>0\Leftrightarrow\omega(\omega^2+\omega+1)>0$ και επειδή το $\omega^2+\omega+1$ έχει $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$ άρα $\omega^2+\omega+1>0$ για κάθε ω, τότε η $\omega(\omega^2+\omega+1)>0\Leftrightarrow\omega>0\Leftrightarrow$

$P(\chi)>2\Leftrightarrow\chi^3+\chi>2\Leftrightarrow\chi^3+\chi-2>0$ οπότε με Horner ή με ομαδοποίηση έχω $\chi^3-\chi+2\chi-2>0\Leftrightarrow$

$\chi(\chi^2-1)+2(\chi-1)>0\Leftrightarrow\chi(\chi+1)(\chi-1)+2(\chi-1)>0\Leftrightarrow(\chi-1)[\chi(\chi+1)+2]>0\Leftrightarrow$

$(\chi-1)(\chi^2+\chi+2)>0$, επειδή $\chi^2+\chi+2>0$ ($\Delta=-7<0$ και $\alpha=1>0$), άρα $\chi-1>0\Leftrightarrow$ **χ > 1**

23. **πανελλήνιες 2004** *Πέμπτη 20 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **γ.** **Σωστό**

ΘΕΜΑ 2ο

α. $P(\chi)=\chi^4-8\chi^3+(5\alpha-1)\chi^2+8\chi-3\alpha-6$, είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του χ, είναι πλήρες πολυώνυμο άρα μπορείς να προχωρήσεις στην διαίρεση με το χ^2-1 η οποία γίνεται ως εξής :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi^4-8\chi^3+(5\alpha-1)\chi^2+8\chi-3\alpha-6$	χ^2-1
$-\chi^4+\chi^2$	$\chi^2-8\chi+5\alpha$
$-8\chi^3+5\alpha\chi^2+8\chi-3\alpha-6$	
$8\chi^3-8\chi$	
$+5\alpha\chi^2-3\alpha-6$	
$-5\alpha\chi^2+5\alpha$	
$\upsilon=2\alpha-6$	

Επομένως $P(\chi)=\chi^4-8\chi^3+(5\alpha-1)\chi^2+8\chi-3\alpha-6=(\chi^2-1)(\chi^2-8\chi+5\alpha)+2\alpha-6$

β. Για να είναι η παραπάνω διαίρεση τέλεια πρέπει $\upsilon=0\Leftrightarrow 2\alpha-6=0\Leftrightarrow \alpha=3$.

γ. Όταν $\alpha=3$ το $P(\chi)=\chi^4-8\chi^3+14\chi^2+8\chi-15=(\chi^2-1)(\chi^2-8\chi+15)$

Άρα $P(\chi)=0\Leftrightarrow(\chi^2-1)(\chi^2-8\chi+15)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2-1=0\\ \chi^2-8\chi+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=1,\ \chi=-1\\ \chi=3,\ \chi=5\end{cases}$.

Για να βρεις τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(\chi)$ είναι κάτω από τον άξονα χ΄χ θα λύσεις την $P(\chi)<0$

✓ Το χ^2-1 έχει ρίζες $\rho_1=-1$ και $\rho_2=1$ άρα

ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

✓ Το $\chi^2-8\chi+15$ έχει ρίζες $\rho_3=3$ και $\rho_4=5$ άρα

ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

$-\infty$		3		5		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	

Άρα ισχύει συνολικά ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$		-1		1		3		5		$+\infty$
χ^2-1		$+$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$\chi^2-8\chi+15$		$+$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$P(\chi)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η $P(\chi)<0$ λύσεις είναι τα $\chi\in(-1,1)\cup(3,5)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. **εσπερινά 2004** *Παρασκευή 21 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(1)=0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 1^3+\frac{8}{3}(1-\alpha^2)1^2-1-2=0 \Leftrightarrow 4\alpha^2+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\alpha^2-3=0 \Leftrightarrow 12\alpha^2+8-8\alpha^2-9=0 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2-1=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\frac{1}{2}$ και επειδή α> 0 άρα $\alpha=\frac{1}{2}$

β. $\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\chi)=4\left(\frac{1}{2}\right)^2\chi^3+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\chi^2-\chi-2=\chi^3+\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)\chi^2-\chi-2=\chi^3+\frac{8}{3}\frac{3}{4}\chi^2-\chi-2$

$\Leftrightarrow P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$

Αν εφαρμόσεις το σχήμα Horner για το $P(\chi)=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$, με το δεδομένο ότι το **ρ = 1** θα έχεις

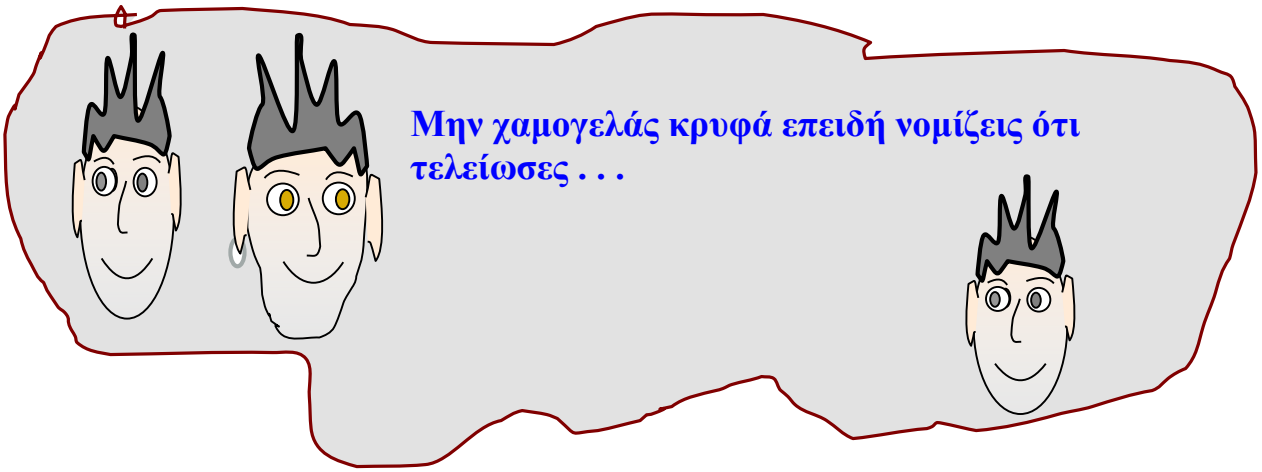
1	2	–1	–2	**ρ = 1**
↓	1	3	2	
1	3	2	**0**	

Παρατήρησε ότι το υπόλοιπο είναι 0, κάτι που ήταν αναμενόμενο από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το διώνυμο $\chi-1$ είναι $\pi(\chi)=\chi^2+3\chi+2$ δηλαδή είναι

$P(\chi)=(\chi-1)(\chi^2+3\chi+2)$.

γ. $P(\chi)=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi^2+3\chi+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi^2+3\chi+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=1\\ \chi=-1,\ \chi=-2\end{cases}$

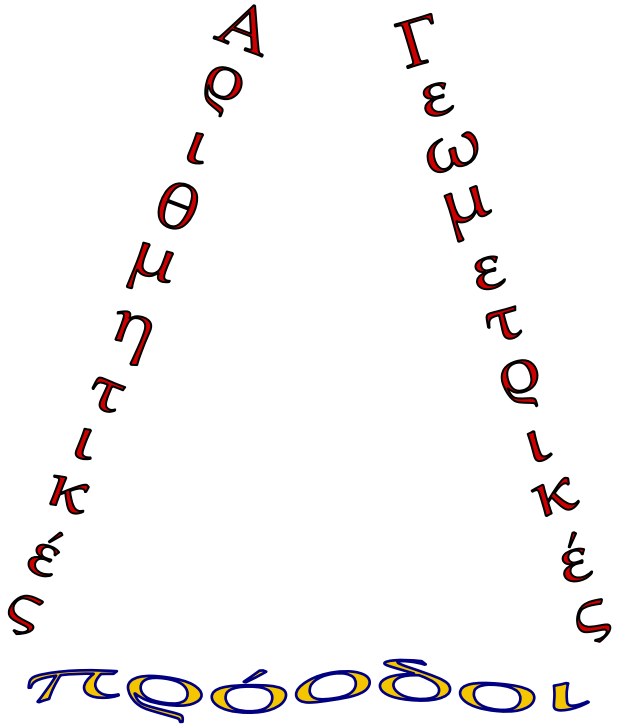


Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 3



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου με λόγο ω. Ακολούθως να αποδειχθούν οι τύποι που δίνουν το ν – οστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων αυτής.

Α. 2. Αν $|\omega|<1$ να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι μηδενική και ακολούθως να βρεθεί

ο τύπος που δίνει το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου (εκτός ύλης, δε θα απαντηθεί).

2. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+1)\chi^3-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi^2+(\alpha^2+5\alpha-5)\chi-(\alpha+1)=0$, $\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

1. Δείξτε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου α η εξίσωση έχει ρίζες που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

2. Αν παραστήσουμε με χ_2 τη ρίζα της εξίσωσης που δεν εξαρτάται από την παράμετρο α, προσδιορίστε τότε το α ώστε οι ρίζες χ_1, χ_2 και χ_3 να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

3. Δείξτε ότι για τις τιμές της παραμέτρου α που βρήκατε στην προηγούμενη ερώτηση η εξίσωση έχει τρεις ίσες ρίζες.

3. ***πανελλήνιες 1980***

ΘΕΜΑ 2ο

Το άθροισμα των 4 πρώτων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι 30 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 32. Να βρεθεί η πρόοδος.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Βρείτε το άθροισμα των **ν όρων**

$$\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)+\left(4+5\sqrt{3}\right)+\left(6+7\sqrt{3}\right)+\cdots+\left[2\nu-2+(2\nu-1)\sqrt{3}\right],\quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Το θέμα είχε δοθεί διαφορετικά , στη θέση του $\sqrt{3}$ υπήρχε η φανταστική μονάδα i, γατί οι μιγαδικοί που τώρα διδάσκονται στην Γ' Λυκείου τότε ήταν ύλη της Β' Λυκείου, αλλά έγινε η απαραίτητη προσαρμογή γιατί η ουσία του θέματος είναι οι πρόοδοι.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **πανελλήνιες 1999** *Τετάρτη 16 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο έκτος είναι ίσος με 2.

α. Ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της γεωμετρικής προόδου είναι:

Α. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$ **Β.** $\alpha_1 = -64$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$

Γ. $\alpha_1 = 64$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ **Δ.** $\alpha_1 = 32$ και $\lambda = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον δέκατο όρο της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή αγοράς ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δραχμές και μικρότερη από 640 χιλιάδες δραχμές. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής :

Να δοθεί προκαταβολή 120 χιλιάδες δραχμές.

Η εξόφληση του υπόλοιπου ποσού να γίνει σε 10 μηνιαίες δόσεις.

Κάθε δόση να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη κατά ω χιλιάδες δραχμές, όπου ω θετικός ακέραιος.

Η τέταρτη δόση να είναι 48 χιλιάδες δραχμές.

α. Να εκφράσετε το ποσό της πρώτης δόσης ως συνάρτηση του ω.

Μονάδες 5

β. Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την τιμή του ω.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης.

Μονάδες 5

ε. Να βρείτε την τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999** *Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ο πρώτος όρος μια γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_1 = 27$ και ο λόγος της είναι $\lambda = -\frac{1}{3}$.

α. Να βρείτε τον τέταρτο όρο της προόδου

Μονάδες 7

β. Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου είναι :

Α. $-\frac{61}{3}$ **Β.** 61 **Γ.** -61 **Δ.** $\frac{61}{3}$

(Να μεταφέρεται στο τετράδιό σας το γράμμα της σωστής απάντησης)

Μονάδες 8

γ. Το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου είναι :

Α. $-\frac{61}{3}$ **Β.** $\frac{81}{4}$ **Γ.** $\frac{81}{2}$ **Δ.** $-\frac{81}{2}$

(Να μεταφέρεται στο τετράδιό σας το γράμμα της σωστής απάντησης)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Διαθέτουμε 9999 όμοια αντικείμενα τα οποία θέλουμε να συσκευάσουμε σε δέματα έτσι, ώστε το πρώτο δέμα να περιέχει 3 αντικείμενα, το δεύτερο δέμα να περιέχει 5 αντικείμενα, το τρίτο δέμα να περιέχει 7 αντικείμενα και γενικά κάθε δέμα να περιέχει δυο αντικείμενα περισσότερα από το προηγούμενο του :

α. Να βρείτε πόσα δέματα θα δημιουργηθούν.

Μονάδες 10

β. Αν η συσκευασία του πρώτου δέματος κοστίζει 100 δραχμές, του δευτέρου δέματος 120 δραχμές, του τρίτου δέματος 140 δραχμές και γενικά, αν η συσκευασία κάθε δέματος κοστίζει 20 δραχμές περισσότερο από το κόστος της συσκευασίας του προηγουμένου δέματος, τότε να βρείτε πόσο θα κοστίσει η συσκευασία του δέματος που περιέχει τα περισσότερα αντικείμενα.

Μονάδες 15

6. **Εσπερινά 2000** *Δευτέρα 29 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Τι λέγεται γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

Α. 2. Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Μονάδες 6,5

Β. Για τις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της κάθε ερώτησης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

(**1.B.1**, **1.B.2**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Μόνο μια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γεωμετρική πρόοδος. Ποια είναι αυτή;

Α. 1, 5, 9, 13, ...

Β. 3, 5, 10, 13, ...

Γ. 8, – 4, 10, – 17, ...

Δ. 2, 6, 18, 54, ...

Ε. 2, 3, 5, 8, ...

Μονάδες 6

2. Οι αριθμοί 5, 10, χ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Ο αριθμός x είναι ίσος με:

Α. 25 **Β.** 20 **Γ.** 12,5 **Δ.** 100 **Ε.** 10

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγουμένη της.

α. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

Μονάδες 8

β. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

Μονάδες 10

γ. Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της 7ης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 3000 δρχ. το ένα.

Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;

Μονάδες 7

7. *πανελλήνιες 2000* — *Πέμπτη 22 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να γράψετε τον τύπο που δίνει το ν – οστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) που έχει πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

Μονάδες 3

Α.2 Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ, έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 3

Α.3 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

Μονάδες 6,5

Β.1 Στη στήλη Α δίνεται ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

στήλη Β ο ν – οστός όρος α_ν τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στο σωστό ν – οστό όρο.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\alpha_1 = 1,\ \omega = -2$	**1.** $\alpha_\nu = -\nu$
β. $\alpha_1 = 0,\ \omega = 3$	**2.** $\alpha_\nu = 4\nu - 3$
γ. $\alpha_1 = -1,\ \omega = -1$	**3.** $\alpha_\nu = 3 - 2\nu$
	4. $\alpha_\nu = 3\nu - 3$

Μονάδες 6

Β.2 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί $-5,\ 5,\ 15$, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4, . . . είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) για τους όρους της α_2, α_4 και α_6, ισχύει η σχέση $2\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_6$

Μονάδες 4,5

Β.3 Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με :

Α. $\frac{2^\nu - 1}{2}$ **Β.** $2^\nu - 1$ **Γ.** $2^{\nu-1}$ **Δ.** $1 - 2^\nu$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας αριθμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

Μονάδες 9

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων ανά ώρα.

1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

Μονάδες 8

2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια;

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8.

ΘΕΜΑ 1ο

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού χ για τις οποίες οι αριθμοί χ – 4, χ + 4 και 3χ – 4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 9

β. Αν ο αριθμός χ + 4 είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου του **α.** ερωτήματος, να βρείτε τον πρώτο όρο της.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου του **α.** ερωτήματος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Στους δίσκους Α και Β μιας ζυγαριάς υπάρχουν βάρη 40 και 20 γραμμαρίων αντίστοιχα.

Α. Στο δίσκο Α τοποθετούμε διαδοχικά βάρη των 20 γραμμαρίων το καθένα.
Στο δίσκο Β τοποθετούμε τριπλάσιο βάρος του αρχικού και συνεχίζουμε προσθέτοντας βάρη, καθένα από τα οποία είναι τριπλάσιο του βάρους που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά.

α. Αν το συνολικό βάρος στο δίσκο Β είναι 2420 γραμμάρια, να βρείτε πόσες φορές χρειάστηκε να τοποθετήσουμε βάρη στο δίσκο αυτό.

β. Πόσα βάρη των 20 γραμμαρίων πρέπει να τοποθετήσουμε στο δίσκο Α ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά;

Μονάδες 5

Β. Θεωρούμε την αρχική κατάσταση με τα βάρη των 40 και 20 γραμμαρίων που υπήρχαν στους δίσκους Α και Β αντίστοιχα. Στο δίσκο Β τοποθετούμε βάρος ίσο με το μισό του αρχικού βάρους και συνεχίζουμε τη διαδικασία προσθέτοντας βάρη καθένα από τα οποία είναι ίσο με το μισό του βάρος που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά.
Αν η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον , να δείξετε ότι το συνολικό βάρος στο δίσκο Β δεν υπερβαίνει το αρχικό βάρος στο δίσκο Α.

Μονάδες 10

9. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω μια αριθμητική πρόοδος της οποίας ο δεύτερος όρος είναι ίσος με 9 και ο τρίτος ίσος με 13.

α. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον εκατοστό όρο α_{100} της προόδου.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των εκατό πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Παρατηρήθηκε ότι η ποσότητα του πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε μέρα (λόγω αύξησης του ρήγματος που προκάλεσε τη διαρροή. Το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά τη διάρκεια της πρώτης ημέρας ήταν 20 τόνοι.

α. Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά τη διάρκεια της 7ης ημέρας;

Μονάδες 9

β. Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες ημέρες;

Μονάδες 8

γ. Αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της 7ης ημέρας και το κόστος καθαρισμού του πετρελαίου είναι 1.000.000 δρχ. ανά τόνο, πόσο θα στοιχίσει ο καθαρισμός της θάλασσας από τη ρύπανση που προκάλεσε το δεξαμενόπλοιο;

Μονάδες 8

10. **εσπερινά 2001** ***Δευτέρα 28 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι αριθμοί 1, ημχ + 1, ημχ + 3, όπου χ πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με την σειρά που δίνονται, δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 8

β. Αν $0 \le \chi \le \pi$ και οι αριθμοί 1, ημχ + 1, ημχ + 3, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε :

ι) Να αποδείξετε ότι $\chi = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 12

ιι) Να βρείτε το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Ο κατασκευαστής μιας πολυκατοικίας 12 ορόφων με πυλωτή, καθόρισε ως τιμή πώλησης του πρώτου ορόφου 400.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο και για κάθε επόμενο όροφο 10.000 δρχ. το τετραγωνικό μέτρο ακριβότερα από τον προηγούμενο του όροφο.

α. Πόσο πωλείται το διαμέρισμα ανά τετραγωνικό μέτρο στο δέκατο όροφο.

Μονάδες 7

β. Πόσο πωλείται ένα διαμέρισμα 82 τετραγωνικών μέτρων στο δωδέκατο όροφο;

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονάδες 8

γ. Αν ο κάθε όροφος έχει 200 τετραγωνικά μέτρα, πόσα χρήματα θα εισπράξει ο κατασκευαστής από την πώληση όλων των διαμερισμάτων;

Μονάδες 10

11. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

Το 2001 υπήρχαν δυο θέματα που είχαν σχέση με προόδους και λογαρίθμους και επομένως θα απαντηθούν στο 4ο κεφάλαιο.

12. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Τρίτη 3 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha_3 = \sqrt{2}\eta\mu\theta$, $\alpha_4 = \sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta$, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι ο δεύτερος, ο τρίτος, και ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν):

α. Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο όρο α_1 της γεωμετρικής προόδου (α_ν).

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν).

Μονάδες 7

13. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για τις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της κάθε ερώτησης (**1.Α.1**, **1.Α.2, 1.Α.3**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Μία ακολουθία (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 \neq 0$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda \neq 0$, όταν για κάθε ν φυσικό αριθμό ισχύει :

Α. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \lambda$

Β. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$

Γ. $\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_1$

Δ. $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda^{\nu-1}$.

Μονάδες 4,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. Ο ν – οστός όρος α_ν μιας γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ, είναι

Α. $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\lambda$

Β. $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^\nu$

Γ. $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

Δ. $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda^\nu$.

Μονάδες 4

3. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με $\lambda \neq 1$, είναι :

Α. $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^{\nu-1}}{\lambda - 1}$

Β. $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Γ. $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Δ. $S_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu)\dfrac{\nu}{2}$.

Μονάδες 4

Β. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 2, 4, 8, ...

Να βρείτε :

α. το λόγο λ της προόδου

Μονάδες 4

β. το ν – οστό όρο α_ν

Μονάδες 4

γ. το άθροισμα S_{10} των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $f(\chi) = \chi^2 + 3$, $g(\chi) = 2\chi^2 + 1$, $\varphi(\chi) = \chi^2 + 5$.

γ. Να προσδιορίσετε τις τιμές του χ για τις οποίες οι αριθμητικές τιμές των $f(\chi), g(\chi)$ και $\varphi(\chi)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Η ανάβαση στο φρούριο μιας πόλης μπορεί να γίνει από την πόλη με κλίμακα, η οποία έχει 999 σκαλοπάτια. Ένας μαθητής της πόλης αυτής γυμνάζεται καθημερινώς με τον εξής τρόπο:

Την 1η ημέρα ανεβαίνει 299 σκαλοπάτια και επιστρέφει στην πόλη. Κάθε επόμενη ημέρα ανεβαίνει 7 σκαλοπάτια περισσότερα από την προηγούμενη ημέρα και επιστρέφει στην πόλη.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Την ημέρα που ο μαθητής φτάνει στο τελευταίο (999ο) σκαλοπάτι επιστρέφει στην πόλη και σταματά να γυμνάζεται με αυτόν τον τρόπο.

Να βρείτε:

α. Πόσα σκαλοπάτια ανέβηκε ο μαθητής την 15η ημέρα;

Μονάδες 6

β. Πόσες ημέρες γυμνάστηκε με τον τρόπο αυτό;

Μονάδες 6

γ. Πόσες φορές πέρασε ανεβαίνοντας το 310ο σκαλοπάτι;

Μονάδες 6

δ. Πόσα σκαλοπάτια ανέβηκε συνολικά όλες τις ημέρες που γυμναζόταν με αυτόν τον τρόπο;

Μονάδες 7

14. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $-\chi^3+\kappa$, $\chi^2+3+\kappa$, $-3\chi+\kappa$ με τη σειρά που δίνονται είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 27, τότε

α. Να αποδείξετε ότι : $\chi=-2$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον αριθμό κ .

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε τον εικοστό όρο α_{20} της προόδου.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_{20} των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 5

15. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα θέατρο, η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία έχει 250 καθίσματα.

Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο.

Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά..

α. Να αποδείξετε ότι κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Την πρώτη παράσταση ενός θεατρικού έργου παρακολούθησαν 100 θεατές, ενώ σε κάθε επόμενη παράσταση ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν.

Ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο;

Μονάδες 8

16. **Εσπερινά 2002** ***Παρασκευή 24 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 3ο

Οι αριθμοί $\alpha_1 = 2\chi + 2$, $\alpha_2 = 6\chi - 2$ και $\alpha_3 = 5\chi + 4$, είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $\chi = 2$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε τον πεντακοσιοστό όρο α_{500} της προόδου.

Μονάδες 7

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_{500} των πεντακοσίων πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

17. **πανελλήνιες 2002** ***Σάββατο 8 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Πότε μία ακολουθία λέγεται:

α. αριθμητική πρόοδος;

β. γεωμετρική πρόοδος;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = \text{συν}2\alpha$, $\alpha_2 = \text{συν}^2\alpha$ και $\alpha_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

18. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Οι αριθμοί 2, χ και $\chi-\frac{1}{2}$ είναι ο τέταρτος, ο πέμπτος και ο έκτος όρος, αντίστοιχα, μιας γεωμετρικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $\chi = 1$.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 16$.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_5 των πέντε πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 7

19. ***επαναληπτικές 2002*** ***Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση .

α. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

β. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

γ. Ο ν – οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$

δ. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι : $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω δύο κοινωνίες βακτηριδίων Α και Β. Αν συμβολίσουμε με A_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Α και με B_0 τον αρχικό πληθυσμό της κοινωνίας Β, τότε $9A_0 = 10^{11}B_0$

Ο πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της, ενώ ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ.
Οι δυο πληθυσμοί γίνονται ίσοι 10 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου που αναφέρεται στον πληθυσμό Β είναι $\lambda = 10$.

Μονάδες 7

β. Πέντε ώρες μετά την αρχική στιγμή ο πληθυσμός της κοινωνίας **Β** είναι 10^{10} βακτηρίδια.
Να δείξετε ότι ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας Β ήταν 10^5 βακτηρίδια.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πληθυσμό της κοινωνίας Α, 99 ώρες μετά την αρχική στιγμή.

Μονάδες 7

20. ***πανελλήνιες 2003*** ***Πέμπτη 22 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ο ν – οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$.

Μονάδες 7

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν S_ν συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_ν με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1, τότε είναι:

α. $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda - 1}{\lambda^\nu - 1}$ **β.** $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ **γ.** $S_\nu = \alpha_1 \frac{1 - \lambda^\nu}{\lambda - 1}$

Μονάδες 3

Ε. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι ..... προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Μονάδες 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_v = -11 + 2v$ με πρώτο όρο α_1 καθώς και το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^3 - 3\chi^2 - \chi + 3$.

α. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_v) είναι αριθμητική πρόοδος και έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$ και διαφορά ω = 2.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_{12} + \alpha_{13} + \cdots + \alpha_{21}$, όπου $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \cdots \alpha_{21}$ είναι διαδοχικοί όροι της προόδου (α_v).

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης P(χ) = 0 είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου (α_v).

Μονάδες 9

21. ***εσπερινά 2003*** ***Παρασκευή 23 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι 810 και ο πέμπτος όρος της είναι 2430. Να βρείτε :

α. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,

Μονάδες 7

β. τον πρώτο όρο της και

Μονάδες 8

γ. το άθροισμα S_6 των έξι πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 10

22. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** ***Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi + 2$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι: $P(2004) + P(-2004) = 4$.

Μονάδες 4

β. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $Q(\chi) = \chi$.

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi - 1$ είναι $\upsilon = \alpha + \beta + 2$.

Μονάδες 7

δ. Αν $\alpha = 1$ και το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε να υπολογίσετε το β και να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$.

Μονάδες 10

23. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

1. Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

1. Για ποιες τιμές του $\chi \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log(32\chi - 1), \log(42\chi - 1), \log(82\chi - 2)$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

Μονάδες 13

2. Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_4 = -\log 2$, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Μονάδες 12

Όλο το 4ο Ζήτημα είναι συνδυασμός του 3ου κεφαλαίου (πρόοδοι) και του 4ου κεφαλαίου (λογάριθμοι αριθμών) και θα απαντηθεί εκεί.

24. ***πανελλήνιες 2004*** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$.

δ. Αν **α, β, γ** είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Μονάδες 2

25. ***εσπερινά 2004*** ***Παρασκευή 21 Μαΐου***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις Γ. και Δ., να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι **Σωστή** ή (**Λ**), αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

Γ. Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου, με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω, είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Μονάδες 4

Δ. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu + 1}{\lambda - 1}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι 12 και ο $3^{ος}$ όρος της προόδου είναι τριπλάσιος του $1^{ου}$ όρου.

α. Να αποδείξετε ότι η πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 2$.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε τον α_{1002}.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα S_{60} των πρώτων εξήντα όρων της προόδου.

Μονάδες 8

1. **επαναληπτικές 2004** — ***Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_4 = 4$ και $\alpha_7 = 32$ και το πολυώνυμο :

$P(\chi) = 2\chi^4 + \kappa^3\chi^3 - 6\kappa^2\chi^2 - 2(\kappa+2)\chi - 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 12

β. Αν ο τρίτος όρος α_3 της γεωμετρικής προόδου είναι μία ρίζα της εξίσωσης $P(\chi) = 0$, να βρείτε τις τιμές του κ.

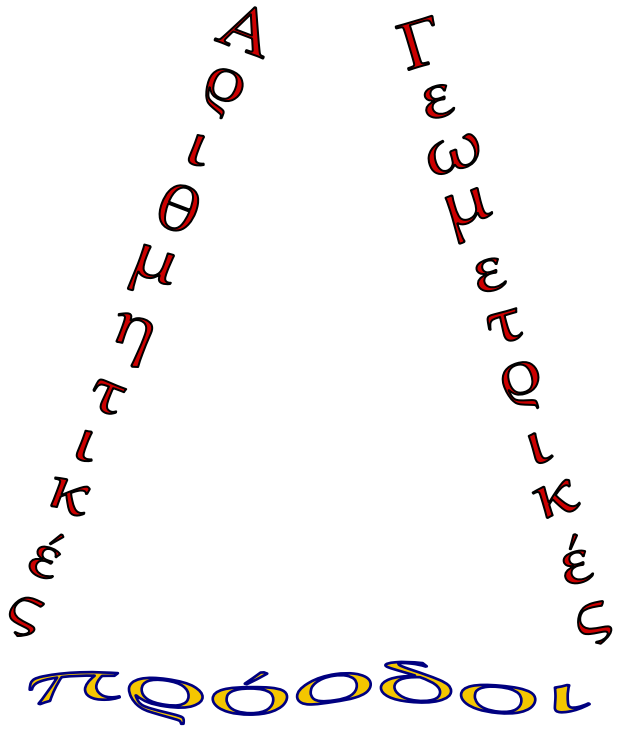
Μονάδες 13

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 3



Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1974***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. 1. Θεωρία.

Α. 2. (εκτός ύλης, δε θα απαντηθεί).

2. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 2ο

1. $(\alpha+1)\chi^3-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi^2+(\alpha^2+5\alpha-5)\chi-(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)\chi^3-(\alpha+1)-\left[(\alpha^2+5\alpha-5)\chi^2-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi\right]=0$

$(\alpha+1)\left(\chi^3-1\right)-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi(\chi-1)=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\chi-1)\left(\chi^2+\chi+1\right)-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi(\chi-1)=0 \Leftrightarrow$

$(\chi-1)\left[(\alpha+1)\left(\chi^2+\chi+1\right)-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi\right]=0$ άρα μία λύση προκύπτει από την $\chi-1=0$ και είναι η

$\chi_2=1$, ανεξάρτητη από το α, είναι επίσης : $(\alpha+1)\left(\chi^2+\chi+1\right)-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)\chi^2+(\alpha+1)\chi+\alpha+1-(\alpha^2+5\alpha-5)\chi=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\chi^2+\left[(\alpha+1)-(\alpha^2+5\alpha-5)\right]\chi+\alpha+1=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)\chi^2+\left[-\alpha^2+\alpha+1-5\alpha+5)\right]\chi+\alpha+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)\chi^2-\left(\alpha^2+4\alpha-6\right)\chi+\alpha+1=0\ (1)$.

Αν η (1) έχει λύσεις χ_1 και χ_3 τότε από τους τύπους του Vieta θα είναι $\chi_1\cdot\chi_3=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+1}=1$, αλλά μην ξεχνάς πως το $\chi_2=1$ είναι η πρώτη λύση βρήκες δηλαδή μόλις έδειξες ότι : $\chi_2^2=1^2=1=\chi_1\cdot\chi_3$.

Άρα οι λύσεις 1, χ_1, χ_2 και χ_3 αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

2. Για να αποτελούν οι χ_1, χ_2 και χ_3 αριθμητική πρόοδο θα πρέπει :

$2\chi_2=\chi_1+\chi_3 \Leftrightarrow \chi_1+\chi_3=2\cdot1=1$, από την (1) είναι $\chi_1+\chi_3=-\dfrac{-\left(\alpha^2+4\alpha-6\right)}{2(\alpha+1)}=\dfrac{\alpha^2+4\alpha-6}{2(\alpha+1)} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha^2+4\alpha-6}{2(\alpha+1)}=2 \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha-6=4(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha-6-4\alpha-4=0 \Leftrightarrow \alpha^2-10=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{10}$

3. **1ος τρόπος** (με πολλές πράξεις) Αν αντικαταστήσεις τις τιμές $\alpha=\pm\sqrt{10}$ στην (1) και να επιχειρήσεις να την λύσεις , οπότε αναμένεται να βρεις $\chi_1=\chi_3=1$

2ος τρόπος (εύκολος) : Τις τιμές $\alpha=\pm\sqrt{10}$ τις βρήκες με την προϋπόθεση πως $\chi_1+\chi_3=2$, από το πρώτο ερώτημα είναι $\chi_1\cdot\chi_3=1$, άρα σύμφωνα με τους τύπους του Vieta οι χ_1, χ_3 θα είναι λύσεις της εξίσωσης : $\chi^2-(\chi_1+\chi_3)\chi+\chi_1\cdot\chi_3=0 \Leftrightarrow \chi^2-2\chi+1=0 \Leftrightarrow (\chi-1)^2=0 \Leftrightarrow \chi_1=\chi_3=1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. ***πανελλήνιες 1980***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως φθίνουσα, θα έχει λόγο λ : $|\lambda|<1$ και επειδή το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι 30, άρα $S_4=\alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1} \Leftrightarrow \alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=30$ **(1)** και αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 32 σημαίνει πως $S=\frac{\alpha_1}{1-\lambda} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{1-\lambda}=32$ **(2)** . Οι **(1)** και **(2)** αποτελούν σύστημα .

Από **(2)** έχεις $\alpha_1=-32(\lambda-1)$, άρα η **(1)** γίνεται : $-32(\lambda-1)\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=30 \Leftrightarrow -32(\lambda^4-1)=30$

$\lambda^4-1=-\frac{30}{32}=-\frac{15}{16} \Leftrightarrow \lambda^4=-\frac{15}{16}+1=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$, οπότε από την $\alpha_1=-32(\lambda-1)$ έπεται

Ότι αν $\lambda=\frac{1}{2}$ τότε $\alpha_1=-32\frac{1}{2}=-16$ και αν $\lambda=-\frac{1}{2}$ τότε $\alpha_1=-32\left(-\frac{1}{2}\right)=16$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Βρείτε το άθροισμα των **ν όρων**

$$\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)+\left(4+5\sqrt{3}\right)+\left(6+7\sqrt{3}\right)+\cdots+\left[2\nu-2+(2\nu-1)\sqrt{3}\right],\quad \nu\in N^*.$$

Το θέμα είχε δοθεί διαφορετικά , στη θέση του $\sqrt{3}$ υπήρχε η φανταστική μονάδα i, γατί οι μιγαδικοί που τώρα διδάσκονται στην Γ' Λυκείου τότε ήταν ύλη της Β' Λυκείου, αλλά έγινε η απαραίτητη προσαρμογή γιατί η ουσία του θέματος είναι οι πρόοδοι.

$$\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)+\left(4+5\sqrt{3}\right)+\left(6+7\sqrt{3}\right)+\cdots+\left[2\nu-2+(2\nu-1)\sqrt{3}\right]=$$

$$2+4+6+\cdots+2\nu-2+\left[\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5\sqrt{3}+7\sqrt{3}+\cdots+(2\nu-1)\sqrt{3}\right]=$$

$$\left(\underbrace{1+2+3+\cdots+\nu-1}_{\mathbf{A}}\right)\cdot 2+\left(\underbrace{1+3+5+7+\cdots+(2\nu-1)}_{\mathbf{B}}\right)\cdot\sqrt{3}$$

Θα υπολογίσεις ξεχωριστά τις παραστάσεις **A** και **B.**

Η $A=1+2+3+\cdots+\nu-1$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και ω = 1 και πλήθος ν – 1, άρα

$$A=S_{\nu-1}=\frac{\alpha_\nu+\alpha_1}{2}\cdot(\nu-1)=\frac{\nu-1+1}{2}\cdot\nu=\frac{\nu(\nu-1)}{2}.$$

Η $B=1+3+5+7+\cdots+(2\nu-1)$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και ω = 2. Για να βρεις με σίγουρο τρόπο το πλήθος των όρων ακολουθεί την εξής πορεία :

Έστω ότι ο $\alpha_\kappa=2\nu-1$ τότε $\alpha_\kappa=\alpha_1+(\kappa-1)2 \Leftrightarrow 2\nu-1-1=2\kappa-2 \Leftrightarrow 2\nu=2\kappa \Leftrightarrow \kappa=\nu$ το πλήθος των όρων της $B=1+3+5+7+\cdots+(2\nu-1)$, άρα $B=S_\nu=\frac{\alpha_\nu+\alpha_1}{2}\cdot\nu=\frac{2\nu-1+1}{2}\cdot\nu=\nu^2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα $\sqrt{3}+\left(2+3\sqrt{3}\right)+\left(4+5\sqrt{3}\right)+\left(6+7\sqrt{3}\right)+\cdots+\left[2\nu-2+(2\nu-1)\sqrt{3}\right]=$

$$\underbrace{\left(1+2+3+\cdots+\nu-1\right)}_{A}\cdot 2+\underbrace{\left(1+3+5+7+\cdots+(2\nu-1)\right)}_{B}\cdot\sqrt{3}=\frac{\nu(\nu-1)}{2}\cdot 2+\nu^2\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)\nu^2-\nu\,.$$

4. ***πανελλήνιες 1999*** ***Τετάρτη 16 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\begin{cases}\alpha_3=16\\ \alpha_6=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16=\alpha_1\lambda^2 & (1)\\ 2=\alpha_1\lambda^5 & (2)\end{cases}$, αν διαιρέσεις κατά μέλη [(2) : (1)] έχεις $\lambda^3=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow$

$\lambda^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$, οπότε από την (1) είναι $16=\alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow 16=\frac{\alpha_1}{4}\Leftrightarrow\alpha_1=64$

Άρα σωστή απάντηση είναι: **Γ.** $\alpha_1=64$ και $\lambda=\frac{1}{2}$.

β. Είναι $\alpha_{10}=\alpha_1\lambda^9\Leftrightarrow\alpha_{10}=64\left(\frac{1}{2}\right)^9\Leftrightarrow\alpha_{10}=64\frac{1}{512}\Leftrightarrow\alpha_{10}=\frac{1}{8}$

γ. Το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου, επειδή $|\lambda|=\left|\frac{1}{2}\right|<1$ είναι : $S=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}\Leftrightarrow S=\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow S=\frac{64}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow S=128$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή $\alpha_4=48$ χιλιάδες άρα $48=\alpha_1+3\omega\Leftrightarrow\alpha_1=48-3\omega$ χιλιάδες δραχμές

β. Η τιμή αγοράς θα είναι Α = προκαταβολή + σύνολο δόσεων, άρα $A=120+S_{10}$

Το $S_{10}=\frac{[2\alpha_1+(10-1)\omega]10}{2}\Leftrightarrow S_{10}=10\alpha_1+45\omega\Leftrightarrow S_{10}=10(48-3\omega)+45\omega\Leftrightarrow S_{10}=480+15\omega$.

Άρα $A=120+S_{10}\Leftrightarrow A=600+15\omega$ σε χιλιάδες δραχμές.

γ. Επειδή η τιμή του υπολογιστή είναι μεγαλύτερη από 620 χιλιάδες δρχ. και μικρότερη από 640 χιλιάδες θα είναι : $620<A<640\Leftrightarrow 620<600+15\omega<640\Leftrightarrow 620-600<15\omega<640-600$

$\Leftrightarrow 20<15\omega<40\Leftrightarrow 1,33<\omega<2,66$ και επειδή ω θετικός ακέραιος άρα **ω = 2 χιλιάδες** .

δ. Η τελευταία δόση είναι η δέκατη με βάση τη συμφωνία, δηλ ο α_{10} .

Επειδή όπως βρήκαμε πιο πάνω $\alpha_1=48-3\omega$ και $\omega=2$ χιλιάδες άρα $\alpha_1=48-6\Leftrightarrow\alpha_1=42$ χιλιάδες και επομένως $\alpha_{10}=\alpha_1+(10-1)\omega\Leftrightarrow\alpha_{10}=42+9\cdot 2\Leftrightarrow\alpha_{10}=60$.

ε. Η τιμή αγοράς του ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι $A=600+15\cdot\omega=600+15\cdot 2\Leftrightarrow A=630$ χ. δ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999** *Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Α. **α.** Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_4 = 27\left(-\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 27\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -27\frac{1}{27} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_4 = -1}$

β. Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου είναι : $S_5 = 27\cdot\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^5 - 1}{-\frac{1}{3}-1} = 27\cdot\frac{-\frac{1}{243}-1}{-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow$

$S_5 = 27\cdot\frac{-\frac{244}{243}}{-\frac{4}{3}} = 27\cdot\frac{3\cdot 244}{4\cdot 243} \Leftrightarrow \boxed{S_5 = \frac{61}{3}}$ άρα σωστή απάντηση είναι το **Δ.** $\frac{61}{3}$.

γ) Επειδή $|\lambda| = \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου είναι : $S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} =$

$\frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow S = -\frac{81}{2}$ άρα σωστή απάντηση είναι το **Δ.** $-\frac{81}{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω ότι θα δημιουργηθούν ν – δέματα. Αν ο πρώτο δέμα περιέχει α_1 αντικείμενα, το δεύτερο περιέχει α_2, το τρίτο $\alpha_3, \ldots,$ το ν – οστό περιέχει α_ν αντικείμενα τότε σύμφωνα με την εκφώνηση οι $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 7, \ldots$ προφανώς οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdot\cdot\cdot\alpha_\nu$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$.

Επομένως το ν – οστό κουτί θα περιέχει α_ν αντικείμενα και όλα μαζί τα αντικείμενα, που είναι το άθροισμα $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 + \cdot\cdot\cdot + \alpha_\nu$, θα ισούται με 9999 αντικείμενα, όσα αντικείμενα πρέπει να συσκευάσουμε.

Είναι $S_\nu = \frac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2} \Leftrightarrow 9999 = \frac{[2\cdot 3 + (\nu-1)2]\nu}{2} \Leftrightarrow 19998 = (6 + 2\nu - 2)\nu = 2\nu^2 + 4\nu \Leftrightarrow$

$\nu^2 + 2\nu - 9999 = 0$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \cdot\cdot\cdot = 40000$. Άρα λύσεις $\nu_1 = \frac{-2-200}{2} = -101$, απορρίπτεται γιατί ν φυσικός αριθμός και $\nu_2 = \frac{-2+200}{2} = 99$, άρα θα δημιουργηθούν ν = 99 δέματα.

β. Είναι προφανές ότι το κόστος κάθε δέματος ανήκει σε αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 120$, $\beta_3 = 140$ δηλαδή ανήκει σε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\beta_1 = 100$ και $\omega' = 20$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Πρέπει κατ΄ αρχήν να εξακριβώσεις, <u>από την προηγούμενη πρόοδο</u>, αν το τελευταίο δέμα α_{99} περιέχει και
τα περισσότερα αντικείμενα ή περιέχει απλώς όσα περίσσεψαν.

<u>Με βάση την προήγούμενη πρόοδο</u> το α_{99} πρέπει να περιέχει $\alpha_{99} = \alpha_1 + 98 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_{99} = 199$ αντικείμενα.

Επίσης είναι $S_{98} = \frac{2\alpha_1 + (98-1)\cdot 2}{2} 98 = 9800$ άρα για το δέμα α_{99} περισσεύουν $9999 - S_{98} = 199$, όσα ακριβώς περιμέναμε και όχι λιγότερα άρα είναι προφανές ότι το δέμα με τα περισσότερα αντικείμενα είναι το 99ο δέμα (α_{99}) άρα θα βρεις το κόστος του 99ου δέματος δηλαδή του β_{99} της προόδου με $\beta_1 = 100$ και $\omega' = 20$, οπότε είναι $\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\omega' \Leftrightarrow \beta_{99} = 100 + (99-1)20 \Leftrightarrow \beta_{99} = 100 + 1960 \Leftrightarrow$

$\beta_{99} = 2060$ δραχμές θα κοστίσει το δέμα με τα περισσότερα αντικείμενα

6. ***Εσπερινά 2000*** ***Δευτέρα 29 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Θεωρία.

Α. 2. Θεωρία.

Β. **1.Λ. , 2.Β.**

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγουμένη της.

α. Ο αριθμός καθισμάτων κάθε σειράς είναι όρος μια αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 10$ και ω = 3. Άρα η δωδέκατη σειρά θα έχει $\alpha_{12} = \alpha_1 + (12-1)3 = 10 + 33 = 43$ καθίσματα

β. Πόσα καθίσματα Όλο το θέατρο έχει $S_{12} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{10 + 43}{2} \cdot 12 = 53 \cdot 6 = 318$

γ. Η 7η σειρά έχει $\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)3 = 10 + 18 = 28$ και τα υπόλοιπα εισιτήρια είναι 318 – 28 = 290.

Επομένως το θέατρο εισέπραξε 290·3000 = 870000 δραμές.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **πανελλήνιες 2000** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία. Ο τύπος που δίνει τον ν – οστό όρο μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι : $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Α.2 Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ, έτσι ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Α.3 Θεωρία.

Β.1 Ο τύπος που δίνει τον ν – οστό όρο μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι : $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$. Αν αντικαταστήσεις διαδοχικά τις τιμές των α_1 και ω από τη στήλη Α θα βρεις στην

- ✓ **1η** περίπτωση που $\alpha_1 = 1$ και $\omega = -2$ είναι $\alpha_\nu = 1 + (\nu-1)(-2) \Leftrightarrow \alpha_\nu = -2\nu + 3$, στην
- ✓ **2η** περίπτωση που $\alpha_1 = 0$ και $\omega = 3$ $\alpha_\nu = 0 + (\nu-1)3 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 3$ και στην
- ✓ **3η** περίπτωση που $\alpha_1 = -1$ και $\omega = -1$ $\alpha_\nu = -1 + (\nu-1)(-1) \Leftrightarrow \alpha_\nu = -\nu$ άρα

α. ↔ 3, β. ↔ 4, γ. ↔ 1

Β.2

α. Επειδή οι αριθμοί $-5,\ 5,\ 15$ ικανοποιούν την σχέση $2\beta = \alpha + \gamma$, μιας και είναι $2\cdot 5 = -5 + 15$, άρα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Άρα η πρόταση είναι **Σωστή**.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου 10, 7, 4, . . . είναι ίσος με 20 **Λάθος** γιατί είναι $\alpha_1 = 10$ και $\omega = -3$ τότε $\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 10 + 19(-3) = 10 - 47 = -37 \neq 20$.

γ) Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν οι σχέσεις $\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \\ \alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega \end{cases}$.

Άρα $2\alpha_4 = \alpha_1 + 6\omega$ (1) και $\alpha_1 + \alpha_6 = (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + \omega) = \alpha_1 + 6\omega$ (2).

Από (1) και (2) φαίνεται ότι η $2\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_6$ είναι **Σωστή**

Άρα η συνολική απάντηση είναι **α. ↔ Σ, β. ↔ Λ, γ. ↔ Σ**

Β.3 Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι : $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Αν πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε $S_\nu = 1\dfrac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **Β**.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αφού ο πληθυσμός των βακτηριδίων τριπλασιάζεται κάθε ώρα, αυτό σημαίνει ότι έχεις γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ = 3.

Επειδή ξεκινάς με 10 βακτηρίδια, τότε μόλις συμπληρωθεί μια ώρα θα έχεις 30 βακτηρίδια, άρα $\alpha_1 = 30$. Επομένως : $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_6 = 30\cdot 3^{6-1} = 30\cdot 3^5 = 30\cdot 253 \Leftrightarrow \alpha_6 = 7290$

Άρα θα υπάρχουν **7290** βακτηρίδια μετά από 6 ώρες.

Β. 1. Επειδή με τον ψεκασμό καταστρέφονται $3^3\cdot 10$ βακτηρίδια, σε 20 ώρες θα έχουν καταστραφεί :

$3^3 \cdot 10 \cdot 20 = 27 \cdot 200 = 5.400$ βακτηρίδια.

Άρα θα μείνουν ακόμη 7.290 – 5.400 = **1.890** βακτηρίδια.

2. Έστω ότι τα βακτηρίδια καταστρέφονται μετά από χ ώρες. Τότε θα πρέπει : $\chi \cdot 3^3 \cdot 10 = 7.290 \Leftrightarrow$

$270\,\chi = 7.290 \Leftrightarrow \chi = \dfrac{7290}{270} \Leftrightarrow \chi = 27$ ώρες

Επομένως όλα τα βακτηρίδια θα έχουν καταστραφεί μετά από **27 ώρες.**

8. ***επαναληπτικές 2000*** ***Σεπτέμβριος***

ΘΕΜΑ 1ο

α. Αν οι αριθμοί χ – 4, χ + 4 και 3χ – 4 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε θα πρέπει :

$2(\chi + 4) = (\chi - 4) + (3\chi - 4) \Leftrightarrow 2\chi + 8 = 4\chi - 8 \Leftrightarrow 2\chi = 16 \Leftrightarrow \chi = 8$.

β. Από το **α.** ερώτημα είναι χ = 8 άρα χ – 4 = 8 – 4 = 4, χ + 4 = 8 + 4 = 12, 3χ – 4 = 3·8 – 4 = 20 είναι οι τρεις αριθμοί, επομένως η διαφορά της προόδου είναι : ω = 12 – 4 = 8.

Άρα αν ο αριθμός χ + 4 = 12 είναι ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου, τότε από τον τύπο :

$12 = \alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12 - 40 \Leftrightarrow \alpha_1 = -28$.

γ. $S_{10} = \dfrac{2\cdot(-28) + (10-1)8}{2}10 = (-56 + 72)5 = 80$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι :

- ✓ Στους δίσκους Α και Β μιας ζυγαριάς ***υπάρχουν ήδη*** τα βάρη 40 και 20 γραμμαρίων αντίστοιχα.
- ✓ Η διαδικασία που περιγράφεται για τον δίσκο Α είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 40$ και ω = 20 .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α.

1ος τρόπος

Η διαδικασία που περιγράφεται για τον δίσκο Β είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = 20$ και $\lambda = 3$ και *συνολικό βάρος που υπάρχει στο δίσκο Β 2420 γραμμάρια.*

Είναι $S'_\nu = 2420 \Leftrightarrow \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2420 \Leftrightarrow 20\frac{3^\nu - 1}{3-1} = 2420 \Leftrightarrow 20\frac{3^\nu - 1}{2} = 2420 \Leftrightarrow$

$10\left(3^\nu - 1\right) = 2420 \Leftrightarrow 3^\nu - 1 = 242 \Leftrightarrow 3^\nu = 243 = 3^5$ άρα $\nu = 5$,

Επειδή όμως το πρώτο βάρος $\beta_1 = 20$ υπάρχει πάνω στο δίσκο, άρα

Άρα χρειάστηκε να τοποθετήσουμε 4 βάρη στο δίσκο αυτό.

2ος τρόπος

Η τοποθέτηση βαρών στο δίσκο Β αρχίζει με την τοποθέτηση τριπλάσιου βάρους από το βάρος των 20 γραμ. που υπάρχει ήδη, δηλαδή το πρώτο βάρος που τοποθετείται είναι 60 γραμμάρια άρα η διαδικασία που περιγράφεται για τον δίσκο Β είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = 60$ και $\lambda = 3$ και

Το συνολικό βάρος που ***τοποθετείται*** είναι : 2420 – 20 = 2400.

Επομένως $S'_\nu = 2400 \Leftrightarrow \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2400 \Leftrightarrow 60\frac{3^\nu - 1}{3-1} = 2400 \Leftrightarrow 60\frac{3^\nu - 1}{2} = 2400 \Leftrightarrow$

$30\left(3^\nu - 1\right) = 2400 \Leftrightarrow 3^\nu - 1 = 80 \Leftrightarrow 3^\nu = 1 = 3^4$ άρα $\nu = 4$,

Άρα χρειάστηκε να τοποθετήσουμε 4 βάρη στο δίσκο αυτό.

β.

1ος τρόπος

Η διαδικασία για τον δίσκο Α είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 40$ και $\omega = 20$ και *συνολικό βάρος που πρέπει να υπάρχει στο δίσκο Α είναι : 2420 γραμμάρια.*

Το συνολικό βάρος είναι ο α_ν της προόδου και επομένως

$\alpha_\nu = 2420 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 2420 \Leftrightarrow 40 + (\nu - 1)20 = 2420 \Leftrightarrow \nu - 1 = \frac{2420 - 40}{20} = 119 \Leftrightarrow \nu = 120$,

Επειδή όμως το πρώτο βάρος $\alpha_1 = 40$ υπάρχει πάνω στο δίσκο, άρα

Άρα χρειάστηκε να τοποθετήσουμε 119 βάρη στο δίσκο αυτό.

2ος τρόπος

Η τοποθέτηση βαρών στο δίσκο Α αρχίζει με την τοποθέτηση του πρώτου βάρους 20 γραμμαρίων στο δίσκο Α όπου υπάρχει ήδη το αρχικό βάρος των 40 γραμ. που άρα η διαδικασία που περιγράφεται για τον δίσκο Α είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 20$ και $\omega = 20$ και

Το συνολικό βάρος που ***τοποθετείται*** είναι : 2420 – 40 = 2380.

Το συνολικό βάρος που τοποθετείται είναι ο α'_ν **αυτής** της προόδου και επομένως

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\alpha'_{\nu} = 2380 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 2380 \Leftrightarrow 20 + (\nu-1)20 = 2380 \Leftrightarrow \nu - 1 = \frac{2380-20}{20} = 118 \Leftrightarrow \nu = 119,$$

Άρα χρειάστηκε να τοποθετήσουμε 119 βάρη στο δίσκο αυτό.

Β. Η διαδικασία που περιγράφεται για τον δίσκο Β είναι μια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = 20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ και πρέπει να δείξεις ότι

το «συνολικό» βάρος που μπορεί να υπάρχει στο δίσκο Β δεν ξεπερνά τα 40 γραμμάρια.

Υπολογίζεις το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου: $S = \frac{\beta_1}{\lambda - 1} = \frac{20}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$.

Άρα το *«συνολικό» βάρος που μπορεί να υπάρχει στο δίσκο Β δεν ξεπερνά τα 40 γραμμάρια.*

9. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\alpha_2 = 9$ και $\alpha_3 = 13$ άρα $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = 13 - 9 = 4$ και $\alpha_1 = \alpha_2 - \omega = 9 - 4 = 5$

β. Ο εκατοστός όρος αυτής της προόδου είναι $\alpha_{100} = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 5 + (100-1)4 = 401$.

γ. Το άθροισμα των εκατό πρώτων όρων της προόδου είναι :

$$S_{100} = \frac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2} = \frac{[2\cdot 5 + (100-1)4]100}{2} = [10 + 396]50 = 20300$$

ΘΕΜΑ 4ο

Η διαδικασία της διαρροής περιγράφεται με μια γεωμετρική πρόοδο και αφού το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά τη διάρκεια της πρώτης ημέρας ήταν 20 τόνοι, άρα $\alpha_1 = 20$ και αφού η διαρροή διπλασιάζεται καθημερινά άρα $\lambda = 2$.

α. Για να βρεις πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά τη διάρκεια της 7ης ημέρας θα υπολογίσεις τον $\alpha_7 = \alpha_1 \cdot \lambda^{7-1} = 20 \cdot 2^6 = 20 \cdot 64 = 1280$ τόνοι.

β. Για να βρεις πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες ημέρες θα υπολογίσεις το $S_7 = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^7 - 1}{\lambda - 1} = 20 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 20 \cdot 127 = 2540$ τόνοι.

γ. Αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της 7ης ημέρας, τότε θα έχουν διαρρεύσει 2540 τόνοι και το κόστος καθαρισμού θα είναι 2540·1.000.000 = 2.540.000.000 δραχμές ή ολογράφως δύο δις 540 εκατομμύρια δραχμές

εσπερινά 2001 ***Δευτέρα 28 Μαΐου***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Για να αποδείξεις ότι οι αριθμοί αυτοί, με την σειρά που δίνονται, δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αρκεί να αποδείξεις ότι δεν ισχύει η σχέση $2\beta = \alpha + \gamma$.

Πράγματι $2(\eta\mu\chi + 1) = 1 + \eta\mu\chi + 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi + 2 = \eta\mu\chi + 4 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi - \eta\mu\chi = 4 - 2 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = 2$ **άτοπο** γιατί $|\eta\mu\chi| \le 1$.

Άρα οι αριθμοί $1,\ \eta\mu\chi + 1,\ \eta\mu\chi + 3$ με την σειρά που δίνονται, δεν μπορεί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Μια σημαντική παρατήρηση : στο θέμα τονίζεται διαρκώς «***με τη σειρά που δίνονται***».
Πράγματι αν αλλάξει η σειρά μπορεί και να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
Π χ οι αριθμοί $\eta\mu\chi + 1,\ 1,\ \eta\mu\chi + 3$ μπορεί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου διότι :
$2\cdot 1 = (\eta\mu\chi + 1) + \eta\mu\chi + 3 \Leftrightarrow 2 = 2\eta\mu\chi + 4 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi = 2 - 4 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -1$ εξίσωση που έχει όπως είναι γνωστό λύσεις, άρα οι αριθμοί $\eta\mu\chi + 1,\ 1,\ \eta\mu\chi + 3$ μπορεί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. **i)** Αν οι αριθμοί $1, \eta\mu\chi + 1, \eta\mu\chi + 3,$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε θα ισχύει : $(\eta\mu\chi + 1)^2 = 1\cdot(\eta\mu\chi + 3) \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + 2\eta\mu\chi + 1 = \eta\mu\chi + 3 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi - 2 = 0$, διακρίνουσα

$\Delta = 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\chi = -2 \\ \eta\mu\chi = 1 \end{cases}$.

Η $\eta\mu\chi = -2$ απορρίπτεται γιατί $|\eta\mu\chi| \le 1$ ενώ η $\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και επειδή $0 \le \chi \le \pi$ άρα $\chi = \frac{\pi}{2}$.

ii) Όπως έδειξες πιο πάνω αν οι αριθμοί $1, \eta\mu\chi + 1, \eta\mu\chi + 3,$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\chi = \frac{\pi}{2}$ άρα οι αριθμοί γίνονται συγκεκριμένα $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$ άρα ο λόγος είναι :

$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda = 2.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Προφανώς οι τιμές του τετραγωνικού μέτρου ανά όροφο είναι όροι της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 400.000$ και διαφορά $\omega = 10.000$ άρα η τιμή στο $10^{ο}$ όροφο είναι ο $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)10.000 \Leftrightarrow$

$\alpha_{10} = 400.000 + 90.000 \Leftrightarrow \alpha_{10} = 490.000$.

β. Η τιμή του τετραγωνικού στο $12^{ο}$ όροφο είναι ο $\alpha_{12} = \alpha_1 + (12-1)10.000 \Leftrightarrow$

$\alpha_{12} = 400.000 + 110.000 \Leftrightarrow \alpha_{12} = 510.000$.

Άρα ένα διαμέρισμα 82 τετραγωνικών μέτρων κοστίζει $82\cdot 510.000 = 41.820.000$ δραχμές.

γ. Αν ο κάθε όροφος έχει 200 τετραγωνικά μέτρα, τότε ο κατασκευαστής από την πώληση όλων

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

των διαμερισμάτων θα εισπράξει :

$200\cdot 400.000+200\cdot 410.000+\cdots+200\cdot 510.000=200\cdot(400.000+410.000+\cdots+510.000)$.

Όμως το $400.000+410.000+\cdots+510.000$ είναι το S_{12} της προηγούμενης προόδου, οπότε είναι

$S_{12}=\frac{\alpha_1+\alpha_{12}}{2}12=(400.000+510.000)\cdot 6 \Leftrightarrow S_{12}=5.460.000$.

Άρα ο κατασκευαστής θα εισπράξει συνολικά : $200\cdot 5.460.000=1.092.000.000$.

11. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

Το 2001 υπήρχαν δυο θέματα που είχαν σχέση με προόδους και λογαρίθμους και επομένως θα απαντηθούν στο 4ο κεφάλαιο.

12. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Τρίτη 3 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha_3=\sqrt{2}\eta\mu\theta$, $\alpha_4=\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta$, με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι ο δεύτερος, ο τρίτος, και ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) τότε :

α. Επειδή $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha_3=\sqrt{2}\eta\mu\theta$, $\alpha_4=\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα είναι

$\alpha_3^2=\alpha_2\cdot\alpha_4 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\eta\mu\theta)^2=\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\theta=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\theta=\sqrt{3}\eta\mu\theta \Leftrightarrow$

$2\eta\mu^2\theta-\sqrt{3}\eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow (2\eta\mu\theta-\sqrt{3})\eta\mu\theta=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu\theta=0 & \text{ή}\\ 2\eta\mu\theta-\sqrt{3}=0\end{cases}$ άρα

✓ $\eta\mu\theta=0$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ που είναι αδύνατη και

✓ $2\eta\mu\theta-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$.

β. Όπως έδειξες πιο πάνω αν οι αριθμοί $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu\theta$, $\alpha_3=\sqrt{2}\eta\mu\theta$, $\alpha_4=\sqrt{3}\varepsilon\varphi\theta$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\theta=\frac{\pi}{3}$ άρα οι αριθμοί γίνονται συγκεκριμένα $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

$\alpha_3=\sqrt{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\alpha_4=\sqrt{3}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\sqrt{3}=3$ δηλαδή γεωμετρική πρόοδος με

$\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\alpha_4=3$ άρα ο λόγος $\lambda=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$ και επειδή $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\frac{1}{2}=\alpha_1\sqrt{6} \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{1}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow \alpha_1=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

γ. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι :

$$S_4=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{(\sqrt{6})^4-1}{\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{\left((\sqrt{6})^2\right)^2-1}{\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{6^2-1}{\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{35}{\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{35\left(\sqrt{6}+1\right)}{\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{6}+1\right)} \Leftrightarrow$$

$$S_4=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{35\left(\sqrt{6}+1\right)}{6-1}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\frac{35\left(\sqrt{6}+1\right)}{5} \Leftrightarrow S_4=\frac{7\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+1\right)}{12}.$$

13. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Β, 2. Γ.

3. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), με $\lambda\neq 1$, είναι :

Β. $S_\nu=\frac{\alpha_1\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$.

Β.

α. Η γεωμετρική πρόοδος 1, 2, 4, 8, ... έχει $\alpha_1=1$ και λόγο $\lambda=2$.

β. Ο ν – οστός όρος $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=1\cdot 2^{\nu-1}=2^{\nu-1}$.

γ. Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων είναι $S_{10}=\alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1=1024-1=1023$.

ΘΕΜΑ 3ο

γ. Για είναι οι αριθμητικές τιμές των $f(\chi)$, $g(\chi)$ και $\varphi(\chi)$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

θα πρέπει $2g(\chi)=f(\chi)+\varphi(\chi) \Leftrightarrow 2\left(2\chi^2+1\right)=\chi^2+3+\chi^2+5 \Leftrightarrow 4\chi^2+2-\chi^2-3-\chi^2-5=0 \Leftrightarrow$

$2\chi^2-6=0 \Leftrightarrow \chi^2=3 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 4ο

Η διαδικασία, όπως περιγράφεται, είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=299$ και διαφορά $\omega=7$.

α. Ο μαθητής την 15η ημέρα ανέβηκε $\alpha_{15}=299+(15-1)7=397$ σκαλοπάτια.

β. Για να βρεις πόσες ημέρες γυμνάστηκε με τον τρόπο αυτό θα πρέπει να βρεις το ν έτσι ώστε

$$\alpha_\nu=999 \Leftrightarrow 999=299+(\nu-1)7 \Leftrightarrow \nu-1=\frac{999-299}{7}=100 \Leftrightarrow \nu=101$$

Άρα ο μαθητής γυμνάστηκε 101 ημέρες ακριβώς.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Την πρώτη μέρα ανέβηκε 299 σκαλοπάτια, την δεύτερη μέρα ανέβηκε 299 + 7 = 306 σκαλοπάτια, την τρίτη μέρα ανέβηκε 306 + 7 = 313 σκαλοπάτια. Άρα το 310ο σκαλοπάτι το πέρασε για πρώτη φορά την 3η μέρα και επειδή γυμνάστηκε 101 μέρες άρα :

Άρα το 310ο σκαλοπάτι το πέρασε συνολικά 99 φορές.

δ. Τα σκαλοπάτια που ανέβηκε συνολικά τις 101 ημέρες που γυμναζόταν με αυτόν τον τρόπο είναι :

$$S_v = 299 + 306 + \cdots + 999 = \frac{299+999}{2}101 = \frac{1298}{2}101 = 65549 \text{ σκαλοπάτια .}$$

14. *εσπερινά επαναληπτικές 2001* — *Πέμπτη 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού οι $-\chi^3+\kappa$, $\chi^2+3+\kappa$, $-3\chi+\kappa$ με τη σειρά που δίνονται είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου θα πρέπει $2\left(\chi^2+3+\kappa\right)=\left(-\chi^3+\kappa\right)+\left(-3\chi+\kappa\right) \Leftrightarrow \chi^3+2\chi^2+3\chi+6=0$

Θα παραγοντοποιήσεις με Horner το $\chi^3+2\chi^2+3\chi+6$, με $\rho=-2$ οπότε έχεις :

1	2	3	6	**ρ = –2**
↓	– 2	0	– 6	
1	0	3	0	

Άρα το $\chi^3+2\chi^2+3\chi+6$ γράφεται $\chi^3+2\chi^2+3\chi+6=\left(\chi^2+3\right)(\chi+2)$, άρα

$\chi^3+2\chi^2+3\chi+6=0 \Leftrightarrow \left(\chi^2+3\right)(\chi+2)=0$, και επειδή $\chi^2+3\neq 0$ άρα $\chi=-2$.

β. Αφού $\chi=-2$ άρα οι αριθμοί γίνονται $\alpha_1=-(-2)^3+\kappa=-(-8)+\kappa=8+\kappa$,

$\alpha_2=(-2)^2+3+\kappa=\kappa+7$, $\alpha_3=-3(-2)+\kappa=\kappa+6$, επομένως αν έχουν άθροισμα 27, τότε

$\kappa+8+\kappa+7+\kappa+6=27 \Leftrightarrow 3\kappa+21=27 \Leftrightarrow 3\kappa=6 \Leftrightarrow \kappa=2$.

γ. Αν $\chi=-2$, $\kappa=2$ τότε οι αριθμοί γίνονται $\alpha_1=10$, $\alpha_2=9$ και $\alpha_3=8$, οπότε

$\omega=\alpha_2-\alpha_2=9-10 \Leftrightarrow \omega=-1$ άρα $\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega=10+(20-1)(-1)=10-19=-9$

δ. Το άθροισμα των πρώτων όρων είκοσι της προόδου είναι :

$$S_{20}=\frac{\left[2\alpha_1+(20-1)\omega\right]\nu}{2}=\frac{\left[2\cdot 10+19(-1)\right]20}{2}=[20-19]10=10.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. **επαναληπτικές 2001** *Παρασκευή 14 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 4ο

Η διαδικασία, όπως περιγράφεται, είναι μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 70$

α. Η προτελευταία σειρά $(\alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu - \omega = 250 - \omega)$ έχει 140 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά $(\alpha_2 = \alpha_1 + \omega = 70 + \omega)$, άρα

$\alpha_{\nu-1} = \alpha_2 + 140 \Leftrightarrow 250 - \omega = (70 + \omega) + 140 \Leftrightarrow 2\omega = 250 - 140 - 70 = 40 \Leftrightarrow$ **$\omega = 20$** .

Άρα κάθε σειρά καθισμάτων του θεάτρου έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

β. Πρώτα θα υπολογίσεις πόσες σειρές έχει το θέατρο από τον τύπο :

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow 250 = 70 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow \nu - 1 = \frac{250 - 70}{20} = 9 \Leftrightarrow \nu = 10$ οπότε

το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι : $S_{20} = \frac{[\alpha_1 + \alpha_\nu]\nu}{2} = \frac{[70 + 250]10}{2} = 320 \cdot 5 = 1600$

γ. Η διαδικασία προσέλευσης των θεατών είναι μια γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = 100$ και $\lambda = 2$ και για να βρεις ποια είναι η παράσταση στην οποία για πρώτη φορά θα γεμίσει το θέατρο θα πρέπει να βρεις το ν έτσι ώστε :

$\beta_\nu \geq 1600$, $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 100 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 100 \cdot 2^{\nu-1} = 1600 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow \nu - 1 = 4 \Leftrightarrow \nu = 5$.

Άρα για πρώτη φορά το θέατρο θα γεμίσει την 5η μέρα .

16. **Εσπερινά 2002** *Παρασκευή 24 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού οι αριθμοί $\alpha_1 = 2\chi + 2$, $\alpha_2 = 6\chi - 2$ και $\alpha_3 = 5\chi + 4$, είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου θα είναι : $2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \Leftrightarrow 2(6\chi - 2) = (2\chi + 2) + (5\chi + 4) \Leftrightarrow$

$12\chi - 4 = 7\chi + 6 \Leftrightarrow 5\chi = 10 \Leftrightarrow \chi = 2$.

β. Επειδή $\chi = 2$ άρα οι αριθμοί γίνονται $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 10$, $\alpha_1 = 14$ και η διαφορά **ω** της προόδου είναι : $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 4$

γ. Είναι $\alpha_{500} = 6 + (500 - 1)4 \Leftrightarrow \alpha_{500} = 2002$

δ. Είναι $S_{500} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{500}}{2} 500 = \frac{6 + 2002}{2} 500 \Leftrightarrow S_{500} = 502.000$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. **πανελλήνιες 2002** *Σάββατο 8 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **α.** , **β.** Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για να αποτελούν οι αριθμοί $\alpha_1=\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\alpha_2=\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ και $\alpha_3=1$, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου πρέπει $2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$, η τελευταία σχέση είναι γνωστή ταυτότητα άρα ……

β. Η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι $\omega=\alpha_3-\alpha_2 \Leftrightarrow \omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\eta\mu^2\alpha$

γ. Το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου είναι :

$$S_5=\frac{[2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+(5-1)\eta\mu^2\alpha]5}{2}=\frac{[2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+4\eta\mu^2\alpha]5}{2}=[\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\eta\mu^2\alpha]5=[1-2\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu^2\alpha]5 \Leftrightarrow \mathbf{S_5=5}$$

18. **εσπερινά επαναληπτικές 2002** *Τετάρτη 4 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν οι αριθμοί $\alpha_4=2$, $\alpha_5=\chi$ και $\alpha_6=\chi-\frac{1}{2}$, είναι ο τέταρτος, ο πέμπτος και ο έκτος όρος, αντίστοιχα, μιας γεωμετρικής προόδου, τότε θα ισχύει:

$$\alpha_5^2=\alpha_4\cdot\alpha_6 \Leftrightarrow \chi^2=2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)=2\chi-1 \Leftrightarrow \chi^2-2\chi+1=0 \Leftrightarrow (\chi-1)^2=0 \Leftrightarrow \chi=1$$

β. Επειδή $\chi=1$ άρα οι αριθμοί γίνονται $\alpha_4=2$, $\alpha_5=1$ και $\alpha_6=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ και ο λόγος λ της προόδου είναι : $\lambda=\frac{\alpha_5}{\alpha_4}=\frac{1}{2}$.

γ. Είναι π χ $\alpha_4=\alpha_1\lambda^{4-1} \Leftrightarrow 2=\alpha_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\alpha_1\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha_1=16$

δ. Είναι $S_5=\alpha_1\frac{\lambda^5-1}{\lambda-1}=16\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5-1}{\frac{1}{2}-1}=16\frac{\frac{1}{32}-1}{-\frac{1}{2}}=16\frac{-\frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}}=16\frac{2\cdot 31}{32}=31$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. ***επαναληπτικές 2002*** ***Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **α. Σωστή , β. Σωστή, γ. Σωστή, δ. Σωστή**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού ο πληθυσμός της κοινωνίας Α μειώνεται κάθε ώρα κατά το $\frac{1}{100}$ του αρχικού πληθυσμού της άρα στο τέλος της $1^{ης}$ ώρας θα είναι $A_0-\frac{1}{100}A_0=\frac{99}{100}A_0$ άρα ο πληθυσμός της κοινωνίας Α ακολουθεί αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=\frac{99}{100}A_0$ και διαφορά $\omega=-\frac{1}{100}A_0$.

Ο πληθυσμός της κοινωνίας Β αυξάνεται ανά ώρα με γεωμετρική πρόοδο με λόγο λ άρα στο τέλος της $1^{ης}$ ώρας θα είναι $B_0\lambda \Leftrightarrow \beta_1=B_0\lambda$ άρα στο τέλος της $10^{ης}$ ώρας θα είναι

i) $\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=\frac{99}{100}A_0-9\frac{1}{100}A_0 \Leftrightarrow \alpha_{10}=\frac{90}{100}A_0$ και

ii) $\beta_{10}=\beta_1\cdot\lambda^9=B_0\lambda\cdot\lambda^9 \Leftrightarrow \beta_{10}=B_0\lambda^{10}$ άρα

$\alpha_{10}=\beta_{10}\Leftrightarrow\frac{90}{100}A_0=B_0\cdot\lambda^{10}$ και επειδή σύμφωνα με την εκφώνηση είναι : $9A_0=10^{11}B_0 \Leftrightarrow$

$A_0=\frac{10^{11}B_0}{9}$ άρα $\frac{90}{100}A_0=B_0\cdot\lambda^{10}\Leftrightarrow\frac{90}{100}\frac{10^{11}B_0}{9}=B_0\cdot\lambda^{10}\Leftrightarrow\lambda^{10}=\frac{9\cdot10}{10^2}\frac{10^{11}}{9}=10^{10} \Leftrightarrow \boxed{\lambda=10}$

β. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι $\lambda=10$, $\beta_1=10B_0$ άρα $\beta_5=\beta_1\cdot10^{5-1} \Leftrightarrow$

$\beta_5=B_0\cdot10\cdot10^4=10^5B_0\Leftrightarrow10^{10}=10^5B_0\Leftrightarrow B_0=\frac{10^{10}}{10^5}\Leftrightarrow \boxed{B_0=10^5}$

γ. Επειδή $9A_0=10^{11}B_0=10^{11}\cdot10^5 \Leftrightarrow A_0=\frac{10^{16}}{9}$, $\alpha_1=\frac{99}{100}A_0$ και διαφορά $\omega=-\frac{1}{100}A_0\Leftrightarrow$

$$\alpha_{99}=\alpha_1+98\omega=\frac{99}{100}A_0-98\frac{1}{100}A_0=\frac{1}{100}A_0=\frac{1}{100}\frac{10^{16}}{9}\Leftrightarrow\alpha_{99}=\frac{10^{14}}{9}.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. ***πανελλήνιες 2003*** ***Πέμπτη 22 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Γ. Αν S_ν συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1, τότε σωστή απάντηση είναι : η **β.**

α. $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^\nu - 1}$ **β.** $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ **γ.** $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{1 - \lambda^\nu}{\lambda - 1}$

Ε. **α.** Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το **<u>άθροισμα</u>** των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

β. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι **<u>γεωμετρικής</u>** προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $\alpha_\nu = -11 + 2\nu \Leftrightarrow \alpha_1 = -11 + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -9$. Επίσης $\alpha_2 = -11 + 2 \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha_2 = -7$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = -7 - (-9) \Leftrightarrow \omega = 2$.

β. Το άθροισμα $\alpha_{12} + \alpha_{13} + \cdots + \alpha_{21}$ μπορείς να το βρεις με δυο τρόπους :

1ος τρόπος Να θεωρήσεις μια νέα αριθμητική πρόοδο (β_ν) με $\beta_1 = \alpha_{12}$ και την ίδια διαφορά ω = 2 με Προηγούμενα, δηλαδή $\beta_1 = \alpha_1 + 11\omega = -9 + 22 = 13$ οπότε οι όροι από τον α_{12} ως τον α_{21} είναι 10, επομένως το $\alpha_{12} + \alpha_{13} + \cdots + \alpha_{21}$ είναι το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της (β_ν) δηλαδή

$S_{10} = \dfrac{2\beta_1 + 9\omega}{2} 10 = (2 \cdot 13 + 9 \cdot 2) 5 \Leftrightarrow S_{10} = 220$.

2ος τρόπος Είναι $\alpha_{12} + \alpha_{13} + \cdots + \alpha_{21} = S_{21} - S_{11} = \dfrac{2\beta_1 + 9\omega}{2} 21 - \dfrac{2\beta_1 + 9\omega}{2} 11 =$

$\dfrac{2\beta_1 + 9\omega}{2} 10 = (2 \cdot 13 + 9 \cdot 2) 5 \Leftrightarrow S_{10} = 220$

γ. Η $P(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi^3 - 3\chi^2 - \chi + 3 = 0$. Είναι $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$ άρα το 1 ρίζα της $P(\chi) = 0$

Θα παραγοντοποιήσεις με Horner το $\chi^3 - 3\chi^2 - \chi + 3$, με $\rho = -1$ οπότε έχεις :

1	–3	–1	3	**ρ = – 1**
↓	– 1	4	– 3	
1	– 4	3	0	

Άρα το $\chi^3 - 3\chi^2 - \chi + 3$ γράφεται $\chi^3 - 3\chi^2 - \chi + 3 = (\chi^2 - 4\chi + 3)(\chi + 1)$, και επειδή το $\chi^2 - 4\chi + 3$, έχει διακρίνουσα $\Delta = \cdots = 4 > 0$ και ρίζες 1 και 3 άρα συνολικά οι ρίζες με σειρά μεγέθους είναι – 1, 1 , 3 και επειδή ισχύει $2 \cdot 1 = -1 + 3$ άρα είναι (οι ρίζες) διαδοχικοί όροι της πιο πάνω αριθμητικής προόδου.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. ***εσπερινά 2003*** ***Παρασκευή 23 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $\begin{cases} \alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \\ \alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 810 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \\ 2430 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \end{cases}$ και με διαίρεση κατά μέλη έχεις $\lambda = 3$.

β. Είναι $\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 \Leftrightarrow 810 = \alpha_1 \cdot 3^3 \Leftrightarrow 27\alpha_1 = 810 \Leftrightarrow \alpha_1 = 30$.

γ. $S_6 = \alpha_1 \dfrac{\lambda^6 - 1}{\lambda - 1} = 30\dfrac{3^6 - 1}{3 - 1} = 30\dfrac{729 - 1}{2} = 15 \cdot 728$ άρα

$S_6 = 10920$ είναι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου.

22. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** ***Τετάρτη 3 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi + 2$, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι: $P(2004) + P(-2004) = 4$.

Μονάδες 4

β. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $Q(\chi) = \chi$.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(\chi)$ με το πολυώνυμο $\chi - 1$ είναι $\upsilon = \alpha + \beta + 2$.

Μονάδες 7

δ. Αν α = 1 και το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε να υπολογίσετε το β και να λύσετε την εξίσωση $P(\chi) = 0$.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

1. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 4ο

Όλο το 4ο Ζήτημα είναι συνδυασμός του 3ου κεφαλαίου (πρόοδοι) και του 4ου κεφαλαίου (λογάριθμοι αριθμών) και θα απαντηθεί εκεί.

24. ***πανελλήνιες 2004*** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu$.

δ. Αν **α, β, γ** είναι διαδοχικοί όροι οποιασδήποτε αριθμητικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Μονάδες 2

25. ***εσπερινά 2004*** ***Παρασκευή 21 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **Σωστή.**

Δ. **Λάθος.**

ΘΕΜΑ 2ο

Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι 12 και ο 3ος όρος της προόδου είναι τριπλάσιος του 1ου όρου.

α. Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 12 \Leftrightarrow 3\alpha_1 + 3\omega = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 4$ **(1)**.

$\alpha_3 = 3\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 3\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \omega$, οπότε από **(1)** έχεις $2\alpha_1 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$, άρα και $\omega = 2$.

β. Είναι $\alpha_{1002} = \alpha_1 + (1002-1)\omega = 2 + 1001 \cdot 2 = 2004$.

γ. Το άθροισμα $S_{60} = \frac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2} = \frac{[2\cdot 2 + (60-1)2]60}{2} = [4+118]30 = 3660$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **επαναληπτικές 2004** *Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. **Λάθος.**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_4 = 4$ και $\alpha_7 = 32$ και το πολυώνυμο :

$P(\chi) = 2\chi^4 + \kappa^3\chi^3 - 6\kappa^2\chi^2 - 2(\kappa+2)\chi - 4\kappa$, $\kappa \in R$.

α. $\begin{cases}\alpha_4 = 4\\ \alpha_7 = 32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^3 = 4\\ \alpha_1\cdot\lambda^6 = 32\end{cases}$, με διαίρεση κατά μέλη έχεις $\lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$, οπότε

$\alpha_1\lambda^3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot 2^3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

β. Είναι $\alpha_3 = \alpha_1\cdot\lambda^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$ άρα ο $\chi = 2$ είναι μία ρίζα της εξίσωσης $P(\chi) = 0$, που σημαίνει $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^4 + \kappa^3\cdot 2^3 - 6\kappa^2\cdot 2^2 - 2(\kappa+2)2 - 4\kappa = 0 \Leftrightarrow$

$32 + 8\kappa^3 - 24\kappa^2 - 4\kappa - 8 - 4\kappa = 0 \Leftrightarrow 8\kappa^3 - 24\kappa^2 - 8\kappa + 24 = 0 \Leftrightarrow \kappa^3 - 3\kappa^2 - \kappa + 3 = 0$,

η τελευταία έχει προφανή ρίζα την $\kappa = 1$.

Οπότε θα παραγοντοποιήσεις το $\kappa^3 - 3\kappa^2 - \kappa + 3$ με Horner, με $\rho = 1$ οπότε έχεις :

1	–3	–1	3	**ρ = 1**
↓	1	–2	– 3	
1	– 2	–3	0	

Άρα το $\kappa^3 - 3\kappa^2 - \kappa + 3$ γράφεται $\kappa^3 - 3\kappa^2 - \kappa + 3 = (\kappa^2 - 2\kappa - 3)(\kappa - 1)$, και επειδή το $\kappa^2 - 2\kappa - 3$, έχει διακρίνουσα $\Delta = \cdots = 16 > 0$ και ρίζες – 1 και 3 άρα συνολικά οι ρίζες με σειρά μεγέθους είναι: $\kappa = -1$, $\kappa = 1$, $\kappa = 3$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 4

Εκθετικές - Λογαριθμικές

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στις εξετάσεις των Εσπερινών Λυκείων δεν υπήρξε καθόλου θέμα από το 4ο κεφάλαιο δηλαδή εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις γιατί ήταν εκτός εξεταστέας ύλης.

1. ***πανελλήνιες 1977***

α. Να δείξετε ότι $\log_\alpha \chi = (\log_\alpha \beta)\cdot(\log_\beta \chi)$ όπου α, β, χ είναι θετικοί αριθμοί, α, β ≠ 1.

β. Δίνεται η συνάρτηση : $\varphi(\chi) = \log_\alpha \chi + \log_\beta \chi$.

Να εκφράσετε αυτή τη συνάρτηση με τη βοήθεια του λογαρίθμου χ με βάση το γινόμενο $\alpha\cdot\beta\cdot(\log_{\alpha\beta}\chi)$ και του λογάριθμου α με βάση $\beta\cdot(\log_\beta \alpha)$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες θετικές τιμές του χ με την προϋπόθεση ότι 0 < α < 1 και β >1.

Το θέμα αναφέρεται για ιστορικούς και μόνο λόγους και δεν θα απαντηθεί.

2. ***πανελλήνιες 1978***

ΘΕΜΑ 4ο

Αν είναι $\psi = \chi^2 - \frac{4}{3}\chi - \frac{4}{3}$ να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$1 < \log_\psi\left(\frac{\chi-2}{\chi}\right)$. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις ψ > 1 και 0 < ψ < 1

Τον Ιούνιο και τον Σεπτέμβριο του 1999, όπως επίσης και το 2000 δεν υπήρξε καθόλου θέμα από το 4ο κεφάλαιο δηλαδή εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

3. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με ω = log5.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

γ. Έστω (β_ν) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \cdots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha \cdot t + \beta\,, \quad t \geq 0$$

όπου α, β ∈ R τότε:

α. Να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}\,, \quad t \geq 0$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7

4. επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Τρίτη 3 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 8

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Μονάδες 5

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(\chi) + f(\chi+1) = 0$.

Μονάδες 7

5. πανελλήνιες 2002

Σάββατο 8 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $e^{\chi} = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = \chi \quad , \ \theta > 0$

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\left(\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(\chi)$.

Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\chi)=2\ln 2$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(\chi)>0$.

Μονάδες 10

6. επαναληπτικές 2002

Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^{\chi}$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το R .

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Εάν $\alpha = 11$, να λύσετε την εξίσωση $f(\chi)+f(\chi+1)=6$.

Μονάδες 10

7. πανελλήνιες 2003

Πέμπτη 22 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $\log_{\alpha}\theta=\chi$, τότε :

α. $\alpha^{\theta}=\chi$ **β.** $\chi^{\alpha}=\theta$ **γ.** $\alpha^{\chi}=\theta$

Μονάδες 3

Ε. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες:

γ. Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $\alpha \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha^{\chi}$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα .....

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\ln(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3)$ και $g(\chi)=\ln 3+\ln\left(e^{\chi}-1\right)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(\chi)$ και $g(\chi)$.

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\chi)=g(\chi)$.

Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(\chi)>2g(\chi)$.

Μονάδες 9

8. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

1. Για ποιες τιμές του $\chi \in R$ οι αριθμοί $\log(32\chi-1), \log(42\chi-1), \log(82\chi-2)$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

Μονάδες 13

2. Εάν ο τέταρτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_4=-\log 2$, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Μονάδες 12

9. ***πανελλήνιες 2004*** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, $\theta>0$ και $\kappa\in R$, να δείξετε ότι ισχύει: $\log_\alpha \theta^\kappa=\kappa\log_\alpha\theta$

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς χ_1, χ_2 ισχύει: $\log\frac{\chi_1}{\chi_2}=\frac{\log\chi_1}{\log\chi_2}$

Μονάδες 2

Γ. Να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας στις παρακάτω ισότητες τα κενά που σημειώνονται με …

α. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\alpha^{\cdots}$ με $\alpha>0$ μ : ακέραιος και ν : θετικός ακέραιος.

β. $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\cdots$ με $\theta>0$ και $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$.

γ. $\log_\alpha\alpha^{\chi}=\cdots$ με $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\chi\in R$

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(\chi)=\sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2\chi}+3\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}-1}$

Μονάδες 13

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi)=5^{\chi}$

Να λύσετε την εξίσωση: $g(\chi)+g(\chi+1)+g(\chi+2)+\cdots+g(\chi+49)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}$

Μονάδες 12

1. ***επαναληπτικές 2004*** ***Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, τότε για οποιοδήποτε $\theta_1>0$, $\theta_2>0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1+\theta_1)=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$

Μονάδες 2

4. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(\chi)=\alpha^{\chi}$ με $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

α. Για ποιες τιμές του α η $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R ;

β. Για ποιες τιμές του α η $f(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R ;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

1. Για ποιες τιμές του $\chi\in R$ ισχύει κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες;

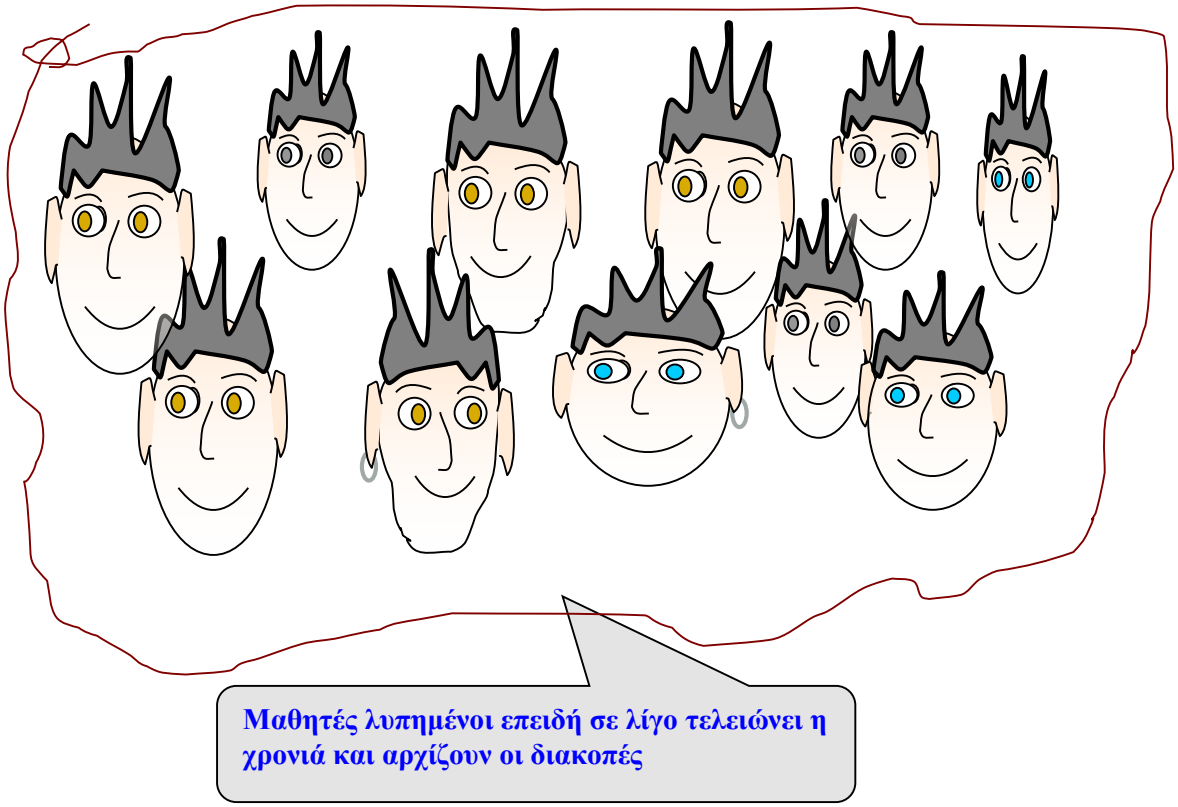
$\log\chi^4=4\log(-\chi)$, $\log\chi^2=2\log\chi$, $\frac{\log\chi^4}{\log\chi^2}=2$.

Μονάδες 12

2. Να λυθεί η εξίσωση $\left(\chi^2\right)^{1+\log\chi^4}=10^6$.

Μονάδες 13

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Κεφάλαιο 4

Εκθετικές - Λογαριθμικές

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στις εξετάσεις των Εσπερινών Λυκείων δεν υπήρξε καθόλου θέμα από το 4ο κεφάλαιο δηλαδή εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις γιατί ήταν εκτός εξεταστέας ύλης.

1. *πανελλήνιες 1977*

α. Να δείξετε ότι $\log_\alpha \chi = (\log_\alpha \beta)\cdot(\log_\beta \chi)$ όπου α, β, χ είναι θετικοί αριθμοί, α, β ≠ 1.

β. Δίνεται η συνάρτηση : $\varphi(\chi) = \log_\alpha \chi + \log_\beta \chi$.

Να εκφράσετε αυτή τη συνάρτηση με τη βοήθεια του λογαρίθμου χ με βάση το γινόμενο $\alpha\cdot\beta\cdot(\log_{\alpha\beta}\chi)$ και του λογάριθμου α με βάση $\beta\cdot(\log_\beta \alpha)$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες θετικές τιμές του χ με την προϋπόθεση ότι $0 < \alpha < 1$ και $\beta > 1$.

Το θέμα αναφέρεται για ιστορικούς και μόνο λόγους και δεν θα απαντηθεί.

2. *πανελλήνιες 1978*

ΘΕΜΑ 4ο

✓ Αν $\psi > 1$ τότε $\chi^2 - \frac{4}{3}\chi - \frac{4}{3} > 1 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 4\chi - 4 > 3 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 4\chi - 7 > 0$, ρίζες $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = \frac{7}{3}$ άρα

$\psi > 1 \Leftrightarrow \chi < -1$ ή $\chi > \frac{7}{3}$ και ταυτόχρονα η $\log_\psi$ γνησίως αύξουσα, άρα : $1 < \log_\psi\left(\frac{\chi-2}{\chi}\right) \Leftrightarrow$

$\log_\psi \psi < \log_\psi\left(\frac{\chi-2}{\chi}\right) \Leftrightarrow \psi < \frac{\chi-2}{\chi} \Leftrightarrow \chi^2 - \frac{4}{3}\chi - \frac{4}{3} < \frac{\chi-2}{\chi} \Leftrightarrow 3\chi^3 - 4\chi^2 - 4\chi < 3\chi - 6 \Leftrightarrow$

$3\chi^3 - 4\chi^2 - 7\chi + 6 < 0$.

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $P(\chi) = 3\chi^3 - 4\chi^2 - 7\chi + 6$, με ρ = 2 θα έχεις :

	3	–4	– 7	6	**ρ = 2**
↓		6	4	–6	
	3	2	–3	0	

Άρα το $P(\chi) = 3\chi^3 - 4\chi^2 - 7\chi + 6$ γράφεται $P(\chi) = (\chi - 2)(3\chi^2 + 2\chi - 3)$ και επειδή το

Συμβουλή : Ανισώσεις με βαθμό μεγαλύτερο από 2 λύνονται **πάντα** με πίνακα προσήμου.

i) Είναι $\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

ii) Για το τριώνυμο 2ου βαθμού $3\chi^2 + 2\chi - 3$ είναι $\rho_1 = -2$ και $\rho_2 = 2$ άρα

ισχύει ο πίνακας μεταβολών : ⇝

$-\infty$		-2		2		$+\infty$
	+		–		+	

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ο πίνακας μεταβολών :

χ	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$\chi-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	
χ^2-4	$+$	$-$	$-$	$+$	
$P(\chi)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Όπως φαίνεται και από τον πιο πάνω πίνακα η $P(\chi)\geq 0$ λύσεις είναι τα $\chi\in[-2,1]\cup[2,+\infty)$.

Αν είναι $\psi=\chi^2-\frac{4}{3}\chi-\frac{4}{3}$ να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$1<\log_\psi\left(\frac{\chi-2}{\chi}\right)$. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις $\psi>1$ και $0<\psi<1$

Τον Ιούνιο και τον Σεπτέμβριο του 1999, όπως επίσης και το 2000 δεν υπήρξε καθόλου θέμα από το 4ο κεφάλαιο δηλαδή εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

3. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 9 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με $\alpha_3=\log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega=\log 5$ τότε θα ισχύει η σχέση $\alpha_3=\alpha_1+(3-1)\omega\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_3-2\omega=\log 125-2\log 5\Leftrightarrow$

$\alpha_1=\log 5^3-2\log 5=3\log 5-2\log 5=\log 5$ άρα $\alpha_1=\omega$.

β. Είναι $\alpha_{21}=\alpha_1+(21-1)\log 5=\log 5+20\log 5\Leftrightarrow\alpha_{21}=21\cdot\log 5$ όμοια $\alpha_{22}=22\cdot\log 5$ . . .

$\alpha_{29}=29\cdot\log 5$ άρα :

$A=\alpha_{21}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{29}=21\cdot\log 5+22\cdot\log 5+\cdots+29\cdot\log 5=(21+22+\cdots+29)\log 5$.

Το άθροισμα $21+22+\cdots+29$ υπολογίζεται αν θεωρήσεις πρόοδο (γ_ν) με

$\gamma_1=21$, $\gamma_\nu=29$ και $\omega=1$ οπότε $\gamma_\nu=\gamma_1+(\nu-1)\omega\Leftrightarrow 29=21+\nu-1\Leftrightarrow\nu=9$ άρα

$21+22+\cdots+29=\frac{(21+29)9}{2}=225$ άρα $A=(21+22+\cdots+29)\log 5\Leftrightarrow A=225\cdot\log 5$

γ. Επειδή η (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1=\alpha_1$ και $\beta_2=\alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα θα είναι $\lambda=\frac{\beta_2}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\alpha_1 + \log 5}{\alpha_1} = \frac{2\log 5}{\log 5} \Leftrightarrow \lambda = 2.$

Άρα $\beta_\nu = \beta_1 \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \beta_\nu = \log 5 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}\log 5$. Έτσι το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \cdots + \beta_{1999} + \beta_{2001} =$

$\log 5 + 2^2 \log 5 + 2^4 \log 5 + \cdots + 2^{1998}\log 5 + 2^{2000}\log 5 \Leftrightarrow B = \left(1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{1998}5 + 2^{2000}\right)\log 5$.

Όμως το άθροισμα $1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{1998} + 2^{2000} = 1 + \left[2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{1998} + 2^{2000}\right] =$

$1 + \left[\left(2^2\right)^1 + \left(2^2\right)^2 + \cdots + \left(2^2\right)^{999} + \left(2^2\right)^{1000}\right] = 1 + \left[4^1 + 4^2 + \cdots + 4^{999} + 4^{1000}\right] = 1 + \frac{4 \cdot 4^{1000} - 1}{4 - 1} =$

$1 + \frac{4}{3}\left(4^{1000} - 1\right) = 1 + \frac{4}{3}4^{1000} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}4^{1001} - \frac{1}{3}$ άρα $B = \left(1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{1998}5 + 2^{2000}\right)\log 5 \Leftrightarrow$

$B = \left(\frac{1}{3}4^{1001} - \frac{1}{3}\right)\log 5$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Q(t) η τιμή ενός προϊόντος (**σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές**), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά.

Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δηλαδή **3 εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές**, οπότε :

α. Η αρχική τιμή είναι όταν t = 0 οπότε $Q(0) = 3$, αλλά από την εκφώνηση είναι :

$\ln Q(t) = \alpha \cdot t + \beta \quad (1) \Leftrightarrow \ln Q(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \ln 3 = \beta$

Μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής δηλαδή : $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}5 = \frac{3}{2}$

εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές, επειδή ο χρόνος t «μετράει» σε χρόνια άρα οι 6 μήνες είναι $\frac{1}{2}$ του χρόνου.

Και ο τύπος (1) γίνεται $\ln Q\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \ln 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \ln\frac{3}{2} = \alpha + 2 \cdot \ln 3 \Leftrightarrow 2 \cdot (\ln 3 - \ln 2) = \alpha + 2 \cdot \ln 3 \Leftrightarrow$

$\alpha = -2\ln 2 = \ln 2^{-2}$ επομένως ο τύπος (1) γίνεται $Q(t) = t \cdot \ln 2^{-2} + \ln 3 = \ln 2^{-2t} + \ln 3 \Leftrightarrow$

$Q(t) = \ln(2^2)^{-t} + \ln 3 = \ln 4^{-t} + \ln 3 \Leftrightarrow Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}, \quad t \geq 0$.

β. Αν είναι $Q(t) = \frac{1}{16}Q(0) = \frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{3}{16}$ τότε πρέπει (σύμφωνα με τον τύπο που μόλις απέδειξες) :

$3 \cdot 4^{-t} = \frac{3}{16} \Leftrightarrow 4^{-t} = \frac{1}{16} = 4^{-2} \Leftrightarrow$ **t = 2 έτη**

γ. Ζητάς τον χρόνο t σε έτη έτσι ώστε η τιμή του προϊόντος $Q(t) \leq \frac{1}{9}Q(0) \Leftrightarrow Q(t) \leq \frac{1}{9} \cdot 3 \Leftrightarrow$

$Q(t) \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4^{-t} \leq 3^{-2} \Leftrightarrow 4^t \geq 3^2$ επειδή $4^t > 0$ και $3^2 > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα $4^t \geq 3^2 \Leftrightarrow \ln 4^t \geq \ln 3^2 \Leftrightarrow t \cdot \ln 4 \geq 2 \cdot \ln 3 \Leftrightarrow t \geq \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 4} \Leftrightarrow t \geq \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 2^2} \Leftrightarrow t \geq \frac{2 \cdot \ln 3}{2 \cdot \ln 2} \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 3}{\ln 2}$,

επομένως η ελάχιστη τιμή για τον χρόνο t έτσι ώστε η τιμή του προϊόντος να μην υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής είναι $t = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

4. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** *Τρίτη 3 Ιουλίου*

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right)$.

α. Για να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει $3 + \chi \neq 0$ και $\frac{3-\chi}{3+\chi} > 0$.

$\chi \neq -3$ και $\frac{3-\chi}{3+\chi} > 0 \Leftrightarrow (3-\chi)(3+\chi) > 0 \Leftrightarrow (\chi-3)(\chi+3) < 0$.

Το $(\chi-3)(\chi+3)$ είναι τριώνυμο με ρίζες $\chi_1 = 3$ και $\chi_2 = -3$ άρα έχει πίνακα μεταβολής προσήμου :

Επειδή α = 1 > 0

χ	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$(\chi-3)(\chi+3)$	+	–	+	

Άρα η ανίσωση $\frac{3-\chi}{3+\chi} > 0$ δηλαδή η ισοδύναμή της $(\chi-3)(\chi+3) < 0$ έχει λύσεις : τα $\chi \in (-3, 3)$ άρα πεδίο ορισμού είναι το **A = (–3 , 3)**

β. Είναι $f(-\chi) = \ln\left(\frac{3-(-\chi)}{3+(-\chi)}\right) = \ln\left(\frac{3+\chi}{3-\chi}\right) = \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right) = -f(\chi)$ **άρα f περιττή.**

γ. Είναι $f(0) = \ln\left(\frac{3-0}{3+0}\right) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = \ln\left(\frac{8}{10}\right)$, οπότε σύμφωνα με τη θεωρία είναι $\ln\left(\frac{8}{10}\right) < 0$ άρα $f(0) > f\left(\frac{1}{3}\right)$

δ. Είναι $f(\chi) + f(\chi+1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right) + \ln\left(\frac{3-(\chi+1)}{3+(\chi+1)}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right) + \ln\left(\frac{3-\chi-1}{3+\chi+1}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi}\right) + \ln\left(\frac{2-\chi}{4+\chi}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3-\chi}{3+\chi} \cdot \frac{2-\chi}{4+\chi}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-\chi}{3+\chi} \cdot \frac{2-\chi}{4+\chi} = 1 \Leftrightarrow \frac{(\chi-3)(\chi-2)}{(\chi+3)(\chi+4)} = 1 \Leftrightarrow$

$(\chi-3)(\chi-2) = (\chi+3)(\chi+4) \Leftrightarrow \chi^2 - 5\chi + 6 = \chi^2 + 7\chi + 12 \Leftrightarrow -12\chi = 6 \Leftrightarrow \chi = -\frac{1}{2} \in$ **A = (–3 , 3)**

δεκτή .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **πανελλήνιες 2002** *Σάββατο 8 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **α.** **Σωστό**.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\ln\left(\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}\right)$.

α. Για να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει :

1ον $e^{\chi}+5\neq 0 \Leftrightarrow e^{\chi}\neq -5$ που ισχύει για κάθε $\chi \in R$ και

2ον $\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}>0 \Leftrightarrow (e^{2\chi}-1)(e^{\chi}+5)>0$.

Η ανίσωση $(e^{2\chi}-1)(e^{\chi}+5)>0$ και επειδή $e^{\chi}+5>0 \Leftrightarrow e^{\chi}>-5 \Leftrightarrow e^{\chi}>-5$ που ισχύει για κάθε $\chi \in R$

άρα $e^{2\chi}-1>0 \Leftrightarrow e^{2\chi}>1=e^{0} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e^{2\chi}>e^{0} \\ \text{και επειδή } e>1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2\chi>0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi>0}$ άρα πεδίο ορισμού το $A=R_+^*$

β. Είναι $f(\chi)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}\right)=\ln 2^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}=4 \Leftrightarrow e^{2\chi}-1=4e^{\chi}+20 \Leftrightarrow e^{2\chi}-4e^{\chi}-21=0$

και αν θέσεις όπου $e^{\chi}=\omega$ θα έχεις $\omega^2-4\omega-21=0$. Η διακρίνουσα $\Delta=16-4(-21)=100$ άρα λύσεις

$\omega_1=-3$, απορρίπτεται γιατί $-3\notin A=R_+^*$, $\omega_2=7$, δεκτή οπότε $e^{\chi}=7 \Leftrightarrow \chi=\ln 7$

γ. Είναι $\Leftrightarrow f(\chi)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}\right)>0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln\left(\frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}\right)>\ln 1 \\ \ln \text{ γνησίως αύξουσα} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{e^{2\chi}-1}{e^{\chi}+5}>1 \\ \text{και επειδή } e^{\chi}+5>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$e^{2\chi}-1>e^{\chi}+5 \Leftrightarrow e^{2\chi}-e^{\chi}-6>0$ και αν θέσεις όπου $e^{\chi}=\omega$ θα έχεις την $\omega^2-\omega-6>0$.

Ρίζες της οι $\omega_1=-2$ και $\omega_2=3$.

Επειδή $\alpha=1>0$ ο συντελεστής του ω^2 άρα έχει πίνακα μεταβολής προσήμου :

ω	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(\omega-3)(\omega+2)$	+	−	+	

και επειδή πρέπει $\omega=e^{\chi}>0>$ άρα $\omega>-2$

Άρα η ανίσωση $ff(\chi)>0$ δηλαδή η ισοδύναμή της $\omega^2-\omega-6>0$ έχει λύσεις $\omega>3$, άρα

$e^{2\chi}-e^{\chi}-6>0 \Leftrightarrow e^{\chi}>3$ και επειδή η $\ln\chi$ γνησίως αύξουσα πρέπει $\ln e^{\chi}>\ln 3 \Leftrightarrow \chi\ln e>\ln 3 \Leftrightarrow \chi>\ln 3$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. **επαναληπτικές 2002** *Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^{\chi}$

α. Για να ορίζεται η συνάρτηση f σε όλο το R πρέπει $\frac{\alpha-1}{5}>0 \Leftrightarrow \alpha-1>0 \Leftrightarrow$ **α > 1**

β. Για να είναι η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα πρέπει $\frac{\alpha-1}{5}>1 \Leftrightarrow \alpha-1>5 \Leftrightarrow$ **α > 6**

γ. Η εξίσωση $f(\chi)+f(\chi+1)=6 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^{\chi}+\left(\frac{\alpha-1}{5}\right)^{\chi+1}=6$ και αν α = 11 γίνεται :

$$\left(\frac{11-1}{5}\right)^{\chi}+\left(\frac{111-1}{5}\right)^{\chi+1}=6 \Leftrightarrow (2)^{\chi}+(2)^{\chi+1}=6 \Leftrightarrow 2^{\chi}+2^{\chi+1}=6 \Leftrightarrow 2^{\chi}+2\cdot 2^{\chi}=6 \Leftrightarrow 3\cdot 2^{\chi}=6 \Leftrightarrow$$

$$2^{\chi}=2 \Leftrightarrow 2^{\chi}=2^{0} \Leftrightarrow \boxed{\chi=0}$$

7. **πανελλήνιες 2003** *Πέμπτη 22 Μαΐου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Αν $\log_{\alpha}^{\theta}=\chi$ τότε $\alpha^{\chi}=\theta$ άρα ***σωστή απάντηση είναι η γ***.

Ε. **γ.** Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και $\alpha \neq 1$, τότε η συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha^{\chi}$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0\ ,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για το πεδίο ορισμού της $f(\chi)$ πρέπει $e^{2\chi}-2e^{\chi}+3>0$ και αν θέσεις όπου $e^{\chi}=\omega$ θα έχεις την ανίσωση $\omega^2-2\omega+3>0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=-8<0$ άρα έχει πίνακα μεταβολής προσήμου :

Επειδή α = 1 > 0

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\omega^2-2\omega+3$	+	

και επομένως είναι $\omega^2-2\omega+3>0$ για κάθε $\omega \in R$, άρα $e^{2\chi}-2e^{\chi}+3>0$ για κάθε $\chi \in R$.

Άρα πεδίο ορισμού της $f(\chi)=\ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)$ είναι όλο το R.

Για το πεδίο ορισμού της $g(\chi)=\ln 3+\ln\left(e^{\chi}-1\right)$ πρέπει $e^{\chi}-1>0 \Leftrightarrow e^{\chi}>1 \Leftrightarrow e^{\chi}>e^{0} \Leftrightarrow \chi>0$.

Άρα το πεδίο ορισμού της $g(\chi)=\ln 3+\ln\left(e^{\chi}-1\right)$ είναι το $A=(0\ ,+\infty)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. $f(\chi)=g(\chi)\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)=\ln 3+\ln\left(e^{\chi}-1\right)\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)=\ln\left[3\cdot\left(e^{\chi}-1\right)\right]\Leftrightarrow$

$e^{2\chi}-2e^{\chi}+3=3e^{\chi}-3\Leftrightarrow e^{2\chi}-5e^{\chi}+6=0$ και αν θέσεις όπου $e^{\chi}=\omega$ θα έχεις την εξίσωση

$\omega^2-5\omega+6=0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες $\omega_1=2$ και $\omega_2=3$, άρα η εξίσωση $f(\chi)=g(\chi)\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\chi}=2 \\ e^{\chi}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{cases} \chi=\ln 2 \\ \chi=\ln 3 \end{cases}}$

γ. $f(\chi)>2g(\chi)\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>2\left[\ln 3+\ln\left(e^{\chi}-1\right)\right]\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>2\ln\left[3\cdot\left(e^{\chi}-1\right)\right]\Leftrightarrow$

$\ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>\ln\left[3\cdot\left(e^{\chi}-1\right)\right]^2\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>\ln\left[9\left(e^{\chi}-1\right)^2\right]\Leftrightarrow$

$\ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>\ln\left[9\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+1\right)\right]\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\chi}-2e^{\chi}+3\right)>\ln\left[\left(9e^{2\chi}-18e^{\chi}+9\right)\right]$ και επειδή η ln στο διάστημα $(0\,,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $e^{2\chi}-2e^{\chi}+3>9e^{2\chi}-18e^{\chi}+9\Leftrightarrow 8e^{2\chi}-16e^{\chi}+6<0$

$\Leftrightarrow 4e^{2\chi}-8e^{\chi}+3<0$ και αν θέσεις $\omega=e^{\chi}$ γίνεται $4\omega^2-8\omega+3<0$.

Η τελευταία έχει ρίζες $\omega_1=\frac{1}{2}$ και $\omega_2=\frac{3}{2}$. Επειδή $\alpha=4>0$ (ο συντελεστής του ω^2) άρα έχει πίνακα μεταβολής προσήμου :

ω	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\left(\omega-\frac{3}{2}\right)$		$+$		$-$		$+$

άρα η $4\omega^2-8\omega+3<0\Leftrightarrow$

έχει λύσεις $\frac{1}{2}<\omega<\frac{3}{2}$. Επειδή $e^{\chi}=\omega$ άρα $\frac{1}{2}<e^{\chi}<\frac{3}{2}$ και επειδή η ln είναι γνησίως αύξουσα θα είναι

$\ln\frac{1}{2}<\ln e^{\chi}<\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow \ln 1-\ln 2<\chi\ln e<\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\ln 2<\chi<\ln\frac{3}{2}$ άρα $\chi\in\left(-\ln 2\,,\ \ln\frac{3}{2}\right)$, όμως λόγω του ln πρέπει $\chi\in(0,+\infty)$ οπότε τελικά λύσεις $\boxed{\chi\in\left(0,\ \ln\frac{3}{2}\right)}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. **επαναληπτικές 2003** *Πέμπτη 4 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 4ο

1. Αρχικά για να έχουν νόημα οι παραστάσεις $\log(3\cdot 2^{\chi}-1)$, $\log(4\cdot 2^{\chi}-1)$, $\log(8\cdot 2^{\chi}-1)$

πρέπει $\begin{cases} \alpha. & 3\cdot 2^{\chi}-1>0 \\ \beta. & 4\cdot 2^{\chi}-1>0 \\ \gamma. & 8\cdot 2^{\chi}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha. & 2^{\chi}>\frac{1}{3} \\ \beta. & 2^{\chi}>\frac{1}{4} \\ \gamma. & 2^{\chi}>\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{\chi}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log 2^{\chi}>\log\frac{1}{3} \Leftrightarrow \chi\log 2>\log 1-\log 3$

$\Leftrightarrow \chi\log 2>\log 1-\log 3 \Leftrightarrow \chi\log 2>-\log 3 \Leftrightarrow \boxed{\chi>-\frac{\log 3}{\log 2}}$

διότι $\log 2>0$ αφού $2>1$ και $\log\uparrow$ (γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

Για να είναι οι αριθμοί $\log(3\cdot 2^{\chi}-1)$, $\log(4\cdot 2^{\chi}-1)$, $\log(8\cdot 2^{\chi}-1)$ με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει $2\log(4\cdot 2^{\chi}-1)=\log(3\cdot 2^{\chi}-1)+\log(8\cdot 2^{\chi}-2) \Leftrightarrow$

$2\log(4\cdot 2^{\chi}-1)=\log\left[(3\cdot 2^{\chi}-1)\cdot(8\cdot 2^{\chi}-2)\right]$ και επειδή η log είναι 1 – 1 θα πρέπει

$(4\cdot 2^{\chi}-1)^2=(3\cdot 2^{\chi}-1)\cdot(8\cdot 2^{\chi}-1) \Leftrightarrow 16\cdot 2^{2\chi}-8\cdot 2^{\chi}+1=24\cdot 2^{2\chi}-3\cdot 2^{\chi}-8\cdot 2^{\chi}+1 \Leftrightarrow$

$24\cdot 2^{2\chi}-16\cdot 2^{2\chi}-3\cdot 2^{\chi}-8\cdot 2^{\chi}+8\cdot 2^{\chi}+1-1=0 \Leftrightarrow 8\cdot 2^{2\chi}-3\cdot 2^{\chi}=0 \Leftrightarrow (8\cdot 2^{\chi}-3)2^{\chi}=0 \Leftrightarrow$

$8\cdot 2^{\chi}-3=0$, αφού $2^{\chi}\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

Έτσι $8\cdot 2^{\chi}-3=0 \Leftrightarrow 2^{\chi}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow \log 2^{\chi}=\log\frac{3}{8} \Leftrightarrow \chi\log 2=\log 3-\log 8 \Leftrightarrow \chi=\frac{\log 3-\log 2^3}{\log 2} \Leftrightarrow$

$\chi=\frac{\log 3-3\log 2}{\log 2} \Leftrightarrow \boxed{\chi=\frac{\log 3}{\log 2}-3}$.

Για να είναι δεκτή η λύση πρέπει $\frac{\log 3}{\log 2}-3>-\frac{\log 3}{\log 2} \Leftrightarrow 2\frac{\log 3}{\log 2}>3 \Leftrightarrow \log 3^2>\log 2^3 \Leftrightarrow 2\log 3>3\log 2$

$\Leftrightarrow \log 9>\log 8 \Leftrightarrow 9>8$ προφανής ανισότητα άρα λύση είναι το $\boxed{\chi=\frac{\log 3}{\log 2}-3}$

2. Εάν ο $\alpha_4=-\log 2$ επειδή $\alpha_4=\alpha_1+3\omega \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_4-3\omega$, όμως $\omega=\log(4\cdot 2^{\chi}-1)-\log(3\cdot 2^{\chi}-1)$

$\Leftrightarrow \omega=\log\frac{4\cdot 2^{\chi}-1}{3\cdot 2^{\chi}-1}$ έτσι $\alpha_1=-\log 2-3\log\frac{4\cdot 2^{\chi}-1}{3\cdot 2^{\chi}-1}=-\log 2-\log\left(\frac{4\cdot 2^{\chi}-1}{3\cdot 2^{\chi}-1}\right)^3=$

$-\left[\log 2+\log\left(\frac{4\cdot 2^{\chi}-1}{3\cdot 2^{\chi}-1}\right)^3\right] \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1=-\log\left[2\left(\frac{4\cdot 2^{\chi}-1}{3\cdot 2^{\chi}-1}\right)^3\right]}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. **πανελλήνιες 2004** ***Πέμπτη 20 Μαΐου***

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για να ορίζεται η f πρέπει : $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2\chi}+3\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}-1\geq 0$ (1).

Αν θέσεις $\omega=\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}$, $\omega>0$ η (1) γίνεται : $-2\omega^2+3\omega-1\geq 0\Leftrightarrow 2\omega^2-3\omega+1\leq 0$

Η τελευταία έχει ρίζες $\omega_1=\frac{1}{2}$ και $\omega_2=1$. Επειδή α = 2 > 0 (ο συντελεστής του ω^2) άρα έχει πίνακα μεταβολής προσήμου :

ω	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\left(\omega-\frac{1}{2}\right)(\omega-1)$	+	−	+	

άρα η $2\omega^2-3\omega+1\leq 0\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}<\omega<1$. Επειδή $\omega=\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}$ άρα $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}<\frac{3}{2}$ και επειδή η ln είναι γνησίως αύξουσα θα είναι

$\ln\frac{1}{2}<\ln\left(\frac{1}{5}\right)^{\chi}<\ln 1\Leftrightarrow \ln 1-\ln 2<\chi\ln\frac{1}{5}<\ln 1\Leftrightarrow -\ln 2<\chi\left(\ln 1-\ln 5\right)<0\Leftrightarrow -\ln 2<-\chi\ln 5<0\Leftrightarrow$

$0\leq\chi\leq\frac{\log 2}{\log 5}$ άρα τελικά λύσεις $\chi\in\left[0,\frac{\ln 2}{\ln 5}\right]$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(\chi)=5^{\chi}$

$$g(\chi)+g(\chi+1)+g(\chi+2)+\cdots+g(\chi+49)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow$$

$$5^{\chi}+5^{\chi+1}+5^{\chi+2}+\cdots+5^{\chi+49}=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow 5^{\chi}\left(1+5+5^2+\cdots+5^{49}\right)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow$$

Το $1+5+5^2+\cdots+5^{49}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και $\lambda=5$, οι όροι από $\alpha_1=1=5^0$, μέχρι τον $\alpha_\nu=5^{49}$ είναι 50 (οι εκθέτες δίνουν το πλήθος, 0 έως 49 είναι 50 αριθμοί)

οπότε :

$$5^{\chi}\left(1+5+5^2+\cdots+5^{49}\right)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow 5^{\chi}\left(1\cdot\frac{5^{50}-1}{5-1}\right)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow$$

$$5^{\chi}\left(\frac{5^{50}-1}{4}\right)=\frac{125\left(5^{50}-1\right)}{4}\Leftrightarrow 5^{\chi}=125=5^3\Leftrightarrow\chi=3.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. ***επαναληπτικές 2004*** *Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

2. **β.** **Λάθος.**

4. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(\chi)=\alpha^{\chi}$ με $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

α. Αν $\alpha>1$ η $f(\chi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β. Αν $0<\alpha<1$ η $f(\chi)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

ΘΕΜΑ 4ο

1.

✓ Για να έχει νόημα η $\log\chi^4=4\log(-\chi)$ πρέπει $\begin{cases}\chi^4>0,\ \text{άρα } \chi\in R \text{ και } \chi\neq 0\\ -\chi>0\Leftrightarrow\chi<0\end{cases}$ άρα $\chi<0$.

Οπότε $\log\chi^4=4\log(-\chi)\Leftrightarrow\begin{cases}\log\chi^4=\log(-\chi)^4\\ \log \text{ γνησίως αύξουσα}\end{cases}$ άρα $\chi^4=(-\chi)^4$ που ισχύει για κάθε χ.

Τελικά , αν λάβεις υπ' όψιν τον περιορισμό, η $\log\chi^4=4\log(-\chi)$ ισχύει για κάθε $\chi<0$.

✓ Για να έχει νόημα η $\log\chi^2=2\log\chi$ πρέπει $\begin{cases}\chi^2>0,\ \text{άρα } \chi\in R \text{ και } \chi\neq 0\\ \chi>0\end{cases}$ άρα $\chi>0$.

Οπότε $\log\chi^2=2\log\chi\Leftrightarrow\begin{cases}\log\chi^2=\log\chi^2\\ \log \text{ γνησίως αύξουσα}\end{cases}$ άρα $\chi^2=\chi^2$ που ισχύει για κάθε χ.

Τελικά , αν λάβεις υπ' όψιν τον περιορισμό, η $\log\chi^2=2\log\chi$ ισχύει για κάθε $\chi>0$.

✓ Για να έχει νόημα η $\dfrac{\log\chi^4}{\log\chi^2}=2$ πρέπει $\begin{cases}\chi^4>0\\ \chi^2>0\end{cases}$ άρα για κάθε $\chi\in R$ με $\chi\neq 0$

Οπότε $\dfrac{\log\chi^4}{\log\chi^2}=2\Leftrightarrow\log\chi^4=2\log\chi^2=\log\left(\chi^2\right)^2=\log\chi^4$ που ισχύει για κάθε χ.

Τελικά , αν λάβεις υπ' όψιν τον περιορισμό, η $\log\chi^2=2\log\chi$ ισχύει για κάθε $\chi\in R$ με $\chi\neq 0$.

2. **Πρέπει $\chi>0$,** $\left(\chi^2\right)^{1+\log\chi^4}=10^6\Leftrightarrow\log\left[\left(\chi^2\right)^{1+\log\chi^4}\right]=\log\left(10^6\right)\Leftrightarrow\left(1+\log\chi^4\right)\log\chi^2=6\log 10\Leftrightarrow$

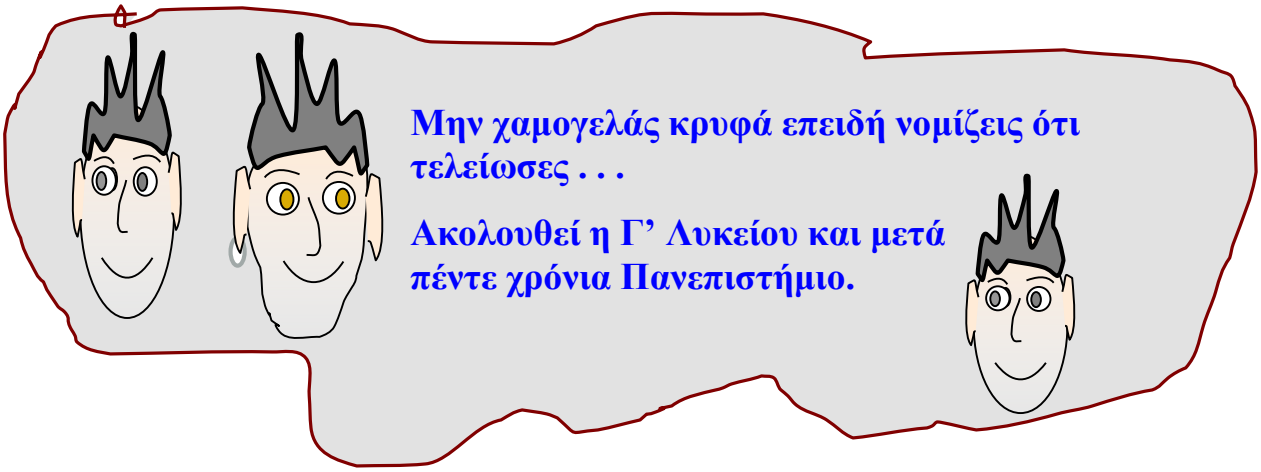
$2\left(1+4\log\chi\right)\log\chi=6\Leftrightarrow 8\left(\log\chi\right)^2+2\log\chi-6=0$, χ(1) , αν θέσεις $\omega=\log\chi$ η (1) γίνεται :

$8\omega^2+2\omega-6=0\Leftrightarrow 4\omega^2+\omega-3=0$ η τελευταία έχει ρίζες : $\omega_1=-1$ και $\omega_2=\dfrac{3}{4}$.

✓ $\log\chi=-1\Leftrightarrow\chi=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

✓ $\log\chi=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\chi=10^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{10^3}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Μωραΐτης Δαμιανός

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Μην εμπιστεύεσαι το ένστικτό σου, που πιθανόν είναι ανώφελο, προσπάθησε να δημιουργήσεις κριτήρια.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

90 Κεφάλαιο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Τύποι του 9ου Κεφαλαίου

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο ΑΒΓ

Πυθαγόρειο Θεώρημα :

$\hat{A} = 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Γενίκευση Πυθαγορείου

$\hat{A} < 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$

$\hat{A} > 1^L \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$

1ο Θεώρημα Διαμέσων :

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

2ο Θεώρημα Διαμέσων :

$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$

Βρίσκεις τις διαμέσους αν ξέρεις τις πλευρές

Βρίσκεις το είδος του τριγώνου από τις πλευρές :

Αν α η μεγαλύτερη πλευρά και

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$ **(τρίγωνο αμβλυγώνιο)**

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$ **(τρίγωνο οξυγώνιο)**

Βρίσκεις τα ύψη :

$\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο (Ο,ρ)

- ✓ **ΑΒ, ΑΓ Τέμνουσες του κύκλου :** $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$
- ✓ **ΡΕ εφαπτομένη τότε :** $PE^2 = PA \cdot PB$
- ✓ **Δύναμη σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,ρ) :**

$$\Delta E^P_{(O,\rho)} = OP^2 - \rho^2$$

- ✓ $\Delta E^P_{(O,\rho)} = 0$ **άρα το Ρ σημείο του κύκλου (Ο,ρ) :**
- ✓ $\Delta E^P_{(O,\rho)} > 0$ **άρα το Ρ εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,ρ) :**
- ✓ $\Delta E^P_{(O,\rho)} < 0$ **άρα το Ρ εσωτερικό σημείο του κύκλου (Ο,ρ) :**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1981**

ΘΕΜΑ 1Ο

α. Αν σε δυο ορθογώνια τρίγωνα ο λόγος των υποτεινουσών είναι ίσος με τον λόγο δυο καθέτων πλευρών τα τρίγωνα είναι όμοια.

β. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι : $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1^{L}$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του να αποδείξετε ότι $A\Delta^2=\Delta B\cdot\Delta\Gamma$.

2. **πανελλήνιες 1982**

ΘΕΜΑ 1Ο

α. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μια προς μια ή κάθετες μια προς μια είναι όμοια.

β. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από μια χορδή του είναι μέση ανάλογος μεταξύ των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής.

3. **πανελλήνιες 1983**

ΘΕΜΑ 3Ο

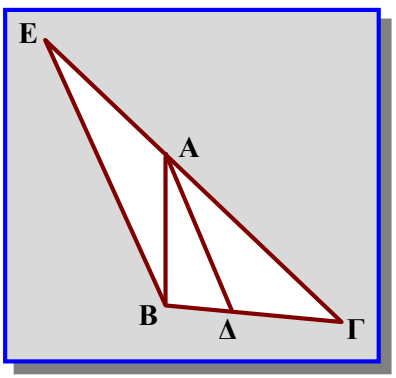
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω ότι μια παράλληλη της ΑΔ τέμνει την ΑΒ στο Γ΄, την ΒΓ στο Α΄ και τη ΑΓ στο Β΄. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{A\Gamma'}{AB'}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

4. ***πανελλήνιες 1999***

Σάββατο 19 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο **(Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου)**

Α. Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Από το Β φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΔ και έστω Ε το σημείο τομής της με την ευθεία ΑΓ.



α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΒΕ, για τις παράλληλες ευθείες ΑΔ και ΒΕ.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

Μονάδες 3,5

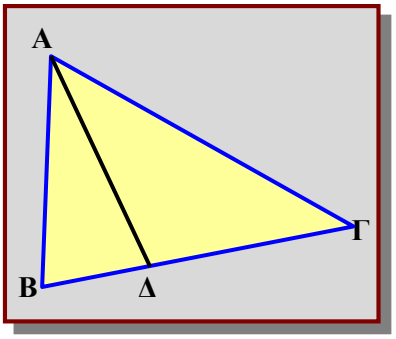
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. α) Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α .

Αν ΒΔ = 3, ΔΓ = 6 και ΑΓ = 10, τότε η πλευρά ΑΒ είναι ίση με:

Α. 3, **Β.** 6, **Γ.** 4, **Δ.** 5, **Ε.** 7.

Μονάδες 6,5



β) Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α .

Αν ΑΒ = 4, ΒΓ = 6 και ΑΓ = 8, τότε :

Α. ΔΒ = 1 και ΔΓ = 5

Β. ΔΒ = 5 και ΔΓ = 1

Γ. ΔΒ = 3 και ΔΓ = 3

Δ. ΔΒ = 2 και ΔΓ = 4

Ε. ΔΒ = 4 και ΔΓ = 2

Μονάδες 6

Το θέμα είναι σήμερα εκτός ύλης (ανήκει στην ύλη της Α' Λυκείου και δεν θα απαντηθεί).

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΒ και ΡΔ τέμνουσες αυτού.

Αν ΑΒ = 9 , ΡΓ = 4 και ΓΔ = 5, τότε :

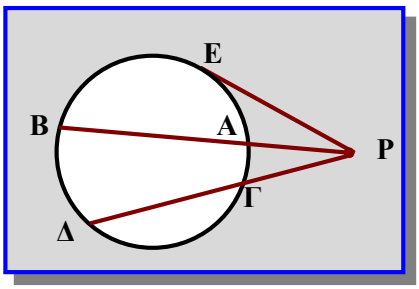
α) Να υπολογίσετε το ΡΑ

Μονάδες 15

β) Το ΡΕ είναι ίσο με:

Α. 9 , **Β.** 5, **Γ.** 4, **Δ.** 3, **Ε.** 6.

Μονάδες 10



5. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999*** ***Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α = 5, β = 4 και γ = 2, τότε :

α) Η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι :

Α. ορθή, **Β.** αμβλεία, **Γ.** οξεία

Μονάδες 3

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

β) Υπολογίστε τη διάμεσο μ_α του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 15

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. **Εσπερινά 2000** *Δευτέρα 5 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι α = 15cm, β = 12cm και γ = 9cm.

α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ (οξυγώνιο, αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο). Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 12

7. **πανελλήνιες 2000** *Σάββατο 10 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2 \cdot \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Μονάδες 10

Α.2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ να συμπληρώσετε τη σχέση: $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 =$ ..... ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Μονάδες 2,5

Β. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2.**

Β1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται β = 8, γ = 6 και $\mu_\alpha = 5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7 **Β.** 4 **Γ.** 10 **Δ.** 9 **Ε.** 11

Μονάδες 6,5

Β2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται α = 4, β = 7, γ = 5, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος. Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α είναι ίση με:

Α. 4 **Β.** 8 **Γ.** 8/3 **Δ.** 5 **Ε.** 3

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ και ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5.

Να υπολογίσετε:

α) Την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. **επαναληπτικές 2000** *Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ, να αποδείξετε ότι το τετράγωνο μιας πλευράς, η οποία βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν, δηλαδή : $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$.

Μονάδες 8

Α. 2. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (= ,<, >) στις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \ldots 90°$

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \ldots 90°$

γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \ldots 90°$

Μονάδες 4.5

Β. 1. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται : ΑΒ = 3, ΒΓ = 5 και ΑΓ = 7.

Η προβολή της ΑΒ πάνω στην ΑΓ είναι :

Α : 7 **Β**: 8.3 **Γ**: $\frac{65}{14}$ **Δ**: $\sqrt{3}-1$ Ε: $\frac{33}{14}$

Μονάδες 6.5

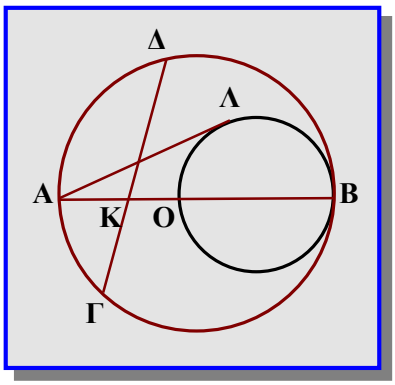
Β. 2. Στη **Στήλη Α** δίνεται το είδος της γωνίας ενός τριγώνου και στη **Στήλη Β** τριάδα αριθμών που μπορεί να είναι μήκη πλευρών τριγώνου. Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\hat{A} > 90^o$	**1.** $\alpha = 5\kappa,\ \beta = 4\kappa,\ \gamma = 3\kappa$ όπου κ θετικός ακέραιος
β. $\hat{A} < 90^o$	**2.** $\alpha = 7,\ \beta = 4,\ \gamma = 5$
γ. $\hat{A} = 90^o$	**3.** $\alpha = 4,\ \beta = 7,\ \gamma = 9$
	4. $\alpha = 6,\ \beta = 8,\ \gamma = 15$

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο



Στο διπλανό σχήμα δίνονται κύκλος κέντρου Ο με διάμετρο ΑΒ = 8, Κ το μέσο της ΑΟ και ΓΔ η χορδή που διέρχεται από το Κ με ΚΓ = 3.

α. Να υπολογίσετε το ΚΔ.

Μονάδες 10

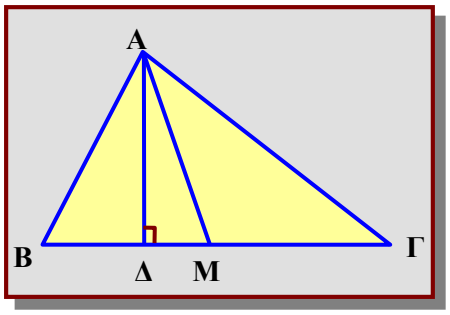
β. Να υπολογίσετε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΛ του κύκλου που γράφεται με διάμετρο την ΟΒ.

Μονάδες 15

9. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το ΑΔ ύψος (ΑΒ<ΑΓ). Για καθεμία από τις παρακάτω ισότητες να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, αν είναι σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (Λ).



1. $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}=\dfrac{BM}{\Gamma M}$

2. $AB^2+A\Gamma^2=2AM^2+\dfrac{B\Gamma^2}{2}$

3. $AB^2-A\Gamma^2=2\Gamma B\cdot M\Delta$

4. $A\Gamma^2-AB^2=2B\Gamma\cdot\Delta M$

5. $A\Delta^2-\Delta M^2=AM^2$

Μονάδες 12,5

Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παραπάνω σχήματος έχουμε ΑΒ = 10m, ΑΓ = 14m και ΒΓ = 12m.

α. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**1.Β.α**) και, δίπλα, να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το ΔΜ έχει μήκος:

Α. 1m **Β.** 3m **Γ.** 4m **Δ.** 2,5m **Ε.** 5m

Μονάδες 6,5

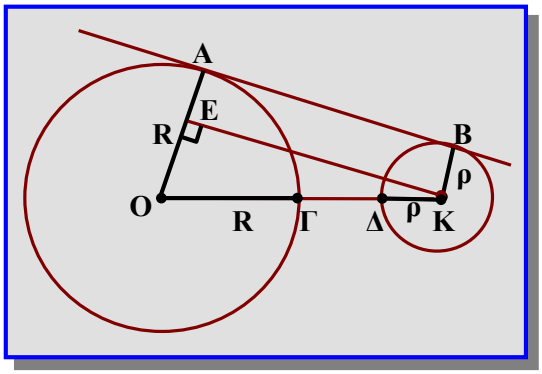
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R = 7m ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ = 2m. Η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ = 4m.



α. Να υπολογίσετε το μήκος του κοινού εφαπτόμενου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 15

10.

εσπερινά 2001

Τετάρτη 13 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$

Για καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)** αν η ισότητα είναι σωστή ή **(Λ)** αν αυτή είναι λανθασμένη.

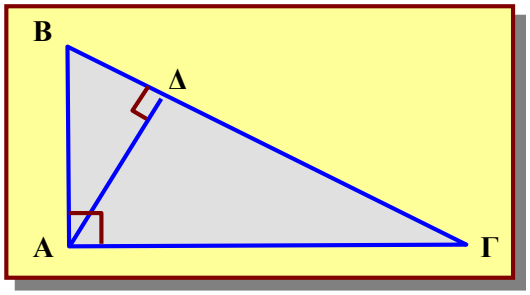
1. $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

2. $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$

3. $A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$

4. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

5. $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot \Delta\Gamma$



Μονάδες 12,5

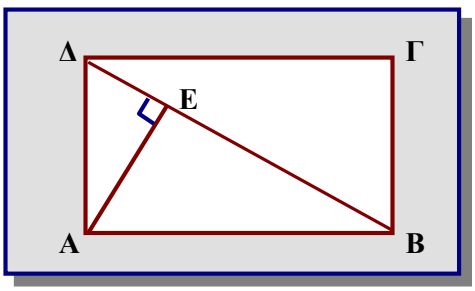
Β. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΔ = 6, ΑΒ = 8 .

α. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε την προβολή ΒΕ της πλευράς ΑΒ πάνω στη διαγώνιο ΒΔ.

Μονάδες 6,5



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. **πανελλήνιες 2001** *Σάββατο 16 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. AB^2	**1.** $AB^2 + B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**3.** $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2.**

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε ΒΔ = 1 και ΒΓ = 3.

Β1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

Β2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E = 2\sqrt{2}\cdot R$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ .

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

12. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** *Δευτέρα 9 Ιουλίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

Το ερώτημα είναι ακριβώς ίδιο με το **Α1.** των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} > 90^0$, ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσο.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $AB^2 - A\Gamma^2$	**1.** $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma\cdot\Delta\Gamma$
β. AB^2	**2.** $AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
γ. $AB^2 + A\Gamma^2$	**3.** $2B\Gamma\cdot M\Delta$
	4. $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma\cdot\Delta\Gamma$
	5. $2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
	7. $B\Gamma^2$

Μονάδες 6

Το ερώτημα είναι ΜΙΚΡΗ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ του **Α2.** των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα μήκη πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι : α = 5 και β = 7, γ =10. Η διάμεσος μ_γ είναι :

Β1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α. $3\sqrt{2}$ **β.** $2\sqrt{3}$ **γ.** $2\sqrt{2}$ **δ.** $4\sqrt{3}$ **δ.** $4\sqrt{2}$

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β2. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία διάμετρος ΒΓ αυτού. Από σημείο Α του κύκλου φέρνουμε την ΑΔ κάθετη στη ΒΓ. Αν ΒΓ = 20 και $ΒΔ = \frac{1}{4}ΔΓ$, να δείξετε ότι ΑΒ = $4\sqrt{5}$.

Μονάδες 4

Β3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΓΑ = ΓΒ = 4 και $\hat{Γ} = 120^0$.

Να δείξετε ότι ΑΒ = $4\sqrt{3}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Η προέκτασή της τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Αν $β^2 + γ^2 = 3α^2$ να δείξετε ότι :

α. $ΑΜ = \frac{α\sqrt{5}}{2}$

Μονάδες 4

β. $ΜΔ = \frac{α\sqrt{5}}{10}$

Μονάδες 9

13. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** | ***Τετάρτη 11 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^0$

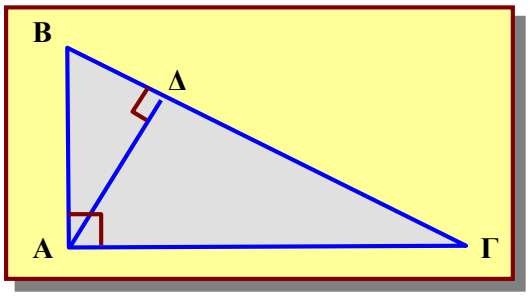
Για καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)** αν η ισότητα είναι σωστή ή **(Λ)** αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$

2. $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$

3. $ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΑΔ$

4. $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ}$



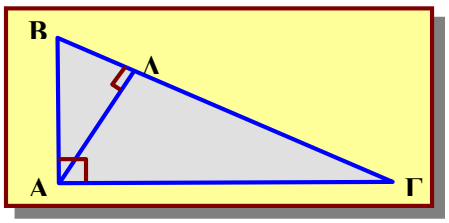
Μονάδες 6

Το ερώτημα είναι ΜΙΚΡΗ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ του αντίστοιχου θέματος των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Μονάδες 6,5

Β. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{Α} = 90^0$



Δίνεται ΒΔ = 1,8 και ΔΓ = 3,2 .

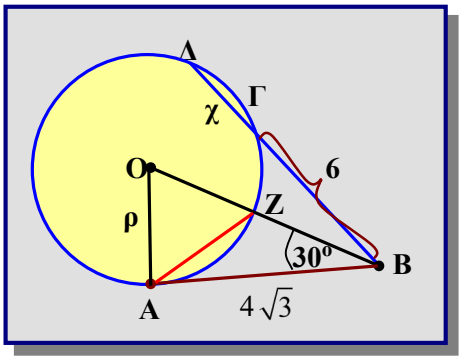
Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΑΔ, ΑΓ, ΒΓ.

Μονάδες 12,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΑΒ, μήκους $4\sqrt{3}$, εφάπτεται στο σημείο Α του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ.
Η γωνία ΑΟΒ είναι ίση με 30° και η ΒΓΔ είναι τέμνουσα του κύκλου, με μήκος του τμήματος ΒΓ = 6.



α) Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας ρ του κύκλου.

Μονάδες 10

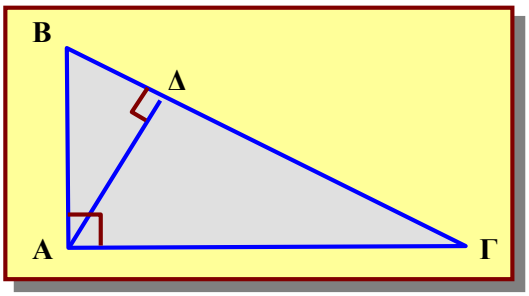
β) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΔΓ.

Μονάδες 10

14. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$



Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	**1.** $\Delta\Gamma \cdot B\Gamma$
β. $A\Delta^2$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**3.** $B\Delta \cdot \Delta\Gamma$
	4. $\Gamma\Delta \cdot \Gamma B$

Μονάδες 6

Τελικά το 2001 **τα θέματα** ήταν ένα και άλλαζε ή σειρά στις ερωτήσεις !!! .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Α. 2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Μονάδες 6,5

Β. Στο σχήμα του ερωτήματος **Α.1** δίνεται ότι ΑΒ = 6 και ΒΔ = 3,6 .

Β. 1. Να δείξετε ότι ΒΓ = 10 .

Μονάδες 6,5

Β. 2. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. .

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^0$ Αν $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$ να δείξετε ότι :

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma$

Μονάδες 10

β. Αν επί πλέον ισχύει $\beta = 2\gamma$, να αποδείξετε ότι η διάμεσος μ_α του παραπάνω τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με $\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε $ΕΓ = \frac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.

α. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = \frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$.

Μονάδες 8

β. $ΕΖ = \frac{2\sqrt{7}\,\alpha}{21}$

Μονάδες 8

15. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Τετάρτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ $(ΑΒ < ΑΓ)$.

Για καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)** αν η ισότητα είναι σωστή ή **(Λ)** αν αυτή είναι λανθασμένη.

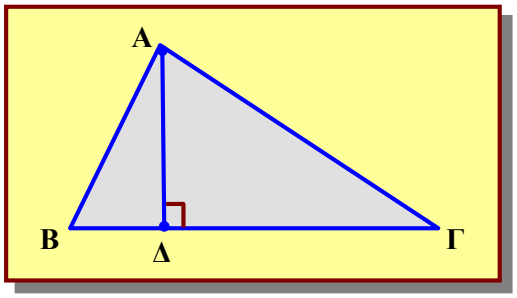
1. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΒΔ$

2. $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΔΓ$

3. $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$

4. $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$

5. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΒΓ \cdot ΔΓ$



Μονάδες 12,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Στο τρίγωνο του παραπάνω σχήματος έχουμε ΑΒ = 5 , ΑΓ = 7 και ΒΓ = 6.

Να υπολογίσετε :

α. Το μήκος του τμήματος ΔΓ.

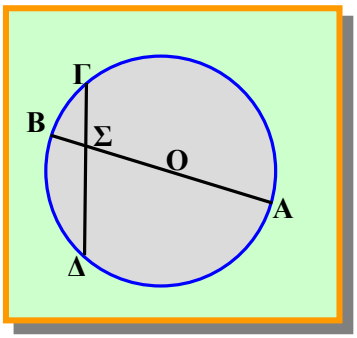
Μονάδες 6,5

β. Το μήκος του ύψους ΑΔ.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τον κύκλο του διπλανού σχήματος δίνονται : ΣΓ = 2, ΣΒ = 1, ΣΔ = 4,5.



Να υπολογίσετε :

α. Το μήκος του τμήματος ΣΑ .

Μονάδες 10

β. Το μήκος του τμήματος ΟΣ .

Μονάδες 15.

16. *πανελλήνιες 2002* *Σάββατο 1 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** ή **"Λάθος"** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία :

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} = 90^0$

Μονάδα 1

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$.

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta \cdot \gamma$

Μονάδες 15

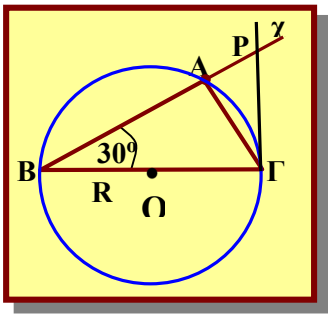
β. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βχ τέτοια, ώστε η γωνία $\hat{\Gamma}$Βχ να είναι 30ο.

Έστω ότι η Βχ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βχ στο σημείο Ρ.



Να αποδείξετε ότι:

α. ΑΓ = R. Μονάδες 5

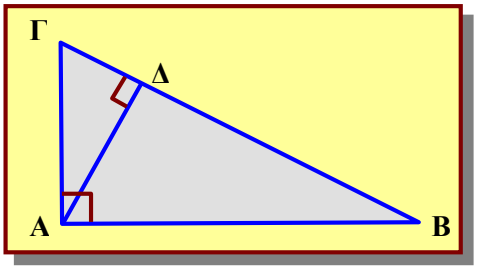
γ. $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. **Εσπερινά 2002** *Δευτέρα 3 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (του παρακάτω σχήματος) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 40, ΑΓ = 30 και ότι το ΑΔ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.



Να βρείτε :

β. Το μήκος ΑΔ. Μονάδες 9

γ. Το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΓ πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ. Μονάδες 10

18. **επαναληπτικές 2002** *Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Έστω ΑΒ και ΓΔ χορδές ενός κύκλου. Αν οι χορδές αυτές ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει : $\mathbf{PA \cdot P\Delta = PB \cdot P\Gamma}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι :

α. Ισχύει η σχέση $\mu_\alpha^2 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$, όπου μ_α η διάμεσος στην πλευρά α.

Μονάδες 8

β. $\hat{A} > 90^\circ$

Μονάδες 7

γ. Η προβολή ΜΔ της διαμέσου ΒΔ στην πλευρά β είναι ίση με $\dfrac{3}{4}\beta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) .

Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ , τέτοιο ώστε $A\Delta = \sqrt{3} \cdot AE$ και Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο.

α. Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $EZ = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot \alpha$.

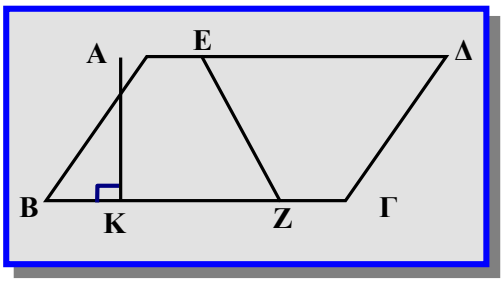
Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. **εσπερινά επαναληπτικές 2002** *Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, στο οποίο είναι ΑΕ = ΖΓ και ΑΚ το ύψος του.



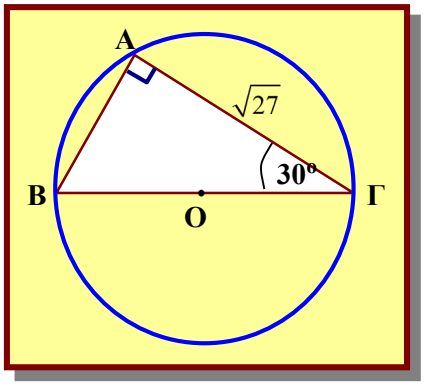
β. Αν ΑΔ = 30, ΚΓ = 24 και ΑΚ = 8, να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 12

Παρατήρηση: Το ΑΕ = ΖΓ και το τμήμα ΕΖ που εμφανίζονται στο σχήμα χρειάζονται για τα υπόλοιπα ερωτήματα

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ με γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$ και πλευρά $A\Gamma = \sqrt{27}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι η διάμετρος του κύκλου έχει μήκος 6.

Μονάδες 8

20. **εσπερινά 2003** *Δευτέρα 2 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 5, ΑΓ = 12 και ΒΓ = 13.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^0$.

Μονάδες 7

21. **πανελλήνιες 2003** *Σάββατο 7 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** αν η πρόταση είναι σωστή και **"Λάθος"** αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R) ορίζεται με τον τύπο:

$\Delta^P_{(O,R)} = R^2 + OP^2$.

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ = $\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία $\hat{A}$

Μονάδες 9

γ. Τη διάμεσο ΒΜ = μ_β

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$.

Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε.

α. Να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι $AM \cdot AE = \frac{3\alpha^2}{2}$.

Μονάδες 13

22. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 11

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1^L$.

Μονάδες 2

β. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\Gamma = 2\sqrt{3}$, $B\Gamma = 1$ και γωνία $\Gamma = 30°$.

α. Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{7}$

Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο $\Gamma M = \mu_\gamma$.

Μονάδες 12

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

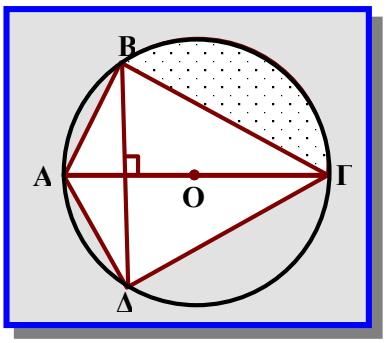
Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Α , ώστε $OA = R\sqrt{13}$. Από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου που τέμνει αυτόν στα σημεία Δ και Ε. Αν ΑΔ = 2 ΔΕ , να υπολογίσετε:

α. Τη χορδή ΔΕ, ως συνάρτηση του R.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρός του ΑΓ.
Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Δ, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = R\sqrt{3}$.

Μονάδες 8

23. **εσπερινά 2004** *Τετάρτη 2 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Β. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 3

Γ. Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

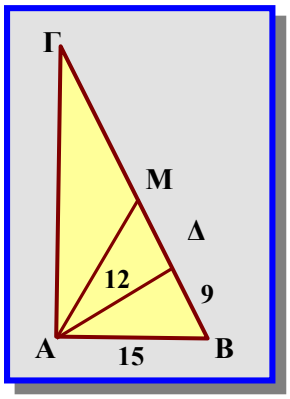
Μονάδες 3

ΣΤ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΒ = 15, το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου και το σημείο Δ της ΒΓ, για το οποίο ισχύει: ΑΔ = 12, ΒΔ = 9.



α. Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ.

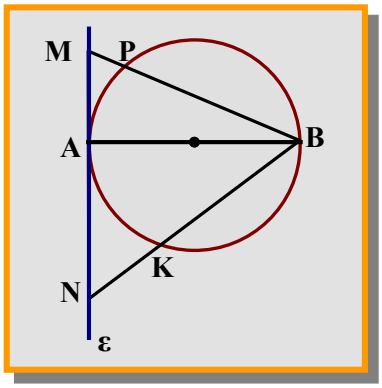
Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (O,R). Η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Εκατέρωθεν του Α θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν της ευθείας ε.

Αν οι ΒΜ, ΒΝ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ρ, Κ αντίστοιχα, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - AB^2 = MP \cdot MB$.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - NB^2 = MP \cdot MB - NK \cdot NB$.

Μονάδες 7

γ. Αν ΑΜ = R και ΑΝ = 2R, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{NK^2}{MP^2}$

Μονάδες 8

24. **πανελλήνιες 2004** ***Σάββατο 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$

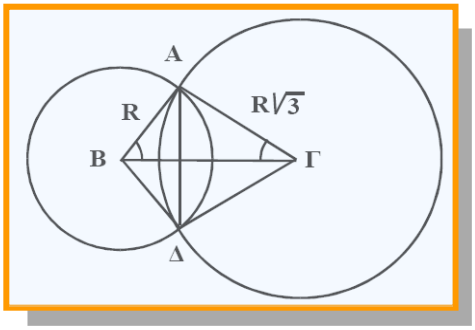
γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευρά

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με μήκη πλευρών ΑΒ=R και ΑΓ= 3 R .
Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και $(\Gamma, R\sqrt{3})$



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες Γ και Β .

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

90 Κεφάλαιο

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

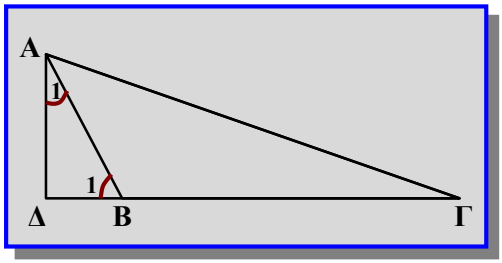
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1981**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Θεωρία

β. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι : $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1^L$ και ΑΔ είναι το ύψος του. Από τη σχέση $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1^L \Leftrightarrow \hat{B}=1^L+\hat{\Gamma}$ συμπεραίνεις ότι η $\hat{B}>90^o$ άρα αμβλεία (δες σχήμα).



$\hat{A}_1=1^L-\hat{B}_1=1^L-\left(2^L-\hat{B}\right)=-1^L+\hat{B}=-1^L+\left(1^L+\hat{\Gamma}\right) \Leftrightarrow$

$\hat{A}_1=\hat{\Gamma}$. Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι όμοια επειδή έχουν $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}$ και την $\hat{\Delta}$ κοινή.

Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ανάλογες $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{\Delta B}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2=\Delta B\cdot\Delta\Gamma$.

2. **πανελλήνιες 1982**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μια προς μια ή κάθετες μια προς μια είναι όμοια.

β. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από μια χορδή του είναι μέση ανάλογος μεταξύ των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής.

Είναι εκτός ύλης σήμερα (ανήκουν στην ύλη της Α' Λυκείου).

3. **πανελλήνιες 1983**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω ότι μια παράλληλη της ΑΔ τέμνει την ΑΒ στο Γ΄, την ΒΓ στο Α΄ και τη ΑΓ στο Β΄. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{A\Gamma'}{AB'}=\frac{AB}{A\Gamma}$.

4. ***πανελλήνιες 1999***

Σάββατο 19 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο (Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου)

Α. Το Θέμα όπως άλλωστε αναφέρονταν στον τίτλο, ήταν το **Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου** **και είναι σήμερα εκτός ύλης (ανήκει στην ύλη της Α' Λυκείου και δεν θα απαντηθεί).**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

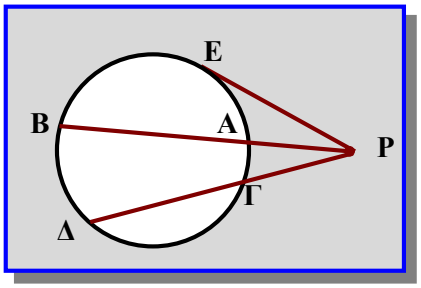
α) **PA = 3**

Στο διπλανό σχήμα το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι PB και PΔ τέμνουσες αυτού.

Αν AB = 9 , PΓ = 4 και ΓΔ = 5, έστω χ = PA τότε PB = χ + 9 και PΔ = 9. Από τη δύναμη σημείου είναι PA·PB = PΓ·PΔ ⇔

χ(χ + 9) = 36 ⇔ $\chi^2 + 9\chi - 36 = 0$ … χ = – 12 απορρίπτεται και χ = 3

Άρα **PA = 3**



β) **Ε.** 6

Από τη δύναμη σημείου είναι $PE^2 = PΓ\cdot PΔ \Leftrightarrow PE^2 = 36$

⇔ PE = 6

5. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999*** ***Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α = 5, β = 4 και γ = 2, τότε :

α) **Β.** αμβλεία γιατί

$\alpha^2 = 25, \beta^2 = 16, \gamma^2 = 4$ άρα $\alpha^2 = 25 > 20 = \beta^2 + \gamma^2$

β) $\mu_\alpha = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Επειδή δίνονται τα α = 5 β = 4, γ = 2 θα χρησιμοποιήσουμε το 1ο θεώρημα των διαμέσων

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\cdot\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, στο οποίο αντικαθιστούμε και έχουμε $4^2 + 2^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{5^2}{2} \Leftrightarrow$

$2\mu_\alpha^2 = 20 - \frac{25}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\sqrt{15}}{2}$

6. ***Εσπερινά 2000*** ***Δευτέρα 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι α = 15cm, β = 12cm και γ = 9cm.

α. Το τριγώνου ΑΒΓ είναι ορθογώνιο επειδή :

$\alpha^2 = 225, \beta^2 = 144, \gamma^2 = 81$ άρα $\alpha^2 = 225 = 144 + 81 = \beta^2 + \gamma^2$

β. $\mu_\alpha = \frac{15}{2}$ cm

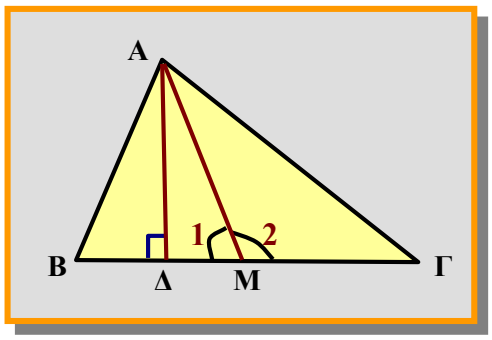
Επειδή δίνονται τα α = 15cm, β = 12cm και γ = 9cm θα χρησιμοποιήσουμε το 1ο θεώρημα των διαμέσων $\beta^2 + \gamma^2 = 2\cdot\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, στο οποίο αντικαθιστούμε και έχουμε $12^2 + 9^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{15^2}{2} \Leftrightarrow$

$2\mu_\alpha^2 = 225 - \frac{225}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{225}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\sqrt{225}}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{15}{2}$ cm

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **πανελλήνιες 2000** *Σάββατο 10 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο



Α.1. Θεωρία

Α.2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, όπου ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσος. Τότε από το δεύτερο θεώρημα διαμέσων έχουμε : $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = 2 \cdot ΒΓ \cdot ΔΜ$.

Β.1. Επειδή δίνονται τα $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$ θα χρησιμοποιήσουμε το 1ο θεώρημα των διαμέσων $\beta^2 + \gamma^2 = 2 \cdot \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, στο οποίο αντικαθιστούμε και έχουμε $8^2 + 6^2 = 2 \cdot 5^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$

$64 + 36 = 2 \cdot 25 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 100 = 50 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2} = 50 \Leftrightarrow \alpha^2 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$

Άρα η **Γ** είναι η σωστή απάντηση .

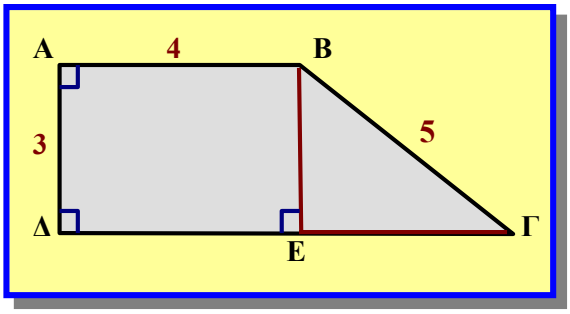
Β.2. Επειδή $\beta > \gamma$, $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$ από το 2ο θεώρημα των διαμέσων, έχουμε :

$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot ΔΜ \Leftrightarrow 7^2 - 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot ΔΜ \Leftrightarrow 49 - 25 = 8 \cdot ΔΜ \Leftrightarrow 24 = 8 \cdot ΔΜ \Leftrightarrow ΔΜ = 3.$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η **Ε**.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω το ορθογώνιο τραπέζιο (παρακάτω σχήμα) ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ και ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5.



α) Έστω $ΒΕ \perp ΔΓ$ άρα ΓΕ η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ τότε ΑΒΕΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και επομένως ΒΕ = ΑΔ = 3. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχεις

$ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = ΒΓ^2 \Leftrightarrow 3^2 + ΕΓ^2 = 5^2 \Leftrightarrow ΕΓ^2 = 16 \Leftrightarrow ΕΓ = 4$

Μονάδες 9

8. **επαναληπτικές 2000** *Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Α. 1. Θεωρία

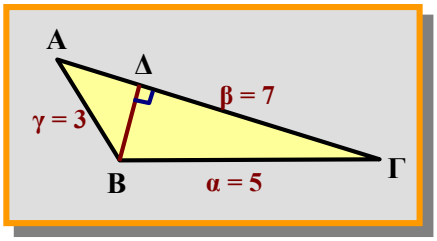
Α. 2. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (= ,<, >) στις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} < 90^\circ$

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} > 90^\circ$

γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} = 90^\circ$

Β. 1. **Ε**: $A\Delta = \frac{33}{14}$



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3, ΒΓ = 5 και ΑΓ = 7.

Είναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \Leftrightarrow 25 = 49 + 9 - 2 \cdot 7 \cdot A\Delta \Leftrightarrow$

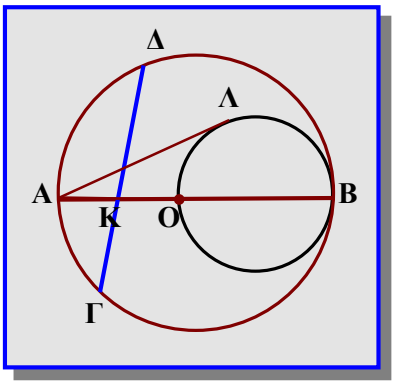
$14A\Delta = 49 + 9 - 25 \Leftrightarrow 14A\Delta = 33 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{33}{14}$

Β. 2.

α.	**2.**
β.	**3.**
γ.	**1.**

Παρά την απλότητα της ερώτησης έπρεπε να προσέξει κανείς διότι υπήρχαν στη στήλη Β δυο περιπτώσεις που φαινομενικά ταίριαζαν στο **β.** η 3 και η 4 αλλά η 4 αποκλείεται γιατί δεν σχηματίζει τρίγωνο .

ΘΕΜΑ 2ο



α. Αν η διάμετρος ΑΒ = 8, τότε ΟΑ = 4 άρα ΚΑ = 2 και ΚΒ = 6 αφού Κ μέσον της ΟΑ. Άρα ΚΑ·ΚΒ = ΚΓ·ΚΔ ⇔ 2·6 = 3 ΚΔ ⇔ **ΚΔ = 4**

β. Είναι $A\Lambda^2 = AO \cdot AB = 4 \cdot 8 = 32 \Leftrightarrow A\Lambda = \sqrt{32} \Leftrightarrow A\Lambda = 4\sqrt{2}$.

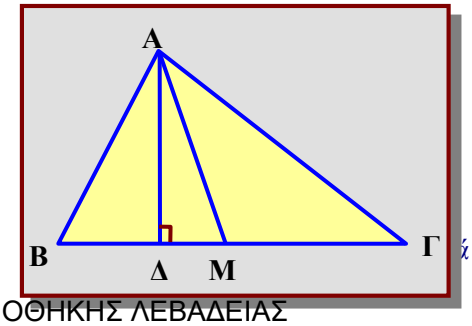
9. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. **Λ** γιατί ΑΜ διάμεσος άρα ΒΜ = ΓΜ άρα $\frac{BM}{\Gamma M} = 1$ $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} < 1$ αφού ΑΒ<ΑΓ

2. **Σ** (1ο Θεώρημα διαμέσων)



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. **Λ** γιατί $AB<A\Gamma \Leftrightarrow AB^2 - A\Gamma^2 < 0$

4. **Σ** (2° Θεώρημα διαμέσων)

5. **Λ**

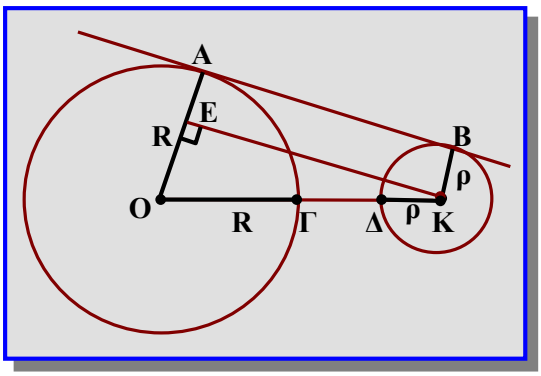
Β. **α.** **Γ.** 4m

β. Επειδή δίνονται τα $AB = \gamma = 10m$, $A\Gamma = \beta = 14m$ και $B\Gamma = \alpha = 12m$, θα χρησιμοποιήσουμε το 1° θεώρημα των διαμέσων $\beta^2 + \gamma^2 = 2\cdot\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, στο οποίο αντικαθιστούμε και έχουμε

$$14^2 + 10^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{12^2}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = 296 - \frac{144}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = 296 - 72 \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = 224 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \sqrt{224} \Leftrightarrow$$

$$\mu_\alpha = 4\sqrt{14}\ cm$$

ΘΕΜΑ 3ο



$R = 7m$, $\rho = 2m$ $KE \perp OA$ άρα $KEAB$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άρα $AB = KE$ και $KB = EA$ άρα $OE = R - \rho = 7 - 2 = 5$. Επίσης είναι $OK = R + K\Gamma + \rho \Leftrightarrow OK = 13$, επομένως από το ορθογώνιο τρίγωνο OKE θα είναι $KE^2 = KO^2 - OE^2 \Leftrightarrow KE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ $KE = 12$ άρα και **AB = 12**

10.

εσπερινά 2001

Τετάρτη 13 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

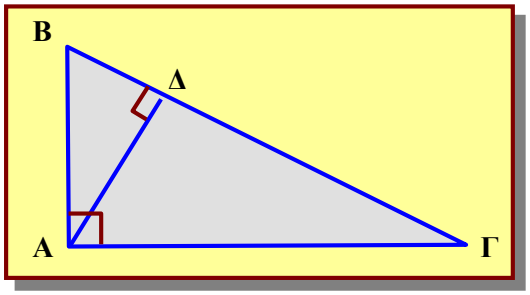
1. **Σ**

2. **Λ**

3. **Σ**

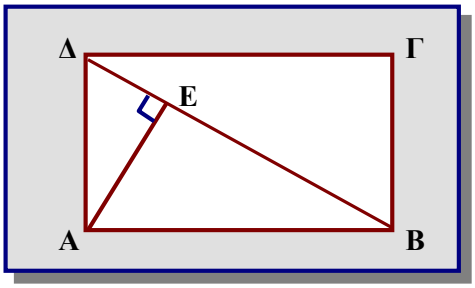
4. **Σ**

5. **Λ**



Β. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Delta = 6$, $AB = 8$.

α. Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$: $A\Delta^2 + AB^2 = \Delta B^2$ $\Leftrightarrow 6^2 + 8^2 = \Delta B^2 \Leftrightarrow \Delta B^2 = 100 \Leftrightarrow$ **ΔΒ = 10**



β. ΕΑπο το ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB είναι $AB^2 = \Delta B \cdot BE$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

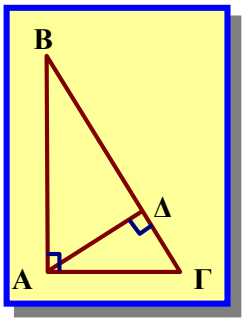
$\Leftrightarrow 8^2 = 10\cdot BE \Leftrightarrow BE = \frac{64}{10} \Leftrightarrow$ **BE = 6,4**

11. **πανελλήνιες 2001** *Σάββατο 16 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία **Α2.** $\alpha \leftrightarrow 4$, $\beta \leftrightarrow 5$, $\gamma \leftrightarrow 2$

Β.



Β 1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι: $A\Delta^2 = B\Delta\cdot\Delta\Gamma$
κι επειδή : $B\Delta = 1$ και $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 3 - 1 = 2$ άρα $A\Delta^2 = 2 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{2}$
Άρα η σωστή απάντηση είναι η **(γ).**

Β 2. Ισχύει επίσης ότι : $AB^2 = B\Delta - B\Gamma$ κι επειδή $B\Delta = 1$ και $B\Gamma = 3$
άρα $AB^2 = 3$ άρα $AB = \sqrt{3}$
Άρα η σωστή απάντηση είναι η **(α).**

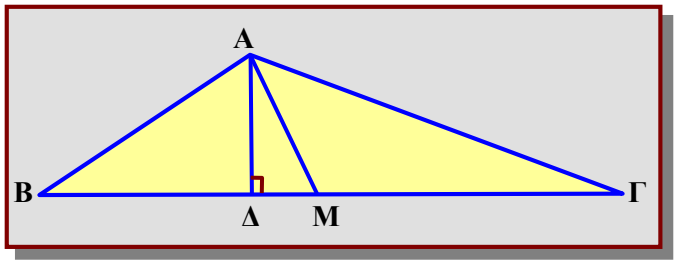
ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8.

α. $AB^2 = 36$, $B\Gamma^2 = 144$ και $\Gamma A^2 = 64$ και $144 > 100 = 36 + 64$ άρα ΑΒΓ αμβλυγώνιο

β. 1ο θεώρημα των διαμέσων $\beta^2 + \gamma^2 = 2\cdot\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, στο οποίο αντικαθιστούμε και έχουμε

$$8^2 + 6^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{12^2}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = 100 - \frac{144}{2} \Leftrightarrow 2\mu_\alpha^2 = 100 - 72 \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = 14 \Leftrightarrow \mu_\alpha = \sqrt{14}\ \text{cm}$$

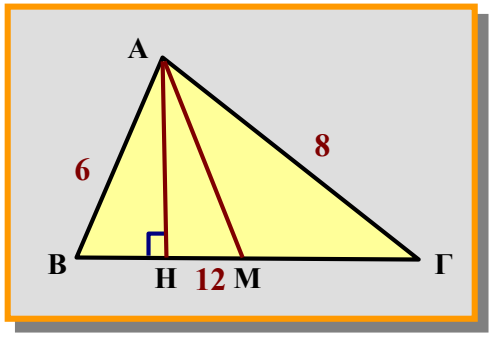


γ. Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων, έχουμε : $\beta^2 - \gamma^2 = 2\,\alpha\cdot\Delta M \Leftrightarrow 8^2 - 6^2 = 2\cdot 12\cdot\Delta M \Leftrightarrow$
$64 - 36 = 24\cdot\Delta M \Leftrightarrow 28 = 24\cdot\Delta M \Leftrightarrow \Delta M = \frac{7}{6}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Απάντηση:



α. Είναι : $AB^2 = 6^2 = 36$, $B\Gamma^2 = 12^2 = 144$ $A\Gamma^2 = 8^2 = 64$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 36 + 64 = 100$ άρα $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$

Επομένως το **τρίγωνο ΑΒΓ** είναι **αμβλυγώνιο στο Α.**

β. Από το 1ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}.$$

Αντικαθιστούμε $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $A\Gamma = 8$ και βρίσκουμε :

$$6^2 + 8^2 = 2AM^2 + \frac{12^2}{2} \Leftrightarrow 36 + 64 = 2AM^2 + 72 \Leftrightarrow 2AM^2 = 28 \Leftrightarrow AM^2 = 14 \Leftrightarrow AM = \sqrt{14}$$

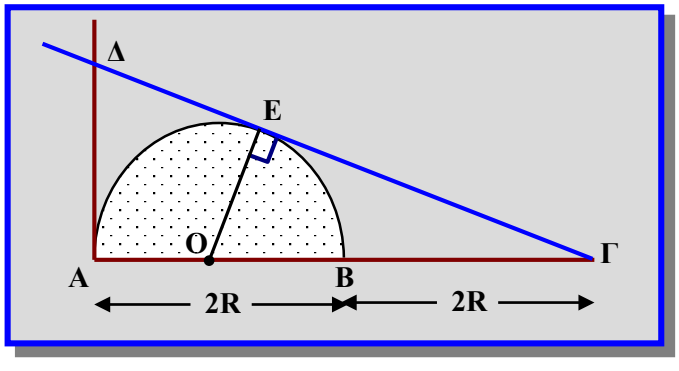
γ. Αν ΑΗ είναι το ύψος του τριγώνου από το Α, τότε η προβολή της διαμέσου ΑΜ στη ΒΓ είναι το τμήμα ΗΜ. Σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων έχουμε : $A\Gamma^2 - AB^2 = 2\,B\Gamma \cdot HM$

Αντικαθιστούμε $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $A\Gamma = 8$ και βρίσκουμε : $8^2 - 6^2 = 2 \cdot 12 \cdot HM \Leftrightarrow 64 - 36 =$

$24 \cdot HM$ $28 = 24 \cdot HM \Leftrightarrow HM = \frac{28}{24} \Leftrightarrow$ $HM = \frac{7}{6}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ=2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου.
Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.



α. Είναι $(\Gamma E)^2 = \Gamma A \cdot \Gamma B \Leftrightarrow (\Gamma E)^2 = 4R \cdot 2R$

$\Leftrightarrow (\Gamma E)^2 = 8R^2 \Leftrightarrow$ $\Gamma E = 2\sqrt{2} \cdot R$

β. Τα τρίγωνα ΓΟΕ και ΓΑΔ είναι όμοια

διότι $\begin{cases} \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} \\ \hat{E} = \hat{A} = 90^0 \end{cases}$, άρα $\frac{\Gamma O}{\Gamma \Delta} = \frac{\Gamma E}{\Gamma A} \Leftrightarrow$

ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ.

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E \Leftrightarrow (2\sqrt{2} \cdot R) \cdot \Gamma \Delta = 4R \cdot 3R \Leftrightarrow \Gamma \Delta = \frac{12R^2}{2\sqrt{2} \cdot R}$

$\Leftrightarrow \Gamma \Delta = \frac{6R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ $\Gamma \Delta = 3R\sqrt{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Δευτέρα 9 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία.

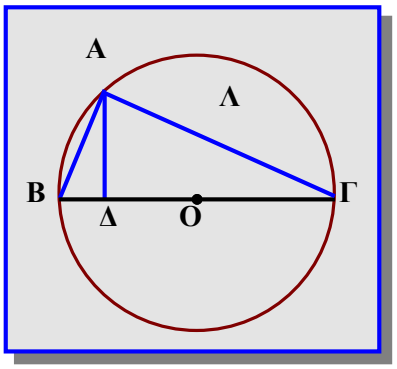
Το ερώτημα είναι ακριβώς ίδιο με το **Α1.** των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

Α2.

α.	**3.**
β.	**1.**
γ.	**5.**

Το ερώτημα είναι ΜΙΚΡΗ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ του **Α2.** των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

Β. Η διάμεσος μ_γ είναι : **β.** $2\sqrt{3}$



Β2. $B\Delta = \frac{1}{4}\Delta\Gamma \Leftrightarrow 4B\Delta = \Delta\Gamma$, $B\Gamma = 20 \Leftrightarrow B\Delta + \Delta\Gamma = 20 \Leftrightarrow$

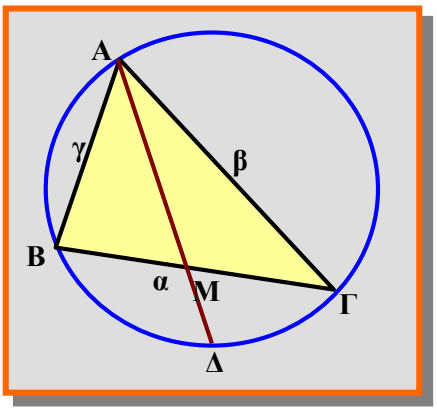
$5B\Delta = 20 \Leftrightarrow B\Delta = 4$ Επειδή το Α είναι σημείο του κύκλου και ΒΓ διάμετρος, το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ορθογώνιο και επομένως θα είναι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta = 20 \cdot 4 = 80 \Leftrightarrow AB = \sqrt{80}$

$\Leftrightarrow AB = 4\sqrt{5}$

Β3. $\Gamma A = \Gamma B = 4$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$. !ο θεώρημα διαμέσων :

$$AB^2 = \Gamma A^2 + \Gamma B^2 - 2\Gamma A \cdot \Gamma B \text{συν}\Gamma = 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 32 + 16 = 48 \Leftrightarrow AB = 4\sqrt{3}\,.$$

ΘΕΜΑ 2ο



α. $\beta^2 + \gamma^2 = 2 \cdot \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 3\alpha^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \mu_\alpha^2 = 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}$

$\Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AM = \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$

β. $M B \cdot M\Gamma = MA \cdot M\Delta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot M\Delta \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\alpha}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10}$

εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Τετάρτη 11 Ιουλίου

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13.

ΘΕΜΑ 1ο

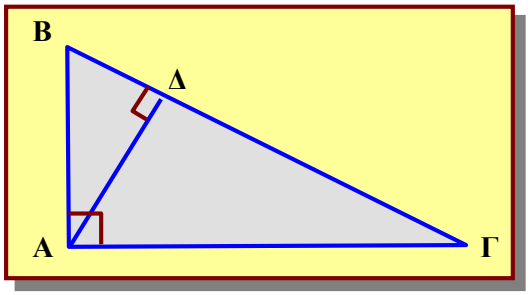
Α. **α)**

1. **Σ**

2. **Λ**

3. **Λ**

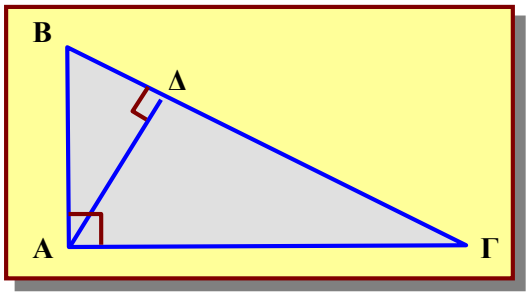
4. **Σ**



Το ερώτημα είναι ΜΙΚΡΗ ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ του αντίστοιχου θέματος των εξετάσεων του Ιουνίου !!! .

β) Θεωρία.

Β. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, με $\hat{A} = 90^0$



Δίνεται $ΒΔ = 1,8$ και $ΔΓ = 3,2$ άρα **$ΒΓ = 5$** , $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$

$\Leftrightarrow$ $ΑΒ^2 = 1,8 \cdot 5 = 9 \Leftrightarrow$ **$ΑΒ = 3$** $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ = 1,8 \cdot 3,2$

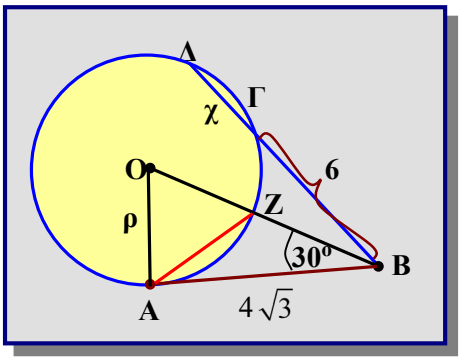
$\Leftrightarrow ΑΔ^2 = 5,76 \Leftrightarrow$ **$ΑΔ = 2,4$**

$\Leftrightarrow$ $ΑΓ^2 = 3,2 \cdot 5 = 16 \Leftrightarrow$ **$ΑΓ = 4$**.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΑΒ, μήκους $4\sqrt{3}$, εφάπτεται στο σημείο Α του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ.

Η γωνία $\hat{AOB}$ είναι ίση με 30° και η ΒΓΔ είναι τέμνουσα του κύκλου, με μήκος του τμήματος ΒΓ = 6.



α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και $\hat{AOB} = 30^o$ άρα $OA = \frac{OB}{2} \Leftrightarrow OB = 2\rho$ επομένως :

$OA^2 + AB^2 = OA^2 \Leftrightarrow \rho^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = (2\rho)^2 \Leftrightarrow 3\rho^2 = 48 \Leftrightarrow \rho^2 = 16 \Leftrightarrow$ **$\rho = 4$**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Έστω $\Delta\Gamma = \chi$ τότε $B\Delta = \chi + 6$. Από τη θεωρία είναι

$B\Gamma \cdot B\Delta = BA^2 \Leftrightarrow 6(\chi+6) = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 6\chi + 36 = 48 \Leftrightarrow 6\chi = 12 \Leftrightarrow$ **$\chi = 2$** .

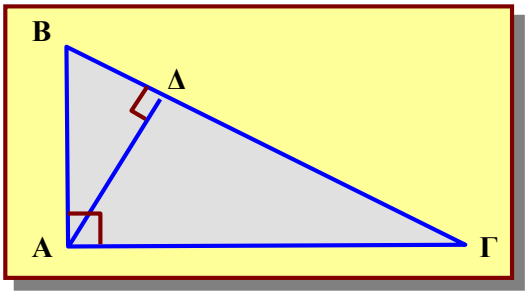
Μονάδες 10

14. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1.

α.	**1.**
β.	**3.**
γ.	**2.**



Τελικά το 2001 **τα θέματα** ήταν ένα και άλλαζε ή σειρά στις ερωτήσεις !!! .

Α. 2. Θεωρία

Β. Στο σχήμα του ερωτήματος **Α.1** δίνεται ότι $AB = 6$ και $B\Delta = 3{,}6$.

Β. 1. $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 36 = B\Gamma \cdot 3{,}6 \Leftrightarrow$ **$B\Gamma = 10$** .

Β. 2. $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow 6^2 + A\Gamma^2 = 10^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow$ **$A\Gamma = 8$** .

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^0$ Αν $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$ να δείξετε ότι :

α. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu 120^o \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\cdot\gamma$

β. **1ο Θεώρημα διαμέσων :** $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\cdot\gamma}{2} \Leftrightarrow$

$2\beta^2 + 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \beta\cdot\gamma = 4\mu_\alpha^2$ αν επί πλέον ισχύει $\beta = 2\gamma$, τότε

$(2\gamma)^2 + \gamma^2 - 2\gamma\cdot\gamma = 4\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow 4\gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma^2 = 4\mu_\alpha^2 \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{3\gamma^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$

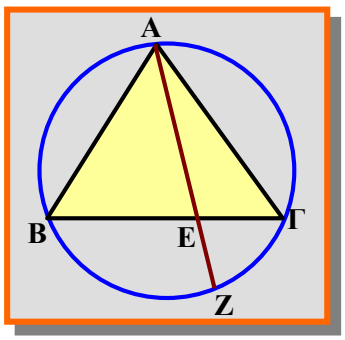
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο όπως στο σχήμα.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε $ΕΓ = \frac{α}{3}$

και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.



Στο τρίγωνο ΑΓΕ είναι $ΑΓ = α$, $ΕΓ = \frac{α}{3}$ και $\hat{Γ} = 60^ο$ οπότε

$$ΑΕ^2 = ΑΓ^2 + ΕΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΕΓ συνΓ \Leftrightarrow ΑΕ^2 = α^2 + \left(\frac{α}{3}\right)^2 - 2α \cdot \frac{α}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow ΑΕ^2 = α^2 + \frac{α^2}{9} - \frac{α^2}{3} \Leftrightarrow ΑΕ^2 = \frac{7α^2}{9} \Leftrightarrow \boxed{ΑΕ = \frac{α\sqrt{7}}{3}.}$$

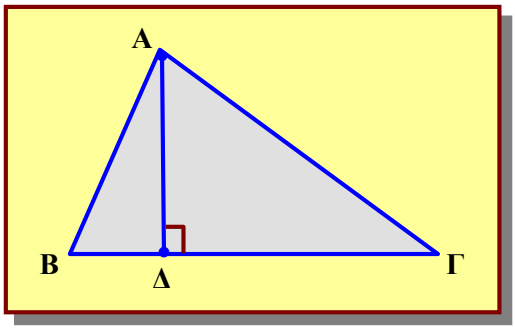
β. **Από τις τεμνόμενες χορδές ΒΓ και ΑΖ :**

$$ΕΒ \cdot ΕΓ = ΕΑ \cdot ΕΖ \Leftrightarrow \frac{2α}{3} \cdot \frac{α}{3} = \frac{α\sqrt{7}}{3} ΕΖ \Leftrightarrow \frac{α\sqrt{7}}{3} ΕΖ = \frac{2α^2}{9} \Leftrightarrow ΕΖ = \frac{2α^2 \cdot 3}{9 \cdot α \cdot \sqrt{7}} \Leftrightarrow \boxed{ΕΖ = \frac{2\sqrt{7}\,α}{21}}$$

15. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Τετάρτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ $(ΑΒ < ΑΓ)$.



1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

Β. Στο τρίγωνο του παραπάνω σχήματος έχουμε $ΑΒ = 5$, $ΑΓ = 7$ και $ΒΓ = 6$.

α. Από την επέκταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι : $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow$

$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot ΔΓ \Leftrightarrow 12 \cdot ΔΓ = 49 + 36 - 25 \Leftrightarrow 12 \cdot ΔΓ = 60 \Leftrightarrow \boxed{ΔΓ = 5}$.

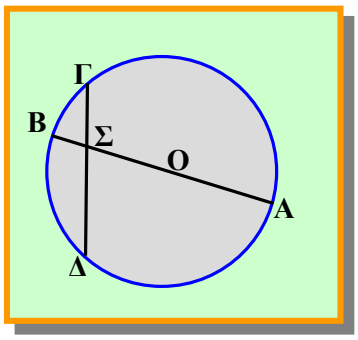
β. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΔΓ : $ΑΔ^2 = ΑΓ^2 - ΔΓ^2 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 7^2 - 5^2 \Leftrightarrow ΑΔ^2 = 24$

$\Leftrightarrow \boxed{ΑΔ = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Για τον κύκλο του διπλανού σχήματος δίνονται : ΣΓ = 2, ΣΒ = 1, ΣΔ = 4,5.



α. $\Sigma B \cdot \Sigma A = \Sigma \Gamma \cdot \Sigma \Delta \Leftrightarrow 1 \cdot \Sigma A = 2 \cdot 4{,}5 \Leftrightarrow$ **ΣΑ = 9**

β. ΑΒ = ΑΣ + ΣΒ = 9 + 1 = 10 όμως η ΑΒ διάμετρος επομένως 2ΟΒ =10

ΟΒ = 5 άρα ΟΣ = 5 – 1 $\Leftrightarrow$ **ΟΣ = 4** .

16. **πανελλήνιες 2002** *Σάββατο 1 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α2.

Απάντηση:

Α.2. $\beta \leftrightarrow \Lambda$
$\varepsilon \leftrightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ 2ο

Απάντηση:

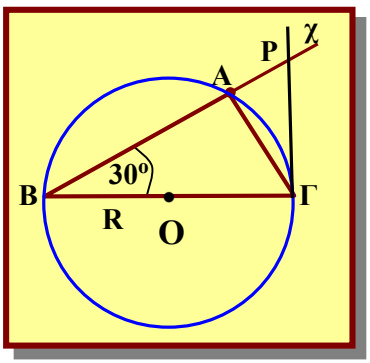
α. Από το πρώτο 1ο διαμέσων είναι : $\beta^2 + \gamma^2 = 2 \cdot \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$

Έτσι η σχέση που μας δίνει γίνεται $2 \cdot \mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$.

β. Από το νόμο των συνημίτονων είναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \text{συν}A$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ άρα $2\text{συν}A = 1 \Leftrightarrow \text{συν}A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $A = 60^o$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ότι η Βχ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βχ στο σημείο Ρ.



α. Το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ορθογώνιο, $A = 90^o$ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο και επειδή $B = 30^o$ άρα $A\Gamma = \frac{1}{2} B\Gamma$ άρα **ΑΓ = R.**

γ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 2 R και ΑΓ = R άρα Πυθαγόρειο θεώρημα $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$
$\Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma^2 - AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow$
$AB = R\sqrt{3}$

Επειδή ΡΓ εφαπτόμενο τμήμα θα είναι $P\Gamma^2 = PA \cdot PB \Leftrightarrow P\Gamma^2 = PA \cdot (PA + AB) \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

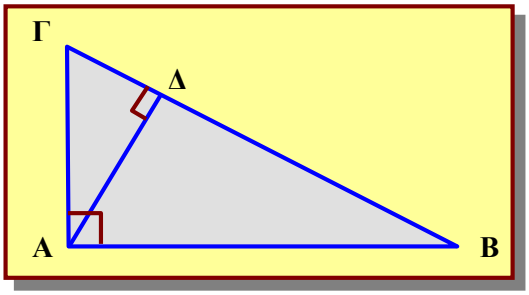
$$ΡΓ^2 = \frac{ΡΓ}{2}\cdot(\frac{ΡΓ}{2}+R\sqrt{3}) \Leftrightarrow ΡΓ = \frac{1}{2}\cdot(\frac{ΡΓ}{2}+R\sqrt{3}) \Leftrightarrow ΡΓ = \frac{ΡΓ}{4}+\frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4ΡΓ = ΡΓ + 2R\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{ΡΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}}$$

17. ***Εσπερινά 2002*** ***Δευτέρα 3 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (του παρακάτω σχήματος) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 40, ΑΓ = 30 και ότι το ΑΔ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.



Να βρείτε :

β. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΒΓ :

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 40^2 + 30^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 1600 + 900 = 2500 \Leftrightarrow$ **ΒΓ = 50** και από γνωστό θεώρημα είναι $ΒΓ\cdot ΑΔ = ΑΒ\cdot ΑΓ \Leftrightarrow 50\cdot ΑΔ = 40\cdot 30 \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{1200}{50} \Leftrightarrow$ **ΑΔ = 24** .

γ. Η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ είναι η ΓΔ και ισχύει $ΑΓ^2 = ΒΓ\cdot ΓΔ \Leftrightarrow$ $900 = 50\cdot ΓΔ \Leftrightarrow$ **ΓΔ = 18**

18. ***επαναληπτικές 2002*** ***Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. α. Λάθος

ΘΕΜΑ 3ο

α. Από το πρώτο 1ο διαμέσων είναι : $\beta^2+\gamma^2 = 2\cdot\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-\frac{\alpha^2}{2}$ **(1)**,

$$3\beta^2+2\gamma^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow 2\gamma^2 = 2\alpha^2-3\beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{2\alpha^2-3\beta^2}{2}$$

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow 2\cdot\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \frac{2\alpha^2-3\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\beta^2+2\alpha^2-3\beta^2-\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\cdot\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2} \Leftrightarrow \mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}$$

β. $3\beta^2+2\gamma^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{3\beta^2+2\gamma^2}{2} = \frac{3}{2}\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$ άρα $\hat{A} > 90^o$.

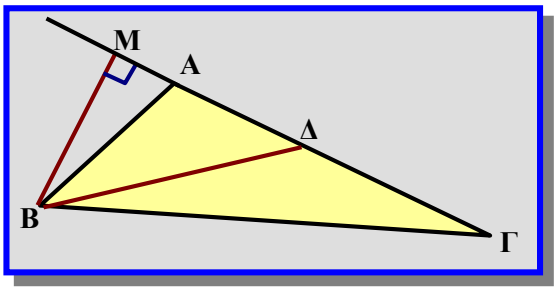
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Αφού $3\beta^2+2\gamma^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2=3\beta^2+2\gamma^2>2\gamma^2$

$\Leftrightarrow \alpha>\gamma$. Άρα από το 2ο θεώρημα των διαμέσων

$$\alpha^2-\gamma^2=2\beta\cdot M\Delta \Leftrightarrow 2\beta\cdot M\Delta=\alpha^2-\frac{2\alpha^2-3\beta^2}{2}=\frac{3\beta^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M\Delta=\frac{3}{4}\beta}.$$



ΘΕΜΑ 4ο

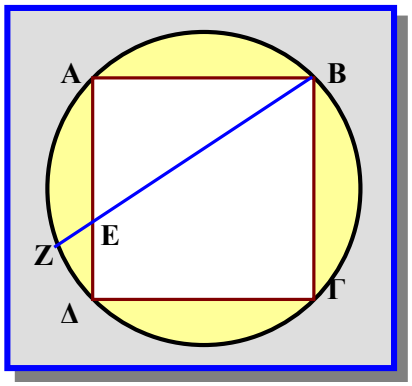
Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O , R) .Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ , τέτοιο ώστε $A\Delta=\sqrt{3}\cdot AE$ και Z το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο.

α. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $AB^2+AE^2=BE^2$.

Από τη σχέση $A\Delta=\sqrt{3}\cdot AE \Leftrightarrow AE=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ άρα

$$AB^2+AE^2=BE^2 \Leftrightarrow \alpha^2+\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2=BE^2 \Leftrightarrow BE^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2 3}{9}=$$

$$\alpha^2+\frac{\alpha^2}{3}=\frac{4\alpha^2}{3} \Leftrightarrow BE=\frac{2\alpha}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow BE=\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$$



β. Θεωρία τεμνόμενων χορδών : $EA\cdot E\Delta=EB\cdot EZ \Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}(A\Delta-AE)=\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}\cdot EZ \Leftrightarrow$

$$\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}\cdot EZ=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\left(\alpha-\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}-\frac{3\alpha^2}{9}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}-\frac{\alpha^2}{3}=\frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3} \Leftrightarrow$$

$$EZ=\frac{\frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}}{\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}}=\frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\alpha\sqrt{3}}=\frac{\alpha\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{\alpha\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\alpha\left(3-\sqrt{3}\right)}{6} \Leftrightarrow EZ=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot\alpha.$$

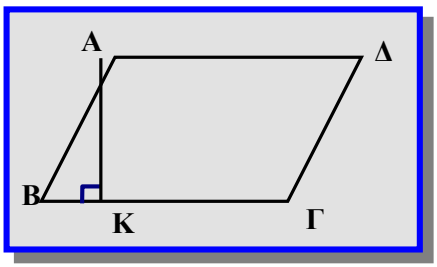
19. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα είναι ΑΕ = ΖΓ και ΑΚ το ύψος του.

β. Αν ΑΔ = 30 ⇔ ΒΓ = ΑΔ = 30 ⇔ ΚΒ = ΒΓ – ΚΓ = 30 – 24 ⇔ ΚΒ = 6 είναι και ΑΚ = 8 οπότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΚΒ δίνει $AB^2=AK^2+KB^2 \Leftrightarrow AB^2=8^2+6^2 \Leftrightarrow AB^2=10 \Leftrightarrow AB=10$ άρα η περίμετρος είναι :

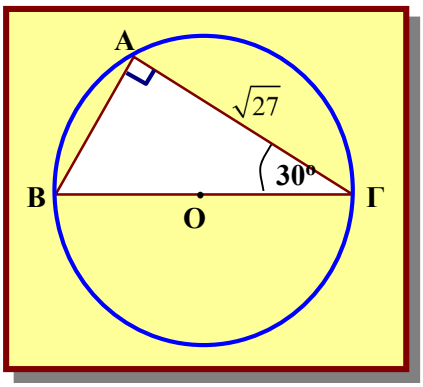
$\Pi=2AB+2A\Delta=20+60 \Leftrightarrow$ **Π = 80**



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$ με γωνία $\hat{\Gamma}=30^{o}$ και πλευρά $A\Gamma=\sqrt{27}$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Επειδή το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και $\hat{\Gamma}=30^{o}$ άρα

$AB=\frac{B\Gamma}{2}=\rho$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου . Από το

Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι $B\Gamma^{2}=AB^{2}+A\Gamma^{2}\Leftrightarrow$

$4\rho^{2}=\rho^{2}+27\Leftrightarrow 3\rho^{2}=27\Leftrightarrow \rho^{2}=9\Leftrightarrow \rho=3\Leftrightarrow$

$B\Gamma=2\cdot\rho=3$

20. ***εσπερινά 2003*** ***Δευτέρα 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 5, ΑΓ = 12 και ΒΓ = 13.

α. $B\Gamma^{2}=169$, $AB^{2}=25$, $A\Gamma^{2}=144$ άρα $B\Gamma^{2}=AB^{2}+A\Gamma^{2}$ άρα $\hat{A}=90^{0}$

21. ***πανελλήνιες 2003*** ***Σάββατο 7 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. $\gamma\leftrightarrow\Lambda$
$\delta\leftrightarrow\Sigma$

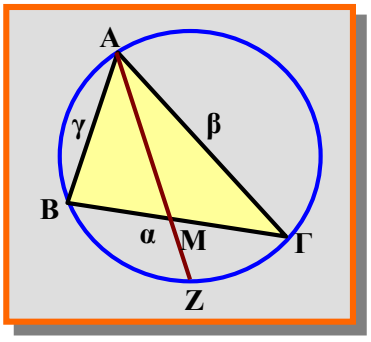
ΘΕΜΑ 2ο

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ από το νόμο συνημίτονων ισχύει : $B\Gamma^{2}=AB^{2}+A\Gamma^{2}-2AB\cdot A\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A\Leftrightarrow$

$(\sqrt{3})^{2}=1^{2}+1^{2}-2\cdot1\cdot1\cdot\sigma\upsilon\nu A\Leftrightarrow 3=1+1-2\sigma\upsilon\nu A\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu A=-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A=-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ και επειδή $\hat{A}$ γωνία τριγώνου $(0<\hat{A}<\pi)$ άρα $\hat{A}=\frac{2\pi}{3}$

γ. Αν εφαρμόσουμε το 1° θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε : $\alpha^{2}+\gamma^{2}=2\cdot\mu_{\beta}^{2}+\frac{\beta^{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\mu_{\beta}^{2}=\frac{2\alpha^{2}+2\gamma^{2}-\beta^{2}}{4}=\frac{2(\sqrt{3})^{2}+2\cdot1^{2}-1^{2}}{4}=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\mu_{\beta}^{2}=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\mu_{\beta}=\frac{\sqrt{7}}{2}$



ΘΕΜΑ 3ο

α. Εφαρμόζεις το 1° θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχεις :

$\beta^{2}+\gamma^{2}=2\cdot\mu_{\alpha}^{2}+\frac{\alpha^{2}}{2}$ αντικαθιστώ από τα δεδομένα $\beta^{2}+\gamma^{2}=3\cdot\alpha^{2}$ και

Δαμιανός Μωραΐτης

έχεις $3\cdot\alpha^2=\beta^2+\gamma^2=2\cdot\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow 2\cdot\mu_\alpha^2=3\cdot\alpha^2-\frac{\alpha^2}{2}=\frac{5\cdot\alpha^2}{2}\Leftrightarrow$

$2\cdot AM^2=\frac{5\cdot\alpha^2}{2}\Leftrightarrow AM^2=\frac{5\cdot\alpha^2}{4}\Leftrightarrow \boxed{AM=\frac{\alpha\cdot\sqrt{5}}{2}}$

β. Από το θεώρημα τεμνόμενων χορδών είναι :

$MA\cdot ME=MB\cdot M\Gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^2}{4}$

Άρα $AM\cdot AE=AM(AM+ME)=AM^2+AM\cdot ME=\frac{5\cdot\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}$, λόγω και του προηγούμενου ερωτήματος

Άρα $AM\cdot AE=\frac{5\cdot\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}\Leftrightarrow \boxed{AM\cdot AE=\frac{3\cdot\alpha^2}{2}}$

22. επαναληπτικές 2003

Πέμπτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. **α. Λάθος** **β. Σωστό**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma=2\sqrt{3}$, $B\Gamma=1$ και γωνία $\Gamma=30°$.

α. Να αποδείξετε ότι $AB^2=A\Gamma^2+B\Gamma^2-2A\Gamma\cdot B\Gamma\sigma\upsilon\nu 30^o=\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$AB^2=4\cdot 3+1-2\cdot 3\Leftrightarrow AB^2=7\Leftrightarrow \boxed{AB=\sqrt{7}}$

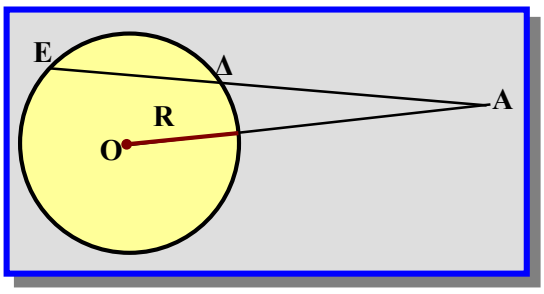
β. Η ΓΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ άρα :

$A\Gamma^2+B\Gamma^2=2\Gamma M^2+\frac{AB^2}{2}\Leftrightarrow 2\mu_\gamma^2=2\Gamma M^2=A\Gamma^2+B\Gamma^2-\frac{AB^2}{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{2}\Leftrightarrow$

$2\mu_\gamma^2=12+1-\frac{7}{2}\Leftrightarrow 2\mu_\gamma^2=\frac{19}{2}\Leftrightarrow\mu_\gamma^2=\frac{19}{4}\Leftrightarrow \boxed{\mu_\gamma=\frac{\sqrt{19}}{2}}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έστω κύκλος (O, R) και σημείο Α , ώστε $OA=R\sqrt{13}$.



Επειδή $OA=R\sqrt{13}>R$ άρα το Α εκτός του κύκλου .

Από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου που τέμνει αυτόν στα σημεία Δ και Ε και έστω

$A\Delta=2\,\Delta E$ τότε $A\Delta\cdot AE=OA^2-\rho^2\Leftrightarrow$

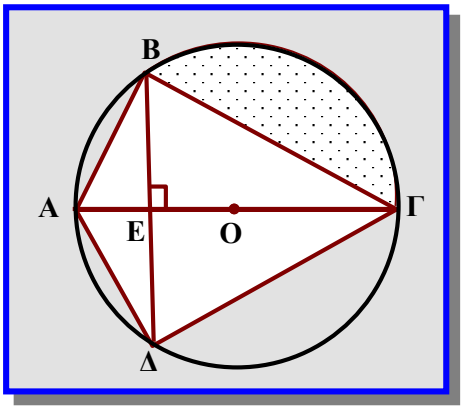
$2\Delta E\cdot(2\Delta E+\Delta E)=R^2 13-R^2\Leftrightarrow 6\Delta E^2=12R^2\Leftrightarrow$

$\Delta E^2=2R^2\Leftrightarrow \boxed{\Delta E=R\sqrt{2}}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ο κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρός του ΑΓ.



α. Αφού ΒΔ μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ θα είναι

$AE = OE = \frac{R}{2}$ και επομένως $E\Gamma = EO + O\Gamma = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου το ΒΕ είναι ύψος θα είναι

$BE^2 = AE \cdot E\Gamma = \frac{R}{2} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ και αφού

$OE \perp B\Delta \Leftrightarrow EB = E\Delta \Leftrightarrow B\Delta = 2E\Delta = 2\frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow B\Delta = R\sqrt{3}$

23. ***εσπερινά 2004*** ***Τετάρτη 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Β. **Σ**

Γ. **Λ**

ΣΤ. **Σ**

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΒ = 15, το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου και το σημείο Δ της ΒΓ, για το οποίο ισχύει: ΑΔ = 12, ΒΔ = 9.

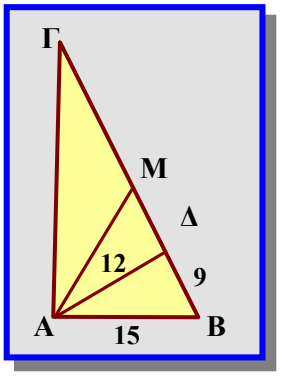
α. Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $A\beta^2 = 15^2 = 225$, $A\Delta^2 = 12^2 = 144$ και

$\Delta B^2 = 9^2 = 81$. Αφού 225 = 144 + 81 άρα $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$

Άρα ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος άρα

Το τρίγωνο ΑΒΔ ορθογώνιο άρα το :

ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.



β. Αφού Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ.
Μονάδες 8

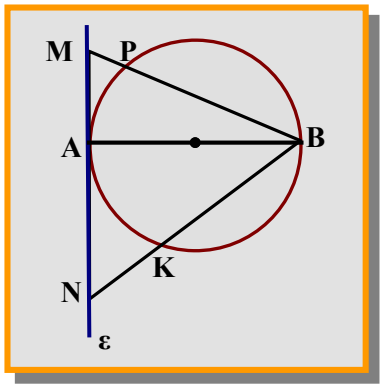
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (O,R). Η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

Εκατέρωθεν του Α θεωρούμε τα σημεία Μ, Ν της ευθείας ε.

Αν οι ΒΜ, ΒΝ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ρ, Κ αντίστοιχα, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - AB^2 = MP \cdot MB$.
Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι $MB^2 - NB^2 = MP \cdot MB - NK \cdot NB$.
Μονάδες 7

γ. Αν ΑΜ = R και ΑΝ = 2R, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{NK^2}{MP^2}$

24.

πανελλήνιες 2004

Σάββατο 5 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Γ.

α. **Λάθος**

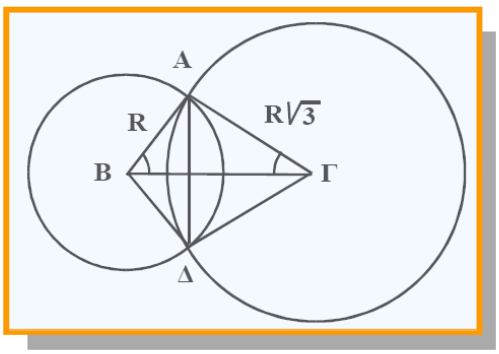
γ. **Σωστό**

δ. **Σωστό**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με μήκη πλευρών ΑΒ=R και ΑΓ= $R\sqrt{3}$.

Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και $(\Gamma, R\sqrt{3})$



α. Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο θα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα :

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = R^2 + (R\sqrt{3})^2 = 4R^2$ άρα **ΒΓ = 2R.**

β. Είναι ΒΓ = 2 R και ΑΒ = R άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2}$

άρα $\hat{\Gamma} = 30^o$ και $\hat{B} = 60^o$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Άλγεβρας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

10ο Κεφάλαιο

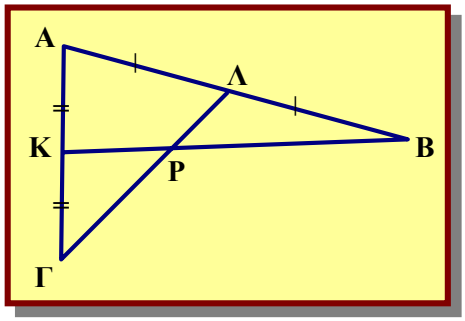
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1999** *Σάββατο 19 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως.



Να δείξετε ότι:

α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1.

Μονάδες 15

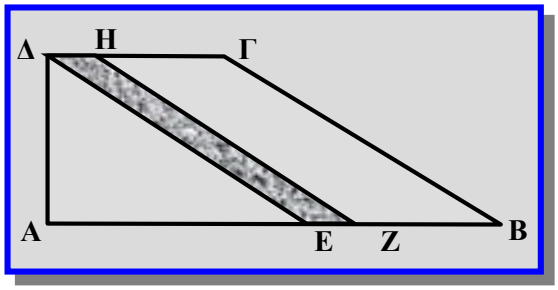
β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

Μονάδες 10

2. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999** *Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 4ο

Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του σχήματος έχει την πλευρά ΑΒ ίση με 55 m, την πλευρά ΓΔ ίση με 25 m, την πλευρά ΑΔ ίση με 40 m και τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ορθές. Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ, με ΔΕ // ΓΒ και ΖΗ // ΓΒ, ο οποίος θα χωρίσει το οικόπεδο σε δυο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ, όπως στο σχήμα.



α) Να βρεθεί το εμβαδόν του οικοπέδου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 3

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τεμαχίου ΑΕΔ.

Μονάδες 6

γ) Να βρεθεί το ΔΖ έτσι ώστε το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τεμάχιο ΑΕΔ.

Μονάδες 8

δ) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση **γ)**

Μονάδες 8

3. **Εσπερινά 2000** *Δευτέρα 5 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Το εμβαδό για καθένα από τα γεωμετρικά σχήματα που αναφέρονται στη στήλη Ι του επόμενου πίνακα δίνεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στη στήλη ΙΙ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Τετράγωνο πλευράς α	**1.** $E=\alpha\cdot\beta$
Β. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α, β	**2.** $E=(B-\beta)\frac{\upsilon}{2}$
Γ. Παραλληλόγραμμο (πλάγιο) με βάση α και (αντίστοιχο) ύψος υ	**3.** $E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$
Δ. Τρίγωνο με βάση α και (αντίστοιχο) ύψος υ	**4.** $E=\alpha\cdot\upsilon$
Ε. Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α	**5.** $E=\alpha^2$
ΣΤ. Τραπέζιο με βάσεις Β, β και ύψος υ	**6.** $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon$
	7. $E=\frac{\alpha\cdot\beta}{2}$
	8. $E=(B+\beta)\frac{\upsilon}{2}$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 12,5

Β. Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**1.Β.α** και **1.Β.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Το εμβαδό ενός τριγώνου είναι $24cm^2$ ενώ η βάση του είναι 12cm. Το αντίστοιχο ύψος είναι:

Α. 6cm **Β.** 5cm **Γ.** 4cm **Δ.** 2cm **Ε.** 12cm

Μονάδες 6,5

β. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 4cm και 9cm. Η πλευρά του τετραγώνου το οποίο έχει το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο αυτό είναι:

Α. 36cm **Β.** 6cm **Γ.** 6,5cm **Δ.** 13cm **Ε.** 5cm

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

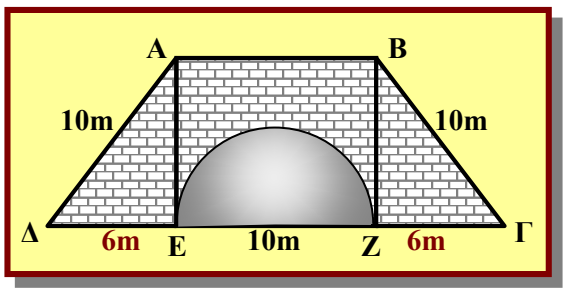
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η πρόσοψη μιας σήραγγας (τούνελ)

α. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 6



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **πανελλήνιες 2000** *Σάββατο 10 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ και ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5.

Να υπολογίσετε:

α) Την προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ.

Μονάδες 9

β) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 9

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

Μονάδες 7

5. **επαναληπτικές 2000** *Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά ευθύγραμμο τμήμα $\text{ΒΔ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2}$ και φέρουμε την ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΔΕΒ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔΒ})$

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τους λόγους $\frac{(\text{ΔΕΒ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ και $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΓ})}$

Μονάδες 10

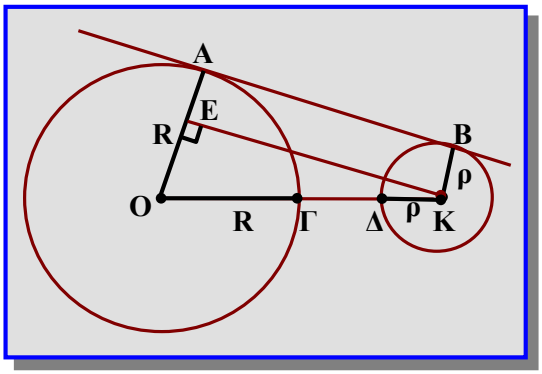
γ) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι $(\text{ΒΔΕ}) = (\text{ΑΜΕ})$

Μονάδες 10

6. **εσπερινά επαναληπτικές 2000** *Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R = 7m ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ = 2m. Η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ = 4m.



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α. Να υπολογίσετε το μήκος του κοινού εφαπτόμενου ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 15

Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι **ΑΒ = 12.**

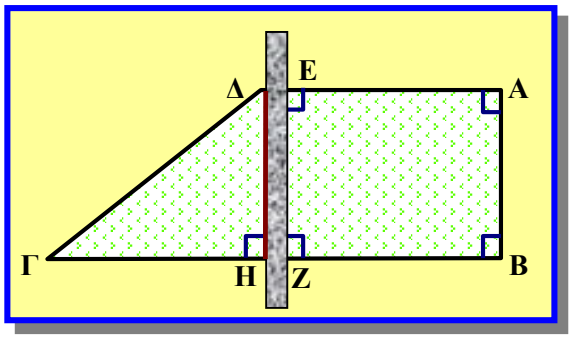
β. Να βρείτε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΚΟ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δύο αδέλφια κληρονόμησαν ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογώνιου τραπεζίου με βάσεις ΒΓ = 40m, ΑΔ = 15m και ύψος ΑΒ = 32m.

Κατά την ένταξη της περιοχής στο σχέδιο πόλεως, το οικόπεδο χωρίστηκε από ένα δρόμο πλάτους ΔΕ = ΗΖ = 5m (γραμμοσκιασμένη περιοχή) σε δύο τμήματα ΑΒΖΕ και ΔΗΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο πρώτος αδελφός πήρε το οικόπεδο ΑΒΖΕ, ενώ ο δεύτερος το ΔΗΓ.



α. Να υπολογίσετε το εμβαδό καθενός από τα δύο οικόπεδα.

Μονάδες 12

β. Αν ο δεύτερος αδελφός θελήσει να ανταλλάξει το οικόπεδό του με ένα οικόπεδο σχήματος τετραγώνου, ποια θα πρέπει να είναι η πλευρά του, ώστε το εμβαδό του οικοπέδου που θα πάρει να είναι ίσο με το εμβαδό του οικοπέδου που κληρονόμησε;

Μονάδες 12

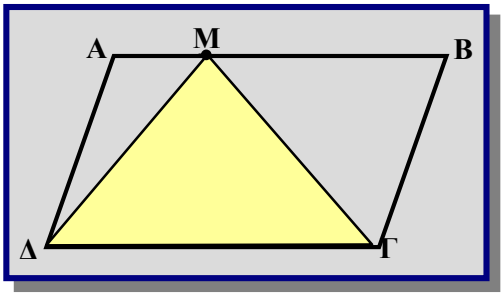
7.

εσπερινά 2001

Τετάρτη 13 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ.



α. Να αποδείξετε ότι ισχύει : $E_{M\Delta\Gamma} = E_{A M\Delta} + E_{BM\Gamma}$

Μονάδες 15

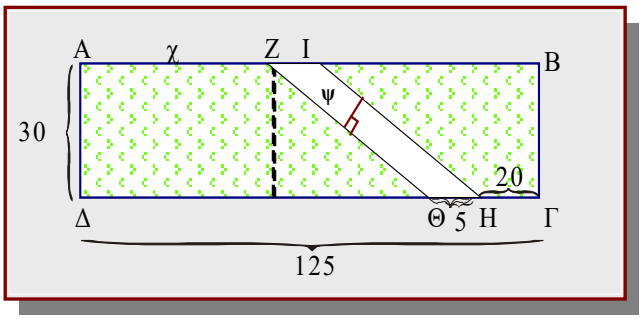
β. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, όταν $E_{M\Delta\Gamma} = 8$.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Στο οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου χαράχθηκε δρόμος ΘΖΙΗ σχήματος (πλαγίου παραλληλογράμμου), ο οποίος χωρίζει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΖΘΔ και ΙΒΓΗ έτσι ώστε το τεμάχιο ΑΖΘΔ να έχει εμβαδό διπλάσιο από το εμβαδό του ΙΒΓΗ, δηλαδή $E_{AZ\Theta\Delta} = 2 \cdot E_{IB\Gamma H}$.



Δίνονται : ΑΔ = 30, ΔΓ = 125, ΘΗ = 5, ΗΓ = 20.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του δρόμου ΘΖΙΗ .

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το μήκος χ του τμήματος ΑΖ .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το πλάτος ψ του δρόμου.

Μονάδες 9

8. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 16 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\angle\chi O\psi$, $\angle\psi Oz$, $\angle zO\chi$ έτσι ώστε $\angle\chi O\psi = \angle\psi Oz = 150^\circ$.
Στις ημιευθείες Οχ, Οψ, Oz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε :
ΟΑ = 2, ΟΒ = 4 και ΟΓ = 6.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E_{(O\Gamma A)}$ του τριγώνου ΟΓΑ.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$

Μονάδες 13

9. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Δευτέρα 9 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε να είναι :

$A\Delta = \dfrac{1}{3}AB$, $BE = \lambda \cdot B\Gamma$ και $\Gamma Z = \lambda \cdot \Gamma A$, όπου $0 < \lambda < 1$.

Να δείξετε ότι :

α) $\dfrac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \dfrac{1-\lambda}{3}$

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τους λόγους $\dfrac{E_{\Delta EZ}}{E_{AB\Gamma}} = \dfrac{3\lambda^2 - 4\lambda + 2}{3}$

Μονάδες 10

γ) Αν $\lambda = \dfrac{2}{3}$ το τρίγωνο ΔΕΖ έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

Μονάδες 8

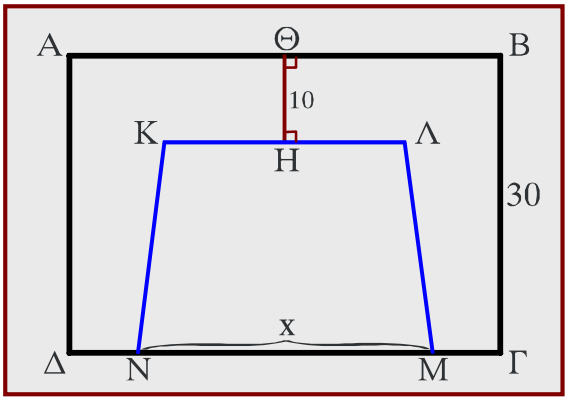
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

10. **εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001** Τετάρτη 11 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4ο

Στο οικόπεδο ΑΒΓΔ, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με εμβαδόν 1200 τ.μ., πρόκειται να χτιστεί πολυκατοικία, με κάλυψη ΚΛΜΝ, σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου.

Δίνονται ΒΓ = 30 μ, $\text{ΚΛ} = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}$, ΔΝ = ΜΓ και ότι η απόσταση των ΑΒ και ΚΛ είναι ίση με 10 μ.



α. Να βρείτε την πλευρά ΑΒ του οικοπέδου.

Μονάδες 8

β. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ είναι ίσο με τα $\frac{4}{10}$ του εμβαδού του οικοπέδου ΑΒΓΔ, δηλαδή αν ισχύει η σχέση $\text{Ε}_{\text{ΚΛΜΝ}} = \frac{4}{10}\text{Ε}_{\text{ΑΒΓΔ}}$, τότε να βρείτε :

i) Την πλευρά ΜΝ του τραπεζίου

Μονάδες 10

ii) Το εμβαδόν της ακάλυπτης επιφάνειας του οικοπέδου.

Μονάδες 7

11. **επαναληπτικές 2001** Παρασκευή 7 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε το σημείο Ε έτσι ώστε $\text{ΕΓ} = \frac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την ΑΕ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.

α. Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΕ} = \frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$. Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

β. $\text{ΕΖ} = \frac{2\sqrt{7}\,\alpha}{21}$ Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

γ. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΕΒ και ΓΕΖ.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. **εσπερινά επαναληπτικές 2001** *Τετάρτη 12 Σεπτεμβρίου*

Το Σεπτέμβριο του 2001 δεν υπήρχε θέμα από το κεφάλαιο αυτό.

13. **πανελλήνιες 2002** *Σάββατο 1 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$

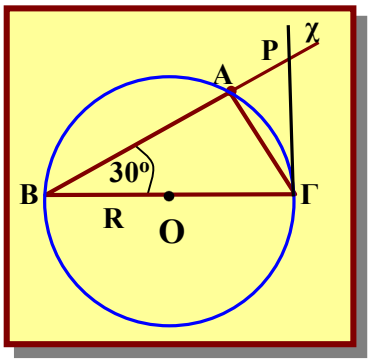
Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βχ τέτοια, ώστε η γωνία $\angle B\chi$ να είναι 30ο.

Έστω ότι η Βχ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βχ στο σημείο Ρ.

Να αποδείξετε ότι:



α. ΑΓ = R. Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μονάδες 5

β. $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4$.

Μονάδες 10

14. **Εσπερινά 2002** *Δευτέρα 3 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

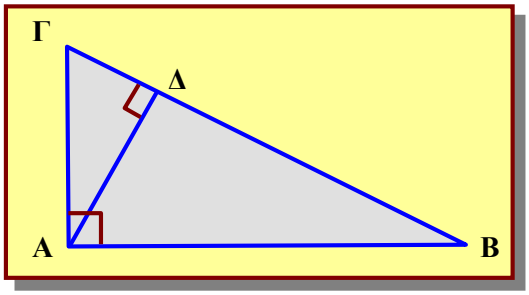
1) Το εμβαδόν τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Μονάδες 1,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (του παρακάτω σχήματος) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 40, ΑΓ = 30 και ότι το ΑΔ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.



Να βρείτε :

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

15. ***επαναληπτικές 2002*** ***Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος .

Μονάδες 11

16. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

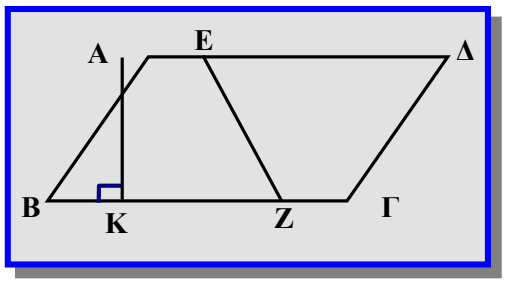
Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

3. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\eta\mu A$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, στο οποίο είναι ΑΕ = ΖΓ και ΑΚ το ύψος του.



α. Να αποδείξετε ότι $(ABZE)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

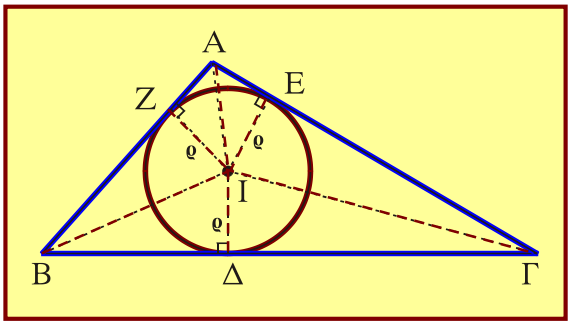
Μονάδες 13

εσπερινά 2003 ***Δευτέρα 2 Ιουνίου***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι , ρ).



Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου δίνεται από τον τύπο Ε = τ·ρ, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Μονάδες 10

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

3. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α,β,γ δίνεται από τον τύπο

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Μονάδες 3

5. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 5, ΑΓ = 12 και ΒΓ = 13.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^0$. Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το ύψος υ_α του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

18. ***πανελλήνιες 2003*** ***Σάββατο 7 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** αν η πρόταση είναι σωστή και **"Λάθος"** αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ύψος του.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ = $\sqrt{3}$.
Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνία Â . Έχει υπολογισθεί και είναι $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$.

β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = $\frac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.

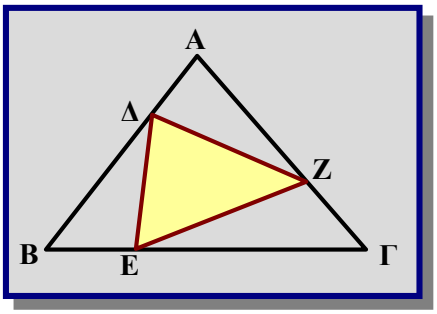
Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α :

α. Του τριγώνου ΑΔΖ

Μονάδες 9

β. Του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 7



19. επαναληπτικές 2003

Πέμπτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α,β,γ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\rho}$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Μονάδες 2

δ. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Α , ώστε $OA = R\sqrt{13}$. Από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου που τέμνει αυτόν στα σημεία Δ και Ε. Αν $AΔ = 2\,ΔE$, να υπολογίσετε:

α. Τη χορδή ΔΕ, ως συνάρτηση του R.

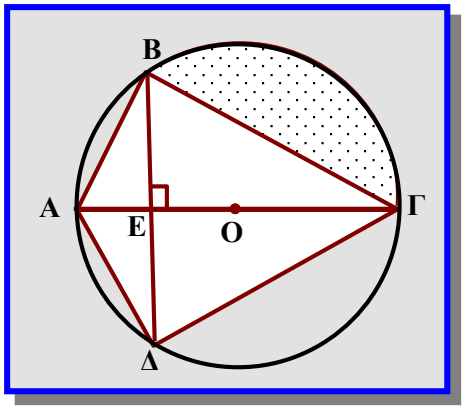
Μονάδες 13

β. Το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(OAΔ)}{(OEΔ)}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρός του ΑΓ. Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Δ, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $BΔ = R\sqrt{3}$. Έχει απαντηθεί.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ .

Μονάδες 8

20. ***εσπερινά 2004*** ***Τετάρτη 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ. Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{αβγ}{4R}$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και α, β, γ τα μήκη των πλευρών του.

Μονάδες 3

21. ***πανελλήνιες 2004*** ***Σάββατο 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ 3ο ***προσοχή να απαντηθεί***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma = 2,\ \beta = 1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(ΑΒΓ) = \dfrac{\beta\cdot\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $\alpha = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

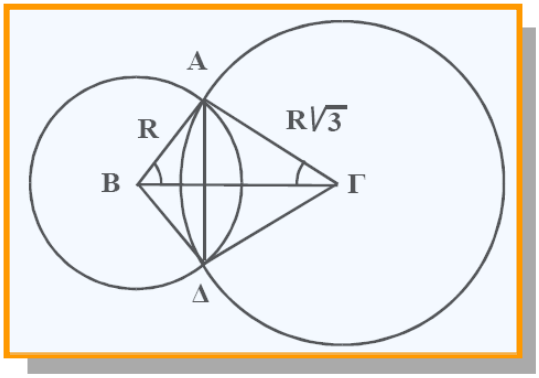
γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στη πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με μήκη πλευρών ΑΒ = R και ΑΓ = 3 R .

Γράφουμε τους κύκλους $(Β, R)$ και $(Γ, R\sqrt{3})$.



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R. Έχει υπολογισθεί και είναι **ΒΓ = 2R.**

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες Γ και Β . Έχει υπολογισθεί και είναι $\hat{Γ} = 30^o$ και $\hat{Β} = 60^o$.

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

10ο Κεφάλαιο

Απαντήσεις

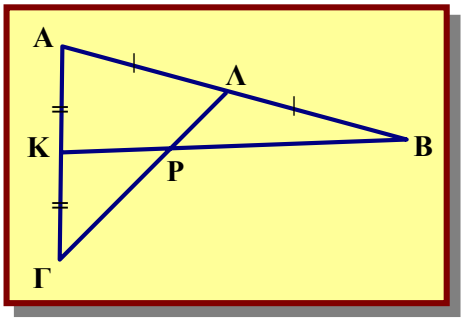
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1999** *Σάββατο 19 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως.



α) Το Λ μέσον του ΑΒ, άρα : $ΑΛ = ΛΒ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Το Κ μέσον του ΑΓ, άρα : $ΑΚ = ΚΓ = \frac{ΑΓ}{2}$.

Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν $\hat{Α} = \hat{Α}$ (κοινή γωνία)

άρα, ισχύει : $\frac{(ΑΚΒ)}{(ΑΛΓ)} = \frac{ΑΚ \cdot ΑΒ}{ΑΛ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{ΑΓ}{2} \cdot ΑΒ}{\frac{ΑΒ}{2} \cdot ΑΓ} \Leftrightarrow \frac{(ΑΚΒ)}{(ΑΛΓ)} = 1$

β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ, τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά.

Από το ερώτημα **α)** έχουμε : $\frac{(ΑΚΒ)}{(ΑΛΓ)} = 1 \Leftrightarrow (ΑΚΒ) = (ΑΛΓ) \Leftrightarrow (ΑΚΡΛ) + (ΛΡΒ) = (ΑΚΡΛ) + (ΚΡΓ)$

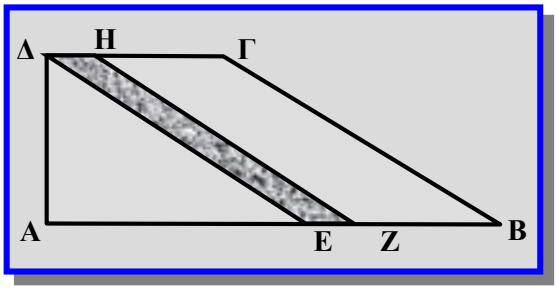
$\Leftrightarrow$ **(ΒΛΡ) = (ΚΓΡ)**

2. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999** *Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα είναι ΑΒ = 55 m, ΓΔ = 25 m, ΑΔ = 40m και $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$.

ΔΕ // ΓΒ και ΖΗ // ΓΒ.



α) Επειδή $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$ άρα ΑΒ και ΔΓ κάθετες στην ΑΔ άρα ΑΒ // ΔΓ άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με ύψος ΑΔ. Άρα $E_{ΑΒΓΔ} = \frac{ΑΒ + ΔΓ}{2} ΑΔ \Leftrightarrow$

$E_{ΑΒΓΔ} = \frac{55 + 25}{2} 40 \Leftrightarrow E_{ΑΒΓΔ} = 1.600\ m^2$

β) Επειδή ΔΕ // ΓΒ και ΔΓ // ΑΒ από το τραπέζιο του προηγουμένου ερωτήματος, άρα το ΔΕΒΓ παραλληλόγραμμο άρα ΔΓ = ΕΒ = 25 m. Άρα ΑΕ = ΑΒ – ΕΒ = 55 m – 25 m $\Leftrightarrow$ **ΑΕ = 30 m**

Έτσι λοιπόν είναι $E_{ΑΕΔ} = \frac{1}{2} ΑΕ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} 30 \cdot 40\,m^2 \Leftrightarrow E_{ΑΕΔ} = 600\,m^2$.

2ος τρόπος: Είναι $E_{ΑΕΔ} = E_{ΑΒΓΔ} - E_{ΔΓΒΕ}$, $E_{ΔΓΒΕ} = ΓΔ \cdot ΑΔ = 25 \cdot 40 \Leftrightarrow E_{ΔΓΒΕ} = 600$ άρα

$E_{ΑΕΔ} = 1600 - 600 \Leftrightarrow E_{ΑΕΔ} = 600\,m^2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ) Αν το ΖΗΒΓ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ΑΕΔ τότε θα είναι $E_{ZHB\Gamma} = E_{AE\Delta} = 600\,m^2$

Όμως ΖΗ // ΓΒ και ΔΓ // ΑΒ, το απέδειξες στο πρώτο ερώτημα άρα το ΖΗΒΓ παραλληλόγραμμο

άρα $E_{ZHB\Gamma} = Z\Gamma \cdot \upsilon$, το $\upsilon = A\Delta$ άρα $600\ m^2 = Z\Gamma \cdot 40 \Leftrightarrow Z\Gamma = 15\ m$ άρα $\Delta Z = A\Gamma - Z\Gamma = 25\ m - 15\ m$

$\Leftrightarrow$ $\Delta Z = 10\ m$.

δ) Το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση γ) θα το βρεις βρίσκοντας αρχικά το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΔΖΗΕ. Είναι $E_{\Delta ZHE} = \Delta Z \cdot A\Delta = 10 \cdot 40 = 400\,m^2$. Όμως αν θεωρήσεις ως βάση την ΔΕ τότε το ύψος χ θα είναι το πλάτος του δρόμου και $E_{\Delta ZHE} = \Delta E \cdot \chi$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ επειδή ΑΔ = 40 m και ΑΕ = 30 m θα είναι $\Delta E = \sqrt{30^2 + 40^2}\ m \Leftrightarrow \Delta E = 50\,m \Leftrightarrow$

$\Delta E = 50\,m$ άρα $E_{\Delta ZHE} = \Delta E \cdot \chi \Leftrightarrow 50 \cdot \chi = 400\,m^2$ άρα $\chi = 8m$ το πλάτος.

3. **Εσπερινά 2000** ***Δευτέρα 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Α.

Α.	**5.**
Β.	**1.**
Γ.	**4.**
Δ.	**6.**
Ε.	**3.**
ΣΤ.	**8.**

Β. Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**1.Β.α** και) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1.Β.α **Γ.**

1.Β.β **Β.**

ΘΕΜΑ 4ο

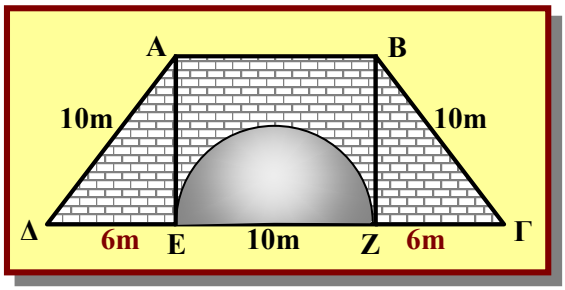
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η πρόσοψη μιας σήραγγας (τούνελ)

α. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ είναι

$(AE)^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Leftrightarrow (AE) = 8\,m$.

β. Το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$$(AB\Gamma\Delta)^2 = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2} = \frac{(22+10)8}{2} = 128\,m^2$$

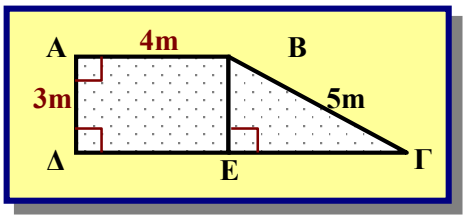


Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **πανελλήνιες 2000** *Σάββατο 10 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έστω το ορθογώνιο τραπέζιο του διπλανού σχήματος.



Φέρνουμε το ύψος ΒΕ, τότε η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ είναι το τμήμα ΓΕ.

Επειδή το ΑΒΕΔ ορθ. παραλληλόγραμμο τότε ΑΔ = ΒΕ = 3.

Άρα το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ δίνει

$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = B\Gamma^2 - BE^2 \Leftrightarrow E\Gamma^2 = 5^2 - 3^2$

$\Leftrightarrow E\Gamma^2 = 16 \Leftrightarrow E\Gamma = 4.$

β) Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, και ΔΓ = ΔΕ + ΕΓ και επειδή το ΑΒΕΔ ορθ. παραλληλόγραμμο τότε ΔΕ = ΑΒ = 4 άρα ΔΓ = 4 + 4 = 8 . Άρα $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} A\Delta \Leftrightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{4+8}{2} 3$

$\Leftrightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = 18$ τμ

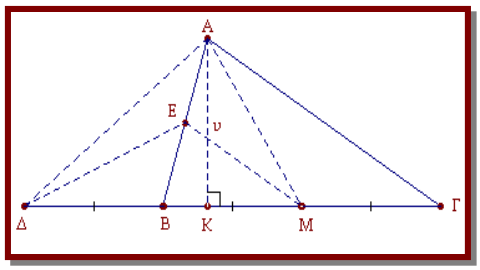
γ) Το τρίγωνο ΔΒΓ έχει βάση ΔΓ = 8 και ύψος ΒΕ = 3, οπότε :

$$E_{\Delta B\Gamma} = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot BE \Leftrightarrow E_{\Delta B\Gamma} = \frac{1}{2} 8 \cdot 3 \Leftrightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = 12 \text{ τμ}$$

5. **επαναληπτικές 2000** *Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 3ο

α) Επειδή ΔΕ διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΒ θα είναι $(\Delta EB) = (A\Delta E)$ (εφαρμογή 3η σελίδα 216 σχολικό βιβλίο)



άρα $(\Delta EB) = \frac{1}{2}(A\Delta B)$.

β) Επειδή $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν το ίδιο ύψος ΑΚ θα είναι

$(A\Delta B) = \frac{1}{2}\Delta B \cdot AK = \frac{1}{2}\frac{B\Gamma}{2} \cdot AK = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ άρα $(\Delta EB) = \frac{1}{2}(A\Delta B) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(AB\Gamma) = \frac{1}{4}(AB\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\frac{(\Delta EB)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$$

Είναι $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = BM = M\Gamma$ και τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος ΑΚ θα είναι

$(A\Delta B) = (ABM) = (AM\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ άρα $(A\Delta\Gamma) = \frac{3}{2}(AB\Gamma) \Leftrightarrow \frac{(A\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$ $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{2}{3}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

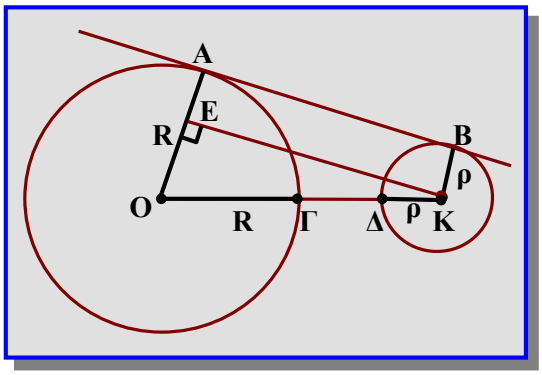
γ) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι $(\text{ΒΔΕ}) = (\text{ΑΜΕ})$

Είναι $(\text{ΒΔΕ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔΒ})$ και επειδή Ε μέσον της ΑΒ θα είναι $(\text{ΑΜΕ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΜΒ})$, επίσης όπως είδες και στο προηγούμενο ερώτημα είναι (ΑΔΒ) = (ΑΒΜ) άρα $(\text{ΒΔΕ}) = (\text{ΑΜΕ})$

6. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R = 7m ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ = 2m. Η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ = 4m.

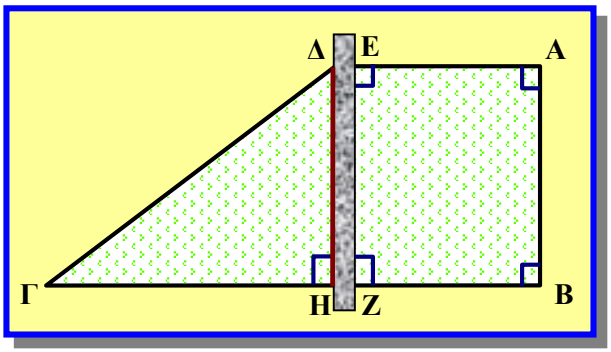


β. Το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΚΟ είναι $(\text{ΑΒΚΟ}) = \frac{(\text{ΟΑ} + \text{ΚΒ})\text{ΑΒ}}{2} = \frac{(7+2)12}{2} = 54\text{m}^2$.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

- ✓ Το εμβαδόν του (ΑΒΖΕ) = (ΑΔΗΒ) – (ΔΗΖΕ) $\Leftrightarrow (\text{ΑΒΖΕ}) = 15 \cdot 32 - 5 \cdot 32 = 320\text{m}^2$.
- ✓ Είναι ΓΗ = ΓΒ – ΗΒ = ΓΒ – ΔΑ = 40 – 15 = 25
  και επομένως : το εμβαδόν του
  $(\Delta\text{ΗΓ}) = \frac{1}{2}\Gamma\text{Η} \cdot \Delta\text{Η} = \frac{1}{2}25 \cdot 32 = 400\text{m}^2$.

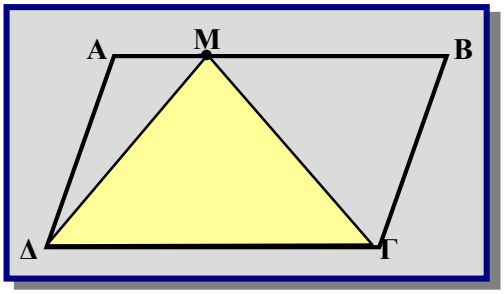


β. Αν ο δεύτερος αδελφός θελήσει να ανταλλάξει το οικόπεδό του με ένα οικόπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς α θα πρέπει $\alpha^2 = 400\text{m}^2 \Leftrightarrow \alpha = 20\text{m}$ να είναι η πλευρά του.

εσπερινά 2001 ***Τετάρτη 13 Ιουνίου***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο



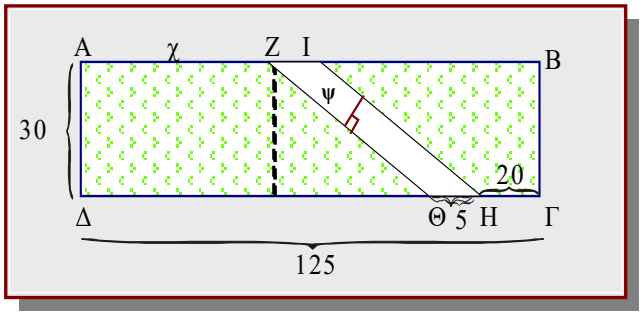
α. $E_{M\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot\upsilon=\frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}$ και

$E_{A\Delta M}+E_{BM\Gamma}=E_{AB\Gamma\Delta}-E_{M\Delta\Gamma}=E_{AB\Gamma\Delta}-\frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}=\frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}$

Άρα $E_{M\Delta\Gamma}=E_{A\Delta M}+E_{BM\Gamma}$

β. Είναι από το προηγούμενο ερώτημα $E_{M\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}\Leftrightarrow 8=\frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}\Leftrightarrow E_{AB\Gamma\Delta}=16\,\tau\mu$.

ΘΕΜΑ 4ο



α. $E_{\Theta ZHI}=\Theta H\cdot A\Delta\Leftrightarrow E_{\Theta ZHI}=5\mu\cdot 30\mu$
$\Leftrightarrow E_{\Theta ZHI}=150\ \tau\mu$

β. $E_{AZ\Theta\Delta}=2\cdot E_{IB\Gamma H}$

$\frac{AZ+\Theta\Delta}{2}A\Delta=2\frac{IB+\Gamma H}{2}\Gamma B$ και επειδή

$A\Delta=B\Gamma$, $\Delta\Theta=125-5-20=100$ και $IB=125-5-\chi=120-\chi$ θα είναι $\frac{\chi+100}{2}=120-\chi+20\Leftrightarrow$

$\chi+100=2(140-\chi)\Leftrightarrow\ \chi+100=280-2\chi\Leftrightarrow 3\chi=180\Leftrightarrow$ **$\chi=60$.**

γ. $E_{\Theta ZHI}=150\ \tau\mu\Leftrightarrow .150=Z\Theta\cdot\psi$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ZKΘ είναι ZK = 30,

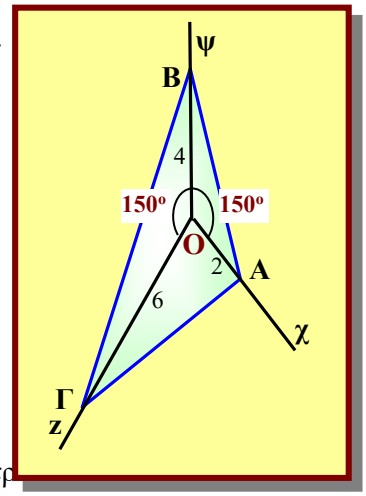
$K\Theta=\Delta\Theta-\Delta K=100-60=40$ άρα Πυθαγόρειο θεώρημα επειδή $K\Theta=40$ m και $ZK=30$ m

θα είναι $Z\Theta=\sqrt{30^2+40^2}$ m $\Leftrightarrow Z\Theta=50$ m άρα $150=Z\Theta\cdot\psi\Leftrightarrow 50\cdot\psi=150$ άρα

$\psi=3$ το πλάτος του δρόμου.

8. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 16 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 2ο



Είναι $\angle\chi O\psi=\angle\psi Oz=150^o$ και ΟΑ = 2, ΟΒ = 4 και ΟΓ = 6 όπως στο σχήμα.

α. Επειδή και ξέρεις δυο πλευρές, τις ΟΑ, ΟΓ και την περιεχόμενη γωνία $\angle zO\chi=60^0$,(αφού είναι $\angle\chi O\psi=\angle\psi Oz=150^o$), το εμβαδόν του ΟΑΓ θα το υπολογίσεις από τον τύπο $E_{OA\Gamma}=\frac{1}{2}(OA)\cdot(O\Gamma)\eta\mu\angle zO\chi$ =

$\frac{1}{2}2\cdot 6\cdot\eta\mu 60^0\Leftrightarrow E_{OA\Gamma}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$ **$E_{OA\Gamma}=3\sqrt{3}$** .

β. Το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$ μπορείς να τον υπολογίσεις με τρεις τρ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1ος τρόπος : Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΒΟΓ έχουν $\hat{AOB} = \hat{BO\Gamma} = 150^o$.

Άρα $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{OA \cdot OB}{OB \cdot O\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{1}{3}$

2ος τρόπος : Υπολογίζοντας ξεχωριστά τα εμβαδά E_{OAB} και $E_{OB\Gamma}$ με τον τύπο που χρησιμοποίησες πριν δηλ. $E_{OAB} = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)\eta\mu\chi O\psi = \frac{1}{2}2\cdot 4\cdot \eta\mu 150^0 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow E_{OAB} = 2$ και

$E_{OB\Gamma} = \frac{1}{2}(OB)\cdot(O\Gamma)\eta\mu\psi Oz = \frac{1}{2}4\cdot 6\cdot \eta\mu 150^0 = 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 6 \Leftrightarrow E_{OB\Gamma} = 6$ άρα $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3ος τρόπος : Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή βάση τότε ο λόγος των εμβαδών θα ισούται με το λόγο των υψών από τις κορυφές Α και Γ αντίστοιχα. Όμως τα ύψη ΑΚ και ΓΛ υπολογίζονται από το τρίγωνο ΟΑΓ αφού ξέρω τις πλευρές ΟΑ = 2, ΟΓ = 6 και το εμβαδόν $E_{OA\Gamma} = 3\sqrt{3}$.

Πράγματι $E_{OA\Gamma} = \frac{1}{2}OA\cdot\Gamma\Lambda = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\Gamma\Lambda = \Gamma\Lambda \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = 3\sqrt{3}$, όμοια $E_{OA\Gamma} = \frac{1}{2}O\Gamma\cdot AK = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot AK = 3AK$

$\Leftrightarrow 3AK = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow AK = \sqrt{3}$ άρα $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{AK}{\Gamma\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}} = \frac{1}{3}$

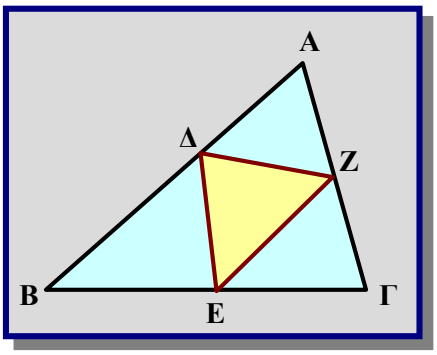
9. επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Δευτέρα 9 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 4ο

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν $\hat{A} = \hat{A}$ (κοινή γωνία) θα είναι $\frac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{A\Delta\cdot AZ}{AB\cdot A\Gamma}$ και

$AZ = A\Gamma - \Gamma Z \Leftrightarrow AZ = (1-\lambda)A\Gamma$ και $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ άρα



$\frac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{A\Delta\cdot AZ}{AB\cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{3}AB\cdot(1-\lambda)A\Gamma}{AB\cdot A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1-\lambda}{3}$

β) Είναι $\frac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1-\lambda}{3} \Leftrightarrow E_{A\Delta Z} = \frac{1-\lambda}{3}\cdot E_{AB\Gamma}$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Με όμοιο τρόπο και επειδή τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\hat{B} = \hat{B}$ (κοινή γωνία) θα είναι

$\frac{E_{B\Delta E}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{B\Delta\cdot BE}{AB\cdot B\Gamma}$, είναι $BE = \lambda\cdot B\Gamma$ και $B\Delta = AB - A\Delta \Leftrightarrow B\Delta = AB - \frac{1}{3}AB \Leftrightarrow B\Delta = \frac{2}{3}AB$ άρα

$\frac{E_{B\Delta E}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{B\Delta\cdot BE}{AB\cdot B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E_{(B\Delta E)}}{E_{(AB\Gamma)}} = \frac{\frac{2}{3}AB\cdot\lambda\cdot B\Gamma}{AB\cdot B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E_{(B\Delta E)}}{E_{(AB\Gamma)}} = \frac{2}{3}\lambda \Leftrightarrow E_{B\Delta E} = \frac{2\lambda}{3}E_{AB\Gamma}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επίσης όμοια τα τρίγωνα ΖΓΕ και ΑΒΓ έχουν $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}$ (κοινή γωνία) θα είναι $\frac{E_{ZΓE}}{E_{ABΓ}}=\frac{ZΓ\cdot ΓE}{AB\cdot BΓ}$, είναι

$ΓZ=\lambda\cdot ΓA$ και $ΓE=BΓ-BE \Leftrightarrow ΓE=BΓ-\lambda\cdot BΓ \Leftrightarrow ΓE=(1-\lambda)BΓ$ άρα $\frac{E_{ZΓE}}{E_{ABΓ}}=\frac{ZΓ\cdot ΓE}{AB\cdot BΓ} \Leftrightarrow$

$\frac{E_{ZΓE}}{E_{ABΓ}}=\frac{\lambda\cdot ΓA\cdot(1-\lambda)BΓ}{AB\cdot BΓ} \Leftrightarrow \frac{E_{ZΓE}}{E_{ABΓ}}=\lambda-\lambda^2 \Leftrightarrow E_{ZΓE}=(\lambda-\lambda^2)E_{ABΓ}$.

Έτσι λοιπόν

$E_{ΔZE}=E_{ABΓ}-E_{AΔZ}-E_{BΔE}-E_{ZΓE} \Leftrightarrow E_{ΔZE}=E_{ABΓ}-\frac{1-\lambda}{3}\cdot E_{ABΓ}-\frac{2}{3}\lambda\cdot E_{ABΓ}-(\lambda-\lambda^2)E_{ABΓ}$

$\Leftrightarrow E_{ΔZE}=\left(1-\frac{1-\lambda}{3}-\frac{2\lambda}{3}-\lambda+\lambda^2\right)E_{ABΓ} \Leftrightarrow E_{ΔZE}=\frac{3-1+\lambda-2\lambda-3\lambda+3\lambda^2}{3}E_{ABΓ} \Leftrightarrow$

$E_{ΔZE}=\frac{3\lambda^2-4\lambda+2}{3}E_{ABΓ} \Leftrightarrow \frac{E_{ΔZE}}{E_{ABΓ}}=\frac{3\lambda^2-4\lambda+2}{3}$

γ) Η συνάρτηση $\psi=3\lambda^2-4\lambda+2$ έχει $\alpha=2>0$, $\beta=-4$, $\gamma=2$ και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή όταν

$\lambda=-\frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{-4}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$.

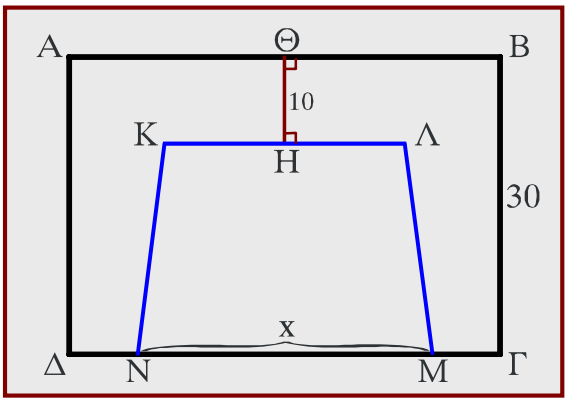
Κανένα σχόλιο για το τι σχέση είχε αυτή η ερώτηση με γεωμετρία.

10. ***εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** ***Τετάρτη 11 Ιουλίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Στο οικόπεδο ΑΒΓΔ, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με εμβαδόν 1200 τ.μ., πρόκειται να χτιστεί πολυκατοικία, με κάλυψη ΚΛΜΝ, σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου.

Δίνονται ΒΓ = 30 μ, $ΚΛ=\frac{1}{2}ΑΒ$, ΔΝ = ΜΓ και ότι η απόσταση των ΑΒ και ΚΛ είναι ίση με 10 μ.



α. Είναι $E_{ABΓΔ}=1200 \Leftrightarrow 1200=AB\cdot BΓ \Leftrightarrow AB=40$.

β. Αν ισχύει η σχέση $E_{ΚΛΜΝ}=\frac{4}{10}E_{ABΓΔ}$, τότε:

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

i) Είναι $ΚΛ = \frac{1}{2}ΑΒ = \frac{1}{2}40 = 20$, ΘΗ = 10 άρα το ύψος υ του ΚΛΜΝ είναι

$υ = ΒΓ - ΘΗ = 20$ επομένως από την σχέση $E_{ΚΛΜΝ} = \frac{4}{10}E_{ΑΒΓΔ} \Leftrightarrow E_{ΚΛΜΝ} = \frac{4}{10}1200 = 480$.

και $E_{ΚΛΜΝ} = \frac{(ΜΝ + ΚΛ)υ}{2} \Leftrightarrow \frac{(χ+20)20}{2} = 480 \Leftrightarrow 10χ + 200 = 480 \Leftrightarrow$ **ΜΝ = χ = 28**.

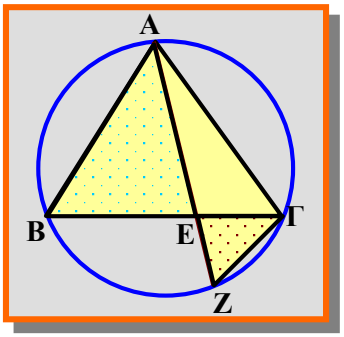
ii) Το εμβαδόν της ακάλυπτης επιφάνειας του οικοπέδου είναι 1200 τμ – 480 τμ = 720.

Μονάδες 7

11. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 3ο

ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α , $ΕΓ = \frac{α}{3}$ $ΑΕ = \frac{α\sqrt{7}}{3}$, $ΕΖ = \frac{2\sqrt{7}α}{21}$.



γ. Επειδή $\widehat{ΑΕΒ} = \widehat{ΓΕΖ}$ ως κατακορυφήν, θα είναι

$$\frac{(ΑΕΒ)}{(ΓΕΖ)} = \frac{ΑΕ \cdot ΕΒ}{ΓΕ \cdot ΕΖ} = \frac{\frac{α\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2α}{3}}{\frac{α}{3}\cdot\frac{2α\sqrt{7}}{21}} = \frac{\frac{2α^2\sqrt{7}}{9}}{\frac{2α^2\sqrt{7}}{63}} \Leftrightarrow \frac{(ΑΕΒ)}{(ΓΕΖ)} = 7$$

12. ***εσπερινά επαναληπτικές 2001*** ***Τετάρτη 12 Σεπτεμβρίου***

Το Σεπτέμβριο του 2001 δεν υπήρχε θέμα από το κεφάλαιο αυτό.

13. ***πανελλήνιες 2002*** ***Σάββατο 1 Ιουνίου***

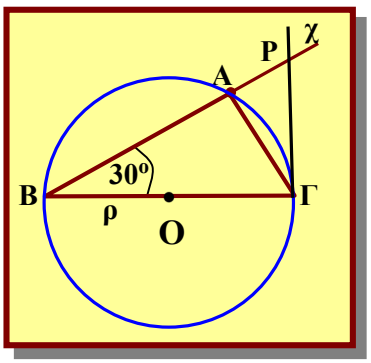
ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία.

Α2. **γ.** **Λάθος.**

ΘΕΜΑ 3ο

Η γωνία $\widehat{ΡΒχ} = 30^o$, ΓΡ εφαπτομένη, η ΑΓ = R.



β.

1ος τρόπος: Είναι $\hat{Ρ} = \hat{Ρ}$ και $\widehat{ΡΒΓ} = \widehat{ΡΓΑ}$, εγγεγραμμένη και υπό χορδής και εφαπτομένης γωνία, άρα τα τρίγωνα ΡΒΓ και ΡΑΓ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2$ επομένως $\frac{(ΡΒΓ)}{(ΡΑΓ)} = λ^2 = 4$.

2ος τρόπος: Επειδή τα τρίγωνα ΡΒΓ και ΡΑΓ έχουν μια γωνία τους ίση $(\hat{Α} = \hat{Γ})$ τότε

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)}=\frac{P\Gamma\cdot B\Gamma}{PA\cdot A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)}=\frac{P\Gamma\cdot 2R}{PA\cdot R}=\frac{2P\Gamma}{PA}$ (1).

Επειδή το τρίγωνο ΡΑΓ είναι ορθογώνιο και επειδή η γωνία ΡΓΑ = 30ο (υπο χορδής και εφαπτομένης)

άρα η $PA=\frac{P\Gamma}{2}$. Άρα η σχέση (1) γίνεται $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)}=\frac{2P\Gamma}{\frac{P\Gamma}{2}}\Leftrightarrow\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)}=4$

14. ***Εσπερινά 2002*** ***Δευτέρα 3 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. 1) Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=\frac{1}{2}40\cdot 30=600$

15. ***επαναληπτικές 2002*** ***Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

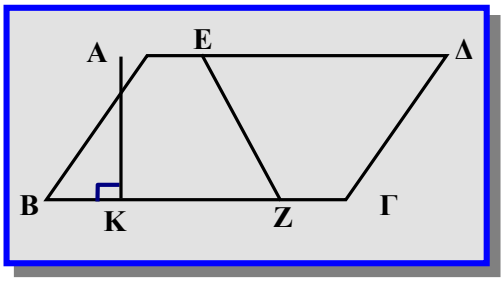
16. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. 3. Σ

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχήμα δίπλα),
στο οποίο είναι ΑΕ = ΖΓ και ΑΚ το ύψος του.



α. Είναι $(ABZE)=\frac{1}{2}(AE+BZ)AK=\frac{1}{2}(Z\Gamma+BZ)AK=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot AK\Leftrightarrow(ABZE)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

17. ***εσπερινά 2003*** ***Δευτέρα 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι , ρ).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $(ΑΒΓ)=(ΑΙΓ)+(ΑΙΒ)+(ΒΙΓ) \Leftrightarrow$

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΓ\cdot ρ+\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ρ+\frac{1}{2}ΒΓ\cdot ρ \Leftrightarrow$

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}(ΑΓ+ΑΒ+ΒΓ)ρ=τ\cdot ρ$

Β. **3.** **Σ.** **5.** **Σ**

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 5, ΑΓ = 12 και ΒΓ = 13.

α. Να αποδείξετε ότι $\hat{Α}=90^0$. Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μονάδες 7

β. Αφού $\hat{Α}=90^0$ άρα $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ=\frac{1}{2}5\cdot 12=30$ τμ.

γ. Είναι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΒΓ\cdot υ_α \Leftrightarrow \frac{1}{2}13\cdot υ_α=30 \Leftrightarrow 13\cdot υ_α=60 \Leftrightarrow υ_α=\frac{60}{13}$.

δ. Είναι $E_{ΑΒΓ}=\frac{αβγ}{4R}=\frac{5\cdot 12\cdot 3}{4R}=30 \Leftrightarrow R=\frac{30}{45} \Leftrightarrow \mathbf{R=\frac{2}{3}}$.

18. ***πανελλήνιες 2003*** ***Σάββατο 7 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β.

α. **Λάθος** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ***δεν*** ισούται με το λόγο της ομοιότητας αλλά ***με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας***.

β. **Σωστό.**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ = $\sqrt{3}$ και $\hat{Α}=\frac{2π}{3}$ από το πρώτο ερώτημα.

β. $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημΑ=\frac{1}{2}1\cdot 1\cdot ημ\frac{2π}{3}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ τ. μ.

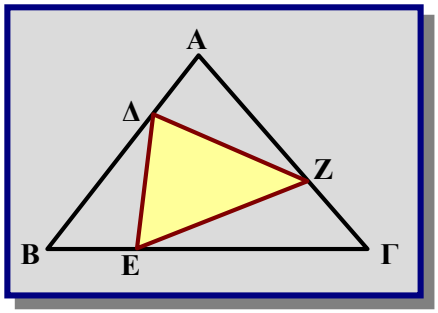
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α και Α

$\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.

Επίσης $\Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha \Leftrightarrow AZ = \frac{2}{3}\alpha$



α. Επειδή το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο άρα $(ABΓ) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Επειδή το ΑΒΓ και ΑΔΖ έχουν κοινή την γωνία Α θα είναι :

$$\frac{(ABΓ)}{(AΔZ)} = \frac{AB\cdot AΓ}{AΔ\cdot AZ} = \frac{AB\cdot AΓ}{\frac{1}{3}AB\cdot\frac{2}{3}AΓ} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (AΔZ) = \frac{2}{9}(ABΓ) = \frac{2}{9}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow (AΔZ) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18}.$$

β. Τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΔΕ και ΓΖΕ είναι ίσα γιατί $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o \\ AΔ = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha \\ AZ = BΔ = \Gamma E = \frac{2}{3}\alpha \end{cases}$ άρα

$$(ΔEZ) = (ABΓ) - 3(AΔZ) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12}$$

19. **επαναληπτικές 2003** *Πέμπτη 11 Σεπτεμβρίου*

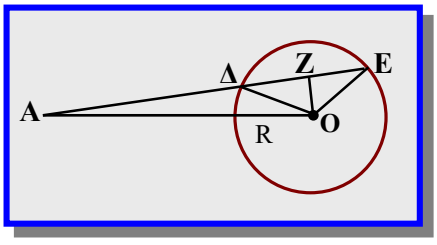
ΘΕΜΑ 1ο

Β. **γ.** **Λάθος** **δ.** **Σωστό**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω κύκλος (O, R) και σημείο Α , ώστε $OA = R\sqrt{13}$ και τέμνουσα ΑΔΕ, ώστε ΑΔ = 2 ΔΕ.

α. Από τη δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο (O, R) έχεις : $AΔ\cdot AE = (OA)^2 - R^2 = \left(R\sqrt{13}\right) - R^2$,



$AΔ = 2ΔE$ άρα $AE = 3ΔE$ οπότε $6ΔE^2 = 12R^2 \Leftrightarrow$

$ΔE^2 = 2R^2 \Leftrightarrow$ **$ΔE = R\sqrt{2}$**

β. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΔΕ έχουν κοινό ύψος ΟΖ άρα ο λόγος των εμβαδών θα είναι ο λόγος των βάσεων τους : $\frac{(OAΔ)}{(OEΔ)} = \frac{AΔ}{EΔ} \Leftrightarrow \frac{(OAΔ)}{(OEΔ)} = \frac{2EΔ}{EΔ} \Leftrightarrow$ **$\frac{(OAΔ)}{(OEΔ)} = 2$**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω κύκλος (Ο, R) και μια διάμετρός του ΑΓ. Αν η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Δ, και είναι $B\Delta = R\sqrt{3}$ από το **α.** ερώτημα τότε :

β. Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις διαγώνιές του κάθετες (ΒΔ μέσοκάθετος στην ΟΑ) θα είναι $E_{ABΓΔ} = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot 2R}{2} \Leftrightarrow \mathbf{E_{ABΓΔ} = R^2\sqrt{3}}$.

20. ***εσπερινά 2004*** ***Τετάρτη 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **Σωστό**

21. ***πανελλήνιες 2004*** ***Σάββατο 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma = 2$, $\beta = 1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot \gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Ισχύει ο τύπος $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A = \frac{\beta \cdot \gamma\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή το ΑΒΓ είναι οξυγώνιο τρίγωνο άρα $\eta\mu A = 45^o$.

Επίσης $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right) \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu A =$

$1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 - \left(4 + 4\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 7 + 2\sqrt{2} - 4\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 7 - 4 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3$ και επειδή α είναι πλευρά τριγώνου άρα $\alpha = \sqrt{3}$

β. $(AB\Gamma) = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \Leftrightarrow \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} = \frac{\beta \cdot \gamma\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{R} = \sqrt{2} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

γ. Επειδή το ΑΒΓ είναι οξυγώνιο τρίγωνο άρα ισχύεις ο τύπος: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \chi$, όπου χ η προβολής της πλευράς $AB = \gamma$ πάνω στη πλευρά $B\Gamma = \alpha$.

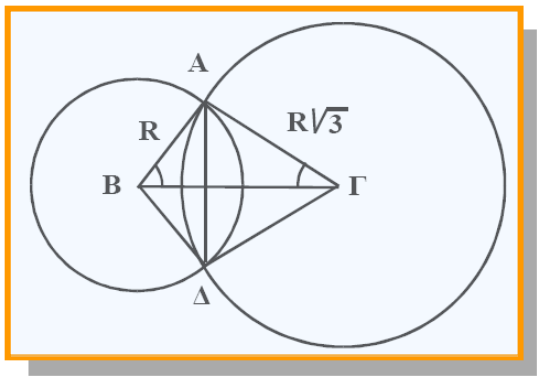
$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma \cdot \chi \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \chi \Leftrightarrow$

$1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 4 - 4\sqrt{3} \cdot \chi \Leftrightarrow 4\sqrt{3} \cdot \chi = 7 - 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\chi=\frac{4-2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{6}.$$

ΘΕΜΑ 4ο



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με μήκη πλευρών ΑΒ = R και ΑΓ = 3 R .

Γράφουμε τους κύκλους (B, R) και $\left(\Gamma, R\sqrt{3}\right)$.

Από τα **α.** και **β.** είναι **ΒΓ = 2R,** $\hat{\Gamma}=30^{o}$ και $\hat{B}=60^{o}$.

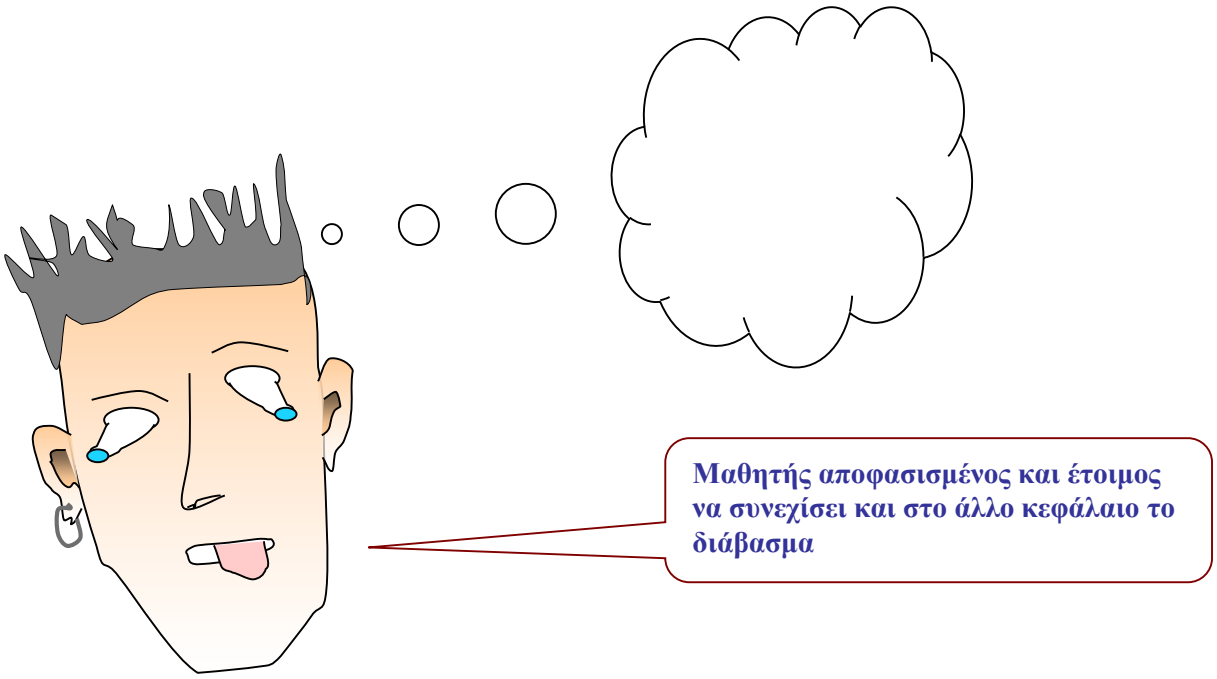
γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ μπορείς να το υπολογίσεις με δυο τρόπους.

1ος τρόπος: Αφού $\hat{B}=60^{o}$ και $\hat{\Gamma}=30^{o}$ άρα $\hat{A}=90^{o}$, επομένως

$$(AB\Delta\Gamma)=2(AB\Gamma)=2\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=R\cdot R\sqrt{3}=R^{2}\sqrt{3}.$$

2ος τρόπος: Αφού $\hat{\Gamma}=30^{o}\Leftrightarrow A\Gamma\Delta=60^{o}$ άρα ΑΓΔ ισόπλευρο, επομένως $A\Delta=R\sqrt{3}$ και επειδή το ΑΒΔΓ έχει κάθετες διαγώνιες θα είναι $(AB\Delta\Gamma)=\frac{(A\Delta)(B\Gamma)}{2}=\frac{R\sqrt{3}2R}{2}=R^{2}\sqrt{3}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

11ο Κεφάλαιο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1979**

Το θέμα αφορά τις εξετάσεις που ακυρώθηκαν λόγω της διαρροής των θεμάτων.

ΘΕΜΑ 2ο

1. Σε δοθέντα κύκλο (Ο , ρ) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του από την ακτίνα του κύκλου.

2. **πανελλήνιες 1979**

ΘΕΜΑ 2ο

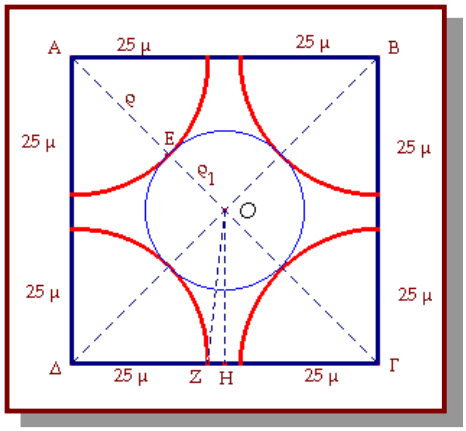
Σε ένα κύκλο (Ο,R) να εγγραφεί κανονικό τρίγωνο (ισόπλευρο) και να υπολογιστεί η πλευρά και το απόστημά του από την ακτίνα του κύκλου.

3. ***πανελλήνιες 1999***

Σάββατο 19 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 4ο

α. Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του κήπου τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων.



Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

Μονάδες 8

β. Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

Μονάδες 5

γ. Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση **β.** ;

Μονάδες 5

δ. Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 1999** *Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Πώς εγγράφουμε τετράγωνο σε κύκλο (Ο , R) ;

Μονάδες 4,5

β. Να αποδείξετε ότι για την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο , R) ισχύουν οι τύποι : $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 8

Β. **α.** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) και έχει πλευρά λ_4, απόστημα α_4, περίμετρο P_4 και εμβαδόν E_4. Αν $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, τότε να γράψετε στο τετράδιο σας τα μεγέθη της στήλης Α και δίπλα την αντίστοιχη σωστή τιμή από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
R	$3\sqrt{2}$
α_4	$24\sqrt{2}$
P_4	24
E_4	6
	$12\sqrt{2}$
	72

Μονάδες 10

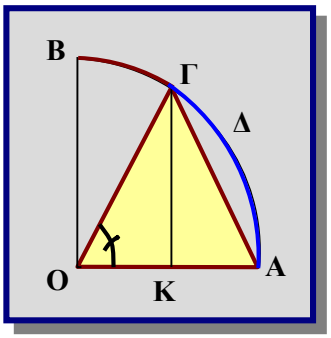
β. Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 32, τότε η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι :

Α. $4\sqrt{2}$ **Β.** 8 **Γ.** 4 **Δ.** $8\sqrt{2}$

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3ο

Η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ του κυκλικού τομέα του διπλανού σχήματος είναι ορθή και η ακτίνα του είναι 6. Η κάθετη ευθεία στο μέσον Κ της ακτίνας ΟΑ τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ.



α. Να δείξετε ότι η γωνία ΑΟΓ είναι 60°.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΑΓ.

Μονάδες 6

γ. Ο λόγος του μήκους του τόξου ΑΓ προς το μήκος του τόξου ΓΒ είναι :

Α. 3 **Β.** 1/2 **Γ.** 2 **Δ.** 1/3

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΑ.

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **Εσπερινά 2000** *Δευτέρα 5 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Η γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίση με $120°$ ενώ η πλευρά του είναι $\lambda_\nu = 12$ cm.

α. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου αυτού είναι ν = 6.

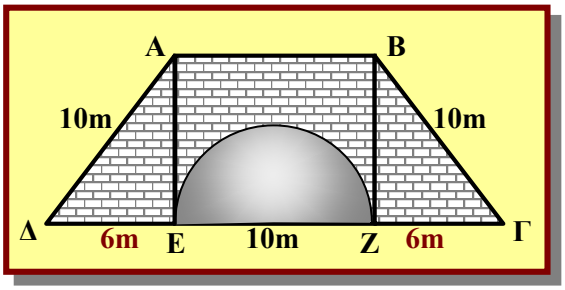
Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου και το απόστημα α_ν του πολυγώνου.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η πρόσοψη μιας σήραγγας (τούνελ)



α. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ.

Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι ***ΑΕ = 8 m.***

β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Έχει απαντηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι ***ΑΒΓΔ = 128 m²***.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του ημικυκλίου με διάμετρο ΕΖ. (Δίνεται ότι $\pi \approx 3{,}14$)

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το κόστος της επένδυσης της πρόσοψης (γραμμοσκιασμένο μέρος) με πέτρα αν η επένδυση κοστίζει 4.000 δρχ ανά τετραγωνικό μέτρο.

Μονάδες 7

6. **πανελλήνιες 2000** *Σάββατο 10 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (Ο , R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 15.

Να υπολογίσετε:

α. Την ακτίνα R του κύκλου.

Μονάδες 6

β. Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο , R).

Μονάδες 6

γ. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

δ. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 7

επαναληπτικές 2000 *Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7.

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι (O_1,R_1), (O_2,R_2) και (O_3,R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α, Β, και Γ.

Αν $R_1=R_2=\sqrt{2}$ και $R_3=2-\sqrt{2}$

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 10

8. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000*** ***Τρίτη 12 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα κανονικό πολύγωνο η κεντρική του γωνία είναι $\omega_\nu=12^\circ$ και η πλευρά του είναι $\lambda_\nu=2\,\text{cm}$.

α. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τη γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ του πολυγώνου.

Μονάδες 9

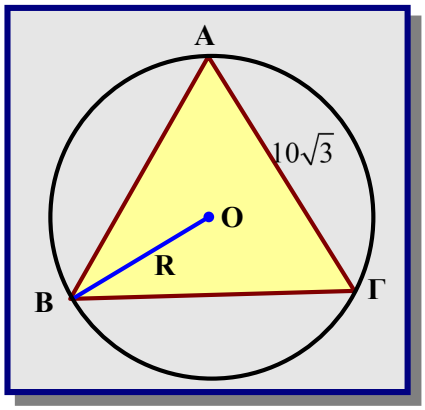
γ. Να βρείτε την περίμετρο P_ν του πολυγώνου.

Μονάδες 7

9. ***εσπερινά 2001*** ***Τετάρτη 13 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $10\sqrt{3}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R .



α. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΑΓΒ

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του κανονικού εξαγώνου που εγγράφεται στον κύκλο.

Μονάδες 5

10. ***πανελλήνιες 2001*** ***Σάββατο 16 Ιουνίου***

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου.
Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι $ΓΕ = 2\sqrt{2}\cdot R$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ .

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

11. επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Δευτέρα 9 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (Ο , R) θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$, $BΓ = R\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του R :

α. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΓ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ

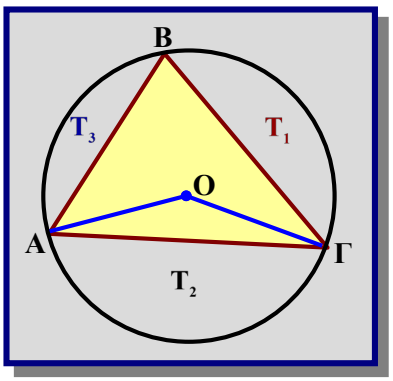
Μονάδες 7

β. Το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων T_1, T_2 και T_3.

Μονάδες 10

γ. Τη χορδή ΑΓ.

Μονάδες 8



12. εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Τετάρτη 11 Ιουλίου

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $5\sqrt{2}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R.

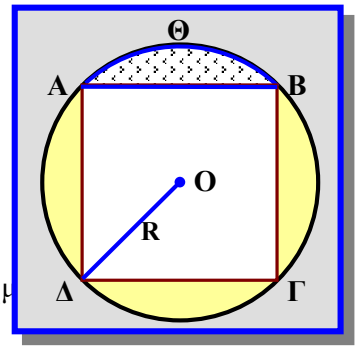
α. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου ΑΒΔ

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήμ

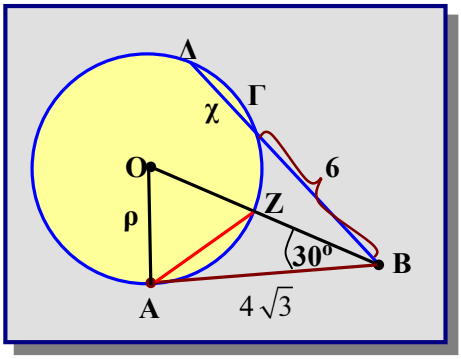


Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΑΒ, μήκους $4\sqrt{3}$, εφάπτεται στο σημείο Α του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Η γωνία ΑΒΟ είναι ίση με 30° και η ΒΓΔ είναι τέμνουσα του κύκλου, με μήκος του τμήματος ΒΓ = 6.



α. Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας ρ του κύκλου.

Έχει υπολογισθεί και είναι **ρ = 4** .

β. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΔΓ.

Έχει υπολογισθεί και είναι **χ = 2** .

γ. Αν Ζ είναι η τομή της ΟΒ με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΖ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

(Για το ερώτημα αυτό χρειάζεται μόνον η γωνία $\text{ΑΒΟ} = 30^\circ$).

Μονάδες 5

13. ***επαναληπτικές 2001*** ***Παρασκευή 7 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R). Η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την πλευρά λ_4 του εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο , R) τετραγώνου και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με την πλευρά λ_6 του εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο , R) κανονικού εξαγώνου. Φέρουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΗ} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΓ} = \dfrac{R\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2}$

Μονάδες 6

δ. Με κέντρο την κορυφή Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, και με κέντρο την κορυφή Γ και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των καμπυλόγραμμων τριγώνων ΑΒΕ και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΑΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

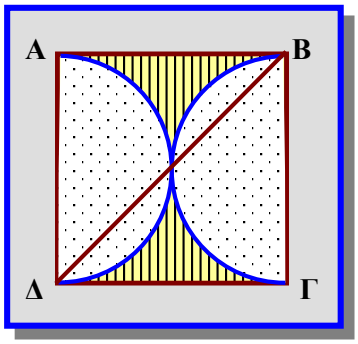
Μονάδες 10

14. **εσπερινά επαναληπτικές 2001** *Τετάρτη 12 Σεπτεμβρίου*

ΘΕΜΑ 2ο

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με διαγώνιο $B\Delta = 2\sqrt{2}$ οι πλευρές ΒΓ, ΑΔ είναι διάμετροι των δύο εφαπτόμενων ημικυκλίων.

Να υπολογίσετε:



α. Την πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 5

β. Το εμβαδόν του τετραγώνου.

Μονάδες 5

γ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

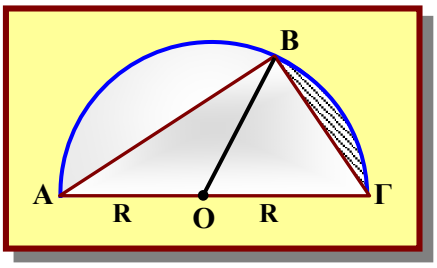
Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω ημικύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας R = 10 το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ισούται με $\frac{20\pi}{3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{O}B = 120^o$.

Μονάδες 8



β. Να υπολογίσετε το μήκος των χορδών ΒΓ και ΑΒ.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος ΒΓΔΒ.

Μονάδες 9

15. **πανελλήνιες 2002** *Σάββατο 1 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** ή **"Λάθος"** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Σε κύκλο (Ο, R), το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ^o δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$.

Μονάδα 1

Β. **α.** Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (O,R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

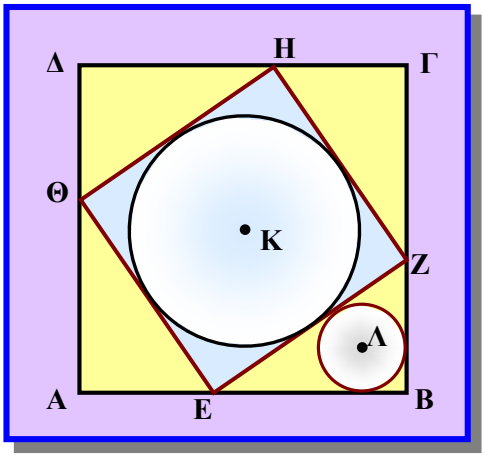
β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε : ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3cm.



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ , ρ) στο τρίγωνο ΕΒΖ είναι ρ = 1cm.

Μονάδες 12

γ. Εάν (Κ , R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ , ρ).

Μονάδες 8

16. ***Εσπερινά 2002*** ***Δευτέρα 3 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η τιμή κάθε μεγέθους που αναφέρεται στη στήλη Ι του πίνακα που ακολουθεί, δίνεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στη στήλη ΙΙ.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	**1.** $2\pi R$
Β. Μήκος κύκλου ακτίνας R	**2.** πR^2
Γ. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° σε κύκλο ακτίνας R.	**3.** R^2
Δ. Μήκος τόξου μ° σε κύκλο ακτίνας R	**4.** $\frac{\pi R \mu^o}{180^o}$
	5. $\frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o}$
	6. $2\pi R^3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 16

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** , αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ** , αν αυτή είναι λανθασμένη.

2. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 1,5

3. Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Μονάδες 1,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. Η κεντρική γωνία ω_ν ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\omega_\nu = \frac{360^0}{\nu}$.

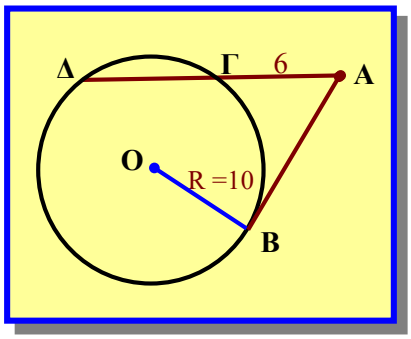
Μονάδες 1,5

6) Το μήκος λ_6 της πλευράς κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, δίνεται από τον τύπο $\lambda_6 = R$.

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R = 10. Το τμήμα ΑΒ μήκους $\sqrt{96}$ εφάπτεται στο σημείο Β του κύκλου (Ο,R). Το τμήμα ΑΓ της τέμνουσας ΑΓΔ έχει μήκος 6.



Α. Να αποδείξετε ότι η ΓΔ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R).

Μονάδες 10

Β. Στο κανονικό εξάγωνο με πλευρά τη ΓΔ να βρείτε:

α. Το απόστημα α_6

Μονάδες 5

β. Το εμβαδόν E_6

Μονάδες 5

γ. Τη γωνία φ_6

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου το μήκος της διαγωνίου ΑΓ είναι $6\sqrt{2}$.
Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο κύκλου που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

Να βρείτε :

α. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ

Μονάδες 5

β. το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{BE}$

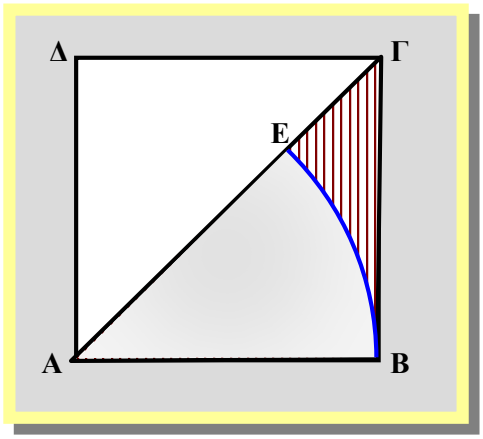
Μονάδες 7

γ. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{ABE}$ και

Μονάδες 7

δ. το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου τριγώνου ΕΒΓ .

Μονάδες 6



επαναληπτικές 2002

Τρίτη 10 Σεπτεμβρίου

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17.

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Η γωνία κανονικού $\nu-$γώνου είναι : $\varphi_\nu = 180^0 - \dfrac{360^0}{\nu}$

δ. Σε κάθε κανονικό $\nu-$γωνο ακτίνας R , πλευράς λ_ν και αποστήματος α_ν ισχύει η σχέση $\lambda_\nu^2 = \dfrac{\alpha_\nu^2}{4} + R^2$ Μονάδες 8

Γ. Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό **Στήλης ΙΙ**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

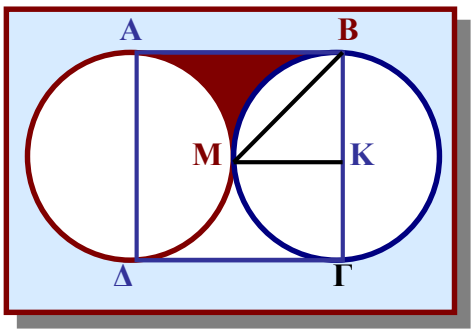
Στήλη Ι : κανονικό πολύγωνο	**Στήλη ΙΙ : πλευρά λ_ν**
α. κανονικό εξάγωνο	**1.** $R\sqrt{2}$
β. ισόπλευρο τρίγωνο	**2.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$
γ. τετράγωνο	**3.** $R\sqrt{3}$
	4. $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
	5. R

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4cm . Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα :



Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΒ , όπου Κ το μέσο της ΒΓ. Μονάδες 12

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ, Μονάδες 13

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) .

Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ , τέτοιο ώστε $ΑΔ = \sqrt{3}\cdot ΑΕ$ και Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο.

α. Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου.

Έχει απαντηθεί στο 9ο κεφάλαιο και είναι $ΕΖ = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot α$.

β. Να αποδείξετε ότι $ΕΖ = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot α$. Έχει απαντηθεί στο 9ο κεφάλαιο.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε, ως συνάρτηση του α το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\widehat{ΔΟΖ}$.

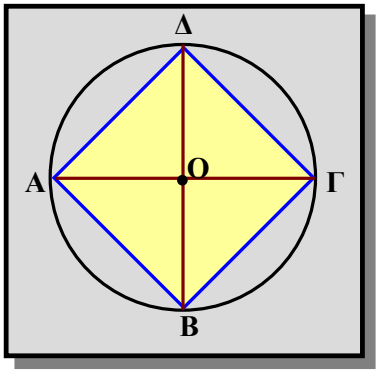
Μονάδες 10

18. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** ***Τετάρτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στον κύκλο (Ο,R) του παρακάτω σχήματος φέρουμε τις κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:



α. το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο,

Μονάδες 5

β. η πλευρά του τετραγώνου είναι $λ_4 = R\sqrt{2}$ και

Μονάδες 5

γ. το απόστημα του τετραγώνου είναι $α_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 5

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

2. Το μήκος L του κύκλου (Ο , R) δίνεται από τον τύπο $L = 2πR^2$.

4. Το απόστημα $α_6$ κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $α_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο με πλήθος πλευρών ν.

Η γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ του κανονικού πολυγώνου είναι $\hat{\varphi}_\nu = 120^\circ$ και η ακτίνα του R = 10.

α. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου αυτού είναι ν = 6.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε την κεντρική γωνία ω_ν του πολυγώνου.

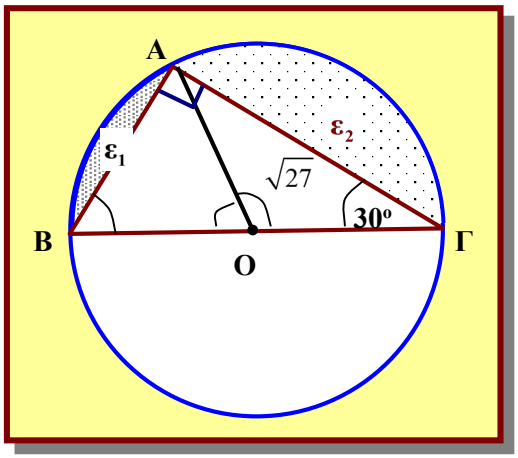
Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E_ν του πολυγώνου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ με γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και πλευρά $A\Gamma = \sqrt{27}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι η διάμετρος του κύκλου έχει μήκος 6.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων ΘBA και $\Theta A\Gamma$.

Μονάδες 8

γ. Αν ε_1 είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία BOA και ε_2 είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $AO\Gamma$, να αποδείξετε ότι η διαφορά $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ είναι ίση με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΘBA.

Μονάδες 9

19. **εσπερινά 2003** *Δευτέρα 2 Ιουνίου*

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_4 = R\sqrt{5}$$

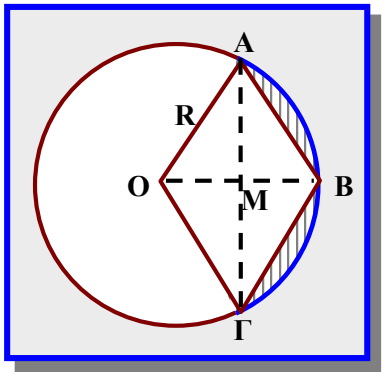
2. Η πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο , R) και τα σημεία του Α, Β, Γ, έτσι ώστε το τετράπλευρο ΟΑΒΓ να είναι ρόμβος.



α. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = λ_3$, δηλαδή είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R).

Μονάδες 6

γ. Αν Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου ΟΑΒΓ, τότε να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, τη δύναμη του σημείου Μ ως προς τον κύκλο (Ο, R).

Μονάδες 6

δ. Αν η ακτίνα του κύκλου είναι R = 2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Στην πρωτεύουσα της Ιαπωνίας, το Τόκιο, τον Ιούλιο του 2003 θα διεξαχθεί η Παγκόσμια Ολυμπιάδα των Μαθηματικών.

Ένα πάρκο της πρωτεύουσας έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ πλευράς 2km.

Ένας μαθητής που θα συμμετάσχει στο διαγωνισμό, περπατάει κατά μήκος της περιμέτρου του πάρκου, αρχίζοντας από την κορυφή Α και ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΒΓΔΕΖΑ φθάνει σε ένα σημείο Μ έχοντας διανύσει μήκος 5 km.

α. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαδρομής.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε το εμβαδόν του πάρκου.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΜ.

Μονάδες 12

20. ***πανελλήνιες 2003*** ***Σάββατο 7 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (Ο , R).

α. Στον κύκλο (Ο , R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $λ_4 = R\sqrt{2}$, όπου $λ_4$ η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $α_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου $α_4$ το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

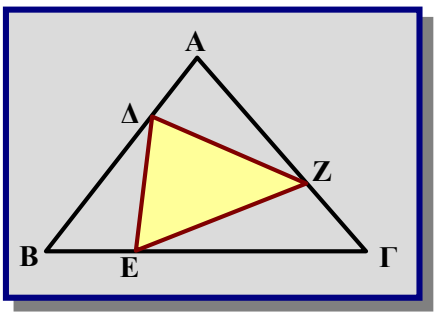
Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α :

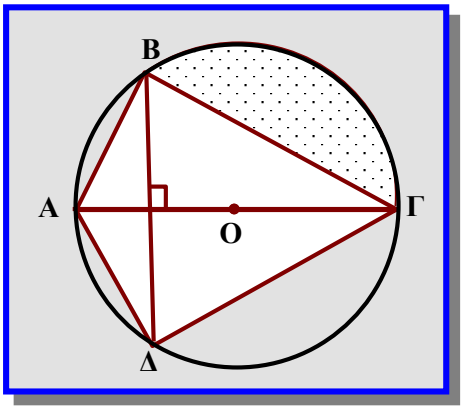
γ. Του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ .

Μονάδες 9

21. ***επαναληπτικές 2003*** ***Πέμπτη 11 Σεπτεμβρίου***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρός του ΑΓ.
Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Δ, όπως στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = R\sqrt{3}$.

Έχει αποδειχθεί.

γ. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.

Μονάδες 9

22. ***εσπερινά 2004*** ***Τετάρτη 2 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

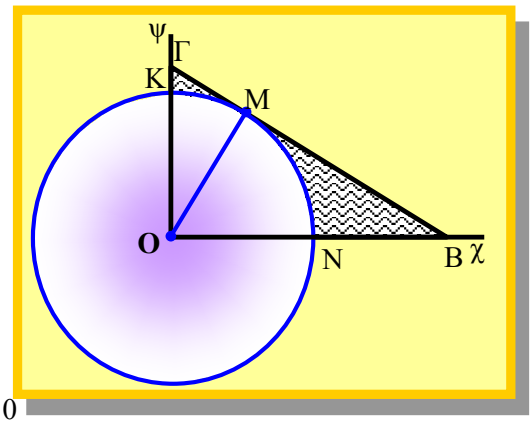
Ε. Για την πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισχύει $\lambda_3 = R\sqrt{5}$.

Μονάδες 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η ορθή γωνία χΟψ , ο κύκλος (Ο , R), με R = 12, ο οποίος τέμνει τις πλευρές Οχ, Οψ της γωνίας στα σημεία Ν, Κ αντίστοιχα και το σημείο Β της Οχ, για το οποίο ισχύει ΟΒ = 24.



Αν η εφαπτομένη του κύκλου, που άγεται από το σημείο Β, εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Μ και τέμνει την πλευρά Οψ στο σημείο Γ, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΟΝ είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΜΝ.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τριγώνου ΟΒΓ.

Μονάδες 15

Το **β.** ερώτημα είναι σχεδόν ίδιο με αυτό των πανελληνίων του 2001.

23. ***πανελλήνιες 2004*** ***Σάββατο 5 Ιουνίου***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.

Στήλη Ι	**Στήλη Ι Ι**
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E = \tau \cdot \rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = 360 \cdot \mu \cdot R \cdot \pi^2$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \frac{\beta + B}{2} \upsilon$
	4. $E = \frac{1}{2} R_\nu \alpha_\nu$
	5. $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$

Στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Σε κάθε κανονικό ν – γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει : $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{2} = R^2$

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1A_2 \cdots A_\nu$ A_2 ... Αν εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R.

Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_\nu = 150^o$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_ν.

Μονάδες 8

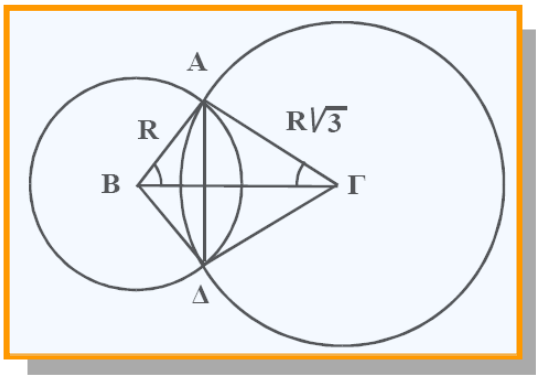
γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

Παρόμοιο θέμα με το **ΘΕΜΑ 2ο** των επαναληπτικών των Εσπερινών του 2002

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) με μήκη πλευρών ΑΒ = R και ΑΓ = 3 R .
Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$)



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R. Έχει υπολογισθεί και είναι **ΒΓ = 2R.**

β. Τις γωνίες Γ και Β . Έχει υπολογισθεί και είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$ και $\hat{B} = 60^o$.

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Έχει υπολογισθεί και είναι $(AB\Delta\Gamma) = \frac{(A\Delta)(B\Gamma)}{2} = \frac{R\sqrt{3}2R}{2} = R^2\sqrt{3}$.

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Γεωμετρίας

Πανελλήνιες 1999 - 2004

11ο Κεφάλαιο

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

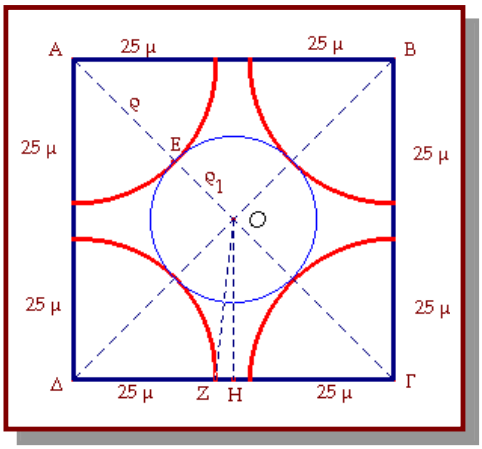
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα 1999

Ζήτημα 4ο

Απάντηση:

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = 40\sqrt{2} \cong 40 \cdot 1,41 \cong 56$ m. Η ακτίνα των κυκλικών περιοχών που ποτίζονται είναι $\rho = 25$m. Είναι $\rho + \rho = 25 + 25 = 50 < 56$, σημαίνει ότι οι κυκλικοί τομείς δεν τέμνονται.



Σημείωση : αυτό είναι απαραίτητο να δειχτεί γιατί το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται θα βρεθεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τεσσάρων κυκλικών τομέων επομένως πρέπει να δείξουμε ότι το τετράγωνο χωρίζεται σε τμήματα που δεν έχουν κοινά σημεία και άρα ισχύει το αντίστοιχο αξίωμα για τα εμβαδά σελίδα 212 σχολικό βιβλίο) .

Δηλαδή : αν E_1 το εμβαδόν του τμήματος του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα, τότε θα είναι $E_1 = \alpha^2 - 4Εκτ$ όπου Εκτ το εμβαδόν των κυκλικών τμημάτων $E_1 = \alpha^2 - 4Εκτ = \alpha^2 - 4\dfrac{\pi\rho^2 90^0}{360} = \alpha^2 - \pi\rho^2 = (40\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 25^2 \Leftrightarrow$ **$E_1 = 3200 - 625\pi$**

β) Ο πέμπτος μηχανισμός πρέπει να ποτίζει έναν κυκλικό δίσκο με κέντρο το κέντρο του τετραγώνου και ο οποίος να εφάπτεται στους τέσσερις κυκλικούς τομείς έτσι ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς. Επομένως, η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι : $\rho_1 = OE = OA - AE = \dfrac{A\Gamma}{2} - \rho$. Η διαγώνιος του τετραγώνου από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 40\sqrt{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 80$ άρα $\rho_1 = \dfrac{80}{2} - 25$

$\Leftrightarrow$ **$\rho_1 = 15$ μ**

γ) Αν E_2 το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση **β)** τότε αυτό θα είναι: το εμβαδόν E_1 που παρέμεινε αρχικά απότιστο μείον το εμβαδόν του κύκλου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός δηλαδή $E_2 = E_1 - \pi\rho_1^2 \Leftrightarrow E_2 = 3200 - 625\pi - \pi \cdot 15^2 \Leftrightarrow E_2 = 3200 - 625\pi - 225\pi$

$\Leftrightarrow$ **$E_2 = 3200 - 850\pi$**

δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

δ) Η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα έχει μήκος ΟΖ, βλέπε σχήμα. Αν Η το μέσον αυτής της πλευράς του τετραγώνου τότε θα ισχύει : $OZ^2 = OH^2 + ZH^2$ (1) . $OH = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{40\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow OH = 20\sqrt{2}$ μ και $ZH = \Delta H - \Delta Z \Leftrightarrow$

$ZH = \dfrac{\alpha}{2} - 25 \Leftrightarrow ZH = \dfrac{40\sqrt{2}}{2} - 25 \Leftrightarrow ZH = 20\sqrt{2} - 25$

Αν αντικαταστήσω στη σχέση (1) έχω $OZ^2 = (20\sqrt{2})^2 + (20\sqrt{2} - 25)^2 \Leftrightarrow$

$OZ^2 = 800 + 800 - 1000\sqrt{2} + 625 \Leftrightarrow OZ^2 = 2225 - 1000\sqrt{2} \Leftrightarrow$ **$OZ = \sqrt{2225 - 1000\sqrt{2}}$**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Σεπτέμβριος 1999

Ζήτημα 1ο

Α. **α)** Πώς εγγράφουμε τετράγωνο σε κύκλο (Ο , R) ;

Δες σχολικό βιβλίο

β) **Δες σχολικό βιβλίο**

Β. **α)** Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) και έχει πλευρά λ_4 , απόστημα α_4, περίμετρο P_4 και εμβαδόν E_4. Αν $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, τότε να γράψετε στο τετράδιο σας τα μεγέθη της στήλης Α και δίπλα την αντίστοιχη σωστή τιμή από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
R	$3\sqrt{2}$
α_4	$24\sqrt{2}$
P_4	24
E_4	6
	$12\sqrt{2}$
	72

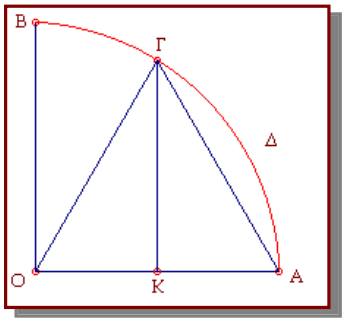
Απάντηση

Στήλη Α	Στήλη Β
R	6
α_4	$3\sqrt{2}$
P_4	$24\sqrt{2}$
E_4	72

β) Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 32, τότε $\lambda_4^2 = 32 \Leftrightarrow \lambda_4 = \sqrt{32} \Leftrightarrow \lambda_4 = 4\sqrt{2}$. Οπότε για την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου θα ισχύει : $\lambda_4 = R\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} = R\sqrt{2} \Leftrightarrow$ **R = 4** άρα σωστή απάντηση η **Γ. 4**

Ζήτημα 3ο

Η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ του κυκλικού τομέα του διπλανού σχήματος είναι ορθή και η ακτίνα του είναι 6. Η κάθετη ευθεία στο μέσον Κ της ακτίνας ΟΑ τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ.



α) Αφού ΚΓ μέσο ⊥ της ΟΑ θα είναι ΟΓ = ΓΑ. Είναι και ΟΓ = ΟΑ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου άρα ΟΑ = ΟΓ = ΑΓ άρα το τρίγωνο ΟΑΓ ισόπλευρο άρα **ΑΟΓ = ΟΓΑ = ΓΑΟ = 60⁰**

β) Το μήκος του τόξου ΑΓ δίνεται από τον τύπο $l = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60^0}{180^0} \Leftrightarrow$ **l = 2π**

γ) Ο λόγος του μήκους του τόξου ΑΓ προς το μήκος του τόξου ΓΒ είναι $\frac{l}{l'} = \frac{\frac{\pi \cdot 6 \cdot 60^0}{180^0}}{\frac{\pi \cdot 6 \cdot 30^0}{180^0}} \Leftrightarrow \frac{l}{l'} = 2$

άρα σωστή απάντηση η : **Γ. 2**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

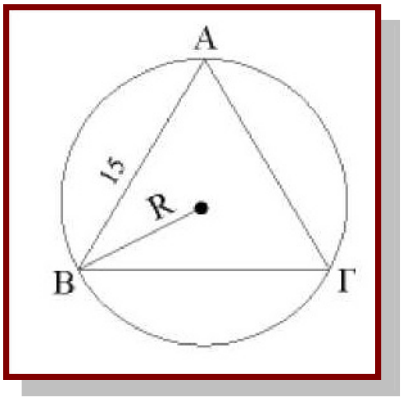
δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΑ είναι $E_{ΑΔΓΑ} = E_{ΟΑΔΓ} - E_{ΑΒΓ}$, Είναι $E_{ΟΑΔΓ} = \frac{\pi\rho^2 60^0}{360^0} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 60^0}{360^0} \Leftrightarrow E_{ΟΑΔΓ} = 6\pi$ και $E_{ΑΒΓ} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ όπου α η πλευρά του τριγώνου ΟΑΓ δηλαδή ΟΑ = ΟΓ = ΑΓ = 6 άρα $E_{ΑΒΓ} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E_{ΑΒΓ} = 9\sqrt{3}$ άρα $E_{ΑΔΓΑ} = E_{ΟΑΔΓ} - E_{ΑΒΓ} \Leftrightarrow$ **$E_{ΑΔΓΑ} = 6\pi - 9\sqrt{3}$** τμ

Θέματα 2000

Ζήτημα 3ο

Σε κύκλο (Ο , R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 15.
Να υπολογίσετε:

Απάντηση:



α) Η ακτίνα R του κύκλου Από τη θεωρία είναι: $\lambda_3 = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda_3}{\sqrt{3}} = \frac{\lambda_3\sqrt{3}}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ **$R = 5\sqrt{3}$**

β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο , R) είναι $E_{(O,R)} = \pi R^2 = \pi\left(5\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$ **$E_{(O,R)} = 75\pi$** τετρ. μονάδες.

γ) Γνωρίζουμε ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α έχει εμβαδόν : $E_{ΑΒΓ} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ λοιπόν αν είναι α = ΑΒ = 15 τότε είναι

$E_{ΑΒΓ} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$ **$E_{ΑΒΓ} = \frac{225\sqrt{3}}{4}$**

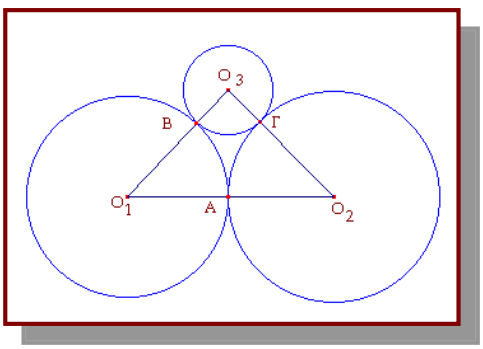
δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο θα το βρεις αφαιρώντας από τον εμβαδόν του κύκλου το εμβαδόν του τριγώνου :

$E_{χωρίου} = E_{(O,R)} - E_{ΑΒΓ} = 75\pi - \frac{225\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow E_{χωρίου} = \frac{300\pi - 225\sqrt{3}}{4}$

Σεπτέμβριος 2000

Ζήτημα 4ο

Τρεις κύκλοι (O_1, R_1), (O_2, R_2) και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α, Β, και Γ.
Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$



α. Για να αποδείξεις ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο σκέφτεσαι τα εξής : $O_1O_3 = R_1 + R_3 = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow O_1O_3 = 2$ και $O_2O_3 = R_2 + R_3 = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow O_2O_3 = 2$ άρα ισοσκελές και $O_1O_2 = R_1 + R_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow O_1O_2 = 2\sqrt{2}$

Έτσι $(O_1O_3)^2 + (O_2O_3)^2 = 4 + 4 = 8 \Leftrightarrow (O_1O_2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (O_1O_2)^2 = 8$ επομένως ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος άρα το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Επειδή το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ εκτός από ορθογώνιο είναι και ισοσκελές άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 45^0$.

$S_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R_1 45^0}{180^0} \Leftrightarrow S_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, $S_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi R_2 45^0}{180^0} \Leftrightarrow S_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ και $S_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi R_3 90^0}{180^0} \Leftrightarrow S_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{2}$

άρα η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$S_{\overset{\frown}{AB}} + S_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + S_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{2\pi - \pi\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow S_{\overset{\frown}{AB}} + S_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + S_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \pi$

γ. Για να υπολογίσεις το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ πρέπει να αφαιρέσεις από το εμβαδόν του τριγώνου $O_1O_2O_3$ τα εμβαδά των τομέων O_1AB $O_2A\Gamma$ και $O_3B\Gamma$

Είναι $E_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}O_1O_3 \cdot O_2O_3 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 \Leftrightarrow E_{O_1O_2O_3} = 2$ και $E_{O_1AB} = \frac{\pi(R_1)^2 45^0}{360^0} = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8} \Leftrightarrow E_{O_1AB} = \frac{\pi}{4}$

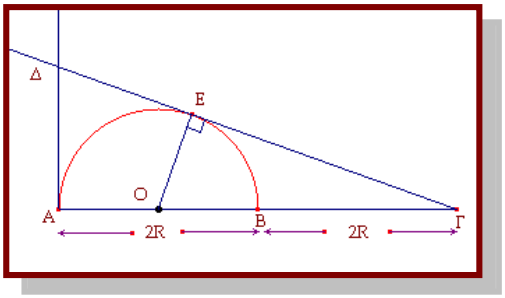
άρα και $E_{O_2A\Gamma} = \frac{\pi}{4}$ επίσης $E_{O_3B\Gamma} = \frac{\pi(R_3)^2 90^0}{360^0} = \frac{\pi(2-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{\pi(4-4\sqrt{2}+2)}{4} = \frac{6\pi}{4} - \frac{\pi 4\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$

$E_{O_3B\Gamma} = \frac{3\pi}{2} - \pi\sqrt{2}$ άρα $E = E_{O_1O_2O_3} - E_{O_1AB} - E_{O_2A\Gamma} - E_{O_3B\Gamma} = 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\frac{3\pi}{2} - \pi\sqrt{2}) =$

$2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} + \pi\sqrt{2} \Leftrightarrow E = 2 - 2\pi + \pi\sqrt{2} \Leftrightarrow E = 2 - (2-\sqrt{2})\pi$

Θέματα 2001

Ζήτημα 4ο



α. Είναι $(\Gamma E)^2 = \Gamma A \cdot \Gamma B \Leftrightarrow (\Gamma E)^2 = 4R \cdot 2R \Leftrightarrow$

$(\Gamma E)^2 = 8R^2 \Leftrightarrow \Gamma E = 2\sqrt{2}\cdot R$

Η απάντηση έχει δοθεί στο 9ο κεφάλαιο.

β. Τα τρίγωνα ΓΟΕ και ΓΑΔ είναι όμοια διότι

$\begin{cases} \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} \text{ και} \\ \hat{E} = \hat{A} = 90^0 \end{cases}$ άρα $\frac{\Gamma O}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma E}{\Gamma A} \Leftrightarrow$ **ΓΑ·ΓΟ = ΓΔ·ΓΕ**

Η απάντηση έχει δοθεί στο 9ο κεφάλαιο.

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma\Delta \cdot \Gamma E \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\cdot R\right)\cdot \Gamma\Delta = 4R\cdot 3R \Leftrightarrow$

$\Gamma\Delta = \frac{12R^2}{2\sqrt{2}\cdot R} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{6R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3R\sqrt{2}$ **(Η απάντηση έχει δοθεί στο 9ο κεφάλαιο)**

δ. Το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ θα το βρεις αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ αφαιρέσεις το εμβαδόν του ημικυκλίου δηλαδή :

$E = (AB\Gamma) - E_{\eta\mu.} \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot A\Delta - \frac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow$. Είναι $A\Delta = \Delta E$ ως εφαπτόμενα τμήματα άρα

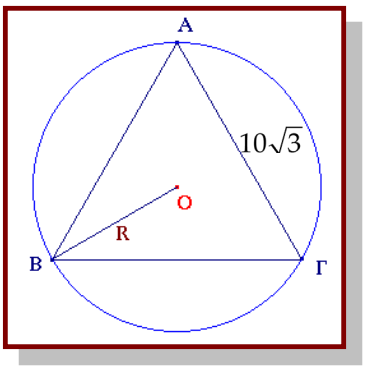
$A\Delta = \Gamma\Delta - \Gamma E = 3R\sqrt{2} - 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow A\Delta = R\sqrt{2}$.

Επομένως $E = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot A\Delta - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{1}{2}4R\cdot R\sqrt{2} - \frac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow$ $\mathbf{E = \frac{(4\sqrt{2}-\pi)R^2}{2}}$

Εσπερινά 2001

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ζήτημα 3ο



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς $10\sqrt{3}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R .

α. Είναι γνωστό ότι η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ άρα $10\sqrt{3} = R\sqrt{3} \Leftrightarrow$ **R = 10**

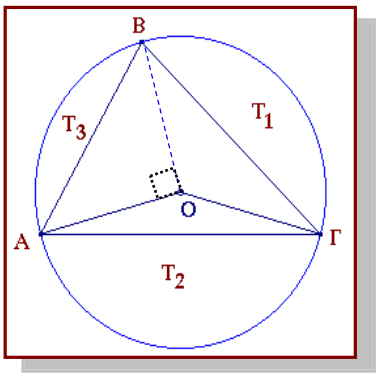
β. Επειδή ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο άρα $\overset{\frown}{AΓB}$ είναι τα $\frac{2}{3}$ του κύκλου

άρα $\overset{\frown}{AΓB} = \frac{2\cdot 2\pi R}{3} \Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{\mathbf{AΓB}} = \frac{\mathbf{40\pi}}{\mathbf{3}}$

γ. Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που εγγράφεται στον κύκλο είναι $\lambda_6 = R \Leftrightarrow \lambda_6 = 10$

Επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Ζήτημα 3ο



Σε κύκλο (O , R) θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$,
$BΓ = R\sqrt{3}$.
Να υπολογίσετε συναρτήσει του R :

α. Είναι $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ άρα $\overset{\frown}{AB} = 90^0$ και $BΓ = R\sqrt{3} = \lambda_3$ άρα $\overset{\frown}{BΓ} = 120^0$ επομένως $\overset{\frown}{AΓ} = 120^0 - 90^0 = 150^0$. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΓ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ θα είναι

$$E_{κτΟΑΓ} = \frac{\pi R^2 150^0}{360^0} \Leftrightarrow \mathbf{E_{κτΟΑΓ} = \frac{5\pi R^2}{12}}$$

β. **1ος τρόπος**

- Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος T_1 είναι $T_1 = E_{κ.τομέα ΟΒΓ} - (\overset{\smile}{ΟΒΓ}) \Leftrightarrow T_1 = \frac{\pi R^2 120^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΒΓ})$.

Το $(\overset{\smile}{ΟΒΓ}) = \frac{1}{2}ΟΒ\cdot ΟΓ\cdot ημ120^0 = \frac{1}{2}R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\overset{\frown}{ΟΒΓ}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ άρα $T_1 = \frac{\pi R^2 120^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΒΓ}) \Leftrightarrow$

$T_1 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

- Όμοια $T_2 = E_{κ.τομέα ΟΑΓ} - (\overset{\smile}{ΟΑΓ}) \Leftrightarrow T_2 = \frac{\pi R^2 150^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΑΓ})$. Το $(\overset{\smile}{ΟΑΓ}) = \frac{1}{2}ΟΑ\cdot ΟΓ\cdot ημ150^0 =$

$\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\overset{\frown}{ΟΑΓ}) = \frac{R^2}{4}$ άρα $T_2 = \frac{\pi R^2 150^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΑΓ}) \Leftrightarrow T_1 = \frac{5\pi R^2}{12} - \frac{R^2}{4}$

- Και $T_3 = E_{κ.τομέα ΟΑΒ} - (\overset{\smile}{ΟΑΒ}) \Leftrightarrow T_3 = \frac{\pi R^2 90^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΑΒ})$. Το $(\overset{\smile}{ΟΑΒ}) = \frac{1}{2}ΟΑ\cdot ΟΒ\cdot ημ90^0 = \frac{1}{2}R\cdot R \Leftrightarrow$

$(\overset{\frown}{ΟΑΒ}) = \frac{R^2}{2}$ άρα $T_3 = \frac{\pi R^2 90^0}{360^0} - (\overset{\frown}{ΟΑΒ}) \Leftrightarrow T_3 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$ άρα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$E_{T_1+T_2+T_3}=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}+\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}+\frac{5\pi R^2}{12}-\frac{R^2}{4}=\frac{3\pi R^2+4\pi R^2+5\pi R^2-6R^2-3R^2\sqrt{3}-3R^2}{12}$$

$$E_{T_1+T_2+T_3}=\frac{12\pi R^2-3(3+\sqrt{3})R^2}{12}\Leftrightarrow E_{T_1+T_2+T_3}=\frac{(4\pi-3-\sqrt{3})R^2}{4}$$

2ος τρόπος Επειδή $\overset{\frown}{AB}=90^0$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}=120^0$ άρα $\overset{\frown}{A\Gamma}=150^0$ έτσι θα είναι :

$E_{T_1+T_2+T_3}=E_{\text{κύκλου}}-\left(E_{OB\Gamma}+E_{OAB}+E_{OA\Gamma}\right)$

γ. Για την χορδή ΑΓ ισχύει $(AB\Gamma)=\frac{AB\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma}{4R}$ (1) και

$$(AB\Gamma)=(OAB)+(OB\Gamma)+(OA\Gamma)=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}+\frac{R^2}{4}=\frac{2R^2+R^2\sqrt{3}+R^2}{2}\Leftrightarrow (AB\Gamma)=\frac{(3+\sqrt{3})R^2}{4}$$

άρα $(1)\Leftrightarrow \frac{R\sqrt{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot A\Gamma}{4R}=\frac{(3+\sqrt{3})R^2}{4}\Leftrightarrow R\sqrt{6}\cdot A\Gamma=(3+\sqrt{3})R^2\Leftrightarrow A\Gamma=\frac{(3+\sqrt{3})R^2}{R\sqrt{6}}\Leftrightarrow$

$$\mathbf{A\Gamma=\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{6}R}{6}}$$

Θέματα 2002

Ζήτημα 1ο

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **"Σωστό"** ή **"Λάθος"** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Σε κύκλο (Ο , R) το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο $E=\frac{\pi R^2\mu^0}{180^0}$ **Λάθος**

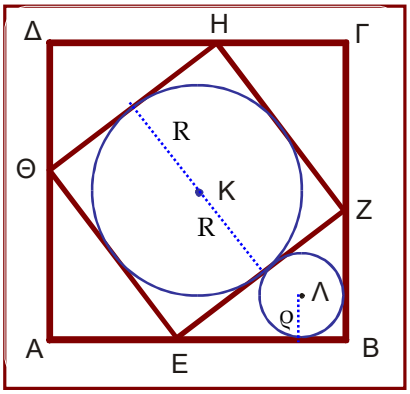
Β. **α.** Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (Ο , R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6=R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Δες σχολικό βιβλίο

Ζήτημα 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο ΕΖΗΘ έτσι, ώστε :
ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = 3 cm.



α. Αφού είναι ΑΕ = 3 τότε ΒΕ = ΑΒ – ΑΕ = 7 – 3 = 4 άρα παο το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΖ με Πυθαγόρειο θεώρημα έχεις :

$EZ=\sqrt{EB^2+BZ^2}=\sqrt{16+9}\Leftrightarrow EZ=5$ άρα $\mathbf{E_{EZH\Theta}=25}$

β. Είναι $E_{EBZ}=\frac{1}{2}EB\cdot BZ=\frac{1}{2}4\cdot 3\Leftrightarrow \mathbf{E_{EBZ}=6}$ (1) επίσης

$E_{EBZ}=\tau\cdot\rho$, $\tau=\frac{4+3+5}{2}$ άρα $E_{EBZ}=6\cdot\rho$ (2) από (1) και (2) έχεις

$6\cdot\rho=6$ άρα είναι ρ = 1 cm.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Εάν (Κ , R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ, είναι προφανές δες και σχήμα ότι η διάμετρος του είναι ίση με την πλευρά του ΕΖΗΘ δηλαδή είναι $2R = 5 \Leftrightarrow R = \frac{5}{2}$ άρα $E_{(\Lambda,\rho)} = \pi\rho^2 = \pi \cdot 1^2 \Leftrightarrow E_{(\Lambda,\rho)} = \pi$ και $E_{(K,R)} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow E_{(K,R)} = \frac{25\pi}{4}$ άρα ο λόγος του εμβαδού του κύκλου (Κ , R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ , ρ) είναι $\frac{E_{(K,R)}}{E_{(\Lambda,\rho)}} = \frac{\frac{25\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow \frac{E_{(K,R)}}{E_{(\Lambda,\rho)}} = \frac{25}{4}$

Εσπερινά 2002

Ζήτημα 1ο

Α. Η τιμή κάθε μεγέθους που αναφέρεται στη στήλη Ι του πίνακα που ακολουθεί, δίνεται με έναν από τους τύπους που υπάρχουν στη στήλη ΙΙ.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	**1.** $2\pi R$
Β. Μήκος κύκλου ακτίνας R	**2.** πR^2
Γ. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° σε κύκλο ακτίνας R	**3.** R^2
Δ. Μήκος τόξου μ° σε κύκλο ακτίνας R	**4.** $\frac{\pi R \mu^0}{180^0}$
	5. $\frac{\pi R^2 \mu^0}{360^0}$
	6. $2\pi R^3$

Απάντηση

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α.	**2.**
Β.	**1.**
Γ.	**5.**
Δ.	**4.**

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ** , αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ** , αν αυτή είναι λανθασμένη.

2) Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια. **Σωστό**

3) Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες. **Λάθος**

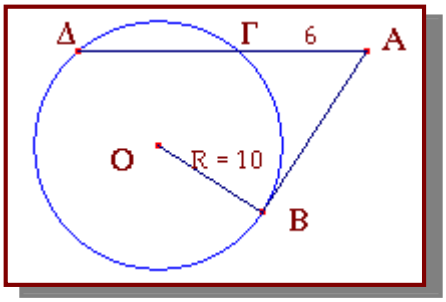
5) Η κεντρική γωνία ω_ν ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\omega_\nu = \frac{360^0}{\nu}$. **Σωστό**

6) Το μήκος λ_6 της πλευράς κανονικού εξαγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, δίνεται από τον τύπο $\lambda_6 = R$. **Σωστό**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ζήτημα 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R = 10. Το τμήμα ΑΒ μήκους $\sqrt{96}$ εφάπτεται στο σημείο Β του κύκλου (Ο,R). Το τμήμα ΑΓ της τέμνουσας ΑΓΔ έχει μήκος 6.



Α. Προφανώς είναι $(AB)^2 = A\Gamma \cdot A\Delta$ άρα αν συμβολίσεις το $\Gamma\Delta = \chi$ θα είναι $(\sqrt{96})^2 = 6(\chi+6) \Leftrightarrow 6\chi + 36 = 96 \Leftrightarrow 6\chi = 60 \Leftrightarrow$ **$\chi = 10$** δηλαδή είναι $\Gamma\Delta = R$ άρα **$\Gamma\Delta = \lambda_6$**, πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R).

Β. Στο κανονικό εξάγωνο με πλευρά τη ΓΔ να βρείτε:

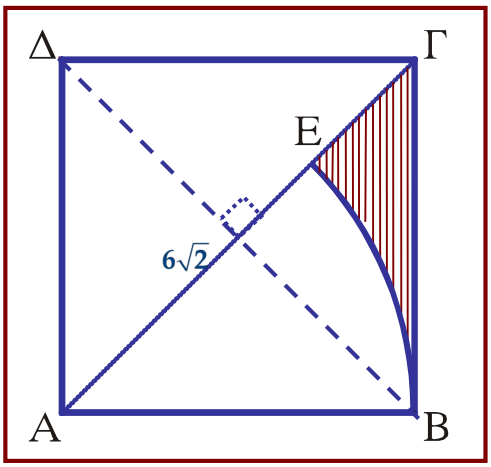
α. Το απόστημα $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$ **$\alpha_6 = 5\sqrt{3}$**

β. Το εμβαδόν $E_6 = \frac{1}{2}P_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2}6 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} \Leftrightarrow$ **$E_6 = 150\sqrt{3}$**

γ. Η γωνία $\varphi_6 = 180^0 - \frac{360^0}{6} \Leftrightarrow$ **$\varphi_6 = 120^0$**

Ζήτημα 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ του οποίου το μήκος της διαγωνίου ΑΓ είναι $6\sqrt{2}$. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο κύκλου που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.
Να βρείτε :



α. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ μπορείς να το βρεις με δυο τρόπους :

1ος τρόπος : Αν χ η πλευρά τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο θα είναι $\chi^2 + \chi^2 = (A\Gamma)^2 \Leftrightarrow 2\chi^2 = (6\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 36 \Leftrightarrow$ **$\chi = 6$**
άρα **$E_{ABΓΔ} = 36$ τ. μ.**

2ος τρόπος : Επειδή οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι ίσες και κάθετες μεταξύ τους άρα θα είναι και
$E_{ABΓΔ} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ **$E_{ABΓΔ} = 36$ τ. μ.**

β. Η γωνία $B\hat{A}\Gamma = 45^0$ και ΑΒ = 6 άρα το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{BE}$ είναι $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 45^0}{180^0} \Leftrightarrow$ **$l = \frac{3\pi}{2}$**

γ. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{ABE}$ είναι $E_{\overset{\frown}{ABE}} = \frac{\pi \cdot 6^2 45^0}{360^0} \Leftrightarrow$ **$E_{\overset{\frown}{ABE}} = 4,5 \cdot \pi$ τ. μ.**

δ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου τριγώνου ΕΒΓ θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ αφαιρέσεις το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{ABE}$.
Είναι $E_{ABΓ} = \frac{1}{2}(ABΓΔ) \Leftrightarrow E_{ABΓ} = 18$ και $E_{\overset{\frown}{ABE}} = 4,5 \cdot \pi$ άρα $E_{\overset{\frown}{EBΓ}} = E_{ABΓ} - E_{\overset{\frown}{ABE}} \Leftrightarrow$ **$E_{\overset{\frown}{EBΓ}} = 18 - 4,5 \cdot \pi$**

Σεπτέμβριος 2002

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ζήτημα 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Η γωνία κανονικού ν – γώνου είναι : $\varphi_\nu = 180^0 - \frac{360^0}{\nu}$ **Σωστό.**

δ. Σε κάθε κανονικό ν – γωνο ακτίνας R , πλευράς λ_ν και αποστήματος α_ν ισχύει η σχέση $\lambda_\nu^2 = \frac{\alpha_\nu^2}{4} + R^2$ **Λάθος**

Να γράψετε στο τετράδιο σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό **Στήλης ΙΙ**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
α.	5.
β.	3.
γ.	2.

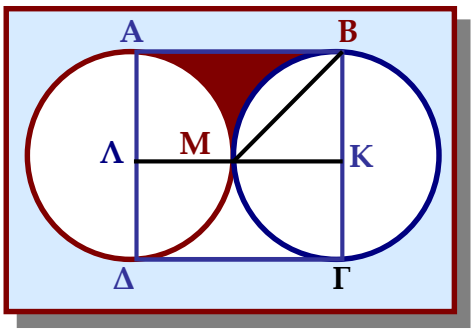
Απάντηση

Στήλη Ι : κανονικό πολύγωνο	Στήλη ΙΙ : πλευρά λ_ν
α. κανονικό εξάγωνο	1. $R\sqrt{2}$
β. ισόπλευρο τρίγωνο	2. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
γ. τετράγωνο	3. $R\sqrt{3}$
	4. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
	5. R

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4 cm . Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα :



α. Επειδή Κ μέσον της ΒΓ άρα πρόκειται για το κέντρο του κύκλου με διάμετρο την ΒΓ. Επίσης Μ το Μ είναι το σημείο επαφής των δυο κύκλων αν προεκτείνεις την ΜΚ θα περάσει από το κέντρο Λ του άλλου κύκλου που θα είναι μέσον της ΑΔ. Άρα η ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ άρα ΚΛ // ΑΒ άρα το ΜΚΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Θα μπορούσες να φτάσεις στο ίδιο αποτέλεσμα αν παρατηρήσεις ότι το τόξο $\overset{\frown}{BMΓ}$ είναι το μισό του κύκλου και το τόξο $\overset{\frown}{BM}$ είναι το μισό του $\overset{\frown}{BMΓ}$ άρα το $\frac{1}{4}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

του κύκλου δηλ 45^0 επομένως το ΜΚΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές) έτσι λοιπόν είναι

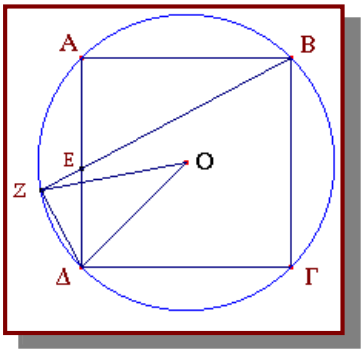
$E_{ABΓ} = \frac{1}{2}KM \cdot KB = \frac{1}{2}2 \cdot 2 \Leftrightarrow \mathbf{E_{ABΓ} = 2\ \tau.\mu.}$

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ είναι Το εμβαδόν του ΑΒΚΛ μείον το διπλάσιο του κυκλικού τομέα ΚΜΒ. $E_{AMB} = E_{ABKΛ} - E_{\text{τομ}KMB}$, $E_{ABKΛ} = \frac{1}{2}(ABΓΔ) \Leftrightarrow E_{ABKΛ} = \frac{1}{2}(ABΓΔ) = \frac{1}{2}16$

$E_{ABKΛ} = 8$ και $E_{\text{τομ}KMB} = \frac{\pi R^2 45^0}{360^0} = \frac{\pi 2^2}{8} \Leftrightarrow E_{\text{τομ}KMB} = \frac{\pi}{2}$ άρα $E_{AMB} = E_{ABKΛ} - E_{\text{τομ}KMB} \Leftrightarrow \mathbf{E_{AMB} = 8 - \frac{\pi}{2}}$

Ζήτημα 4ο

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R). Έστω Ε ένα σημείο της ΑΔ , τέτοιο ώστε $AΔ = \sqrt{3} \cdot AE$ και Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΕ με τον κύκλο.



α. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι $(BE)^2 = (AE)^2 + (AB)^2$ (1)

όμως $AΔ = \sqrt{3} \cdot AE \Leftrightarrow AE = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ και $AB = \alpha$ άρα (1) $\Leftrightarrow$

$(BE)^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{3} + \alpha^2 \Leftrightarrow (BE)^2 = \frac{4\alpha^2}{3} \Leftrightarrow \mathbf{BE = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}}$

β. Είναι $EZ \cdot EB = EA \cdot EΔ$ (1), $EΔ = \alpha - \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})\alpha}{3}$ άρα

$(1) \Leftrightarrow EZ = \frac{EA \cdot EΔ}{EB} \Leftrightarrow EZ = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(3-\sqrt{3})\alpha}{3}}{\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \mathbf{EZ = \frac{3-\sqrt{3}}{6}\alpha}$

γ. Αν παρατηρήσεις θα δεις πως ΒΕ = 2ΕΑ, και επειδή το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ορθογώνιο άρα θα είναι $\hat{EAB} = 30^0$ άρα το τόξο $\overset{\frown}{ZA} = 60^0$ (διπλάσιο σε μοίρες από την εγγεγραμμένη γωνία) επομένως το τόξο $\overset{\frown}{ZΔ} = 30^0$ ($\overset{\frown}{AΔ} = 90^0$ και $\overset{\frown}{ZΔ} = \overset{\frown}{AΔ} - \overset{\frown}{ZA}$) έτσι λοιπόν $E_{\text{κ.τμ.}\overset{\frown}{ZΔ}} = E_{\text{κ.τομέα}\overset{\frown}{ZOΔ}} - E_{ZOB}$

$\Leftrightarrow E_{\text{κ.τμ.}\overset{\frown}{ZΔ}} = \frac{\pi R^2 30^0}{360^0} - \frac{1}{2}OZ \cdot OΔ \cdot \text{ημ}30^0$ (1) , $OZ = OΔ = R$ και επειδή $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ άρα $\alpha = R\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$R = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ άρα (1) $\Leftrightarrow E_{\text{κ.τμ.}\overset{\frown}{ZΔ}} = \frac{\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 30^0}{360^0} - \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi\frac{\alpha^2}{2}}{12} - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\alpha^2}{8}$ τελικά

$\mathbf{E_{\text{κ.τμ.}\overset{\frown}{ZΔ}} = \frac{(\pi-3)\alpha^2}{24}}$

Θέματα 2003

Ζήτημα 1ο

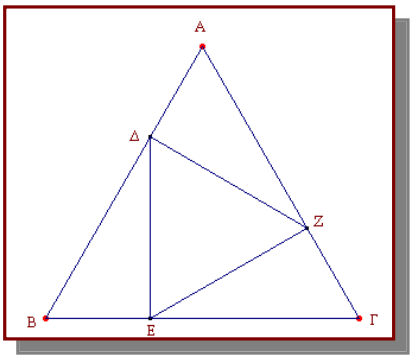
Α. Έστω ένας κύκλος (Ο , R).

α. , **β.** , **γ.** καθώς και **Γ. Δες σχολικό βιβλίο**.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Ζήτημα 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = \frac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α :

γ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο κα αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου θα είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$

άρα ο περιεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $E = \pi R^2$

$\Leftrightarrow E = \pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \mathbf{E = \frac{\pi\alpha^2}{3}}$

Εσπερινά 2003

Ζήτημα 1ο

Β. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{\alpha_4 = R\sqrt{5}}$ **Λάθος**

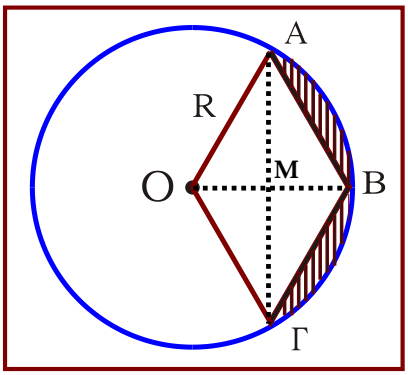
2. Η πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο $\boldsymbol{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$ **Σωστό**

3. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ δίνεται από τον τύπο

$\mathbf{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$, όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου **Σωστό**

Ζήτημα 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο , R) και τα σημεία του Α, Β, Γ, έτσι ώστε το τετράπλευρο ΟΑΒΓ να είναι ρόμβος.



α. Αφού το τετράπλευρο ΟΑΒΓ είναι ρόμβος τότε ΑΒ = ΒΓ = R άρα οι ΑΒ και ΒΓ είναι πλευρές εξαγώνου επομένως $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = 60^0$

άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = 120^0$ έτσι είναι $A\Gamma = \lambda_3$

γ. Αν Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου ΟΑΒΓ, τότε το Μ θα είναι μέσον της ΑΓ και επί πλέον

$A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ άρα $AM = M\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Έτσι $\Delta^M_{(O,R)} = AM \cdot M\Gamma \Leftrightarrow$

$\Delta^M_{(O,R)} = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta^M_{(O,R)} = \frac{3R^2}{4}$

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους μπορείς να το υπολογίσεις με δυο τρόπους :

1ος τρόπος Να υπολογίσεις το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΓΟΑ και να αφαιρέσεις το εμβαδόν του ρόμβου ΓΟΑΒ. Δηλαδή $E = E_{κ.τ.ΓΟΑ} - (ΑΒΓΔ)$ **(1)** , $E_{κ.τ.ΓΟΑ} = \frac{\pi R^2 120^0}{360^0} \Leftrightarrow E_{κ.τ.ΓΟΑ} = \frac{\pi R^2}{3}$ και

$(ΑΒΓΔ) = \frac{ΟΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (ΑΒΓΔ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ άρα **(1)** $\Leftrightarrow E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})2^2}{6}$

$\Leftrightarrow$ **$E = \frac{2(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}$**

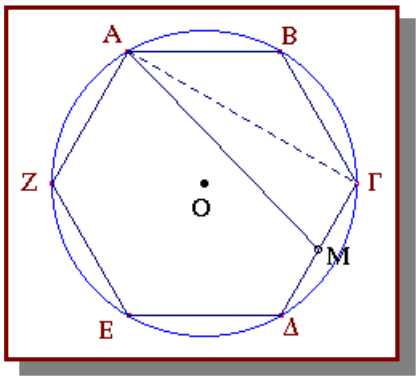
2ος τρόπος Μπορείς να υπολογίσεις το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΒΟΑ και να αφαιρέσεις το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΑ οπότε έχεις βρει το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΒΑ, οπότε το διπλάσιο είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους. Δηλαδή $E = 2(E_{κ.τ.ΒΟΑ} - (ΒΟΑ))$ **(2)** ,

$E_{κ.τ.ΒΟΑ} = \frac{\pi R^2 60^0}{360^0} \Leftrightarrow E_{κ.τ.ΒΟΑ} = \frac{\pi R^2}{6}$ και $(ΒΟΑ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ άρα **(2)** $\Leftrightarrow E = 2\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow$

$E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})2^2}{6} \Leftrightarrow$ **$E = \frac{2(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}$**

Ζήτημα 4ο

Στην πρωτεύουσα της Ιαπωνίας, το Τόκιο, τον Ιούλιο του 2003 θα διεξαχθεί η Παγκόσμια Ολυμπιάδα των Μαθηματικών. Ένα πάρκο της πρωτεύουσας έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ πλευράς 2 km. Ένας μαθητής που θα συμμετάσχει στο διαγωνισμό, περπατάει κατά μήκος της περιμέτρου του πάρκου, αρχίζοντας από την κορυφή Α και ακολουθώντας τη διαδρομή ΑΒΓΔΕΖΑ φθάνει σε ένα σημείο Μ έχοντας διανύσει μήκος 5 km.



α. Προφανώς το μήκος της συνολικής διαδρομής είναι η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου δηλαδή $P_6 = 6 \cdot 2 = 12$ km άρα αφού ο μαθητής μέχρι το Μ έχει διανύσει 5 km τότε το υπόλοιπο της διαδρομής είναι 7 km .

β. Το εμβαδόν του πάρκου είναι το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου πλευράς $\lambda_6 = 2$ km εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 2$ km , επομένως είναι $E_6 = \frac{1}{2} P_6 \alpha_6$ όπου $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ άρα

$E_6 = \frac{1}{2} 12 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow$ **$E_6 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ km**

γ. Αν φέρεις την ΑΜ και την ΑΓτότε θα παρατηρήσεις τρία πράγματα :

1ον η ΑΜ επειδή τα τόξα ΑΒ και ΒΓ είναι δυο από τα έξη στα οποία οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου χωρίζουν τον περιγεγραμμένο κύκλο, τότε η ΑΓ είναι πλευρά κανονικού τριγώνου (ισοπλεύρου), άρα $AM = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2ον Επειδή η διαδρομή $A \leftrightarrow M$ είναι 5 km ενώ η διαδρομή $A \leftrightarrow \Delta$ είναι 6 km, σημαίνει πως το Μ είναι μέσον της ΓΔ άρα ΓΜ = 1 km και

3ον Η γωνία $\angle ΑΓΜ = \angle ΑΓΔ = \frac{1}{2} \angle ΖΕC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60^0 \Leftrightarrow \angle ΑΓΜ = 90^0$ άρα $(AM)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΓΜ)^2 \Leftrightarrow$

$(AM)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 1^2 \Leftrightarrow (AM)^2 = 13 \Leftrightarrow$ **AM = 13 km**

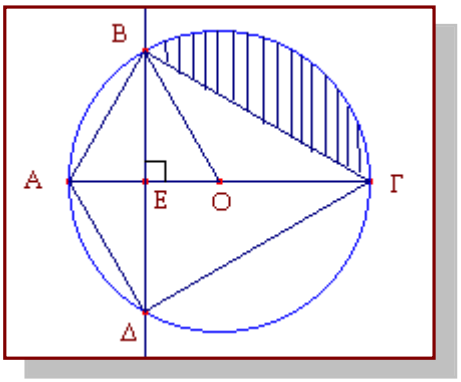
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επαναληπτικές εξετάσεις 2003

Ζήτημα 4ο

Παρ΄ όλο που τα δυο πρώτα ερωτήματα έχουν απαντηθεί στο 10ο κεφάλαιο παραθέτω ξανά τις απαντήσεις αυτές για να υπάρχει συνέχεια με το 3ο ερώτημα.

Δίνεται κύκλος (Ο , R) και μία διάμετρός του ΑΓ. Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Δ, όπως στο διπλανό σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = R\sqrt{3}$.

Φέρνω και την ΟΒ και έστω Ε το σημείο τομής της ΒΔ με την ΟΑ.

Επειδή ΒΕ μεσοκάθετος της ΟΑ το $OE = \frac{R}{2}$ άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΒ είναι $BE^2 = OB^2 - OE^2 \Leftrightarrow BE^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$BE^2 = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow BE = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \mathbf{B\Delta = 2 \cdot BE = R\sqrt{3}}$

β. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

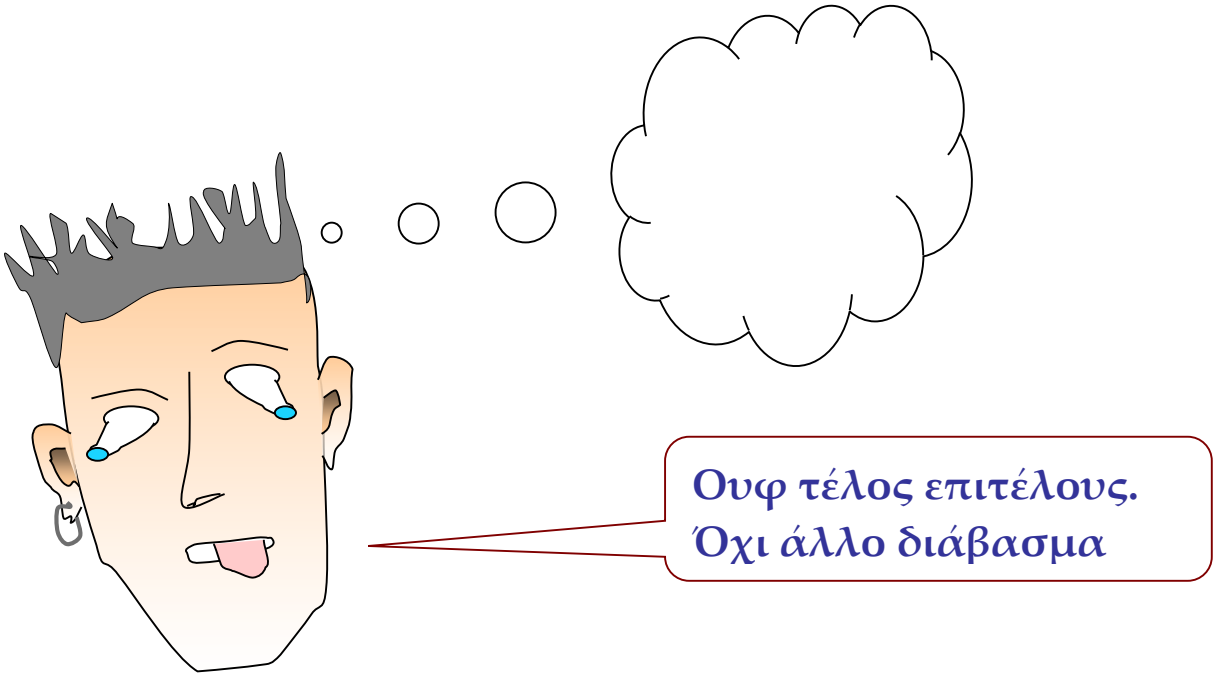
Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις διαγώνιές του κάθετες $(B\Delta \perp A\Gamma)$ θα είναι

$E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{B\Delta \cdot A\Gamma}{2} = \frac{R\sqrt{3} \cdot 2R}{2} \Leftrightarrow \mathbf{E_{AB\Gamma\Delta} = R^2\sqrt{3}}$

γ. Επειδή ΒΕ μεσοκάθετος της ΟΑ άρα ΒΑ = ΟΒ = R. Επομένως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι $(B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 - (AB)^2 \Leftrightarrow (B\Gamma)^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow (B\Gamma) = R\sqrt{3}$ άρα $B\Gamma = \lambda_3$ επομένως $B\hat{O}\Gamma = 120^0$ άρα αν Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος τότε $E = E_{\kappa\tau B O\Gamma} - (BO\Gamma)$, $E_{\kappa\tau B O\Gamma} = \frac{\pi R^2 120^0}{360^0} \Leftrightarrow E_{\kappa\tau B O\Gamma} = \frac{\pi R^2}{3}$ και $(BO\Gamma) = \frac{1}{2} OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^0 \Leftrightarrow (BO\Gamma) = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$(BO\Gamma) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ επομένως $E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \mathbf{E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μωραΐτης Δαμιανός

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2004

Όποιος με ευκολία σου τάζει ότι θες, για εχθρό να τον λογιάζεις και όχι για φίλο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 1

Διανύσματα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1977***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

1. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων.

2. ***πανελλήνιες 1978***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

1. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων.

3. ***πανελλήνιες 1979***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί τα διανύσματα την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \square$ με : $\left|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right|=1$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν υπερβαίνει το μέτρο του $\vec{\beta}$.

4. ***πανελλήνιες 1981***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,2,-1)$, $\vec{\beta}=(1,-3,2)$ και $\vec{\gamma}=(1,1,-\frac{1}{2})$.

α. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

β. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

* $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}=\kappa\cdot\vec{\beta}+\lambda\cdot\vec{\gamma}$, $\kappa,\lambda\in P$ με $|\kappa|+|\lambda|\neq 0$ δηλαδή τα $\vec{\alpha}=\kappa\cdot\vec{\beta}+\lambda\cdot\vec{\gamma}$, $\kappa,\lambda\in P$ και ένα τουλάχιστον από τα κ , λ είναι διάφορο από το μηδέν.

γ. Να εξηγήσετε γιατί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

Για ιστορικούς λόγους το θέμα αναφέρεται όπως δόθηκε , επειδή παρουσιάζει ενδιαφέρον και υπάρχει ως άσκηση στο τρέχον σχολικό βιβλίο, θα απαντηθεί αφού γίνει προσαρμογή στα διανύσματα να έχουν δυο συντεταγμένες όπως πιο κάτω :

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,2)$, $\vec{\beta}=(1,-3)$ και $\vec{\gamma}=(1,1)$ (δείτε την απάντηση).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. ***πανελλήνιες 1983***

Εξετάσεις για βελτίωση βαθμολογίας του Πολυτεχνικού κύκλου γιατί ήδη είχε αρχίσει να εφαρμόζεται το «νέο» σύστημα με της **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1,-1), \vec{\beta}=(1,-1,0)$ του χώρου Υ^3 * 1. Να ορισθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}=(\kappa,\lambda,\mu)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{11}$.

* 1 Υ^3 = ο χώρος τριών διαστάσεων

Για ιστορικούς λόγους το θέμα αναφέρεται όπως δόθηκε , επειδή παρουσιάζει ενδιαφέρον και υπάρχει ως άσκηση στο τρέχον σχολικό βιβλίο, θα απαντηθεί αφού γίνει προσαρμογή στην εκφώνηση.

Οι συνθήκες $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{11}$ είναι τρεις $\begin{cases}\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\\ \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0\\ \left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{11}\end{cases}$ γιατί τα διανύσματα σύμφωνα με την εκφώνηση είχαν τρεις συντεταγμένες επομένως τρεις οι άγνωστοι με την προσαρμογή στο χώρο των δύο διαστάσεων δημιουργούνται 2 ασκήσεις :

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1), \vec{\beta}=(1,-1)$ Να ορισθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}=(\kappa,\lambda)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{10}$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1), \vec{\beta}=(1,-1)$ Να δείξετε ότι αν το $\vec{\gamma}=(\kappa,\lambda)$ είναι τέτοιο ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0$, το $\vec{\gamma}=(0,0)=\vec{0}$. (δείτε τις απαντήσεις).

6. ***πανελλήνιες 1983 Α Δέσμη***

Εξετάσεις με το «νέο» σύστημα των **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Να αποδειχθεί ότι η τετμημένη καθώς και η τεταγμένη του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με το άθροισμα των τετμημένων και αντίστοιχα των τεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7. ***πανελλήνιες 1984 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

α. Έστω ότι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα (α_1,α_2), (β_1,β_2) αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο.

Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

8. **πανελλήνιες 1986 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που ανήκουν στο Ε .

Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α. Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα;

β. Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα;

Β. Να αποδείξετε ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, $\vec{w} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Το θέμα πολλά χρόνια τώρα είναι εκτός ύλης, αναφέρεται για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθεί

9. **πανελλήνιες 1987 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **i)** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου .Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

ii) Να αποδειχθεί ότι δυο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

10. **πανελλήνιες 1993 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 1ο

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\chi}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{\chi}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} - 1\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right) = \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

β. Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} \neq 1$ να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\chi}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

11. **πανελλήνιες 1999 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 4, \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τότε

α. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

β. Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. **πανελλήνιες 1999 θετικής** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Ο χ ψ.

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα ψ΄ ψ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι :

$$\text{συν}\theta=\frac{\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}\cdot\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}}$$

Μονάδες 4

Β. α) Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=(\lambda,\lambda-1)$ και $\vec{\beta}=(4,\lambda)$ με $\lambda\neq 0$.

Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα ;

Α. $\lambda=1$ **Β.** $\lambda=3$ **Γ.** $\lambda=2$ **Δ.** $\lambda=-2$ **Ε.** $\lambda=-3$

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{u}=(1,-\sqrt{3})$, $\vec{v}=(2,2\sqrt{3})$, $\vec{w}=(\sqrt{3},1)$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄ με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

ΣΤΗΛΗ Α΄		**ΣΤΗΛΗ Β'**
1.	γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	Α. $\frac{\pi}{2}$
2.	γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	Β. $\frac{\pi}{6}$
3.	γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	Γ. $\frac{\pi}{4}$
		Δ. $\frac{2\pi}{3}$
		Ε. $\frac{3\pi}{4}$
		Ζ. $\frac{\pi}{3}$

Να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της στήλης Α΄ και δίπλα το γράμμα της στήλης Β΄ που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. **πανελλήνιες 1999 τεχνολογικής** **Δευτέρα 28 Ιουνίου**

Θέμα 3ο

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=(5\kappa,3-\lambda)$ και $\vec{\beta}=(4-\lambda,4\kappa)$, όπου κ , λ πραγματικοί αριθμοί.

α) Για ποιες τιμές των κ, λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα ;

Μονάδες 15

β) Αν λ = 8, κ θετικός και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα , τότε το κ είναι ίσο με :

Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 10

14. **επαναληπτικές 1999 τεχνολογικής** **Δευτέρα 20 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α) α) Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα και θ είναι η γωνία που σχηματίζουν, τότε για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει πάντοτε :

Α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$ **Β.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\eta\mu\theta$

Γ. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\varepsilon\varphi\theta$ **Δ.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ **Ε.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=\chi_1\vec{i}+\psi_1\vec{j}$ και $\vec{\beta}=\chi_2\vec{i}+\psi_2\vec{j}$ είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους , δηλαδή

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2$$

Μονάδες 7,5

Β) α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει : $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και σχηματίζουν γωνία $\theta=45^0$. Τότε, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ είναι :

Α. 0 **Β.** -6 **Γ.** 6 **Δ.** $3\sqrt{3}$ **Ε.** $-3\sqrt{6}$

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\chi}=(3,4)$ και $\vec{\psi}=(-1,2)$

Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\chi}\cdot\vec{\psi}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(-1,2\kappa)$, $B(\kappa-1,2+\kappa)$ και $\Gamma(\kappa,\kappa+3)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Μονάδες 9

β) Για ποια από τις παρακάτω τιμές του κ τα σημεία Α, Β , Γ είναι συνευθειακά.

Α. -1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** -2

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι για κ = 1 το σημείο Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ.

Μονάδες 7

15. ***επαναληπτικές 1999 θετικής*** **Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Δίνονται τα σημεία Ο(0 , 0) και Α(3 , 4).

α) Το μήκος του (ΟΑ) είναι :

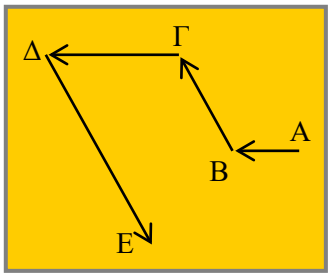
Α. -5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 1

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις :

$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta E}=-2\vec{\beta}$.



α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ είναι ίσο με :

Α. $3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Β.** $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **Γ.** $3\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ **Ε.** $2\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$

Μονάδες 5

γ) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$, τότε να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 10

16. ***Εσπερινά 2000 Τεχνολογικής*** **Τετάρτη 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6,5

β. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Στη **Στήλη Ι** του παρακάτω πίνακα αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες διανυσμάτων.
Κάθε μία αντιστοιχεί σε κάποια από τις σχέσεις που δίνονται στη **Στήλη ΙΙ**.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

	Στήλη Α	Στήλη Β
Α.	Κάθετα διανύσματα	**1.** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $\left\|\vec{\alpha}\right\|=\left\|\vec{\beta}\right\|$
Β.	Ίσα διανύσματα	**2.** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\left\|\vec{\alpha}\right\|=\left\|\vec{\beta}\right\|$
Γ.	Αντίθετα διανύσματα	**3.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
		4. $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$ με $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -1$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.

Μονάδες 6

Β.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ όταν $\left|\vec{\alpha}\right|=5$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$ και η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι 60^0.

Μονάδες 6,5

β. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**1.Β.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=1$, $\left|\vec{\beta}\right|=2$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή ;

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα.

Β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Γ. Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με 60°.

Δ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο $\left|\vec{\alpha}\right|$ του $\vec{\alpha}$

Μονάδες 12

β) Αν $\vec{\beta}=(\mu-1,\ 2\lambda+5)$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα.

Μονάδες 13

17. ***Εσπερινά 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(– 4 , 3) και Β(4, – 3).

Να βρείτε :

α. Την απόσταση (ΑΒ) των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6

β. Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 6

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3\ ,\ 3)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-1\ ,\ 1)$.

α. Να βρείτε το λ έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}\ ,\ \vec{\beta}$ να είναι ίσο με -6

Μονάδες 12,5

β. Να βρείτε το λ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}\ ,\ \vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 4ο

Η αρχή Ο(0 , 0) ενός συστήματος συντεταγμένων παριστάνει ένα σταθμό εκπομπής σημάτων, ενώ τα σημεία Α(3 , 2) και Β(5 , 1) παριστάνουν τις θέσεις δύο πλοίων.

Η θέση ενός τρίτου πλοίου παριστάνεται από το σημείο Γ για το οποίο ισχύει : $\overrightarrow{\text{ΟΓ}}=2\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Μονάδες 13

β. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής (μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φτάσει το σήμα) είναι 5 μονάδες, να βρείτε με ποια από τα τρία πλοία μπορεί να επικοινωνήσει ο σταθμός.

Μονάδες 12

Για μια διαφορετική προσέγγιση δες την λύση, του αντίστοιχου θέματος, στο κεφάλαιο 3.

18. πανελλήνιες 2000 θετικής

Σάββατο 24 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}\ ,\ \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις : $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2)$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8)$

α. Να δείξετε ότι : $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-2)$

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα .

Μονάδες 8

γ. Να αναλυθεί το διάνυσμα : $\vec{\gamma}=(3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

Δες θέματα 1981

19. επαναληπτικές 2000 θετικής

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Αν $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ δυο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, με $\lambda,\ \mu\in\Upsilon$

Μονάδες 3

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Α. 2. Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, (χ , ψ) οι συντεταγμένες του μέσου να αποδείξετε ότι $\chi=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}$ και $\psi=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}$.

Μονάδες 6,5

Α. 3. Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και την απόσταση (AB) των σημείων Α και Β.

Μονάδες 3

Β. 1. Στη στήλη Α δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων του καρτεσιανού επιπέδου και στη στήλη Β οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και η απόσταση (AB) των σημείων Α και Β . Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $A(1,3)$ και $B(-2,5)$	**1.** $\overrightarrow{AB}=(-3,2)$ και $AB=\sqrt{15}$
β. $A(2,-1)$ και $B(2,-3)$	**2.** $\overrightarrow{AB}=(0,-2)$ και $AB=2$
γ. Α(4 , –3) και Β(6 , –3)	**3.** $\overrightarrow{AB}=(-3,2)$ και $AB=\sqrt{13}$
	4. $\overrightarrow{AB}=(2,0)$ και $AB=2$

Μονάδες 6

Β. 2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $K(\chi_1,6)$ και $\Lambda(-9,\psi_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $(-5,4)$ οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΚΛ τότε

Α. $\chi_1=1$ και $\psi_2=-2$ **Β.** $\chi_1=-1$ και $\psi_2=2$

Γ. $\chi_1=-3$ και $\psi_2=2$ **Δ.** $\chi_1=4$ και $\psi_2=5$ **Ε.** κανένα απ' όλα αυτά

Μονάδες 6,5

20. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000 Τεχνολογικής*** **Παρασκευή 8 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=4\vec{i}-3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=3\vec{i}+4\vec{j}$

α) Να υπολογίσετε τα μέτρα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Μονάδες 10

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ) Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**2. γ**) και, ακριβώς δίπλα, να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίσα.

Β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

Γ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Δ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Ε. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

Μονάδες 7

Δες και Εσπερινά 2000 τεχνολογικής (το θέμα είναι σχεδόν ίδιο

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ, δίνονται τα σημεία Β(2 , 3) και Γ(4 , 5).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma M}$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} = 2\overrightarrow{O\Gamma} + 3\overrightarrow{\Gamma M}$.

Μονάδες 6

δ) Αν $\vec{\beta} = (10,14)$ να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά $(\vec{\alpha} // \vec{\beta})$.

Μονάδες 5

21. ***εσπερινά επαναληπτικές 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$.

Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (1.Α.α και 1.Α.β) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Οι συντεταγμένες (χ , ψ) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με άκρα $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$ δίνονται από τις σχέσεις :

Α. $\chi = \chi_2 + \chi_1$ και $\psi = \psi_2 + \psi_1$

Β. $\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ και $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$

Γ. $\chi = \chi_2 - \chi_1$ και $\psi = \psi_2 - \psi_1$

Δ. $\chi = \psi_2 - \chi_1$ και $\psi = \psi_2 - \chi_1$

Ε. $\chi = \chi_1 - \chi_2$ και $\psi = \psi_1 - \psi_2$

Μονάδες 6,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Η απόσταση των σημείων $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$ δίνεται από τον τύπο:

Α. $AB = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$

Β. $AB = \sqrt{(\psi_1 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \chi_2)^2}$

Γ. $AB = (\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2$

Δ. $AB = (\psi_1 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \chi_2)^2$

Μονάδες 6

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α (2 , 3) και Β (5 , 7) .

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

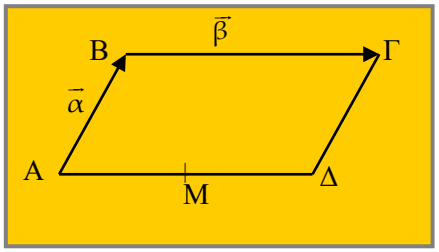
Μονάδες 6

β. Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ ενώ το Μ είναι μέσον του τμήματος ΑΔ.



Στη στήλη **Ι** του παρακάτω πίνακα δίνονται ορισμένα διανύσματα του σχήματος, ενώ στη στήλη **ΙΙ** διάφορες εκφράσεις. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. $\overrightarrow{A\Gamma}$	**1.** $-\vec{\beta}$
Β. $\overrightarrow{\Delta A}$	**2.** $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$
Γ. $\overrightarrow{MA}$	**3.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
Δ. $\overrightarrow{MB}$	**4.** $\vec{\alpha}-\frac{\vec{\beta}}{2}$
Ε. $\overrightarrow{\Delta B}$	**5.** $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$
	6. $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$
	7. $-\frac{\vec{\beta}}{2}$

Μονάδες 25

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

22. ***πανελλήνιες 2001 θετικής*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$

Έστω τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$

Να υπολογίσετε :

α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. Τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$

Μονάδες 7

δ. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 5

23. ***πανελλήνιες 2001 Εσπερινά*** **Τετάρτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,\lambda+2)$, $\vec{\beta}=(2,1)$ και $\vec{\gamma}=(0,7)$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι :

1) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Μονάδες 9

2) $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$

Μονάδες 9

3) $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Ο(0 , 0) , Α(0 , 12) και Β(6 , 8) .

Να βρείτε :

α) Τις συντεταγμένες των μέσων Κ και Λ των τμημάτων ΑΟ και ΑΒ αντίστοιχα.

Μονάδες 8

β) Το μέτρο $|\overrightarrow{K\Lambda}|$ του διανύσματος $\overrightarrow{K\Lambda}$

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=0$ και $\left|\overrightarrow{PA}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{P\Gamma}\right|=2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι :

α) Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 6

β) Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα Α, Β.

Μονάδες 4

γ) Η $\widehat{APB}=90^{o}$.

Μονάδες 7

δ) Το διάνυσμα $\vec{v}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$

Μονάδες 8

εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001 **Πέμπτη 12 Ιουλίου**

25.

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Ας θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Για καθεμιά από τις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της **(1.Α.α, 1.Α.β** και **1.Α.γ** και ακριβώς δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι:

Α. $\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2},\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)$.

Β. $(\chi_1-\chi_2,\ \psi_1-\psi_2)$.

Γ. $\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2},\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)$

Δ. $(2\chi_1,\ 2\psi_2)$

Μονάδες 4,5

β. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

Α. $(\chi_2+\chi_1,\ \psi_2+\psi_1)$.

Β. $(\chi_2-\chi_1,\ \psi_2-\psi_1)$.

Γ. $(\chi_1^2+\psi_1^2,\chi_2^2+\psi_2^2)$

Δ. $\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2},\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)$

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με :

Α. $\sqrt{\chi_1+\chi_2}+\sqrt{\psi_1+\psi_2}$

Β. $\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}+\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}$

Γ. $\sqrt{(\chi_1+\psi_1)^2+(\psi_1+\psi_2)^2}$

Δ. $\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$.

Μονάδες 4

Δες και επαναληπτικές εσπερινών 2000 Θετικής (παρόμοιο θέμα)

Β. Δίνονται τα σημεία Α(5 , 7) , Β(13 , 7) , Γ(9 , 1) , Δ(1 , 1) και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να βρείτε :

α. Τις συντεταγμένες των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν.

β. Το μήκος του τμήματος ΝΚ.

γ. Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Delta}$.

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,2)$, $\vec{\beta}=(6,4)$ και $\vec{\gamma}=(8,0)$.

Να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει :

α. $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

Μονάδες 8

β. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Μονάδες 9

γ. $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$

Μονάδες 8

26. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου*** **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Αν $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ δυο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι : $\text{συν}\theta=\dfrac{\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}+\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}}$.

Μονάδες 6,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Α2. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq 0$, $\vec{\beta}\neq 0$	**1.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|$
β. Ομόροπα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq 0$, $\vec{\beta}\neq 0$	**2.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|$
γ. Αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq 0$, $\vec{\beta}\neq 0$	**3.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
	4. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|$

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση :

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,2)$, $\vec{\beta}=(2,\lambda)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β 1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα τότε :

α. $\lambda=1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$

Μονάδες 4

Β 2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόροπα τότε :

α. $\lambda=1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$

Μονάδες 4,5

Β 3. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε :

α. $\lambda=-1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$

Μονάδες 4

27. *επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001 εσπερινά* — Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Ο(0 , 0), Α(0 , – 3), Β(4 , 3), Γ(–2 , – 6) και Μ(χ , ψ) το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

α. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}$

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την προβολή $\overrightarrow{OM_1}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$

Μονάδες 5

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(2 , 2), Β(5 , 0), Γ(3 , – 6), Ο(0 , 0).

α. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{O\Delta} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$

και να εξετάσετε αν το σημείο Δ είναι σημείο της έλλειψης $\chi^2 + \frac{\psi^2}{4} = 1$

Μονάδες 15

28. **Εσπερινά 2002** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Με το $\vec{\alpha}^2$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ και με το $|\vec{\alpha}|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

Μονάδες 10

Β. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (Β.1, Β.2, Β.3) και δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ τότε ισχύει:

α) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 2$

β) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0$

γ) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = -1$

δ) $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \neq 0$

Μονάδες 5

2. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0$

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -1$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$

δ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,1)$ και $\vec{\beta} = (5,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ, για την οποία το διάνυσμα $\vec{\chi} = (\lambda, -6)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{\gamma}$ όπου $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

Μονάδες 5

29. ***πανελλήνιες 2002*** **Πέμπτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 4

Β. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους .

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία:

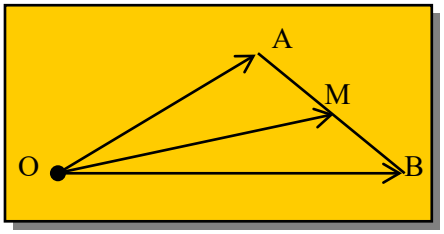
$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$$

Μονάδες 4

30. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** **Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το Ο ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ δίνεται από την ισότητα : $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$



Μονάδες 10

Β. Για τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (Β.1, Β. 2, Β. 3) και δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Η συνθήκη παραλληλίας δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν συντελεστές λ_1 και λ_2 αντίστοιχα είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α . $\lambda_1 = -\lambda_2$

β . $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

γ . $\lambda_1 = \lambda_2$

δ . $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

Μονάδες 5

2. Η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (\chi_1 , \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2 , \psi_2)$ είναι :

α . $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1 \cdot \chi_2 - \psi_1 \cdot \psi_2$

β . $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1 \cdot \chi_2 + \psi_1 \cdot \psi_2$

γ . $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1 + \chi_2 + \psi_1 + \psi_2$

δ . $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \chi_1 \cdot \psi_1 + \chi_2 \cdot \psi_2$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Α (2 , 9) , Β (3 , 4) , Γ (5 , 7) και το διάνυσμα $\vec{\chi} = (\kappa - 2 , \lambda - 5)$

α . Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μονάδες 5

β . Να βρείτε τις τιμές των κ , λ για τις οποίες ισχύει : $\vec{\chi} = \overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{AB}$.

Μονάδες 5

γ . Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος : $\overrightarrow{B\Gamma} - 2\overrightarrow{AB}$.

Μονάδες 5

δ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ .

Μονάδες 5

31. ***επαναληπτικές 2002*** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

Το Σεπτέμβριο του 2002 από το 1ο κεφάλαιο υπήρχαν δυο τρεις απλές ερωτήσεις που για λόγους «οικονομίας χώρου» θα απαντηθούν μαζί με τα υπόλοιπα θέματα στα επόμενα.

32. ***Εσπερινά 2003*** **Δευτέρα 26 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται δύο σημεία $A(\chi_1 , \psi_1)$ και $B(\chi_2 , \psi_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

(χ , ψ) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\chi_M = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ και $\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$.

Μονάδες 15

Β. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(Β.1, Β.2, Β.3** και **Β.4)** και δίπλα ακριβώς, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

2. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:
Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(1, 1), Β(2μ + 1, λ – 2), Γ(4, 0) και Μ(3, 2), όπου Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και μ , λ ∈ ℝ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma M}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει : $|\overrightarrow{\Gamma A}| = |\overrightarrow{\Gamma B}|$.

Μονάδες 5

33. **πανελλήνιες 2003** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq 0$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Μονάδες 2

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές Α(2λ –1, 3λ + 2), Β(1, 2) και Γ(2 ,3) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

Β. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

34. **εσπερινά επαναληπτικές 2003** **Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι :

Οι συντεταγμένες (χ, ψ) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$, δίνονται από τις σχέσεις : $\chi = \chi_2 - \chi_1$ και $\psi = \psi_2 - \psi_1$.

Μονάδες 9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)** , αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, τότε : $\text{συν}\theta = \dfrac{\chi_1\chi_2 + \psi_1\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2}\cdot\sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$

Μονάδες 4

2. Αν $\vec{\alpha} = (\chi, \psi))$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$.

Μονάδες 4

3. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πάντα ίσο με τη διαφορά των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 4

35. **επαναληπτικές 2003** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\chi, \psi)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$.

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

36. **Εσπερινά 2004** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Β. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία θ, τότε ισχύει : $\text{συν}\theta = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

Μονάδες 3

Δ . Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$, $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ και $\vec{\gamma}=(\chi_3,\psi_3)$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει : $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική ιδιότητα).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{\alpha}|=3\,,\ |\vec{\beta}|=2\,,\quad \left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς χ , για τους οποίους ισχύει η σχέση :

$$\left(\vec{\alpha}+\chi\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}-\chi\vec{\beta}\right)=17$$

Μονάδες 10

37. **πανελλήνιες 2004** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα ψ' ψ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2=-1$

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το εμβαδόν του είναι :

$$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AΓ}\right)\right|$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος : $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα χ' χ .

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $\kappa\in\Upsilon$, ώστε το διάνυσμα $\vec{u}=(\kappa^2-\kappa,\kappa)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 9

38. **επαναληπτικές 2004** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν Α , Β σημεία του επιπέδου και Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε για οποιοδήποτε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει : $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

β. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Ο χ ψ δίνονται τα σημεία Α(2 , 3) και Β(3 ,– 2).

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο Ο Α Β είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα χ' χ , ώστε τα σημεία Α, Μ, Β να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 13

(παρόμοιο με το3ο θέμα εσπερινών Σεπτεμβρίου 2002)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 1

Διανύσματα

Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1977**

ΘΕΜΑ 4ο

Απάντηση :

1. Θεωρία.

2. **πανελλήνιες 1981**

ΘΕΜΑ 3ο

Απάντηση :

α. Έστω $\vec{\beta_1}=(\chi_1,\psi_1)$, $\vec{\beta_2}=(\chi_2,\psi_2)$ οι ζητούμενες συνιστώσες άρα $\vec{\beta_1}+\vec{\beta_1}=\vec{\beta}$ **(1)**, έστω ότι η συνιστώσα $\vec{\beta_1}$ έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$ τότε $\vec{\beta_1}//\vec{\alpha}$ **(2)** και επειδή ζητά κάθετες συνιστώσες θα είναι $\vec{\beta_1}\perp\vec{\beta_2}\Leftrightarrow\vec{\beta_2}\perp\vec{\alpha}$ **(3)** αφού το $\vec{\beta_1}//\vec{\alpha}$.

(1) $\Leftrightarrow(\chi_1+\chi_2,\psi_1+\psi_2)=(1,-3)\Leftrightarrow\begin{cases}\chi_1+\chi_2=1\\ \psi_1+\psi_2=-3\end{cases}$ **(4)** και

(2) $\Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta_1}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2 & 2\\ \chi_1 & \psi_1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2\psi_1-2\chi_1=0\Leftrightarrow\psi_1=\chi_1$ **(5)**

(3) $\Leftrightarrow 2\chi_2+2\psi_2=0\Leftrightarrow\chi_2+\psi_2=0\Leftrightarrow\psi_2=-\chi_2$ **(6)**

Αν στην **(4)** αντικαταστήσουμε τα ψ_1 και ψ_2 με τα ίσα τους από τις **(5)** και **(6)** αντίστοιχα θα έχουμε : $\begin{cases}\chi_1+\chi_2=1\\ \chi_1-\chi_2=-3\end{cases}$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη $2\chi_1=-2\Leftrightarrow\boldsymbol{\chi_1=-1}$ και άρα από $\chi_1+\chi_2=1$

$\Leftrightarrow -1+\chi_2=1\Leftrightarrow\boldsymbol{\chi_2=2}$ επομένως από **(5)** και **(6)** αντίστοιχα θα είναι $\begin{cases}\boldsymbol{\psi_1=\chi_1=-1}\\ \boldsymbol{\psi_2=-\chi_2=-2}\end{cases}$

Έτσι τελικά είναι $\boldsymbol{\vec{\beta_1}=(-1,-1),\ \vec{\beta_2}=(2,-2)}$

β. Έστω $\vec{\alpha}=\kappa\cdot\vec{\beta}+\lambda\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow(2,2)=\kappa(1,-3)+\lambda(1,1)\Leftrightarrow(2,2)=(\kappa+\lambda,-3\kappa+\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+\lambda=2\\ -3\kappa+\lambda=2\end{cases}$

οπότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $4\cdot\kappa=4\Leftrightarrow\kappa=1$ και επομένως από $\kappa+\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=1$ άρα τα $\boldsymbol{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}}$ **είναι γραμμικώς εξαρτημένα .**

γ. Η ερώτηση είναι ερώτηση «κρίσεως» και θέλει να παρατηρήσετε ότι τα $\vec{\alpha}=(2,2)$ και $\vec{\gamma}=(1,1)$ είναι παράλληλα ενώ το $\vec{\beta}=(1,-3)$ δεν είναι και επομένως δεν μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ γιατί απλούστατα τα $\vec{\alpha}=(2,2)$ και $\vec{\gamma}=(1,1)$ δεν έχουν δυο διαφορετικές διευθύνσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. ***πανελλήνιες 1983***

Εξετάσεις για βελτίωση βαθμολογίας του Πολυτεχνικού κύκλου γιατί ήδη είχε αρχίσει να εφαρμόζεται το «νέο» σύστημα με της **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 4ο

Απάντηση :

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow 2\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-2\kappa$ και $\left|\vec{\gamma}\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}=\sqrt{11}\Leftrightarrow\kappa^2+\lambda^2=10$

άρα $\kappa^2+4\kappa^2=10\Leftrightarrow\kappa^2=2\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=\sqrt{2}\\ \kappa=-\sqrt{2}\end{cases}$ οπότε $\lambda=-2\kappa\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-2\sqrt{2}\\ \kappa=2\sqrt{2}\end{cases}$ άρα προκύπτουν τα διανύσματα $\begin{cases}\vec{\gamma_1}=\left(\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)\\ \vec{\gamma_2}=\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\end{cases}$ που είναι αντίθετα.

2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow 2\kappa+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-2\kappa$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=0=0\Leftrightarrow\kappa-\lambda=0$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $3\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=0$ και άρα από την δεύτερη $\lambda=0$ τότε το $\vec{\gamma}=(0,0)=\vec{0}$.

4. ***πανελλήνιες 1983 Δ Δέσμη***

Εξετάσεις με το «νέο» σύστημα των **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 1ο

Απάντηση : α. Θεωρία

5. ***πανελλήνιες 1984 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

Απάντηση : α. Θεωρία

6. ***πανελλήνιες 1986 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

Το θέμα πολλά χρόνια τώρα είναι εκτός ύλης, αναφέρεται για ιστορικούς λόγους και δεν θα απαντηθεί

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. πανελλήνιες 1987 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1ο

Απάντηση :

Α. **i)** Θεωρία

ii) Θεωρία

8. πανελλήνιες 1993 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1ο

Απάντηση :

α. $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{\chi}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\chi}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\left(\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\chi}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{0}$

$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}\Leftrightarrow\boxed{\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\right)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}$

β. $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\chi}\right)\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{\chi}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\chi}-\vec{\chi}=\vec{\gamma}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1\right)\vec{\chi}=\vec{\gamma}$ και επειδή $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq1$

$\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq1\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1\neq0$ άρα : $\vec{\chi}=\dfrac{1}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}\vec{\gamma}$

9. πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 3ο

Απάντηση :

α. Από τη θεωρία είναι :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\right|^2=\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2$ όμως

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\text{συν}\dfrac{\pi}{3}+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=4^2+2\cdot4\cdot6\dfrac{1}{2}+6^2=16+24+36=76$ άρα

$\boxed{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\dfrac{1}{4}76=19\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{19}}$

β. Σύμφωνα με τη θεωρία είναι $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\text{προβ}_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{AB}$. Έστω $\vec{\chi}=\text{προβ}_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{AB}$ τότε $\vec{\chi}\,//\,\overrightarrow{AM}$

άρα $\vec{\chi}=\lambda\cdot\overrightarrow{AM}$ επομένως $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\text{προβ}_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\cdot\vec{\chi}=\lambda\cdot\overrightarrow{AM}^2=\lambda\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\lambda\cdot19\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=19\lambda$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$=\frac{16+4\cdot 6\frac{1}{2}}{2}=14 \Leftrightarrow 19\lambda=14 \Leftrightarrow \lambda=\frac{14}{19} \text{ άρα } \vec{\chi}=\text{προβ}_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{AB}=\frac{14}{19}\overrightarrow{AM}$$

Υπάρχει παρόμοιο παράδειγμα στο τρέχον σχολικό βιβλίο

10. πανελλήνιες 1999 θετικής

Σάββατο 26 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων : $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ είναι :

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2$$

β) Θεωρία .

γ) Θεωρία . Πάντως είναι : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}\theta \Leftrightarrow \text{συν}\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ **(1)**

Όμως : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}$ άρα μετά από όλα αυτά η **(1)** γίνεται $\text{συν}\theta=\frac{\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}\cdot\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}}$.

Β. α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow \chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2=0 \Leftrightarrow$

$\lambda\cdot 4+(\lambda-1)\cdot\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0 \Leftrightarrow$ $\lambda=0$ ή $\lambda=-3$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι :

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$$
$$|\vec{w}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

Αν $\varphi=(\vec{u},\vec{v})$ είναι $\text{συν}\varphi=\frac{1\cdot 2+(-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}}{2\cdot 4}=\frac{2-6}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$ άρα $\varphi=\frac{2\pi}{3}$

Αν $\omega=(\vec{u},\vec{w})$ είναι $\text{συν}\omega=\frac{1\cdot\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{0}{4}=0$ άρα $\omega=\frac{\pi}{2}$

Αν $\theta=(\vec{v},\vec{w})$ είναι $\text{συν}\theta=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $\theta=\frac{\pi}{6}$

Επομένως, η σωστή αντιστοίχηση είναι : **1 ↔ Δ**
2 ↔ Α
3 ↔ Β

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. **πανελλήνιες 1999 τεχνολογικής** **Δευτέρα 28 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(5\kappa,3-\lambda)$ και $\vec{\beta}=(4-\lambda,4\kappa)$, όπου κ , λ πραγματικοί αριθμοί.

α) $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow (5\kappa,3-\lambda)=(4-\lambda,4\kappa) \Leftrightarrow \begin{cases}5\kappa=4-\lambda\\3-\lambda=4\kappa\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=4-5\kappa\\3-(4-5\kappa)=4\kappa\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=4-5\kappa\\3-4+5\kappa=4\kappa\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\lambda=-1\\\kappa=1\end{cases}$

β) Αν $\lambda=8$ τότε τα διανύσματα γίνονται $\vec{\alpha}=(5\kappa,-5)$ και $\vec{\beta}=(-4,4\kappa)$, οπότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow$

$\det(\vec{\alpha}\,,\,\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}5\kappa & -5\\-4 & 4\kappa\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 20\kappa^2-20=0 \Leftrightarrow \kappa=\pm 1$ και επειδή κ θετικός άρα **κ = 1**

12. **επαναληπτικές 1999 τεχνολογικής** **Δευτέρα 20 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α) **α)** Η σωστή απάντηση είναι **Α.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\theta$

β) Αν $\vec{\alpha}=\chi_1\vec{i}+\psi_1\vec{j}$ και $\vec{\beta}=\chi_2\vec{i}+\psi_2\vec{j}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(\chi_1\vec{i}+\psi_1\vec{j})(\chi_2\vec{i}+\psi_2\vec{j})=$

$\chi_1\chi_2\vec{i}^{\,2}+\chi_1\psi_2\vec{i}\cdot\vec{j}+\psi_1\chi_2\vec{j}\cdot\vec{i}+\psi_1\psi_2\vec{j}^{\,2} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2$.

Επειδή $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}=1$ και $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.

Β) **α)** Η σωστή απάντηση είναι : **Γ.** 6

α) Αν $\vec{\chi}=(3,4)$ και $\vec{\psi}=(-1,2)$ τότε $\vec{\chi}\cdot\vec{\psi}=3(-1)+4\cdot 2 \Leftrightarrow \vec{\chi}\cdot\vec{\psi}=5$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(-1,2\kappa)$, $B(\kappa-1,2+\kappa)$ και $\Gamma(\kappa,\kappa+3)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(\kappa-1,2+\kappa)-(-1,2\kappa) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=(\kappa,2-\kappa)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(\kappa,\kappa+3)-(\kappa-1,2+\kappa) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(1,1)$.

β) Α, Β , Γ είναι συνευθειακά άρα $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{B\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\kappa & 2-\kappa\\1 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\kappa-2+\kappa=0$. Άρα η σωστή απάντηση είναι **Γ. κ = 1**

γ) Για $\kappa=1$ τα σημεία γίνονται $A(-1,2)$, $B(0,3)$ και $\Gamma(1,4)$, επειδή $0=\frac{-1+1}{2}$ και $3=\frac{2+4}{2}$,

το σημείο Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

13. **επαναληπτικές 1999 θετικής** **Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου**

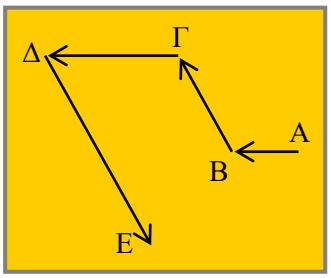
ΘΕΜΑ 1ο

Β. **α)** Σωστό είναι : **Γ.** 5

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις :

$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta E}=-2\vec{\beta}$.



α) Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=2\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=2\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$

β) Το σωστό είναι το **Β.** : $\overrightarrow{AE}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

γ) Αν ισχύει $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot 2\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\left(\vec{\alpha}^{2}-\vec{\beta}^{2}\right)=2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^{2}-\left|\vec{\beta}\right|^{2}\right)=0$

άρα τα $\overrightarrow{A\Gamma}\perp\overrightarrow{\Gamma E}$ (κάθετα).

14. **Εσπερινά 2000 Τεχνολογικής** **Τετάρτη 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Θεωρία

β.

Α.	**3.**
Β.	**2.**
Γ.	**1.**

Β.

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}60^{0}=5\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=5$

β. **Γ.** Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με $60°$ γιατί $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ άρα

$1=1\cdot 2\cdot\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\Leftrightarrow\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{1}{2}$ και επειδή η $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ είναι κυρτή άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^{0}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4\,,\,3)$.

α) $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

β) Αν $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\ \Leftrightarrow\ (\mu-1\,,\ 2\lambda+5)=(-4\,,\,3)\Leftrightarrow \mu-1=-4$ και $2\lambda+5=3$ άρα $\mu=-3$ και $\lambda=-1$.

15. **Εσπερινά 2000 Θετικής** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(– 4 , 3) και Β(4, – 3).

α. $(\mathrm{AB})=\sqrt{(-4-4)^2+(3+3)^2}=\sqrt{64+36}=10.$

β. Αν $\mathrm{M}(\chi_{\mathrm{M}}\,,\psi_{\mathrm{M}})$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ τότε $\chi_{\mathrm{M}}=\dfrac{\chi_{\mathrm{A}}+\chi_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{-4+4}{2}=0$

και $\psi_{\mathrm{M}}=\dfrac{\psi_{\mathrm{A}}+\psi_{\mathrm{B}}}{2}=\dfrac{3+(-3)}{2}=0$ άρα προφανώς το Μ ταυτίζεται με το Ο(0 , 0).

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3\,,\,3)$ και $\vec{\beta}=(\lambda-1\,,\,1)$.

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-6\ \Leftrightarrow\ 3(\lambda-1)+3=-6\ \Leftrightarrow\ 3(\lambda-1)+3=-6\ \Leftrightarrow 3\lambda-3+3=-6\Leftrightarrow 3\lambda=-6\Leftrightarrow\ \lambda=-2$

β. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\ \Leftrightarrow\ 3(\lambda-1)+3=0\ \Leftrightarrow 3\lambda-3+3=0\Leftrightarrow 3\lambda=0\Leftrightarrow\ \lambda=0.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αν $(\chi_{\Gamma}\,,\psi_{\Gamma})$ οι συντεταγμένες του Γ τότε $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \Leftrightarrow\ (\chi_{\Gamma}\,,\psi_{\Gamma})=2(3\,,\ 2)-(5\,,\,1)$

$\Leftrightarrow\ (\chi_{\Gamma}\,,\psi_{\Gamma})=(6-5\,,\ 4-1)\ \Leftrightarrow\ \chi_{\Gamma}=1,\ \ \psi_{\Gamma}=3$

β. Είναι $(\mathrm{OA})=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, $(\mathrm{OB})=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$ και

$(\mathrm{O\Gamma})=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Επειδή $\sqrt{13}<5$, $\sqrt{26}>5$ $\sqrt{10}<10$ άρα

ο σταθμός μπορεί να επικοινωνήσει με τα πλοία στα σημεία Α , Γ και δεν μπορεί να επικοινωνήσει με το πλοίο στο Β.

Για μια διαφορετική προσέγγιση δες την λύση, του αντίστοιχου θέματος, στο κεφάλαιο 3.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. **πανελλήνιες 2000 θετικής** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 3ο

α) Στην πράξη οι σχέσεις που σου δίνει ότι ισχύουν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αποτελούν ένα

(διανυσματικό) σύστημα : $\left.\begin{matrix} 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2) \\ \vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8) \end{matrix}\right\} \underset{(+)}{\Rightarrow} 3\vec{\alpha}=(-3,6) \Leftrightarrow \vec{\alpha}=(-1,2)$.

Επομένως $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2) \Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(4,-2)-2(-1,2) \Leftrightarrow 3\vec{\beta}=(6,-6) \Leftrightarrow \vec{\beta}=(2,-2)$

β) $(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=0$ **(1)**

Όμως : $\vec{\alpha}^2=(-1)^2+2^2=5$, $\vec{\beta}^2=2^2+(-2)^2=8$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}^2=2(-1)+2(-2)=-6$

Οπότε η **(1)** γίνεται : $10\kappa-18\kappa-12+24=0 \Leftrightarrow -8\kappa=-12 \Leftrightarrow \kappa=\frac{12}{8} \Leftrightarrow \kappa=\frac{3}{2}$

γ. Έστω ότι ανέλυσες το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,-1)$ στα διανύσματα $\vec{u}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{v}=(\chi_2,\psi_2)$,

όπου $\vec{u}\,//\,\vec{\alpha}$ και $\vec{v}\perp\vec{\alpha}$. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις

- $\vec{u}\,//\,\vec{\alpha} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{\alpha})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \chi_1 & \psi_1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\chi_1+\psi_1=0$ (1)
- $\vec{v}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow -1\cdot\chi_2+2\cdot\psi_2=0 \Leftrightarrow \chi_2=2\cdot\psi_2 \Leftrightarrow \psi_2=\frac{\chi_2}{2}$ (2)
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{\gamma} \Leftrightarrow (\chi_1+\chi_2,\psi_1+\psi_2)=(3,-1) \Leftrightarrow \begin{matrix} \chi_1+\chi_2=3 & (3) \\ \psi_1+\psi_2=-1 & (4) \end{matrix}$

Οι (1) , (2) , (3) , (4) αποτελούν σύστημα με 4 αγνώστους και 4 εξισώσεις

Λύνω την (1) ως προς ψ_1 και έχω $\psi_1=-2\chi_1$ (5).

Οπότε αντικαθιστώντας τις (2) και (5) στην (4) έχω : $-2\chi_1+\frac{\chi_2}{2}=-1 \Leftrightarrow -4\chi_1+\chi_2=-2$.

Αν αφαιρέσεις με την (3) κατά μέλη θα έχω $5\chi_1=5 \Leftrightarrow \chi_1=1$. Αντικαθιστώ στην (5) και έχω $\psi_1=-2$. Οπότε είναι $\vec{u}=(1,-2)$. Επίσης αν αντικαταστήσω το $\chi_1=1$ στην (3) βρίσκω $\chi_2=2$ και με αντικατάσταση στην 2 βρίσκω $\psi_2=1$ Οπότε είναι $\vec{v}=(2,1)$

Δες θέματα 1981

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. επαναληπτικές 2000 θετικής

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(\chi_1+\chi_2,\psi_1+\psi_2)$, $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda\chi_1+\mu\chi_2,\lambda\psi_1+\mu\psi_2)$

Α. 2. Θεωρία

Α. 3. $\overrightarrow{AB}=(\chi_2-\chi_1,\psi_2-\psi_1)$ και $(AB)=\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$.

Β. 1.

α.	**3.**
β.	**2.**
γ.	**4.**

Β. 2. Β. $\chi_1=-1$.

18. εσπερινά επαναληπτικές 2000 Τεχνολογικής

Παρασκευή 8 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=4\vec{i}-3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=3\vec{i}+4\vec{j}$

α) $\vec{\alpha}=4\vec{i}-3\vec{j}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5,$

$\vec{\beta}=3\vec{i}+4\vec{j}\Leftrightarrow|\vec{\beta}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$

β) Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι είναι $\vec{\alpha}=(4,-3)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$ άρα το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4\cdot3+(-3)4=12-12=0$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

γ) **Γ.** Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

Δες και Εσπερινά 2000 τεχνολογικής (το θέμα είναι σχεδόν ίδιο)

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ, δίνονται τα σημεία Β(2 , 3) και Γ(4 , 5).

α) Αν $M(\chi_M,\psi_M)$ τότε $\chi_M=\frac{\chi_B+\chi_\Gamma}{2}=\frac{2+4}{2}=3,\ \psi_M=\frac{\psi_B+\psi_\Gamma}{2}=\frac{3+5}{2}=4$

άρα $M(3,4)$

β) $\overrightarrow{\Gamma M}=(\chi_M-\chi_\Gamma,\psi_M-\psi_\Gamma)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}=(-1,-1).$

γ) $\vec{\alpha}=2\overrightarrow{O\Gamma}+3\overrightarrow{\Gamma M}=2(4,5)+3(-1,-1)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(5,7).$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ) Είναι $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 10 & 14\end{vmatrix}=70-70=0$ άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά $(\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta})$.

εσπερινά επαναληπτικές 2000 Θετικής

ΘΕΜΑ 1ο

Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου

Α.

1. Α. α. – **Γ.**

1. Α. β . – **Α.**

Β. α. $\overrightarrow{AB}=(5-2\,,\,7-3)=(3\,,\,4)$ **β.** $(AB)=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

ΘΕΜΑ 3ο

Α.	**3.**
Β.	**1.**
Γ.	**7.**
Δ.	**4.**
Ε.	**5.**

19. ## *πανελλήνιες 2001 θετικής*

Σάββατο 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 2ο

α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1\cdot 2\frac{1}{2}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$

β. Το $|\vec{u}|^2=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=4\cdot 1+12\cdot 1+9\cdot 4=52$ (γιατί $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$) οπότε

$|\vec{u}|^2=52\Leftrightarrow|\vec{u}|=\sqrt{52}\Leftrightarrow$ $|\vec{u}|=2\sqrt{13}$ και

Το $|\vec{v}|^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=1-4\cdot 1+4\cdot 4=13$ (γιατί $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$)οπότε $|\vec{v}|=\sqrt{13}$

γ. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\alpha}\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2=2\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2=2\cdot 1-1-6\cdot 4\Leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-23$

δ. $\text{συν}(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-23}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=\dfrac{-23}{2\cdot 13}\Leftrightarrow$ $\text{συν}(\vec{u},\vec{v})=-\dfrac{23}{26}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

20. **πανελλήνιες 2001 Εσπερινά** **Τετάρτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

1) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 1\cdot 2 + (\lambda+2)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 2+\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda = -4$

2) $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1-2\lambda-4=0 \Leftrightarrow 2\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$

3) $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow 2(1,\lambda+2) - (2,1) = (0,7) \Leftrightarrow (0,2\lambda+3) = (0,7) \Leftrightarrow 2\lambda+3=7 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

- Οι συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος ΑΟ είναι $\chi_K = \frac{\chi_A + \chi_O}{2} \Leftrightarrow \chi_K = \frac{0+0}{2} \Leftrightarrow \chi_K = 0$

  $\psi_K = \frac{\psi_A + \psi_O}{2} \Leftrightarrow \psi_K = \frac{0+12}{2} \Leftrightarrow \psi_K = 6$

- Οι συντεταγμένες του μέσου Λ του τμήματος ΑΒ είναι $\chi_\Lambda = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} \Leftrightarrow \chi_\Lambda = \frac{0+6}{2} \Leftrightarrow \chi_\Lambda = 3$

  $\psi_\Lambda = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} \Leftrightarrow \psi_\Lambda = \frac{12+8}{2} \Leftrightarrow \psi_\Lambda = 10$

β) Το μέτρο $|\overrightarrow{K\Lambda}| = \sqrt{(\chi_\Lambda - \chi_K)^2 + (\psi_\Lambda - \psi_K)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (10-6)^2} \Leftrightarrow |\overrightarrow{K\Lambda}| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |\overrightarrow{K\Lambda}| = 5$

21. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = 0$ και $|\overrightarrow{PA}| = 6$, $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{P\Gamma}| = 2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και επειδή τα $\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}$ έχουν κοινό σημείο το Γ άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P\Gamma} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$ άρα το ΡΓ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΡΑΒ και επομένως το Γ μέσον του ΑΒ άρα το Γ ανάμεσα στα Α , Β

γ) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{P\Gamma}^2 = \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right)^2 \Leftrightarrow$

$4\left(2\sqrt{3}\right)^2 = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + 2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow 48 = 36 + 12 + 2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ άρα η $\hat{APB} = 90^o$.

δ) $\vec{v} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{PB} + \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{\overrightarrow{PA} + 3\cdot\overrightarrow{PB}}{2}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} - \overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

επειδή $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P\Gamma}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}}{2}$ άρα

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{\overrightarrow{PA}+3\cdot\overrightarrow{PB}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}}{2}=\frac{\left(\overrightarrow{PA}+3\cdot\overrightarrow{PB}\right)\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}\right)}{2}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+3\cdot\overrightarrow{PB}^2-\overrightarrow{PA}^2+3\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}}{2}$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{0+3\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^2-6^2+3\cdot 0}{2}=\frac{3\cdot 4\cdot 3-36}{2}=0$$

άρα το διάνυσμα $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$

εσπερινά επαναληπτικές Ιουλίου 2001

Πέμπτη 12 Ιουλίου

22.

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι : **Γ** $\left(\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2},\ \dfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)$

β. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι: **Β.** $(\chi_2-\chi_1,\ \psi_2-\psi_1)$.

γ. Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με : **Δ.** $\sqrt{(\chi_2-\chi_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$.

Δες και επαναληπτικές εσπερινών 2000 Θετικής (παρόμοιο θέμα)

Β. α.
$$\chi_K=\frac{\chi_A+\chi_B}{2}=\frac{5+13}{2}=9,\ \psi_K=\frac{\psi_A+\psi_B}{2}=\frac{7+7}{2}=7 \Leftrightarrow K(9,7)$$
$$\chi_\Lambda=\frac{\chi_B+\chi_\Gamma}{2}=\frac{13+9}{2}=11,\ \psi_\Lambda=\frac{\psi_B+\psi_\Gamma}{2}=\frac{7+1}{2}=4 \Leftrightarrow \Lambda(11,4)$$
$$\chi_M=\frac{\chi_\Gamma+\chi_\Delta}{2}=\frac{9+1}{2}=5,\ \psi_\Lambda=\frac{\psi_\Gamma+\psi_\Delta}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \Leftrightarrow M(5,1)$$
$$\chi_N=\frac{\chi_\Delta+\chi_A}{2}=\frac{1+5}{2}=3,\ \psi_N=\frac{\psi_\Delta+\psi_A}{2}=\frac{1+7}{2}=4 \Leftrightarrow N(3,4)$$

β. $NK=\sqrt{(\chi_K-\chi_N)^2+(\psi_K-\psi_N)^2}=\sqrt{(11-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{8^2+0^2}=8$.

γ. $\overrightarrow{B\Delta}=(\chi_\Delta-\chi_B,\ \psi_\Delta-\psi_B)=(1-13,\ 1-7) \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Delta}=(-12,-6)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,2)$, $\vec{\beta}=(6,4)$ και $\vec{\gamma}=(8,0)$.

α. $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}\Leftrightarrow 2(\lambda,2)-(6,4)=(8,0)\Leftrightarrow(2\lambda-6,0)=(8,0)\Leftrightarrow 2\lambda-6=8\Leftrightarrow \lambda=7$

β. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow 6\lambda+8=0\Leftrightarrow \lambda=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

γ. $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\Leftrightarrow 4\lambda-12=0\Leftrightarrow \lambda=3$

23. επαναληπτικές Σεπτεμβρίου — Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία

Α2.

Στήλη Α	
α.	3
β.	1
γ.	2

Β1. **β.** **Β2**. **δ.** **Β3**. **γ.**

24. εσπερινά επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001 — Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία Ο(0 , 0), Α(0 , – 3), Β(4 , 3), Γ(–2 , – 6) και Μ(χ , ψ) το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

α. Μπορείς να εξετάσεις αν τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά με πολλούς τρόπους.

Πχ να αποδείξεις πως τα $\overrightarrow{AB}=(4-0,3-(-3))=(4,6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-2-0,-6-(-3))=(-2,-3)$ είναι παράλληλα με δύο τρόπους μάλιστα :

1ος τρόπος : Επειδή $\begin{vmatrix}4 & 6\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-12-(-12)=0$ άρα $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$.

2ος τρόπος : Επειδή $\overrightarrow{AB}=(4,6)=2(2,3)=-2(-2,-3)=-2\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ άρα $\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Οι συντεταγμένες του Μ είναι $\chi_M = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} \Leftrightarrow \chi_M = \frac{0+4}{2} \Leftrightarrow \chi_M = 2$

$\psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} \Leftrightarrow \psi_M = \frac{-3+3}{2} \Leftrightarrow \psi_M = 0$

γ. Είναι $\overrightarrow{OM} = (2,0)$, $\overrightarrow{OB} = (4,3)$ άρα το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 8$

δ. Για την προβολή $\overrightarrow{OM_1}$ του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ πάνω στο διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ ισχύουν :

1) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{OB}} \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM_1} . \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM_1} = 8$

σύμφωνα και με το προηγούμενο ερώτημα .

2) $\overrightarrow{OM_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$

Άρα $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM_1} = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \lambda \cdot \overrightarrow{OB} = 8 \Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{OM}^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda \left| \overrightarrow{OM} \right|^2 = 8$.

$\overrightarrow{OM} = (2,0) \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{OM} \right| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$ άρα $\lambda \left| \overrightarrow{OM} \right|^2 = 8 \Leftrightarrow 4\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$ επομένως

$\overrightarrow{OM_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = (8, 3)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(2 , 2), Β(5 , 0), Γ(3 , – 6), Ο(0 , 0).

α. Είναι $\text{συν}\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\chi_A \chi_B + \psi_A \psi_B}{\sqrt{\chi_A^2 + \psi_A^2} \cdot \sqrt{\chi_B^2 + \psi_B^2}} = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{10}{5\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$

β. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{O\Delta}$ είναι : $\overrightarrow{O\Delta} = 3(2 , 2) - 2(5 , 0) + (3 , -6) =$

$(6 - 10 + 3 , 6 - 0 - 6) \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Delta} = (-1 , 0)$, άρα το Δ έχει συντεταγμένες (– 1, 0) οπότε $(-1)^2 + \frac{0^2}{4} = 1$.

Άρα το σημείο Δ είναι σημείο της έλλειψης.

Μέχρι εδώ έχει γίνει ***πλήρης*** μετατροπή σε Timew New Roman

25. **Εσπερινά 2002** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σύμφωνα με τον ορισμό είναι $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \left| \vec{\alpha} \right| \cdot \left| \vec{\alpha} \right| \text{συν}0^0 = \left| \vec{\alpha} \right| \cdot \left| \vec{\alpha} \right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = \left| \vec{\alpha} \right|^2$

γιατί η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με το $\vec{\alpha}$ είναι 0° και $\text{συν}0^o = 1$

Β. Β.1. $\leftrightarrow \beta$

Β.2. $\leftrightarrow \gamma$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma}=(1,1)+(5,7) \Leftrightarrow \vec{\gamma}=(6,8)$ και $\vec{\delta}=3(5,7)-2(1,1) \Leftrightarrow \vec{\delta}=(13,19)$

β) Έστω $\vec{\chi}\perp\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\chi}\cdot\vec{\gamma}=0 \Leftrightarrow 6\lambda+8(-6)=0 \Leftrightarrow 6\lambda=48 \Leftrightarrow \lambda=8$

γ) Είναι $|\vec{\gamma}|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$. Άρα $\left|\frac{1}{2}\vec{\gamma}\right|=\frac{1}{2}|\vec{\gamma}|=5$

26. πανελλήνιες 2002

Πέμπτη 6 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία – Ορισμός

- Όταν τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ είναι ***μη μηδενικά*** τότε **Ονομάζουμε** εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$ τον πραγματικό αριθμό $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συνφ}$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων, Το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. Είναι δηλαδή : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συνφ}$
- Ενώ αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ $\left(|\vec{\alpha}|=\vec{0}\right)$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ $\left(|\vec{\beta}|=\vec{0}\right)$ τότε ***εξ ορισμού*** είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$.

Β. Θεωρία – Ορισμός

Μια διαφορετική απόδειξη (Προτείνεται)

Έστω $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\chi_1\cdot\vec{i}+\psi_1\vec{j}$ και το $\vec{\beta}=\chi_2\cdot\vec{i}+\psi_2\vec{j}$ άρα
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(\chi_1\cdot\vec{i}+\psi_1\vec{j})\cdot(\chi_2\cdot\vec{i}+\psi_2\vec{j}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\cdot\chi_2\vec{i}^2+\chi_1\cdot\psi_2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+\chi_2\cdot\psi_1\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+\psi_1\cdot\psi_2\vec{j}^2 \Leftrightarrow$
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2$ διότι είναι γνωστό ότι : $\vec{i}^2=1$, $\vec{j}^2=1$ και $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$

Γ. $\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\Sigma\\ \beta\leftrightarrow\Lambda\end{matrix}$,

27. εσπερινά επαναληπτικές 2002

Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία .

Β.

Β. 1. **γ .** $\lambda_1=\lambda_2$

Β. 2. **β .** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\cdot\chi_2+\psi_1\cdot\psi_2$

ΘΕΜΑ 3ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δίνονται τα σημεία Α (2 , 9) , Β (3 , 4) , Γ (5 , 7) και το διάνυσμα $\vec{\chi}=(\kappa-2\,,\,\lambda-5)$

α . $\overrightarrow{AB}=(3-2,4-9)=(1,-5)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(5-3\,,\,7-4)=(2,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(5-2\,,\,7-9)=(3,-2)$.

β . $\vec{\chi}=\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{AB}=(2\,,\,3)-2(1\,,\,-5)\Leftrightarrow\vec{\chi}=(0\,,\,13)$.

γ . $\left|\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{\chi}\right|=\sqrt{0^2+13^2}=13$.

δ . Μπορείς να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ με δυο τρόπους .

1ος τρόπος $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot3+3(-2)=6-6=0$ άρα $\overrightarrow{B\Gamma}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ άρα $\hat{\Gamma}=90^0$.

2ος τρόπος $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(2^2+3^2\right)+\left(3^2+(-2)^2\right)=26$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=1^2+(-5)^2=1+25=26$ άρα $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ άρα αφού ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος $\Leftrightarrow\hat{\Gamma}=90^0$.

28. *επαναληπτικές 2002* — Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου

Το Σεπτέμβριο του 2002 από το 1ο κεφάλαιο υπήρχαν δυο τρεις απλές ερωτήσεις που για λόγους «οικονομίας χώρου» θα απαντηθούν μαζί με τα υπόλοιπα θέματα στα επόμενα.

29. *Εσπερινά 2003* — Δευτέρα 26 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. 2. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Ισχύει: $\chi_M=\frac{\chi_A+\chi_B}{2}$ και $\psi_M=\frac{\psi_A+\psi_B}{2}\Leftrightarrow3=\frac{1+\chi_B}{2}\Leftrightarrow\chi_B+1=6\Leftrightarrow\boxed{\chi_B=5}$

και $2=\frac{1+\psi_B}{2}\Leftrightarrow\psi_B+1=4\Leftrightarrow\boxed{\psi_B=3}$

β) $\overrightarrow{\Gamma M}=(3-4,2-0)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}=(-1,2)$ και $\overrightarrow{AB}=(5-1,3-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=(4,2)$. Άρα $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\cdot4+2\cdot2\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma M}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα

γ) Είναι $\overrightarrow{\Gamma A}=(1-4,1-0)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma A}=(-3,1)$ επομένως $\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\sqrt{(-3)^2+1^2}\Leftrightarrow\boxed{\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\sqrt{10}}$

και $\overrightarrow{\Gamma B}=(5-4,3-0)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Gamma B}=(1,3)$ επομένως $\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|=\sqrt{1^2+3^2}\Leftrightarrow\boxed{\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|=\sqrt{10}}$

Άρα ισχύει ότι : $\boxed{\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

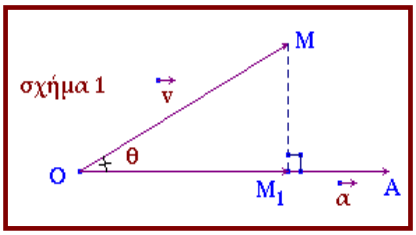
πανελλήνιες 2003

Σάββατο 31 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία .

Επειδή στο σχολικό δεν φαίνεται ξεκάθαρα η απάντηση δες τι έπρεπε να γράψεις ακριβώς :



Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{v}$ του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq 0$.

Με σημείο αναφοράς Ο θεωρώ τα διανύσματα $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$ και $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ αντίστοιχα.

Αν $MM_1\perp OA$ τότε το $\overrightarrow{OM_1}$ είναι η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ που συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, τότε

όπως φαίνεται και στο σχήμα 1 είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM}=\vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M})\Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}$ επειδή $\vec{\alpha}\perp\overrightarrow{M_1M}$ οπότε $\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$. Άρα τελικά $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$

Β. $\alpha\leftrightarrow\Sigma$
$\delta\leftrightarrow\Lambda$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1,\ 3\lambda+2)$, $B(1,\ 2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq -2$.

Β. Εάν $\lambda=1$, τότε $A(1,\ 5)$, $B(1,\ 2)$ και $\Gamma(2,3)$

α. $\overrightarrow{AB}=(1-1,2-5)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=(0,-3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2-1,3-5)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=(1,-2)$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{matrix}\right|\Leftrightarrow(AB\Gamma)=\frac{3}{2}$

30. **εσπερινά επαναληπτικές 2003**

Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Β. **1.** Αν $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ τότε $\text{συν}\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ και επειδή

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2$ άρα $\text{συν}\theta=\frac{\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\psi_1^2}\cdot\sqrt{\chi_2^2+\psi_2^2}}$

Επομένως η απάντηση είναι **Β. 1. Σ**

2. **Β. 2. Σ**

3. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\chi_1\chi_2+\psi_1\psi_2$ και **δεν** είναι πάντα ίσο με τη διαφορά των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Επομένως η απάντηση είναι **Β. 3. Λ**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

31. **επαναληπτικές 2003** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία

Β. **α.** Σωστό.

32. **Εσπερινά 2004** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **Σωστό .**

Γ . Θεωρία.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{\alpha}|=3,\ |\vec{\beta}|=2,\quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}\quad \text{και}\quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$$

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=3\cdot2\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3}.$

β) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|^2=3^2+2\cdot3+2^2$

$\Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2=19\Leftrightarrow \boxed{|\vec{\gamma}|=\sqrt{19}}.$

γ) $(\vec{\alpha}+\chi\vec{\beta})\cdot(2\vec{\alpha}-\chi\vec{\beta})=17\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2-\chi\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\chi\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\chi^2\vec{\beta}^2=17\Leftrightarrow 18-3\chi-4\chi^2-17=0\Leftrightarrow$

$4\chi^2+3\chi-1=0\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}\chi=-1\\ \chi=\frac{1}{4}\end{cases}}$

33. **πανελλήνιες 2004** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Γ. **δ.** **Σωστό**.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$

Α. $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=5(1,2)-3(2,3)=(5-6,10-9)=(-1,1)\ |\vec{\gamma}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}\Leftrightarrow \boxed{|\vec{\gamma}|=\sqrt{2}}$

Β. Αν φ είναι η γωνία του $\vec{\gamma}$ με τον άξονα χ' χ τότε θα ισχύει $\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{\vec{\gamma}}=\frac{\psi}{\chi}=\frac{1}{-1}=-1\Leftrightarrow$

$\varphi=135^0$ ή $\varphi=315^0$ από τις συντεταγμένες όμως του $\vec{\gamma}$ φαίνεται πως αυτό βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο άρα $\boxed{\varphi=135^0}$.

Δαμιανός Μωραΐτης *Λιβαδειά*

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γ. $\vec{u}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow (\kappa^2-\kappa)\cdot 1+\kappa\cdot 2=0 \Leftrightarrow \kappa^2-\kappa+2\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa^2+\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa=0\\ \kappa=-1\end{cases}$.

34. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. **Σωστό** .

β. **Σωστό**.

γ. **Λάθος** .

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Ο χ ψ δίνονται τα σημεία Α(2 , 3) και Β(3 ,– 2).

α. Μπορείς να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με δυο τρόπους .

1ος τρόπος $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cdot 3+3(-2)=6-6=0$ άρα $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ άρα $\widehat{AOB}=90^0$.

2ος τρόπος $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left(2^2+3^2\right)+\left(3^2+(-2)^2\right)=26$ και $\overrightarrow{AB}=(3-2,-2-3)=(1,-5)$ άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=1^2+(-5)^2=1+25=26$ άρα $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ άρα αφού ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα είναι $\widehat{AOB}=90^0$.

Επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ και $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ άρα το ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

β. Αν Μ σημείο του άξονα χ' χ , τότε Μ(χ , 0), για να είναι τα σημεία Α, Μ, Β συνευθειακά θα πρέπει $\overrightarrow{MA}//\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=0$.

- $\overrightarrow{MA}=(2-\chi,3)$
- $\overrightarrow{MB}=(3-\chi,-2)$

Άρα $\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2-\chi & 3\\ 3-\chi & -2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -4+2\chi-9+3\chi=0 \Leftrightarrow 5\chi=13 \Leftrightarrow \chi=\frac{13}{5}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 2

Εξίσωση ευθείας

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1978***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

2. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α(1 , 2), Β(2 , – 3) και Γ(3 , 2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ ως προς την ευθεία ΑΒ.

2. ***πανελλήνιες 1980***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(1 , 1), Β(– 1 , 3) και Γ(2 , – 4).

α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Α.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Β.

γ. Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

3. ***πανελλήνιες 1983 Δ Δέσμη***

Εξετάσεις με το «νέο», τότε, σύστημα με **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 1ο

β. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Μ(1 , –1) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $5\chi - 9\psi + 12 = 0$.

4. ***πανελλήνιες 1984 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2 , 1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δυο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις $3\chi + \psi - 11 = 0$, $\chi - \psi + 3 = 0$.

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

5. **πανελλήνιες 1985 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση : $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $|A|+|B| \neq 0$. Έστω $P(\chi_1, \psi_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής.

Να αποδειχθεί ότι η απόσταση του σημείου Ρ από την ευθεία ισούται με : $\dfrac{|A\chi_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

β. Θεωρούμε δυο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $\chi + \mu\psi + 1 = 0$ και $2\mu\chi + 2\psi + \lambda = 0$ αντίστοιχα (όπου μ, λ είναι πραγματικοί αριθμοί).

Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ, μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

6. **πανελλήνιες 1987 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οχψ δίνονται τα σημεία Α(4 , 2) και Β(3 , – 5) .

Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $7\chi + \psi - 23 = 0$.

Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

7. **πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1 , 3), Β(– 1 , 0), Γ(3 , – 1)

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ

8. **πανελλήνιες 1999 θετικής** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία **Α(8, 0)** και **Β(0, 4)** του καρτεσιανού επιπέδου **Ο χ ψ**.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

Μονάδες 9

γ. Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση :

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

Μονάδες 7

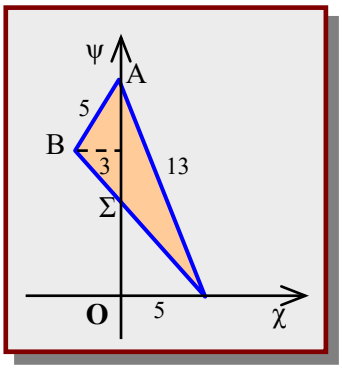
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. ***επαναληπτικές 1999 θετικής*** **Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα α, με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Ο χ ψ, τα σημεία Α, Β και Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών κοινοτήτων ενός δήμου.

Στο ίδιο σχεδιάγραμμα, ο άξονας ψ' ψ παριστάνει μια εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ δυο επαρχιακούς δρόμους που συνδέουν την κοινότητα Α με τις κοινότητες Β και Γ και έχουν μήκη 5 km και 13 km αντίστοιχα.



Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας επαρχιακός δρόμος ΒΓ που θα συνδέει τις κοινότητες Β και Γ, ο οποίος στο σχεδιάγραμμα παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

Αν οι αποστάσεις των κοινοτήτων Β και Γ από την εθνική οδό ψ'ψ είναι 3 km και 5 km αντίστοιχα, τότε :

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το μήκος του επαρχιακού δρόμου ΒΓ.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες του σημείου Σ στο οποίο ο επαρχιακός δρόμος ΒΓ συναντά την εθνική οδό.

Μονάδες 9

10. ***πανελλήνιες 2000 τεχνολογικής*** **Σάββατο 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 4ο

Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου σιδηρόδρομου (ΜΕΤΡΟ) μιας πόλης, σ' ένα ορθοκανονικό Σύστημα συντεταγμένων Οχψ περιλαμβάνουν :

Τη γραμμή Γ_1 με διανυσματική εξίσωση $\varepsilon_1 : \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + \lambda\left(\vec{i} + 3\vec{j}\right)$, $\lambda \in R$ και τη γραμμή Γ_2, που διέρχεται από το σταθμό Σ(– 3 , 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (2, -1)$.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής Γ_1 στη μορφή Αχ + Βψ + Γ = 0.

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής Γ_2 στην ίδια μορφή με το ερώτημα **α.**.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. **Εσπερινά 2000 Θετικής** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Στην επόμενη ερώτηση να γράψετε τον αριθμό της (**1.Α.α**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$, με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι:

Α. $\lambda = \dfrac{\chi_2 - \chi_1}{\psi_2 - \psi_1}$ **Β.** $\lambda = \dfrac{\chi_1 - \chi_2}{\psi_2 - \psi_1}$

Γ. $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$ **Δ.** $\lambda = \dfrac{\psi_1 - \psi_2}{\chi_2 - \chi_1}$

Ε. $\lambda = \dfrac{\psi_2}{\psi_1} - \dfrac{\chi_2}{\chi_1}$

Μονάδες 4,5

β. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $A(\chi_0, \psi_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Μονάδες 4

γ. Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Αναφέρετε ποια είναι η σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ των λ_1 και λ_2 όταν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ποια όταν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Μονάδες 4

Β. Μια ευθεία ε περνάει από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 5)$.

α. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

Μονάδες 3,5

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι : $\psi = \dfrac{3}{4}\chi + \dfrac{11}{4}$.

Μονάδες 3

γ. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και ποια είναι κάθετη στην ε;

$\varepsilon_1 : \psi = -\dfrac{3}{4}\chi + 15$, $\varepsilon_2 : \psi = \dfrac{4}{3}\chi + 105$, $\varepsilon_3 : \psi = -\dfrac{4}{3}\chi + 1$, $\varepsilon_4 : \psi = \dfrac{3}{4}\chi$, $\varepsilon_5 : \psi = \dfrac{3}{4}$

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

12. ***πανελλήνιες 2000 θετικής*** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)\chi + (\lambda + 1)\psi - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

Μονάδες 8

β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2 , 2), Λ(–1 , 5) και Μ(1 , 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

Μονάδες 4,5

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

Μονάδες 6,5

13. ***επαναληπτικές 2000 θετικής***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το σημείο Α(2 , 1) του καρτεσιανού επιπέδου Οχψ.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ΟΑ.

Μονάδες 7

γ. Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΑΒ που διέρχεται από την κορυφή Α.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του ΟΑΒ.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

14. **πανελλήνιες 2001 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_\alpha : \alpha\chi - \psi = 0$ και $\zeta_\alpha : \chi + \alpha\psi = 2$, $\alpha \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β, τα οποία και να προσδιορίσετε.

15. **πανελλήνιες 2001 θετικής** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - \psi^2 + 6\chi + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο Μ(κ , λ) με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

16. **πανελλήνιες 2001 Εσπερινά** **Τετάρτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1 : \psi = \chi + 5$, $\varepsilon_2 : \psi = 10$.

Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2. Θεωρούμε τα σημεία Β (6 , 11) και Δ (10 , 10) τα οποία ανήκουν στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Να βρείτε:

α. Ένα σημείο Γ (χ , 10) της ευθείας ε_2 έτσι ώστε να ισχύει $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$

Μονάδες 8

β. Τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$

Μονάδες 8

γ. Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ(10 , 10) και είναι κάθετη προς την ευθεία ε_1 .

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

17. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, όπου $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

Μονάδες 8,5

Α. 2. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισοδυναμίες :

α. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$

β. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$

Μονάδες 4

Α. 3. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: 2\chi + 3\psi - 8 = 0$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2\lambda - 1, \lambda)$, $\lambda \in R$.

Να βρείτε το λ όταν :

α. η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

β. η ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 4

Β. 1. Στη στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις ευθειών και στη στήλη Β τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό τα στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\psi = 3\chi + 5$	**1.** $(-2, 7)$
β. $\psi = -7$	**2.** $(3, -1)$
γ. $\chi = 1$	**3.** $(1, 3)$
	4. $(4, 0)$
	5. $(0, 1)$

Μονάδες 4,5

Β. 2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda\chi + 2\psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: 3\chi - 2\psi + 1 = 0$.

Να βρείτε το $\lambda \in R$ όταν :

α. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ **β.** $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow$

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

18. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001*** **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3\chi - 7\psi + 27 = 0$ και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία με εξίσωση $4\chi + \psi + 5 = 0$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6 , 2).

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.

Μονάδες 9

19. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001 εσπερινά*** **Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Δίνονται τα σημεία τα σημεία $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$, με $\chi_1 \neq \chi_2$.

α. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

Μονάδες 3,5

β. Να γράψετε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

Μονάδες 3

Α. 2. Στις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**Α.2.α, Α.2.β**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται δύο τυχούσες ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

α. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε ισχύει:

Α. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, **Β.** $\lambda_1 = \lambda_2$, **Γ.** $\lambda_1\lambda_2 = 1$, **Δ.** $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

Μονάδες 3

β. Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, τότε ισχύει:

Α. $\lambda = -\lambda_2$, **Β.** $\lambda_1 = \lambda_2$, **Γ.** $\lambda_1\lambda_2 = -1$, **Δ.** $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 3

Β. Δίνονται τα σημεία Α(1, 1), Β(3, 5) και οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = 2\chi + 7$ και $\varepsilon_2 : 2\psi = -\chi + 14$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

Μονάδες 6,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

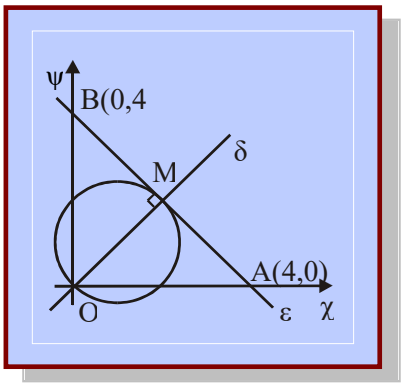
β. Ποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετη και ποια είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

20. ***Εσπερινά 2002*** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία Α(4,0) και Β(0,4), η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.



α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι $\chi + \psi = 4$.
Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ.
Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών δ και ε.
Μονάδες 5

21. ***πανελλήνιες 2002*** **Πέμπτη 6 Ιουνίου**

Στις εξετάσεις του Μαΐου του 2002 δεν υπήρχε «καθαρό» θέμα με εξίσωση ευθείας. Υπήρχαν μια δυο ερωτήσεις που έπρεπε να βρεις κάποια εξίσωση ευθείας αλλά αυτές θα απαντηθούν στο αντίστοιχο κεφάλαιο που αναφέρεται συνολικά η άσκηση

22. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** **Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Για τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**Β.1, Β. 2, Β. 3**) και δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

3. Αν μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0, \psi_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ έχει εξίσωση:

α. $\chi = \chi_0$

β. $\psi = \psi_0$

γ. $\psi = \chi$

δ. $\psi = -\chi$

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται το σημείο Α(1 , 2) και η ευθεία ε : ψ = 3χ + 1.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και

α. είναι παράλληλη στην ευθεία ε

Μονάδες 6

β. είναι κάθετη στην ευθεία ε

Μονάδες 6

γ. είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ.

Μονάδες 6

δ. από την αρχή των αξόνων Ο (0,0).

Μονάδες 7

23. ***επαναληπτικές 2002*** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα τα σημεία $A(\chi_1 , \psi_1)$ και $B(\chi_2 , \psi_2)$, με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1 , 1) και Β(5 , 3).

α. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι ίσος με $\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία $\varepsilon : \psi = -2\chi + 8$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)\chi + 2\lambda\psi - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου $\lambda \in R$ και γ πραγματική σταθερά.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 5

β. Εάν γ = – 1, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Εάν $\gamma \neq -1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

Η εκφώνηση, παρουσιάζει πολύ μεγάλα προβλήματα κατανόησης, εκείνο που θέλει να πει είναι :

Η εξίσωση $\left(\lambda^2-1\right)\chi+2\lambda\psi-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$ για τις διάφορες τιμές του λ «γεννά» εξισώσεις ευθειών,

ο συντελεστής των οποίων εξαρτάται από το λ, συγκεκριμένα είναι : $\lambda_\varepsilon=\dfrac{\lambda^2-1}{2\lambda}$.

Όπως κανείς μπορεί να παρατηρήσει, επειδή υπάρχει το λ^2 στο συντελεστή, για αντίθετες τιμές του λ, ο συντελεστής διεύθυνσης παραμένει ο ίδιος, ***στην πράξη αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία από τα οποία περνάνε περισσότερες από μια ευθείες***.

Η άσκηση λοιπόν ζητάει από σένα στην πραγματικότητα να δείξεις ότι :

- ✓ Όταν **γ = –1** τα σημεία αυτά, από τα οποία περνάνε περισσότερες από μια ευθείες, είναι ***ένα και μοναδικό σημείο***.
- ✓ Όταν **γ ≠ –1** τα σημεία, που αναφέρθηκαν πιο πάνω είναι περισσότερα από ένα, και σου ζητάει ***να βρεις σε πιο γεωμετρικό τόπο κινούνται***.

24. **Εσπερινά 2003** **Δευτέρα 26 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(Β.1, Β.2, Β.3** και **Β.4)** και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in R$, παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς – Ηράκλειο Κρήτης.

Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση Μ του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oχψ$ είναι : $M\left(2+\kappa\cdot t,\ \lambda+2\cdot t\right)$, όπου $\kappa, \lambda \in R$.

Τη χρονική στιγμή t = 5 το πλοίο διέρχεται από το σημείο Α(7 , 13).

α. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ .

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) : $\psi = 2\chi - 1$.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες 8

25. ***πανελλήνιες 2003*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου $\lambda \in R$ με $\lambda \neq -2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο R

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

26. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** **Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα τα σημεία $A(\chi_1, \psi_1)$ και $B(\chi_2, \psi_2)$, με $\chi_1 \neq \chi_2$ είναι $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(\chi-1)^2 - (\psi+2)^2 = 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις :

$\varepsilon_1 : \chi + \psi + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi - \psi - 3 = 0$.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους κάθετες.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

27. **επαναληπτικές 2003** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Αχ + Βψ + Γ = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{δ} = (Β, -Α)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(14 , 5) και Β(2 , –1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι : $χ – 2ψ – 4 = 0$.

Μονάδες 13

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες χ΄ χ και ψ΄ ψ στα σημεία Κ(4 , 0) και Λ(0 , – 2) αντιστοίχως.

Μονάδες 12

28. **Εσπερινά 2004** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Γ. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι: $ψ = λχ + β$,με $β \neq 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, με εξισώσεις $ε_1 : 3χ - 2ψ + 1 = 0$ και $ε_2 : 2χ + 3ψ - 8 = 0$ αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ε_1$ είναι κάθετη στην ευθεία $ε_2$.

Μονάδες 5

β. Υποθέτουμε ότι το σημείο Α(α , 2) ανήκει στην ευθεία $ε_1$ και το σημείο Β(– 5 , β) ανήκει στην ευθεία $ε_2$.

β. 1. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Μονάδες 6

β. 2. Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(α , β) ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3χ – ψ + 3 = 0$.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

29. ***πανελλήνιες 2004*** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα ψ' ψ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + 4y + 16 = 0$.

Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Μονάδες 8

30. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Το σημείο Α(7 , 5) είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία : $3x + y - 6 = 0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου.

Μονάδες 8

β. Να δείξετε ότι το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο Κ(1 , 3).

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του παραπάνω τετραγώνου.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 2

Εξίσωση ευθείας

Ασκήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1978***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

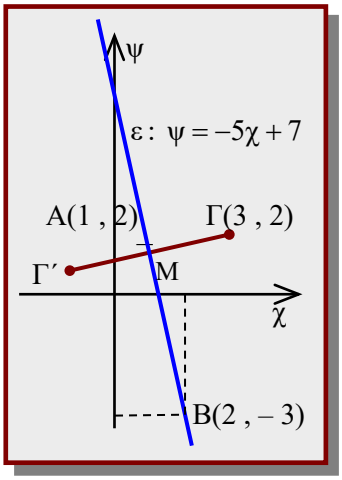
ΘΕΜΑ 4ο

Α. 2. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α(1 , 2), Β(2 , – 3) και Γ(3 , 2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ ως προς την ευθεία ΑΒ.

Αρχικά θα βρεις την εξίσωση της ΑΒ.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\frac{-3-2}{2-1}=-5$, οπότε η ΑΒ είναι μια ευθεία που περνάει από το Α(1 , 2) και έχει συντελεστή $\lambda=-5$, άρα έχει εξίσωση $\varepsilon:\ \psi-2=-5(\chi-1)\Leftrightarrow \varepsilon:\ \psi=-5\chi+7$.

Εξ΄ ορισμού δυο σημεία **Γ** και **Γ΄** είναι **συμμετρικά** ως προς μια ευθεία **ε** αν και μόνο αν η **ε είναι μεσοκάθετος** στο ευθύγραμμο τμήμα **ΓΓ΄**.



Αν λοιπόν το **Γ΄(κ , λ)** είναι το συμμετρικό του **Γ(3 , 2)** ως προς την ευθεία ε τότε η ε μεσοκάθετος στο ΓΓ΄ άρα το Μ (δες σχήμα) είναι μέσον του ΓΓ΄ άρα θα είναι $\chi_M=\frac{\chi_\Gamma+\chi_{\Gamma'}}{2}=\frac{3+\kappa}{2}$ και

$\psi_M=\frac{\psi_\Gamma+\psi_{\Gamma'}}{2}=\frac{2+\lambda}{2}$, τότε θα ισχύουν δυο πράγματα :

1ον Επειδή Μ ανήκει στην ευθεία ε οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωση της ε δηλ

θα πρέπει $\psi_M=-5\chi_M+7\Leftrightarrow\frac{2+\lambda}{2}=-5\frac{3+\kappa}{2}+7\Leftrightarrow 2+\lambda=-5(3+\kappa)+14\Leftrightarrow$ **$5\kappa+\lambda=-3$ (1)**

2ον Επειδή $\Gamma\Gamma'\perp\varepsilon\Leftrightarrow\lambda_{\Gamma\Gamma'}\perp\lambda_\varepsilon$, είναι $\lambda_{\Gamma\Gamma'}=\frac{\psi_A-\psi_{A'}}{\chi_A-\chi_{A'}}=\frac{\lambda-2}{\kappa-3}$ και $\lambda_\varepsilon=-5$ άρα $\lambda_{AA'}\perp\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow$

$\frac{\lambda-2}{\kappa-3}(-5)=-1\Leftrightarrow(\lambda-2)(-5)=-1(\kappa-3)\Leftrightarrow-5\lambda+10=-\kappa+3\Leftrightarrow$ **$\kappa-5\lambda=-7$ (2).**

Οι **(1)** και **(2)** αποτελούν σύστημα η λύση του οποίου θα δώσει τις συντεταγμένες του Γ΄

(1) $\Leftrightarrow\lambda=-5\kappa-3$ οπότε η (2) γίνεται $\kappa-5(-5\kappa-3)=-7\Leftrightarrow 26\kappa=-15-7\Leftrightarrow\kappa=-\frac{22}{26}=-\frac{11}{13}$ οπότε

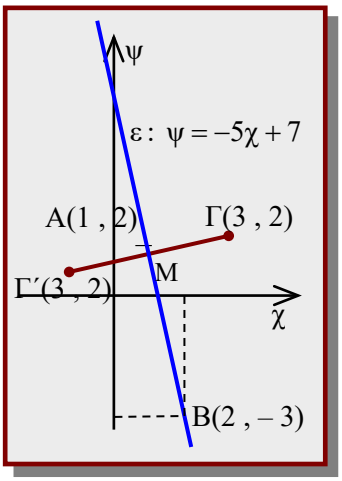
$\lambda=-5\left(-\frac{11}{13}\right)-3=\frac{16}{13}$ άρα **$\Gamma'\left(-\frac{11}{13},\frac{16}{13}\right)$**

Μια λίγο διαφορετική προσέγγιση στο ίδιο θέμα (Μέθοδος)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Να βρεθεί το συμμετρικό του **Γ(3 , 2)** ως προς την ευθεία που περνάει από τα Α(1 , 2), Β(2 , – 3)
(εξίσωση **ε : ψ = – 5χ + 7** δες προηγούμενα)

Αν είναι Γ΄(κ , λ) το συμμετρικό του Γ ως προς την ε τότε από τον ορισμό θα πρέπει η ε να είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΓΓ΄.
Αυτό σημαίνει πως το ΓΓ΄ και ε θα είναι κάθετα και ότι το Μ θα είναι μέσον του ΓΓ΄.
Μια διαφορετική, από την προηγούμενη, προσέγγιση (Μέθοδος) λοιπόν του προβλήματος είναι **να προσδιορίσεις πρώτα το Μ ως τομή της ε και της κάθετης σ΄ αυτήν ευθείας από το Γ και στη συνέχεια να βρεις το Γ΄ από το γεγονός ότι το Μ θα είναι μέσον της ΓΓ΄.**



Έτσι λοιπόν είναι $\psi = -5\chi + 7$ άρα $\lambda_\varepsilon = -5$,επομένως θα είναι

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\Gamma\Gamma'} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Gamma'} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}.$$

Έτσι η ΓΓ΄ θα έχει εξίσωση : $\psi - \psi_P = \lambda_{PP'}(\chi - \chi_P) \Leftrightarrow \psi - 2 = \frac{1}{5}(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{5}\chi + \frac{7}{5}.$

Έτσι για το Μ θα έχω το σύστημα $\begin{cases} \psi = -5\chi + 7 \\ \psi = \frac{1}{5}\chi + \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -5\chi + 7 \\ -5\chi + 7 = \frac{1}{5}\chi + \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -5\chi + 7 \\ -25\chi + 35 = \chi + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \psi = -5\chi + 7 \\ 28 = 26\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -5\frac{14}{13} + 7 \\ \chi = \frac{28}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{14}{13} \\ \psi = \frac{21}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Άρα } \mathbf{M\left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)}.$$

Και επειδή το Μ μέσον του ΓΓ΄ και το Γ΄(κ , λ) θα είναι $\chi_M = \frac{\chi_\Gamma + \chi_{\Gamma'}}{2} \Leftrightarrow \frac{14}{13} = \frac{3 + \kappa}{2} \Leftrightarrow$

$39 + 13\kappa = 28 \Leftrightarrow 13\kappa = -11 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{11}{13}$ και

$$\psi_M = \frac{\psi_\Gamma + \psi_{\Gamma'}}{2} \Leftrightarrow \frac{21}{13} = \frac{2 + \lambda}{2} \Leftrightarrow 26 + 13\lambda = 42 \Leftrightarrow 13\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda = \frac{16}{13}$$

$$\text{Άρα } \mathbf{\Gamma'\left(-\frac{11}{13}, \frac{16}{13}\right)}.$$

Εμένα μου φαίνεται πιο απλή διαδικασία αυτή εσύ τι λες ;

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. ***πανελλήνιες 1980***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι εξισώσεις γραμμών γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(1 , 1), Β(– 1 , 3) και Γ(2 , – 4).

α. Αρχικά θα βρεις την εξίσωση της ΒΓ.

Είναι $\lambda_{ΒΓ}=\frac{\psi_Γ-\psi_Β}{\chi_Γ-\chi_Β}=\frac{-4-3}{2+1}=-\frac{7}{3}$, οπότε η ΒΓ είναι μια ευθεία που περνάει από το Β(–1 , 3) και έχει συντελεστή $\lambda_{ΒΓ}=-\frac{7}{3}$, άρα έχει εξίσωση $ε:\ \psi-3=-\frac{7}{3}(\chi+1)\Leftrightarrow ε:\ \psi=-\frac{7}{3}\chi+\frac{2}{3}$.

Αν ΑΔ είναι το ύψος από το Α τότε $ΑΔ\perp ΒΓ\Leftrightarrow\lambda_{ΑΔ}\lambda_{ΒΓ}=-1\Leftrightarrow\lambda_{ΑΔ}\left(-\frac{7}{3}\right)=-1$ $\lambda_{ΑΔ}=\frac{3}{7}$ οπότε η ΑΔ είναι μια ευθεία που περνάει από το Α(1 , 1) και έχει συντελεστή $\lambda_{ΑΔ}=\frac{3}{7}$, άρα έχει εξίσωση

$ΑΔ:\ \psi-1=\frac{3}{7}(\chi-1)\Leftrightarrow ΑΔ:\ 3\chi-7\psi=4$.

β. Αν ΒΜ είναι η διάμεσος από το Β, τότε το Μ είναι μέσον της ΑΓ, οπότε

$\chi_Μ=\frac{\chi_Α+\chi_Γ}{2}\Leftrightarrow\chi_Μ=\frac{1+2}{2}\Leftrightarrow\chi_Μ=\frac{3}{2}$ και $\psi_Μ=\frac{\psi_Α+\psi_Γ}{2}\Leftrightarrow\psi_Μ=\frac{1-4}{2}\Leftrightarrow\chi_Μ=-\frac{3}{2}$ άρα $Μ\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{ΒΜ}=\frac{\psi_Μ-\psi_Β}{\chi_Μ-\chi_Β}=\frac{-\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}+1}=-\frac{-\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}}=-\frac{9}{5}$, οπότε η ΒΜ είναι μια ευθεία που περνάει από το Β(–1 , 3) και έχει συντελεστή $\lambda_{ΒΜ}=-\frac{9}{5}$, άρα έχει εξίσωση $ΒΜ:\ \psi-3=-\frac{9}{5}(\chi+1)\Leftrightarrow$

$ΒΜ:\ 9\chi+5\psi=6$.

γ. Θα βρεις το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών λύνοντας το σύστημά τους :

$$\begin{cases}ΑΔ:\ 3\chi-7\psi=4\\ ΒΜ:\ 9\chi+5\psi=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{7}\chi+\frac{4}{7}\\ 9\chi+5\left(\frac{3}{7}\chi+\frac{4}{7}\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{7}\chi+\frac{4}{7}\\ 63\chi+15\chi+20=42\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\psi=\frac{3}{7}\chi+\frac{4}{7}\\ 78\chi=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{7}\frac{11}{39}+\frac{4}{7}\\ \chi=\frac{22}{78}=\frac{11}{39}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{7}\frac{11}{39}+\frac{4}{7}\\ \chi=\frac{11}{39}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{189}{7\cdot39}\\ \chi=\frac{11}{39}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{27}{39}=\frac{9}{13}\\ \chi=\frac{11}{39}\end{cases}.$$

Άρα οι ευθείες ΑΔ και ΒΜ τέμνονται στο $Ε\left(\frac{11}{39},\frac{9}{13}\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. ***πανελλήνιες 1983 Δ Δέσμη***

Εξετάσεις με το «νέο», τότε, σύστημα με **Δέσμες** οι οποίες καταργήθηκαν το 1999 από το σημερινό σύστημα των **Κατευθύνσεων**

ΘΕΜΑ 1ο

β. Αν η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $5\chi - 9\psi + 12 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την :

$\psi = \frac{5}{9}\chi + \frac{12}{9} \Leftrightarrow \psi = \frac{5}{9}\chi + \frac{4}{3}$ η οποία έχει συντελεστή $\lambda = \frac{5}{9}$, τότε θα είναι και $\lambda_\varepsilon = \lambda = \frac{5}{9}$.

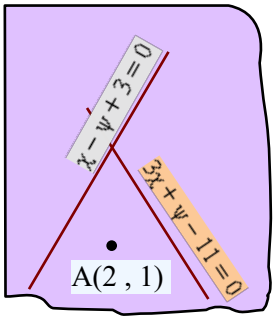
Οπότε η ε είναι μια ευθεία που περνάει από το σημείο Μ(1 , –1) και έχει συντελεστή $\lambda_\varepsilon = \frac{5}{9}$, άρα έχει

εξίσωση $\varepsilon : \psi + 1 = \frac{5}{9}(\chi - 1) \Leftrightarrow \varepsilon : 5\chi - 9\psi = 14$.

4. ***πανελλήνιες 1984 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

β. Αρχικά, αν αντικαταστήσεις τις συντεταγμένες του Α(2 , 1), στις εξισώσεις των υψών διαπιστώνεις ότι το Α(2 , 1) δεν ανήκει σε κανένα από τα ύψη, και το σχήμα είναι όπως δίπλα



✓ Άρα η πλευρά ΑΓ θα είναι η ευθεία που περνάει από το Α και είναι κάθετη στην χ – ψ + 3 = 0, οπότε το Γ θα προκύπτει ως η τομή της ΑΓ με το άλλο ύψος, το 3χ + ψ – 11 = 0.

Η $\chi - \psi + 3 = 0 \Leftrightarrow \psi = \chi + 3$, έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda_1 = 1$, άρα

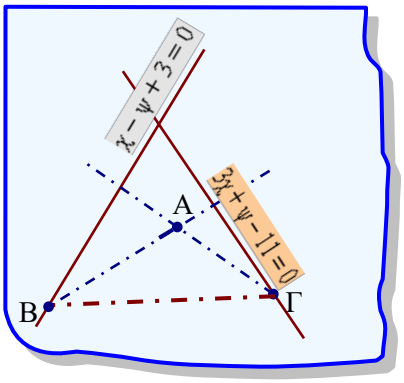
$\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow 1 \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -1$, οπότε η ΑΓ έχει $\lambda_{A\Gamma} = -1$ και περνάει από το Α(2 , 1)

άρα έχει εξίσωση : $A\Gamma : \psi - 1 = -1(\chi - 2) \Leftrightarrow A\Gamma : \chi + \psi + 3 = 0$.

Η τομή της ΑΒ και του ύψους 3χ + ψ – 11 = 0 θα είναι η λύση του συστήματος : $\begin{cases} \chi + \psi - 3 = 0 \\ 3\chi + \psi - 11 = 0 \end{cases}$ και με αφαίρεση κατά μέλη

έχεις 2χ – 8 = 0 ⇔ χ = 4, άρα 4 + ψ – 3 = 0 ⇔ ψ = – 1, άρα

$\Gamma(4, -1)$



✓ Όμοια η πλευρά ΑΒ θα είναι η ευθεία που περνάει από το Α και είναι κάθετη στην 3χ + ψ – 11 = 0, οπότε το Β θα προκύπτει ως η τομή της ΑΒ με το άλλο ύψος, το χ – ψ + 3 = 0.

Η $3\chi + \psi - 11 = 0 \Leftrightarrow \psi = 3\chi + 11$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda_2 = 3$, άρα

$\lambda_{AB} \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow 3 \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = -\frac{1}{3}$, οπότε η ΑΒ έχει $\lambda_{AB} = -\frac{1}{3}$ και περνάει από το Α(2 , 1)

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

άρα έχει εξίσωση : $AB:\ \psi-1=-\frac{1}{3}(\chi-2) \Leftrightarrow$ $AB:\ \chi+3\psi-5=0$.

Η τομή της AB και του ύψους $\chi-\psi+3=0$ θα είναι η λύση του συστήματος : $\begin{cases}\chi+3\psi-5=0\\ \chi-\psi+3=0\end{cases}$

και με αφαίρεση κατά μέλη έχεις $4\psi-8=0 \Leftrightarrow \psi=2$, άρα $\chi-2+3=0 \Leftrightarrow \chi=-1$, άρα $B(-1,\ 2)$

5. πανελλήνιες 1985 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1ο

α. Θεωρία.

β.

✓ Αν $\mu=0$

Τότε οι ευθείες γίνονται $\chi=-1$, ευθεία παράλληλη στον $\psi'\psi$ και $\psi=\frac{\lambda}{2}$, ευθεία παράλληλη στον $\chi'\chi$ οπότε είναι μεταξύ τους κάθετες και όχι παράλληλες, άρα απορρίπτεται το $\mu=0$.

✓ Αν $\mu\neq 0$

Τότε $\chi+\mu\psi+1=0 \Leftrightarrow \mu\psi=-\chi-1 \Leftrightarrow \psi=-\frac{1}{\mu}\chi-\frac{1}{\mu}$ **(1)** και έχει συντελεστή $\lambda_1=-\frac{1}{\mu}$ και

Τότε $2\mu\chi+2\psi+\lambda=0 \Leftrightarrow 2\psi=-2\mu\chi-\lambda \Leftrightarrow \psi=-\mu\chi-\frac{\lambda}{2}$ **(2)** και έχει συντελεστή $\lambda_2=-\mu$.

Άρα για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει $\lambda_1=\lambda_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu}=-\mu \Leftrightarrow \mu^2=1 \Leftrightarrow \mu=\pm 1$.

Οπότε οι ευθείες γίνονται :

Α. $\mu=1$ τότε $\begin{cases}\psi=-\frac{1}{1}\chi-\frac{1}{1}\\ \psi=-1\cdot\chi-\frac{\lambda}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=-\chi-1\\ \psi=-\chi-\frac{\lambda}{2}\end{cases}$ συντελεστής $\lambda=-1$ και $\beta_1=-1,\ \beta_2=-\frac{\lambda}{2}$.

Αν έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$ τότε, σύμφωνα με τη θεωρία θα είναι :

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|-1+\frac{\lambda}{2}\right|}{\sqrt{1+1^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{-2+\lambda}{2}\right|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$$

$$|-2+\lambda|=8 \Leftrightarrow \begin{cases}-2+\lambda=8\\ -2+\lambda=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=10\\ \lambda=-6\end{cases}$$ άρα τα ζεύγη, για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες και να έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$ είναι $(1,\ 10)$ και $(1,\ -6)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. $\begin{cases} \psi = -\frac{1}{-1}\chi - \frac{1}{-1} \\ \psi = -(-1)\cdot\chi - \frac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \chi + 1 \\ \psi = \chi - \frac{\lambda}{2} \end{cases}$ και έχουν κοινό συντελεστή $\lambda = 1$ και $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = -\frac{\lambda}{2}$.

Αν έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$ τότε, σύμφωνα με τη θεωρία θα είναι :

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|1 + \frac{\lambda}{2}\right|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{2+\lambda}{2}\right| = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$$

$$|2+\lambda| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\lambda = 8 \\ 2+\lambda = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$ άρα τα ζεύγη, για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες και

να έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$ είναι $(-1, 6)$ και $(-1, -10)$.

Συνολικά τα ζεύγη που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι :
$(1, 10)$, $(1, -6)$, $(-1, 6)$ και $(-1, -10)$.

6. πανελλήνιες 1987 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Έστω σημείο $M(\chi, \psi) \in \varepsilon$ άρα οι συντεταγμένες του χ και ψ θα ικανοποιούν την

$7\chi + \psi - 23 = 0$ και επίσης $\widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{AM} = (\chi - 4, \psi - 2)$ και $\overrightarrow{BM} = (\chi - 3, \psi + 5)$, άρα $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow$

$(\chi-4)(\chi-3) + (\psi-2)(\psi+5) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 7\chi + 12 + \psi^2 + 3\psi - 10 = 0$ (1) και

$7\chi + \psi - 23 = 0 \Leftrightarrow \psi = -7\chi + 23$ (2)

Άρα η (1) γίνεται $\chi^2 - 7\chi + 12 + (-7\chi + 23)^2 + 3(-7\chi + 23) - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\chi^2 - 7\chi + 12 + 49\chi^2 - 322\chi + 529 - 21\chi + 69 - 10 = 0 \Leftrightarrow 50\chi^2 - 350\chi + 600 = 0 \Leftrightarrow$

$\chi^2 - 7\chi + 12 = 0 \Leftrightarrow$, διακρίνουσα $\Delta = \cdots = 1 > 0$ άρα ρίζες $\chi_1 = 3$ και $\chi_2 = 4$, οπότε

$\psi_1 = -7\cdot 3 + 23 = 2$ και $\psi_1 = -7\cdot 4 + 23 = -5$.

Άρα υπάρχουν δυο σημεία: $M_1(3, 2)$ και $M_1(4, -5)$, έτσι ώστε: $\widehat{AM_1B} = 90^\circ$ $\widehat{AM_2B} = 90^\circ$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 4ο

Αρχικά θα βρεις την εξίσωση της ΒΓ.

Είναι $\lambda_{ΒΓ}=\frac{\psi_Γ-\psi_Β}{\chi_Γ-\chi_Β}=\frac{-1-0}{3+1}=-\frac{1}{4}$, οπότε η ΒΓ είναι μια ευθεία που περνάει από το Β(–1 , 0) και έχει συντελεστή $\lambda_{ΒΓ}=-\frac{1}{4}$, άρα έχει εξίσωση $\varepsilon:\ \psi-0=-\frac{1}{4}(\chi+1)\Leftrightarrow \varepsilon:\ \psi=-\frac{1}{4}\chi-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \chi+4\psi+1=0$.

Αν ε_1 είναι η κάθετη από το Α τότε $\varepsilon_1\perp ΒΓ\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{ΒΓ}=-1\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$ $\lambda_{\varepsilon_1}=4$ οπότε η ε_1 είναι μια ευθεία που περνάει από το Α(1 , 3) και έχει συντελεστή $\lambda_{\varepsilon_1}=4$, άρα έχει εξίσωση

$\varepsilon_1:\ \psi-3=4(\chi-1)\Leftrightarrow \varepsilon_1:\ \psi=4\chi-1\Leftrightarrow 4\chi-\psi-1=0$.

8. **πανελλήνιες 1999 θετικής** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 3ο

α. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του τμήματος ΑΒ είναι $\chi_Δ=\frac{\chi_Α+\chi_Β}{2}\Leftrightarrow \chi_Δ=\frac{8+0}{2}\Leftrightarrow \chi_Δ=4$

$\psi_Δ=\frac{\psi_Α+\psi_Β}{2}=\frac{0+4}{2}\Leftrightarrow \psi_Δ=2$ Δηλαδή είναι **Δ(4 , 2)**

- Αν λ_1 ο συντελεστής της ευθείας ΟΔ τότε θα ισχύει : $\lambda_1=\frac{\psi_Δ-\psi_Ο}{\chi_Δ-\chi_Ο}=\frac{2-0}{4-0}\Leftrightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}$

Το Ο(0,0) είναι ένα σημείο της ευθείας ΟΔ, άρα η εξίσωση της θα είναι: $\psi-0=\lambda_1(\chi-0)\Leftrightarrow \psi=\frac{1}{2}\chi$

β. Αν λ_2 ο συντελεστής της ευθείας **(ε)** που διέρχεται από το Δ και είναι κάθετη στην ΟΔ τότε θα πρέπει $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\lambda_2=-1.\Leftrightarrow \lambda_2=-2$

Επειδή το σημείο **Δ(4, 2)** είναι σημείο της ευθείας **(ε)**, τότε η εξίσωση της θα είναι :

$\psi-\psi_Δ=\lambda_2(\chi-\chi_Δ)\Leftrightarrow\ \psi-2=-2(\chi-4)\ \Leftrightarrow\ \psi-2=-2\chi+8\ \Leftrightarrow 2\chi+\psi-10=0$

γ. Έστω τυχαίο σημείο $M(\chi_0,\psi_0)$ της ευθείας (ε). Έστω επίσης ότι ισχύει $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{OM}^2$

$\Leftrightarrow\ \left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2=2\left|\overrightarrow{OM}\right|^2$ (ιδιοτ. $\left|\vec{\alpha}\right|^2=\vec{\alpha}^2$) άρα

$$\left(\sqrt{(\chi_0-8)^2+\psi_0^2}\right)^2+\left(\sqrt{\chi_0^2+(\psi_0-4)^2}\right)^2=2\left(\sqrt{\chi_0^2+\psi_0^2}\right)^2\ \Leftrightarrow$$

$$\chi_0^2-16\chi_0+64+\psi_0^2+\chi_0^2+\psi_0^2-8\psi_0+16=2\chi_0^2+2\psi_0^2\ \Leftrightarrow\ 2\chi+\psi-10=0$$

(το οποίο ισχύει από το ερώτημα **β**.) .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. **επαναληπτικές 1999 θετικής** Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 4ο

α. Προφανώς είναι **Γ(5 , 0) .**

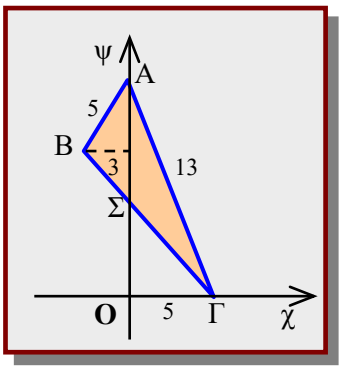
Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ είναι

$(OA)=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ άρα **A(0 , 12).**

Φέρνεις ΒΜ ⊥ ΟΑ, τότε απο το τρίγωνο ΟΒΜ έχεις :

$(MA)=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.

Άρα ΟΜ = 12 – 4 = 8 άρα από το σχήμα είναι **B(–3 , 8)**



β. $(B\Gamma)=\sqrt{(\chi_\Gamma-\chi_B)^2+(\psi_\Gamma-\psi_B)^2}=\sqrt{(5+3)^2+(0-8)^2}\Leftrightarrow (B\Gamma)=\sqrt{64+64}=\sqrt{68}\Leftrightarrow$

$(B\Gamma)=8\sqrt{2}$

γ. Είναι $\lambda_{B\Gamma}=\frac{\psi_\Gamma-\psi_B}{\chi_\Gamma-\chi_B}=\frac{0-8}{5+3}=-\frac{8}{8}=-1$ και επομένως η εξίσωση της ΒΓ είναι :

$\psi-\psi_B=\lambda_{B\Gamma}(\chi-\chi_B)\Leftrightarrow \psi-8=-1(\chi-3)\Leftrightarrow$ $\psi=-\chi+3$ **(1).**

Για να βρεις τις συντεταγμένες του Σ βάζεις στην **(1)** (εξίσωση της ΒΓ) όπου χ το 0 γιατί το Σ βρίσκεται στον άξονα ψ΄ ψ και άρα ψ = – 0 + 3 ⇔ **ψ = 3** άρα **Σ(0 , 3)**

10. **πανελλήνιες 2000 τεχνολογικής** Σάββατο 27 Μαΐου

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $\varepsilon_1:\vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}+\lambda(\vec{i}+3\vec{j})\Leftrightarrow \vec{r}=2\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{i}+3\lambda\vec{j}=(\lambda+2)\vec{i}+(3\lambda+1)\vec{j}\Leftrightarrow$

Αν (χ , ψ) οι συντεταγμένες του $\vec{r}$ τότε $(\chi,\psi)=(\lambda+2,3\lambda+1)\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=\lambda+2 & (1)\\ \psi=3\lambda+1 & (2)\end{cases}$.

Αν τώρα λύσεις την (1) ως προς λ έχεις : λ = χ – 2 και επομένως η (2) γίνεται :

ψ = 3λ + 1 ⇔ ψ = 3(χ – 2) + 1 ⇔ ψ = 3χ – 6 + 1 ⇔ 3χ – ψ – 5 = 0

β. Το διάνυσμα $\vec{u}=(2,-1)$ έχει συντελεστή $\lambda_{\vec{u}}=-\frac{1}{2}$ και αφού η γραμμή Γ_2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(2,-1)$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{1}{2}$ και εφόσον διέρχεται από το σταθμό Σ(– 3 , 2) θα έχει εξίσωση :

$$\psi-2=-\frac{1}{2}(\chi+3)\Leftrightarrow 2\psi-4=-\chi-3\Leftrightarrow \chi+2\psi-1=0.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

11. ***Εσπερινά 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Η σωστή απάντηση είναι **Γ.** $\lambda = \dfrac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1}$.

β. $\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0)$

γ. $\begin{cases} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \end{cases}$

Β. Μια ευθεία ε περνάει από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 5)$.

α. Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \dfrac{5-2}{3+1} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \dfrac{3}{4}$

β. Η ΑΒ είναι μια ευθεία που περνάει από το $B(3, 5)$ και έχει συντελεστή $\lambda_{AB} = -\dfrac{3}{4}$, άρα έχει εξίσωση $\psi - 5 = \dfrac{3}{4}(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = \dfrac{3}{4}\chi - \dfrac{9}{4} + 5 \Leftrightarrow \psi = \dfrac{3}{4}\chi + \dfrac{11}{4}$.

γ. Η ευθεία $\varepsilon_4 : \psi = \dfrac{3}{4}\chi$ είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και η ευθεία $\varepsilon_1 : \psi = -\dfrac{3}{4}\chi + 15$ είναι κάθετη στην ε.

12. ***πανελλήνιες 2000 θετικής*** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Ο φάρος (Φ) θα είναι το σταθερό σημείο των ευθειών :

$(\lambda - 1)\chi + (\lambda + 1)\psi - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\chi + \psi - 1) + (-\chi + \psi - 3) = 0$

Το σταθερό σημείο (ο φάρος (Φ) στην προκειμένη περίπτωση) βρίσκεται σύμφωνα με τη θεωρία από τη λύση του συστήματος:

$\begin{cases} \chi + \psi - 1 = 0 \\ -\chi + \psi - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 1 - \psi \\ 2\psi - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ \psi = 2 \end{cases}$ και επομένως **Φ(–1 , 2).**

β.

✓ Η ευθεία ΦΚ που ενώνει τον φάρο Φ(–1 , 2) με το πλοίο που βρίσκεται στο σημείο Κ(2 , 2) έχει εξίσωση :

$\psi - \psi_\Phi = \lambda_{\Phi K}(\chi - \chi_\Phi)$ και $\lambda_{\Phi K} = \dfrac{\psi_K - \psi_\Phi}{\chi_K - \chi_\Phi} = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$ άρα $\psi - 2 = 0 \Leftrightarrow$ **ΦΚ : ψ = 2**

✓ Η ευθεία ΦΛ που ενώνει τον φάρο Φ(–1 , 2) με το πλοίο που βρίσκεται στο σημείο Λ(–1 , 5) έχει

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

εξίσωση : $\Phi\Lambda : \chi = -1$ αφού είναι $\chi_\Phi = \chi_\Lambda = -1$

✓ Η ευθεία ΦΜ που ενώνει τον φάρο Φ(–1 , 2) με το πλοίο που βρίσκεται στο σημείο Μ(1 , 3) έχει

εξίσωση : $\psi - \psi_\Phi = \lambda_{\Phi M}(\chi - \chi_\Phi)$ και $\lambda_{\Phi M} = \frac{\psi_M - \psi_\Phi}{\chi_M - \chi_\Phi} \Leftrightarrow \lambda_{\Phi M} = \frac{3-2}{1+1} = \frac{1}{2}$ άρα $\psi - 2 = \frac{1}{2}(\chi + 1) \Leftrightarrow$

$2\psi - 4 = \chi + 1 \Leftrightarrow \Phi M : \chi - 2\psi + 5 = 0$.

γ. Θα υπολογίσεις την απόσταση του Κ και του Λ από την ευθεία ΦΜ.

Έτσι λοιπόν είναι $d(K, \Phi M) = \frac{|2 - 2\cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

και $d(\Lambda, \Phi M) = \frac{|-1 - 2\cdot 5 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ οπότε είναι προφανές ότι

$d(\Lambda, \Phi M) = 2d(K, \Phi M)$ άρα $d(\Lambda, \Phi M) > d(K, \Phi M)$.

Άρα το Κ απέχει λιγότερο από ότι το Λ από την ακτίνα του φάρου που περνάει από το Λ.

$E_{\Phi\Lambda M} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\Phi\Lambda}, \overrightarrow{\Phi M}\right)\right|$, είναι $\overrightarrow{\Phi\Lambda} = (-1-(-1), 5-2) = (0, 3)$ και $\overrightarrow{\Phi M} = (1-(-1), 3-2) = (2, 1)$.

επομένως $E_{\Phi\Lambda M} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}|6| \Leftrightarrow E_{\Phi\Lambda M} = 3$ τετρ. μονάδες.

13. επαναληπτικές 2000 θετικής

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το σημείο Α(2 , 1) του καρτεσιανού επιπέδου Οχψ.

α. Η εξίσωση της ευθείας ΟΑ είναι της μορφής ψ = α·χ και επειδή Α(2 , 1) άρα θα είναι

$1 = \alpha \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ άρα $OA : \psi = \frac{1}{2}\chi$

β. Αφού η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ΟΑ άρα θα έχει συντελεστή λ τέτοιον ώστε : $\lambda\frac{1}{2} = -1$

$\lambda = -2$ και αφού διέρχεται από το σημείο Α θα έχει εξίσωση :

$\varepsilon : \psi - 1 = -2(\chi - 2) \Leftrightarrow \varepsilon : \psi = -2\chi + 5$.

γ. *** Αν κρίνει κανείς από την βαθμολογία του θέματος (6 μονάδες) μάλλον θα ξέφυγε της προσοχής, της επιτροπής των θεμάτων και αυτό γιατί η απάντηση είναι περισσότερο απλή από ότι φαντάζεται κανείς :

Αφού στο σημείο Β είναι σημείο τομής της (ε) και του χ΄χ άρα βρίσκεται πάνω στον χ΄χ και επομένως το ύψος από το Α δηλαδή η κάθετη από το Α(2 , 1) στον χ΄χ θα έχει εξίσωση $\chi = 2$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δ. Η $\varepsilon: \psi = -2\chi + 5$ τέμνει τον $\chi'\chi$ στο σημείο Β με $\psi = 0 \Leftrightarrow 0 = -2\chi + 5 \Leftrightarrow 2\chi = 5 \Leftrightarrow \chi = \frac{5}{2}$

$B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

Μπορείς να βρεις το εμβαδόν του ΟΑΒ με δυο τρόπους :

1ος τρόπος :

$\overrightarrow{OA} = (2,1)$ και $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ άρα $E_{OAB} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 2 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|2\cdot 0 - \frac{5}{2}\right| \Leftrightarrow E_{OAB} = \frac{5}{4}\tau\mu$

2ος τρόπος :

Αφού το ύψος είναι η κάθετη από το Α στον $\chi'\chi$ άρα θα ισούται με την τεταγμένη του Α άρα $\upsilon = 1$.

Είναι και $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \frac{5}{2}$ άρα $E_{OAB} = \frac{1}{2}(OB)\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1 \Leftrightarrow E_{OAB} = \frac{5}{4}\tau\mu$

14. ***πανελλήνιες 2001 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_\alpha : \alpha\cdot\chi - \psi = 0$ και $\zeta_\alpha : \chi + \alpha\cdot\psi = 2, \quad \alpha \in R$.

α. Είναι $\varepsilon_\alpha : \alpha\chi - \psi = 0 \Leftrightarrow \psi = \alpha\chi$ άρα η ε_α «περνάει» από το $A(0,0) = O(0,0)$.

Είναι $\zeta_\alpha : \chi + \alpha\psi = 2$ και αν θέσεις $\psi = 0$ έχεις $\chi + \alpha\cdot 0 = 2 \Leftrightarrow \chi = 2$ άρα η ζ_α «περνάει» από το $M(2,0)$.

15. ***πανελλήνιες 2001 θετικής*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η εξίσωση $\chi^2 - \psi^2 + 6\chi + 9 = 0 \Leftrightarrow (\chi^2 + 6\chi + 9) - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow (\chi+3)^2 - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\chi + 3 + \psi)(\chi + 3 - \psi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + 3 + \psi = 0 \\ \text{ή} \\ \chi + 3 - \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 : \psi = -\chi - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ \varepsilon_1 : \psi = \chi + 3 = 0 \end{cases}$

β. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = 1$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2} = -1$ οπότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

γ. Έτσι όπως είναι διατυπωμένο το θέμα έκρυβε παγίδα διότι έπρεπε να πάρεις δυο περιπτώσεις :

1η περίπτωση :

Το $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ και $\vec{\alpha} // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{3} = -1 \Leftrightarrow \kappa = -3$,

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\vec{\beta}=(-16,4\lambda)$ και $\vec{\beta}//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\beta}}=\lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{4\lambda}{-16}=1 \Leftrightarrow \lambda=-4.$

Οπότε είναι **M(– 3 , – 4)** **Απορρίπτεται γιατί πρέπει κ > 0 και λ > 0**

2η περίπτωση :

Το $\vec{\alpha}=(3,\kappa)$ και $\vec{\alpha}//\varepsilon_2$ $\vec{\alpha}//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{3}=1 \Leftrightarrow \kappa=3,$

$\vec{\beta}=(-16,4\lambda)$ και $\vec{\beta}//\varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\beta}}=\lambda_{\varepsilon_1} \Leftrightarrow \frac{4\lambda}{-16}=-1 \Leftrightarrow \lambda=4.$

οπότε είναι **M(3 , 4)**

16. ***πανελλήνιες 2001 Εσπερινά*** **Τετάρτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Οι συντεταγμένες του σημείου Α προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$\begin{cases}\psi=\chi+5\\ \psi=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=5\\ \psi=10\end{cases}$. Έτσι είναι Α(5 , 10). Επομένως $\overrightarrow{BA}=(5-6,10-11)=(-1,-1)$

και $\overrightarrow{B\Gamma}=(\chi-6,10-11)=(\chi-6,-1)$. Άρα $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0 \Leftrightarrow (-1)(\chi-6)+(-1)(-1)=0 \Leftrightarrow$

$-\chi+6+1=0 \Leftrightarrow \chi=7$

β. Είναι $\overrightarrow{BA}=(-1,-1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=(1,1)$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}$ επίσης

$\overrightarrow{A\Delta}=(10-5,10-10)\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}=(5,0)$ και $\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\sqrt{5^2+0^2} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=5$ άρα

$\text{συνφ}=\frac{\chi_{AB}\cdot\chi_{A\Delta}+\psi_{AB}\cdot\psi_{A\Delta}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|}=\frac{1\cdot5+1\cdot0}{\sqrt{2}\cdot5} \Leftrightarrow \text{συνφ}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και επειδή για την γωνία φ δύο

διανυσμάτων ισχύει $0\le\varphi\le\pi$ άρα $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

γ. Η ε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Δ(10 , 10) και είναι κάθετη προς την ευθεία ε_1 έχει συντελεστή λ τέτοιο ώστε $\lambda\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ και επειδή $\lambda_{\varepsilon_1}=1$ άρα $\lambda=-1$ επομένως η ευθεία θα έχει εξίσωση $\psi-\psi_\Delta=\lambda(\chi-\chi_\Delta)\Leftrightarrow\psi-10=-1(\chi-10)\Leftrightarrow$ **$\psi=-\chi+20$**

17. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. $A\chi+B\psi+\Gamma=0\Leftrightarrow B\psi=-A\chi-\Gamma$ και επειδή $B\neq0$, άρα $\psi=-\frac{A}{B}\chi-\frac{\Gamma}{B}$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✓ Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\delta}}=-\frac{A}{B}$, άρα $\lambda=-\frac{A}{B}=\lambda_{\vec{\eta}}$

επομένως η $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ και το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι παράλληλα.

✓ $A\neq 0$ άρα το διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\eta}}=\frac{B}{A}$, επομένως

$\lambda\cdot\lambda_{\vec{\eta}}=\left(-\frac{A}{B}\right)\frac{B}{A}=-1$ άρα η $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ και το διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$ είναι κάθετα.

Α. 2. **α.** $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$, **β.** $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

Α. 3. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon:\ 2\chi+3\psi-8=0$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2\lambda-1,\lambda)$, $\lambda\in R$.

α. $\varepsilon:\ 2\chi+3\psi-8=0\Leftrightarrow 3\psi=-2\chi+8\Leftrightarrow\psi=-\frac{2}{3}\chi+\frac{8}{3}$ άρα είναι $\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{2}{3}$ και $\vec{\alpha}=(2\lambda-1,\lambda)$

✓ Αν $\lambda=\frac{1}{2}$ τότε $\vec{\alpha}=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, άρα $\vec{\alpha}//\psi'\psi$, άρα δεν είναι ούτε παράλληλο ούτε κάθετο στην ε.

✓ Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{\lambda}{2\lambda-1}$, άρα αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τότε

$\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\vec{\alpha}}-\frac{2}{3}=\frac{\lambda}{2\lambda-1}\Leftrightarrow -2(2\lambda-1)=3\lambda\Leftrightarrow -4\lambda+2=3\lambda\Leftrightarrow 7\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{7}$.

β. Αν ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τότε $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\vec{\alpha}}=-1\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\lambda}{2\lambda-1}=-1\Leftrightarrow$

$-2\lambda=-3(2\lambda-1)\Leftrightarrow -2\lambda=-6\lambda+3\Leftrightarrow 3\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=1.$

Β. 1.

α. 2.	**β. 5.**	**γ. 4.**

Β. 2. $\varepsilon_1:\ \lambda\chi+2\psi+3=0\Leftrightarrow 2\psi=-\lambda\chi-3\Leftrightarrow\psi=-\frac{\lambda}{2}\chi-\frac{3}{2}$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{\lambda}{2}$

$\varepsilon_2:\ 3\chi-2\psi+1=0\Leftrightarrow 2\psi=3\chi+1\Leftrightarrow\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}$ άρα $\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{3}{2}$

Άρα

α. $\varepsilon_1 // \varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}\Leftrightarrow-\frac{\lambda}{2}=\frac{3}{2}$ άρα $\lambda=-3$.

β. $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1\Leftrightarrow-\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{3}{2}=-1\Leftrightarrow 3\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{3}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

18. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001*** **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι η κορυφή Α είναι η τομή των πλευρών ΑΒ και ΑΔ, άρα οι συντεταγμένες του θα είναι η λύση του συστήματος : $\begin{cases} 3\chi - 7\psi + 27 = 0 & (1) \\ 4\chi + \psi + 5 = 0 & (2) \end{cases}$,

από τη (2) έχεις $\psi = -4\chi - 5$, οπότε η (1) γίνεται $3\chi - 7(-4\chi - 5) + 27 = 0 \Leftrightarrow$

$3\chi + 28\chi + 35 + 27 = 0 \Leftrightarrow 31\chi = -62 \Leftrightarrow \chi = -2$ και $\psi = -4(-2) - 5 = 8 - 5 \Leftrightarrow \psi = 3.$

Άρα οι ΑΒ και ΑΔ τέμνονται στο $A(-2, 3)$

Αφού οι διαγώνιοι τέμνονται στο $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$ σημαίνει πως το Κ είναι μέσον του τμήματος ΑΓ.

Άρα θα είναι $\chi_K = \frac{\chi_A + \chi_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{-2 + \chi_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -2 + \chi_\Gamma = 4 \Leftrightarrow \chi_\Gamma = 6$ και

$\psi_K = \frac{\psi_A + \psi_\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{3 + \psi_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 3 + \psi_\Gamma = 5 \Leftrightarrow \psi_\Gamma = 2$, άρα $\Gamma(6, 2)$

β. Η πλευρά ΒΓ είναι παράλληλη στην ΑΔ, είναι $4\chi + \psi + 5 = 0 \Leftrightarrow \psi = -4\chi - 5$ άρα συντελεστής διεύθυνσης της ΑΔ και της ΒΓ ο $\lambda = -4$, επομένως η πλευρά ΒΓ «περνάει» από το Γ(6 , 2) και έχει συντελεστή $\lambda = -4$, άρα έχει εξίσωση $\psi - 2 = -4(\chi - 6) \Leftrightarrow \psi = -4\chi + 26.$

γ. Το σημείο Β είναι η τομή των πλευρών ΑΒ και ΒΓ, άρα

οι συντεταγμένες του θα είναι η λύση του συστήματος : $\begin{cases} 3\chi - 7\psi + 27 = 0 & (1) \\ \psi = -4\chi + 26 & (3) \end{cases}$,

αν αντικαταστήσεις την $\psi = -4\chi + 26$ στην (1) έχεις $3\chi - 7(-4\chi + 26) + 27 = 0 \Leftrightarrow$

$3\chi + 28\chi - 182 + 27 = 0 \Leftrightarrow 31\chi = 155 \Leftrightarrow \chi = 5$ και $\psi = -4 \cdot 5 + 26 \Leftrightarrow \psi = 6.$

Άρα οι ΑΒ και ΒΓ τέμνονται στο $B(5, 6)$.

Η διαγώνιος ΒΔ περνάει από τα σημεία : $B(5, 6)$ και $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$ άρα έχει :

$\lambda_{B\Delta} = \frac{\psi_K - \psi_B}{\chi_K - \chi_B} \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = \frac{\frac{5}{2} - 6}{2 - 5} = \frac{\frac{5 - 12}{2}}{-3} = \frac{-\frac{7}{2}}{-3} = \frac{7}{6}$ και η ΒΔ έχει εξίσωση : $\psi - \psi_B = \lambda_{B\Gamma}(\chi - \chi_B)$ άρα

$\psi - 6 = \frac{7}{6}(\chi - 5) \Leftrightarrow 6\psi - 36 = 7\chi - 35 \Leftrightarrow$ $B\Delta : 7\chi - 6\psi + 1 = 0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. **επαναληπτικές *Σεπτεμβρίου 2001* εσπερινά** **Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1.

α. $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}$ άρα $\dfrac{\psi-\psi_1}{\chi-\chi_1}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}\Leftrightarrow \psi-\psi_1=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}(\chi-\chi_1)$.

β. $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}$.

Α. 2.

α. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε ισχύει: **Β.** $\lambda_1=\lambda_2$

β. Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, τότε ισχύει: **Γ.** $\lambda_1\lambda_2=-1$

Β.

α. $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}\Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}=\dfrac{5-1}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$ και η ΑΒ έχει εξίσωση : $\psi-\psi_B=\lambda_{AB}(\chi-\chi_B)$ άρα

$\psi-5=2(\chi-3)\Leftrightarrow \psi-5=2\chi-6 \Leftrightarrow$ $AB: 2\chi-\psi-1=0$.

β. Προφανώς η ε_1 επειδή έχει $\lambda_{\varepsilon_1}=2$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ και η ε_2 επειδή έχει $\lambda_{\varepsilon_2}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

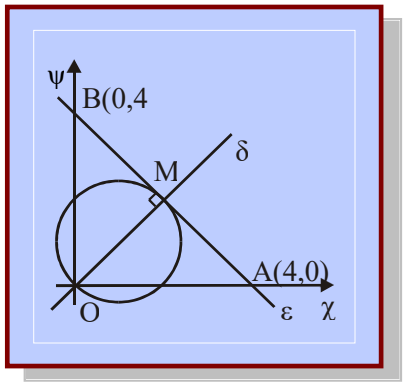
20. ***Εσπερινά 2002*** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\dfrac{4-0}{0-4}=\dfrac{4}{-4}$

$\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$, άρα έχει εξίσωση $\psi-\psi_A=\lambda_\varepsilon(\chi-\chi_A)\Leftrightarrow$

$\psi-4=-1(\chi-0)\Leftrightarrow \psi-4=-\chi \Leftrightarrow$ $\chi+\psi-4=0$



β. Η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε έχει συντελεστή λ_δ τέτοιο ώστε $\lambda_\delta\lambda_\varepsilon=-1$ και επειδή $\lambda_\varepsilon=-1$ άρα $\lambda_\delta=1$ και επομένως θα έχει εξίσωση $\psi=\lambda_\delta\chi\Leftrightarrow$ $\psi=\chi$

και πρόκειται για τη διχοτόμο του 1ου και 4ου τεταρτημόριου.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ευθειών δ και ε προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} \chi + \psi - 4 = 0 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi = 4 \\ \psi = \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2 \\ \psi = 2 \end{cases}$. Έτσι είναι **Μ(2 , 2)**.

21. *πανελλήνιες 2002*

Πέμπτη 6 Ιουνίου

Στις εξετάσεις του Μαΐου του 2002 δεν υπήρχε «καθαρό» θέμα με εξίσωση ευθείας. Υπήρχαν μια δυο ερωτήσεις που έπρεπε να βρεις κάποια εξίσωση ευθείας αλλά αυτές θα απαντηθούν στο αντίστοιχο κεφάλαιο που αναφέρεται συνολικά η άσκηση

22. *εσπερινά επαναληπτικές 2002*

Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. 3. **β.** $\psi = \psi_0$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται το σημείο Α(1 , 2) και η ευθεία ε : ψ = 3χ + 1.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και

α. Αν μια ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία ε τότε έχει συντελεστή διεύθυνσης : λ = 3 και αφού διέρχεται από Α(1 , 2) θα έχει εξίσωση : $\psi - 2 = 3(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 2 = 3\chi - 3 \Leftrightarrow \psi = 3\chi - 1$.

β. Αν είναι κάθετη στην ευθεία ε τότε έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ και αφού διέρχεται από Α(1 , 2) θα έχει εξίσωση : $\psi - 2 = -\frac{1}{3}(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi - 2 = -\frac{1}{3}\chi + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$3\psi - 6 = -\chi + 1 \Leftrightarrow \chi + 3\psi - 7 = 0$.

γ. Αν είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ και «περνάει» από το Α(1 , 2) έχει εξίσωση $\psi = 2$.

δ. Αν «περνάει από την αρχή των αξόνων Ο (0,0) τότε είναι της μορφής ψ = λ·χ και επειδή «περνάει» από το Α(1 , 2) θα πρέπει 2 = λ·1 ⇔ λ = 2 άρα $\psi = 2\chi$ η εξίσωσή της.

23. *επαναληπτικές 2002*

Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. α. Σωστό .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lambda_{\overline{AB}}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}$ άρα $\lambda_{\overline{AB}}=\dfrac{3-1}{5-1}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

β. Το μέσον Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\chi_M=\dfrac{\chi_A+\chi_B}{2}\Leftrightarrow\chi_M=\dfrac{1+5}{2}=3$ και

$\psi_M=\dfrac{\psi_A+\psi_B}{2}\Leftrightarrow\psi_M=\dfrac{1+3}{2}=2$, άρα $M(3,2)$ και αν ε η μεσοκάθετος τότε

$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\overline{AB}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\dfrac{1}{2}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-2$ οπότε έχει εξίσωση $\psi-2=-2(\chi-3)\Leftrightarrow\varepsilon:\ \psi=-2\chi+8$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η εξίσωση $(\lambda^2-1)\chi+2\lambda\psi-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$, (1) όπου $\lambda\in R$ και γ πραγματική σταθερά.

α. Για να παριστάνει ευθεία, μια εξίσωση της μορφής Αχ + Βψ + Γ = 0 ***πρέπει και αρκεί :***
τα Α και Β να μην μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Στην προκειμένη περίπτωση είναι :

- ✓ $A=0\Leftrightarrow\lambda^2-1=0\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$.
- ✓ $B=0\Leftrightarrow 2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$.

Προφανώς τα Α και Β δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα οπότε η $(\lambda^2-1)\chi+2\lambda\psi-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ παριστάνει ευθεία γραμμή.

β. Εάν γ = – 1, η εξίσωση γίνεται : $(\lambda^2-1)\chi+2\lambda\psi-\lambda^2-2\lambda+1=0$

- ✓ Αν θέσεις στη (1) λ = 1 έχεις $0\cdot\chi+2\cdot1\cdot\psi-1^2-2\cdot1+1=0\Leftrightarrow2\psi=2$ άρα ψ = 1.
  Που σημαίνει πως η **ψ = 2** είναι μια από τις ευθείες που «παριστάνει» η (1)

- ✓ Αν θέσεις στη (1) λ = 0 έχεις $-1\cdot\chi+2\cdot0\cdot\psi-0^2-2\cdot0+1=0\Leftrightarrow-\chi+1=0$ άρα χ = 1.
  Που σημαίνει πως η **χ = 1** είναι, επίσης, μια από τις ευθείες που «παριστάνει» η (1)
  Οι ευθείες **χ = 1** και **ψ = 1** προφανώς τέμνονται στο σημείο Α(1 , 1).
  Αν θέσεις λοιπόν στη (1) όπου χ = 1 και ψ = 1 θα έχεις :
  $(\lambda^2-1)\cdot1+2\lambda\cdot1-\lambda^2-2\lambda+1=\lambda^2-1+2\lambda-\lambda^2-2\lambda+1=0$ άρα η (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του Α(1 , 1) για κάθε τιμή του λ, άρα η (1) παριστάνει ευθεία που για κάθε τιμή του λ διέρχεται από το Α(1 , 1).

γ. Αν γ ≠ – 1, έστω ένα σημείο $M(\chi_0,\psi_0)$ από το οποίο περνάει ***μόνο*** μια ευθεία από αυτές που δημιουργούνται από την παραμετρική εξίσωση (1), τότε θα πρέπει η (1) να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του Μ και μάλιστα αυτό να συμβαίνει για μια μόνο τιμή του λ.
Είναι $(\lambda^2-1)\chi_0+2\lambda\psi_0-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0\Leftrightarrow\lambda^2\cdot\chi_0-\chi_0+2\lambda\psi_0-\lambda^2-2\lambda-\gamma=0\Leftrightarrow$

$(\chi_0-1)\cdot\lambda^2+2(\psi_0-1)\cdot\lambda-\chi_0-\gamma=0$ (2).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Αν λοιπόν πρέπει αυτό να ισχύει μόνο για μια τιμή του λ, σημαίνει πως η (2) έχει μοναδική λύση ως προς λ, άρα ***η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι 0***.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\psi_0 - 1)^2 - 4(\chi_0 - 1)(-\chi_0 - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \psi_0^2 - 2\psi_0 + 1 + \chi_0^2 - \chi_0 + \gamma\chi_0 - \gamma = 0 \Leftrightarrow$

$\chi_0^2 + \psi_0^2 + (\gamma - 1)\chi_0 - 2\psi_0 + 1 - \gamma$ (3)

Η (3) είναι της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, με $A = \gamma - 1, B = -2$ και $\Gamma = 1 - \gamma$ και επί πλέον $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\gamma - 1)^2 + (-2)^2 - 4(1 - \gamma) = \gamma^2 - 2\gamma + 1 + 4 - 4 + 4\gamma = \gamma^2 + 2\gamma + 1 \Leftrightarrow$

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\gamma + 1)^2$. Το $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\gamma + 1)^2$ επειδή είναι τετράγωνο είναι γενικά ≥ 0, επειδή $\gamma \neq -1$ άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\gamma + 1)^2 > 0$, επομένως η (3) $\chi_0^2 + \psi_0^2 + (\gamma - 1)\chi_0 - 2\psi_0 + 1 - \gamma$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{\gamma - 1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα : $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} =$

$\frac{\sqrt{(\gamma + 1)^2}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{|\gamma + 1|}{2}$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση είναι κύκλος κέντρου $K\left(-\frac{\gamma - 1}{2}, 1\right)$ και ακτίνας $\rho = \frac{|\gamma + 1|}{2}$

24. ***Εσπερινά 2003*** **Δευτέρα 26 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. 1. Λάθος.

$M(2 + \kappa \cdot t, \lambda + 2 \cdot t)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Τη χρονική στιγμή t = 5 οι συντεταγμένες του Μ είναι $(2 + 5\kappa, \lambda + 10)$ και αφού το πλοίο διέρχεται από το σημείο Α(7, 13) αυτό σημαίνει ότι το $M(2 + 5\kappa, \lambda + 10)$ ταυτίζεται με το Α(7, 13)

άρα $\begin{cases} 2 + 5\kappa = 7 \\ \lambda + 10 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa = 5 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$ άρα το Μ έχει την γενική μορφή $M(2 + t, 3 + 2 \cdot t)$.

β. Για α αποδείξεις ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) : $\psi = 2\chi - 1$ αντικαθιστάς τις συντεταγμένες του $M(2 + t, 3 + 2 \cdot t)$ (όπως διαμορφώθηκαν) στην εξίσωση $\psi = 2\chi - 1$ και έχεις $3 + 2t = 2(2 + t) - 1 \Leftrightarrow 2t - 2t = 4 - 3 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$ άρα οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $\psi = 2\chi - 1$ και επομένως το Μ, δηλαδή :

Το πλοίο της γραμμής διατρέχει την ευθεία $\psi = 2\chi - 1$.

γ. Έστω $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2)$ το διάνυσμα με μήκος 1 που είναι κάθετο στην ευθεία που κινείται το δελφίνι.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επειδή το δελφίνι , σύμφωνα με την εκφώνηση, κινείται παράλληλα με το πλοίο, το οποίο διατρέχει την ευθεία $\psi = 2\chi - 1$, άρα θα κινείται σε ευθεία με συντελεστή $\lambda = 2$.

άρα για το $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ θα ισχύον : $\begin{cases} \left|\vec{\alpha}\right| = 1 \\ \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} = 1 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ άρα υπάρχουν 2 λύσεις $\vec{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\vec{\alpha'} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

25. ***πανελλήνιες 2003*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Αν συμβολίσεις χ_A και ψ_A τις συντεταγμένες του Α θα ισχύει $\begin{cases} \chi_A = 2\lambda - 1 \\ \psi_A = 3\lambda + 2 \end{cases}$, και αν λύσεις ως προς λ και τις δυο εξισώσεις θα έχεις $\begin{cases} \lambda = \frac{\chi_A + 1}{2} \\ \lambda = \frac{\psi_A - 2}{3} \end{cases}$, επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα ισχύει

$\frac{\chi_A + 1}{2} = \frac{\psi_A - 2}{3} \Leftrightarrow 3\chi_A + 3 = 2\psi_A - 4 \Leftrightarrow 3\chi_A - 2\psi_A + 7 = 0$, προφανώς, οι συντεταγμένες του Α είναι λύσεις τις εξίσωσης $3\chi - 2\psi + 7 = 0$ άρα το Α «κινείται» στην ευθεία $3\chi - 2\psi + 7 = 0$

Β. Εάν $\lambda = 1$ τότε Α(– 1, 5), Β(1 , 2) και Γ(2 , 3)

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $(ABΓ) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AΓ}\right)\right|$, οπότε υπολογίζεις πρώτα τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB} = (2, -3)(2-3)$ και $\overrightarrow{AΓ} = (3, -2)$ άρα

$(ABΓ) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-4+9| = \frac{1}{2}\cdot 5 \Leftrightarrow$ **(ΑΒΓ) =** $(ABΓ) = \frac{5}{2}$ τετραγωνικές μονάδες .

26. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** **Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **α.** **Σωστό.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(\chi-1)^2-(\psi+2)^2=0$.

α. $(\chi-1)^2-(\psi+2)^2=0 \Leftrightarrow \big[(\chi-1)+(\psi+2)\big]\big[(\chi-1)-(\psi+2)\big]=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\big[(\chi-1)+(\psi+2)\big]=0 \ \text{ή}\\ \big[(\chi-1)-(\psi+2)\big]=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi+\psi+1=0 \ \text{ή}\\ \chi-\psi-3=0\end{cases}.$$

Άρα η εξίσωση $(\chi-1)^2-(\psi+2)^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις :

$\varepsilon_1: \chi+\psi+1=0$ και $\varepsilon_2: \chi-\psi-3=0$.

β. Η ευθεία $\varepsilon_1: \chi+\psi+1=0 \Leftrightarrow \psi=-\chi-1$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ και ευθεία $\varepsilon_2: \chi-\psi-3=0 \Leftrightarrow \psi=\chi-1$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_2}=1$ και επειδή

$\lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}=-1\cdot 1=-1$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους κάθετες..

γ. Το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι η λύση του συστήματος τους.

$$\begin{cases}\chi+\psi+1=0\\ \chi-\psi-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=-\chi-1\\ \chi-\psi-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=-\chi-1\\ \chi-(-\chi-1)-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=-\chi-1\\ 2\chi-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=-2\\ \chi=1\end{cases}.$$

Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $M(1,-2)$.

27. **επαναληπτικές 2003** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **γ.** **Σωστό**.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Το θέμα μπορείς να απαντήσεις με δυο τουλάχιστον τρόπους .

1ος τρόπος :

Αρκεί να δείξεις ότι η ευθεία $\chi - 2\psi - 4 = 0$ διέρχεται από τα σημεία Α(14 , 5) και Β(2 , –1), οπότε επειδή από δυο σημεία διέρχεται μια μόνον ευθεία άρα η ευθεία του Α(14 , 5) και Β(2 , –1) θα είναι η $\chi - 2\psi - 4 = 0$.

Για να δείξεις ότι η ευθεία $\chi - 2\psi - 4 = 0$ διέρχεται από τα σημεία Α(14 , 5) και Β(2 , –1), αρκεί οι συντεταγμένες τους να επαληθεύουν την εξίσωση

Πράγματι $14 - 2\cdot 5 - 4 = 0$ και $2 - 2\cdot(-1) - 4 = 0$ Άρα ….

2ος τρόπος :

Μπορείς να υπολογίσεις την εξίσωση της ευθείας του Α(14 , 5) και Β(2 , –1)

Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_B-\psi_A}{\chi_B-\chi_A}=\dfrac{-1-5}{2-14}=\dfrac{-6}{-12}=\dfrac{1}{2}$ και επειδή περνάει από το Β(2 , –1) άρα θα είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\psi-\psi_B=\lambda_{AB}(\chi-\chi_B)\Leftrightarrow\psi-(-1)=\frac{1}{2}(\chi-2)\Leftrightarrow\psi+1=\frac{1}{2}\chi-1\Leftrightarrow 2\psi+2=\chi-2\Leftrightarrow\chi-2\psi-4=0.$$

β. Για να αποδείξεις ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες χ΄ χ και ψ΄ ψ στα σημεία Κ(4 , 0) και Λ(0,–2) αντιστοίχως αρκεί να θέσεις στην εξίσωση $\chi-2\psi-4=0$ όπου $\chi=0$ οπότε $0-2\psi-4=0\Leftrightarrow\psi=-2$ άρα η ευθεία $\chi-2\psi-4=0$ τέμνει τον ψ΄ψ στο Λ(0 , – 2) και αν θέσεις στην εξίσωση όπου $\psi=0$ έχεις $\chi-2\cdot0-4=0\Leftrightarrow\chi=4$ άρα η ευθεία $\chi-2\psi-4=0$ τέμνει τον χ΄χ στο Κ(4 , 0)

28. ***Εσπερινά 2004*** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **Λάθος**.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\varepsilon_1:\ 3\chi-2\psi+1=0\Leftrightarrow 2\psi=3\chi+1\Leftrightarrow\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{3}{2}$

$\varepsilon_2:\ 2\chi+3\psi-8=0\Leftrightarrow 3\psi=-2\chi+8\Leftrightarrow\psi=-\frac{2}{3}\chi+\frac{8}{3}$ άρα $\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{2}{3}$

Είναι $\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$, άρα η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2.

β.

β. 1. Αν το σημείο Α(α , 2) ανήκει στην ευθεία ε_1 τότε $3\cdot\alpha-2\cdot2+1=0\Leftrightarrow 3\alpha=3\Leftrightarrow\alpha=1$, και αν το σημείο Β(– 5 , β) ανήκει στην ευθεία ε_2 τότε $2(-5)+3\beta-8=0\Leftrightarrow 3\beta=18\Leftrightarrow\beta=6$.

β. 2. Είναι α = 1 και β = 6 , άρα το Μ(α , β) = Μ(1 , 6). Αν αντικαταστήσεις τις συντεταγμένες του Μ στην 3χ – ψ + 3 = 0 έχεις $3\cdot1-6+3=0$ άρα το Μ(1 , 6) ανήκει στην 3χ – ψ + 3 = 0 .

γ. Το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι η λύση του συστήματος τους.

$$\begin{cases}3\chi-2\psi+1=0\\2\chi+3\psi-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\psi=3\chi+1\\2\chi+3\psi-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}\\2\chi+3\left(\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}\right)-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}\\2\chi+\frac{9}{2}\chi+\frac{3}{2}-8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}\\4\chi+9\chi+3-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=\frac{3}{2}\chi+\frac{1}{2}\\-13\chi-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi=-1\\\chi=-1\end{cases}$$

Άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο $N(-1,-1)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

29. ***πανελλήνιες 2004*** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Γ. **Σωστό**.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + 4\psi + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3\chi + 4\psi + 16 = 0$.

Α. Πρώτα θα γράψεις τις ευθείες στη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$.

Είναι $\varepsilon_1 : 3\chi + 4\psi + 6 = 0 \Leftrightarrow 4\psi = -3\chi - 6 \Leftrightarrow \psi = -\frac{3}{4}\chi - \frac{6}{4} \Leftrightarrow \psi = -\frac{3}{4}\chi - \frac{3}{2}$.

Είναι $\varepsilon_2 : 3\chi + 4\psi + 16 = 0 \Leftrightarrow 4\psi = -3\chi - 16 \Leftrightarrow \psi = -\frac{3}{4}\chi - \frac{16}{4} \Leftrightarrow \psi = -\frac{3}{4}\chi - 4$.

Κατόπιν θα εφαρμόσεις τον τύπο $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2} - 4\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\left|-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{4}} = 2$

Β.

- Για να βρεις τη μεσοπαράλληλη των παραλλήλων ευθειών ε_1 και ε_2 βρίσκεις το μέσο του τμήματος που έχει τα άκρα του πάνω στις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα (συνήθως «βάζεις» $\chi = 0$ και στις δυο ευθείες, οπότε βρίσκουμε τις τομές τους με τον $\psi'\psi$ ή «βάζεις» $\psi = 0$ και στις δυο ευθείες, οπότε βρίσκουμε τις τομές τους με τον $\chi'\chi$).

  Το σημείο αυτό ανήκει στη μεσοπαράλληλη επομένως η εξίσωσή της θα είναι εξίσωση ευθείας που περνάει από το σημείο αυτό και είναι γνωστός ο συντελεστής της (αφού είναι παράλληλη στης ε_1 και ε_2).

  $\varepsilon_1 : 3\chi + 4\psi + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3\chi + 4\psi + 16 = 0$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 είναι $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$.

Άρα, για να βρεις την εξίσωση της ευθείας, θα βρεις ένα σημείο της με τον τρόπο που περιέγραψα πιο πάνω.

«Βάζεις» π.χ. $\chi = 0$ σε καθεμία από τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2 και έχεις από την $\varepsilon_1 : \psi = -\frac{3}{2}$ και από την $\varepsilon_2 : \psi = -4$ άρα ένα τμήμα με τα άκρα του πάνω στις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα είναι το ΑΒ με $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $B(0, -4)$.

Επομένως, το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ θα έχει συντεταγμένες :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\chi_M = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$, $\psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = \frac{-\frac{3}{2} - 4}{2} = \frac{-\frac{11}{2}}{2} = -\frac{11}{4}$. Έτσι $M\left(0, -\frac{11}{4}\right)$ και επειδή

$\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ άρα η μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 θα έχει εξίσωση : $\psi - \psi_M = \lambda_\varepsilon(\chi - \chi_M) \Leftrightarrow$

$\psi - \left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{3}{4}(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi + \frac{11}{4} = -\frac{3}{4}\chi \Leftrightarrow 4\psi + 11 = -3\chi \Leftrightarrow$ $3\chi + 4\psi + 11 = 0$

30. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Το σημείο Α(7 , 5) είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία : $3\chi + \psi - 6 = 0$.

α. Επειδή $3\cdot 7 + 5 - 6 = 20 \neq 0$ άρα η κορυφή Α δεν ανήκει στην διαγώνιο αυτή και επειδή η διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούνται, είναι ίσες και κάθετες, επομένως η άλλη διαγώνιος θα είναι ***η κάθετη ευθεία από το Α(7 , 5) προς την 3χ + ψ – 6 = 0***.

Η $3\chi + \psi - 6 = 0 \Leftrightarrow \psi = -3\chi + 6$, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -3$, επομένως η κάθετη από το Α θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1\lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_2(-3) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}$, περνάει και από το Α άρα θα έχει εξίσωση $\psi - 5 = \frac{1}{3}(\chi - 7) \Leftrightarrow 3\psi - 15 = \chi - 7 \Leftrightarrow$ $\chi - 3\psi + 8 = 0$.

β. Το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων, δηλαδή η λύση του συστήματος : $\begin{cases} 3\chi + \psi - 6 = 0 \\ \chi - 3\psi + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -3\chi + 6 \\ \chi - 3(-3\chi + 6) + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -3\chi + 6 \\ \chi + 9\chi - 18 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \psi = -3\chi + 6 \\ 10\chi = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3 \\ \chi = 1 \end{cases}$, άρα το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο Κ(1 , 3).

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 3

Καμπύλες

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. ***πανελλήνιες 1981***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9\chi^2 - 16\psi^2 = 144$, με εστίες Ε΄ και Ε και σημείο Α(κ , λ) πάνω στην υπερβολή.

α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Ε΄ και της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Ε.

β. Να προσδιοριστούν τα σημεία Α για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

2. ***πανελλήνιες 1982***

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

β. Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων χΟψ και σταθερό σημείο Α αυτού με $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3$.

Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ(χ , ψ) του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OM} - 2\cdot\overrightarrow{OA}\right) = 7$

πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4ο

Α. **i)** Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

ii) Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$ και η ευθεία με εξίσωση $\psi = \lambda\chi + \kappa$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνο αν $p = 2\lambda\kappa$.

Β. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = 4\chi$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3\chi + \psi + 3 = 0$.

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $(-2, 1)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. **πανελλήνιες 1988 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνα ρ καθώς και σημείο $A(\chi_1, \psi_1)$ αυτού του κύκλου.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο σημείο Α έχει εξίσωση :

$(\chi-\chi_0)(\chi_1-\chi_0)+(\psi-\psi_0)(\psi_1-\psi_0)=\rho^2$.

Β. Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση $5\chi + 3\psi + 2 = 0$ και ο κύκλος C με εξίσωση $\chi^2+\psi^2-\chi-2=0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση :

$\chi^2+\chi^2-\chi-2+\lambda(5\chi+3\chi+2)=0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία Μ και Ν.

Για ποια τιμή του λ ο κύκλος αυτός περνάει από την αρχή των αξόνων;

β. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (α) ανήκουν σε ευθεία ε_1 της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4. **πανελλήνιες 1991 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{25}+\frac{\psi^2}{16}=1$.

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $\chi - \psi + 1 = 0$.

Β. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $\chi^2+\psi^2=4$ και στην παραβολή $\psi^2=3\chi$

5. **πανελλήνιες 1993 Α Δέσμη**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ $\alpha > \beta > 0$ και το σημείο Κ(0 , 2β) . Μια μεταβλητή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονά της στα σημεία Μ και Ν.

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΜΝ ως συνάρτηση του λ. *1

β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης. *2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

*1 είναι $\chi^2+(\psi-2\beta)^2=\alpha^2(1+\lambda^2)$

*2 είναι $\lambda=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{3}$

6. ***πανελλήνιες 1994 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 3ο

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E=\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta:\ \chi=-\frac{p}{2}$ είναι $\psi^2=2p\chi$.

7. ***πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$.

α. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου τέμνει την έλλειψη έχει κλίση $-\frac{1}{2}$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

β. Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημόριου στο οποίο η ευθεία $\psi=\lambda\cdot\chi$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη.
Αν μ είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Α τότε να εκφράσετε το γινόμενο λ·μ ως συνάρτηση των ημιαξόνων α, β.

8. ***πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $C:\ \chi^2+\psi^2+1=2\chi+6\psi$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon:\ 2\chi+\psi+5=0$.

9. ***πανελλήνιες 1999 Α Δέσμη***

Έστω το σημείο $M(\chi,\psi)^2$, με $\chi,\psi\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\chi,\psi)^2$ που είναι τέτοια ώστε :

$\left(\sqrt{(\chi-1)^2+\psi^2}\right)^2+\left(\sqrt{(\chi-3)^2+(\psi-2)^2}\right)^2=6$ είναι κύκλος.

Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Έστω Ο η αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι οι δυο εφαπτόμενες που άγονται από το Ο προς τον παραπάνω κύκλο.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο σημείων επαφής M_1, M_2.

10. ***πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1 , 3), Β(– 1 , 0), Γ(3 , – 1)

Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα (ΑΒ).

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ΒΓ με τον παραπάνω κύκλο.

11. ***πανελλήνιες 1999 θετικής*** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια.

Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό : $\eta = 1, 2, 3, \cdots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση : $(\chi-1)^2+\psi^2=2\eta(\chi+\psi-1)$.

Να δείξετε ότι :

α. Η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

Μονάδες 9

β. Κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Μονάδες 8

γ. οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\chi+\psi-1=0$ στο σημείο Α.

Μονάδες 8

12. ***επαναληπτικές 1999 θετικής*** **Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω Οχψ ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2=\rho^2$.

Μονάδες 12,5

Β. Δίνονται τα σημεία Ο(0 ,0) και Α(3 , 4).

α. Το μήκος (ΟΑ) είναι :

Α. – 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 1

Μονάδες 2,5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ = (ΟΑ).

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία ο κύκλος C τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων.

Μονάδες 5

13. ***πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 4ο

Β. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με $\varphi \in [0, 2\pi)$.

α. i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο : $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$, με $\varphi \in (0, 2\pi)$.

β. Έστω $E(\varphi)$, με $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με τους άξονες χ' χ και ψ' ψ.

Να αποδείξετε ότι $E(\varphi) \geq 20$.

14. ***πανελλήνιες 2000 τεχνολογικής*** **Σάββατο 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι, σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ, η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο $K(\chi_0, \psi_0)$ και ακτίνα ρ, είναι $(\chi - \chi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2$

Μονάδες 12,5

Β. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β. 1.** και **Β. 2.** .

Β. 1. Το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ του κύκλου $(\chi - 2)^2 + (\psi + 1)^2 = 4$ είναι :

α) $K(2, -1), \rho = 4$ **β)** $K(2, -1), \rho = 2$ **γ)** $K(-2, 1), \rho = 2$ **δ)** $K(-2, 1), \rho = 4$

Μονάδες 2,5

Β. 2. Το κέντρο του κύκλου $(\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 25$ ανήκει στην ευθεία :

α) $\psi = \chi + 2$ **β)** $\psi = 2\chi - 1$, **γ)** $2\chi + \psi = 5$, **δ)** $3\chi + 2\psi = 7$

Μονάδες 4

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. 3. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση : $\chi^2 + \psi^2 = 49$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα σημεία της **Στήλης Ι** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α(0 , 7)	**1.** Εσωτερικό σημείο του κύκλου C
Β(3 , 4)	**2.** Σημείο του κύκλου C
Γ(7 , – 2)	**3.** Εξωτερικό σημείο του κύκλου C
Δ(– 7 , 0)	

Μονάδες 6

15. ***Εσπερινά 2000 τεχνολογικής*** **Πέμπτη 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος με εξίσωση : $(\chi - 3)^2 + (\psi + 4)^2 = 9$.

α. Να βρείτε το κέντρο **Κ** και την ακτίνα του **ρ.**

Μονάδες 9

β. Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Μ(3 , 0), Ν(0 , – 4), Ρ(3 , – 7), Σ(1 , 1) είναι σημεία του κύκλου.

Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο Ο(0 , 0) είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Μονάδες 7

16. ***Εσπερινά 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α(– 4 , 3), Β(4 , – 3).

Να βρείτε :

α. Την απόσταση **(ΑΒ)** των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6

β. Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Μονάδες 7

δ. Την εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο σημείο Α .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Η αρχή Ο(0, 0) ενός συστήματος συντεταγμένων παριστάνει ένα σταθμό εκπομπής σημάτων, ενώ τα σημεία Α (3 , 2) και Β (5 , 1) παριστάνουν τις θέσεις δύο πλοίων.

Η θέση ενός τρίτου πλοίου παριστάνεται από το σημείο Γ για το οποίο ισχύει : $\overrightarrow{OΓ} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

Μονάδες 13

β. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής (μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φτάσει το σήμα) είναι 5 μονάδες, να βρείτε με ποια από τα τρία πλοία μπορεί να επικοινωνήσει ο σταθμός.

Μονάδες 12

Για μια διαφορετική προσέγγιση δες την λύση, του αντίστοιχου θέματος, στο κεφάλαιο 1.

17. ***πανελλήνιες 2000 θετικής*** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(\chi_0 , \psi_0)$ και ακτίνα ρ.

Μονάδες 2

Α. 2. Πότε η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο ;

Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

Α. 3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: \chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1 , \psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$.

Μονάδες 6

Β. 1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = 10$ και το σημείο του Μ(1 , – 3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $\chi + 3\psi = 10$, **Β.** $5\chi - \psi = 8$, **Γ.** $\chi - 3\psi = 10$, **Δ.** $3\chi + 2\psi = 3$, Ε. $\frac{1}{2}\chi + \psi = 5$.

Μονάδες 4

Β. 2. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\chi^2+\psi^2-6\chi+4\psi-3=0$	**1.** K(0 , – 1), ρ = 2
β. $\chi^2+(\psi+1)^2=4$	**2.** K (3 , – 2), ρ = 1
	3. K (3 , – 2), ρ = 4

Μονάδες 4

Β.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο (1, -1) ανήκει στον κύκλο $\chi^2+\psi^2=2$.

β. Ο κύκλος $\chi^2+\psi^2=4$ και η ευθεία ψ = 2χ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+\lambda^2=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

18. *επαναληπτικές 2000 θετικής*

ΘΕΜΑ 4ο

α. Δίνεται η εξίσωση $(\chi-1)(\chi-3)+(\psi-3)(\psi-5)=0$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 8

β. Στο τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οχψ τα σημεία Α(1 , 3), Β(3 , 3), Γ(3 , 5) και Δ(1 , 5) παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

Μονάδες 7

γ. Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του ερωτήματος **β.** , οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου Κ για κάθε χρονική στιγμή t (t > 0) είναι (t , t + 2) , να βρείτε αν η γραμμή, στην οποία κινείται το αυτοκίνητο Κ, συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία ;

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

19. ***Εσπερινά 2000 Τεχνολογικής*** **Παρασκευή 8 Σεπτεμβρίου**

Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Να γράψετε την εξίσωση ενός κύκλου C ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(\chi_0 , \psi_0)$ και ακτίνα ρ.

Μονάδες 7,5

β. Να γράψετε την εξίσωση ενός κύκλου C ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O(0 , 0) και ακτίνα ρ.

Μονάδες 5

Β. Στη Στήλη **Ι** του επόμενου πίνακα δίνονται τα κέντρα και οι ακτίνες κάποιων κύκλων. Σε κάθε έναν από τους κύκλους αυτούς αντιστοιχεί μια μόνο εξίσωση από τη Στήλη **ΙΙ**.

ΣΤΗΛΗ Ι	**ΣΤΗΛΗ ΙΙ**
Α. K(1 , 1), $\rho = 1$	**1.** $\chi^2 + (\psi - 2)^2 = 2$
Β. K(2 , 0), $\rho = \sqrt{2}$	**2.** $\chi^2 + \psi^2 = 4$
Γ. K(0 , 2), $\rho = \sqrt{2}$	**3.** $(\chi - 2)^2 + \psi^2 = 2$
Δ. O(0 , 0), $\rho = 2$	**4.** $\chi^2 + \psi^2 = 2$
Ε. K(– 2 , 1), $\rho = 3$	**5.** $((\chi - 1)^2 + (\psi - 1)^2 = 1$
	6. $\chi + \psi = 1$
	7. $(\chi + 2)^2 + (\psi - 1)^2 = 9$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης του πίνακα και, ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση.

Μονάδες 12,5

20. ***Εσπερινά 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου**

Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων O (0 , 0) και ακτίνα $\rho = 3$.

Μονάδες 8

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο K (0 , 1) και ακτίνα $\rho = 4$.

Μονάδες 8

γ. Να ελέγξετε αν το σημείο $A\left(2, \sqrt{5}\right)$ ανήκει στους παραπάνω κύκλους.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. ***πανελλήνιες 2001 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_\alpha : \alpha\chi - \psi = 0$ και $\zeta_\alpha : \chi + \alpha\psi = 2$, $\alpha \in R$.

β. Αν $M(\chi, \psi)$ είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α, να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το Μ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

22. ***πανελλήνιες 2001 Δ Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Β. Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Οχψ τη γραμμή με εξίσωση : $\chi^2 + \psi^2 + 6\chi - 8\psi = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο (0 , 0) και Α(– 6 , 8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

23. ***πανελλήνιες 2001 θετικής*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + 6\mu\chi + 8\lambda\psi = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 7

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + 6\mu\chi + 8\lambda\psi = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $\chi + \psi + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

24. ***πανελλήνιες 2001 Εσπερινά*** **Τετάρτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι **Εξισώσεις γραμμών**	**Στήλη ΙΙ** **Περιγραφές εξισώσεων γραμμών**
Α. $\chi^2+\psi^2=\rho^2$	1. Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας ρ, στο σημείο $A(\chi_1,\psi_1)$.
Β. $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$	2. Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(\chi_0\ ,\psi_0)$ και ακτίνα ρ .
Γ. $\chi\chi_1+\psi\psi_1=\rho^2$	3. Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0\ ,0)$ και ακτίνα ρ .
	4. Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα Σημεία $O(0\ ,0)$ και $A(\chi_1,\psi_1)$.
	5. Εξίσωση παραβολής με εστία $E\left(\frac{\rho}{2},0\right)$.

Μονάδες 12,5

Β.

1. Δίνεται η εξίσωση του κύκλου : $(\chi-3)^2+(\psi-10)^2=64$.

α. Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

Μονάδες 6

β. Να δείξετε ότι το σημείο Α(11 , 10) ανήκει στον κύκλο.

Μονάδες 3

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Β(2 , 2) του κύκλου $\chi^2+\psi^2=8$

Μονάδες 3,5

25. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο κύκλος C : $\chi^2+\psi^2=25$ και ε_1 , ε_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο Μ(0, – 10).

Αν Α και Β είναι τα σημεία επαφής των ε_1 και ε_2 με τον κύκλο, να βρείτε :

α) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2.

Μονάδες 10

β) Τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α και Β

Μονάδες 8

γ) Την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

σημεία Α και Β.

Μονάδες 7

26. **Εσπερινά – επαναληπτικές Ιουλίου 2001** | **Πέμπτη 12 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση κύκλου $\chi^2 + \psi^2 - 8\chi - 6\psi = 0$.

α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι το σημείο Α(–1 , 3) είναι σημείο του κύκλου.

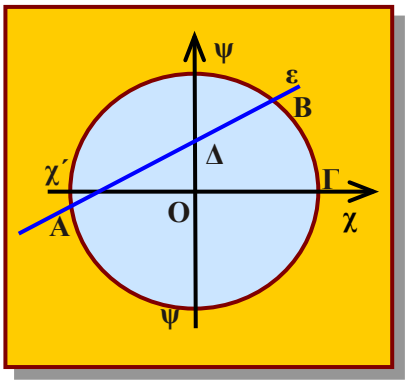
Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α(–1 , 3).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = 25$ και η ευθεία ε με εξίσωση $\psi = \frac{1}{2}\chi + \frac{5}{2}$.



α. Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία του κύκλου C και της ευθείας ε είναι τα Α(–5 , 0) και Β(3 , 4).

Μονάδες 5

β. Αν Γ(5 , 0) είναι σημείο τομής του άξονα χ'χ με τον κύκλο C, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε.

Μονάδες 10

γ. Αν Δ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα ψ'ψ , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ε.

Μονάδες 10

27. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001** | **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Η παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = \alpha\chi$ διέρχεται από το σημείο Α(2 , 4), όπου $\alpha \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε(2 , 0).

Μονάδες 5

β. Έστω Ε' το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα ψ΄ψ. Αν Μ(χ , ψ) είναι ένα **οποιοδήποτε** σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{E'E}$, να **αποδείξετε** ότι το σημείο Μ(χ , ψ) ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0 , 0) και ακτίνα 2.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α.

Μονάδες 10

28. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001 εσπερινά*** **Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 8\psi = 24$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε ποια από τα σημεία Α (10 , – 4), Β (3 , 3) και Γ (1 , 0) είναι σημεία του κύκλου.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(2 , 2), Β(5 , 0), Γ(3 , – 6), Ο(0 , 0).

β. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος : $\overrightarrow{O\Delta} = 3\cdot\overrightarrow{OA} - 2\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$

και να εξετάσετε αν το σημείο Δ είναι σημείο της έλλειψης : $\chi^2 + \frac{\psi^2}{4} = 1$

Μονάδες 15

29. ***Εσπερινά 2002*** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(Β.1, Β.2, Β.3)** και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

3. Η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο την αρχή Ο(0,0) ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Οχψ του επιπέδου και ακτίνα ρ είναι :

α. $(\chi - 1)^2 + \psi^2 = \rho^2$

β. $\chi^2 + (\psi - 1)^2 = \varrho^2$

γ. $\chi^2 + \psi^2 = (\rho - 1)^2$

δ. $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι κύκλοι C_1, C_2 με εξισώσεις :

$C_1: \chi^2+\psi^2-4\chi-2\psi+1=0$ και $C_2: (\chi+2\kappa)^2+(\psi-\lambda)^2=25$, $\kappa, \lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο $K_1(2,1)$ και ακτίνα $\rho_1=2$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ έτσι ώστε οι κύκλοι C_1, C_2 να έχουν το ίδιο κέντρο.

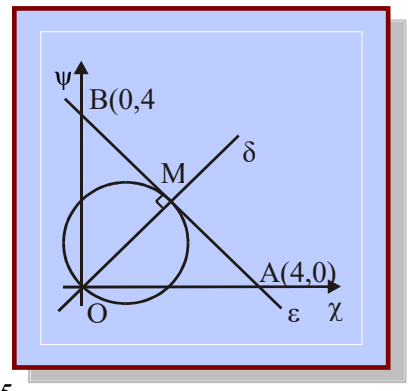
Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε, αν τα σημεία Α(4 , 1), Β(1 , 1) ανήκουν στον κύκλο C_1.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία Α(4,0) και Β(0,4), η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.



γ. Το Μ έχει συντεταγμένες (2 , 2)

δ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ.

Μονάδες 5

30. **πανελλήνιες 2002** **Πέμπτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (χ_1,ψ_1).

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Στήλη Α		Στήλη Β	
α.	$\chi^2+\psi^2=\rho^2$	**1.**	$\psi\psi_1=p(\chi+\chi_1)$
β.	$\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$	**2.**	$\chi\chi_1+\psi\psi_1=\rho^2$
γ.	$\psi^2=2p\chi$	**3.**	$\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1$
δ.	$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$	**4.**	$\chi\chi_1+\psi\psi_1=1$
		5.	$\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}-\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=\rho^2$
		6.	$\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}-\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $\psi^2=4\chi$. Να βρείτε :

Α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

Β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi=\chi-1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi\sigma\upsilon\nu\theta-2\psi\eta\mu\theta-1=0$, $0\le\theta<2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

Β. Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ(1 , 2).

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

31. ***εσπερινά επαναληπτικές 2002*** **Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(3 , 3) και ακτίνα $R=\sqrt{8}$, η ευθεία $\psi=\chi$, το σημείο Γ(1 , 5) και τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας με τον κύκλο.

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ είναι σημείο του κύκλου.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

Μονάδες 8

δ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 7

32. ***επαναληπτικές 2002*** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Ο(0 , 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2=\rho^2$

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Η παραβολή με εξίσωση $\chi^2=2p\psi$ έχει την εστία της πάνω στον άξονα χ΄χ.

Μονάδες 2

Γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τις **παρακάτω** προτάσεις ορθά συμπληρωμένες.

α. Ο κύκλος με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση ……. .

β. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$, έχει εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ με συντεταγμένες …… και ……. .

γ. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις …….....και …….....

δ. Η παραβολή με **εξίσωση** $\psi^2=2p\chi$ έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση .....

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

33. **Εσπερινά 2003** **Δευτέρα 26 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους **(Β.1, Β.2, Β.3** και **Β.4)** και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

3. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οχψ με αρχή Ο η εξίσωση $\chi^2 = 2p\psi$ με $p \neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο Ο.

4. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οχψ στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$\chi^2 + \psi^2 - 2\lambda\chi + \lambda^2 = 5$ με $\lambda \in R$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 6

β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) .

Μονάδες 6

γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση $\psi = \chi$ και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) .

Μονάδες 9

34. **πανελλήνιες 2003** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε ’(– γ , 0), Ε(γ , 0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Μονάδες 2

Γ. **β.** Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές Α(2λ –1, 3λ + 2), Β(1 , 2) και Γ(2 , 3) όπου $\lambda \in R$ με $\lambda \neq -2$.

Β. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή Α(1 , 5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές : η παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$ και η έλλειψη $4\chi^2 + 2\psi^2 = 3p^2$, $p > 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

35. **εσπερινά επαναληπτικές 2003** — **Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2 , 2) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο (0,0).

Τα Β (0 , 4) και $\Gamma\left(2 + 2\sqrt{2}\ , 2\right)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου.

Να αποδείξετε ότι :

α. Η εξίσωση του κύκλου C είναι : $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 4\psi = 0$.

Μονάδες 8

β. Τα σημεία Β και Γ είναι σημεία του κύκλου C και το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ. Η ευθεία με εξίσωση $\psi = \chi + 4$ εφάπτεται στον κύκλο C στο σημείο Β.

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

36. **επαναληπτικές 2003** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: \chi = -\frac{p}{2}$ είναι $\chi^2 = 2p\psi$.

Μονάδες 2

Γ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** ονομασίες γραμμών του επιπέδου.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \quad , \alpha>\beta>0$	**1.** **Κύκλος**
β. $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \ , \ \alpha>\beta>0$	**2.** **Ευθεία**
γ. $\psi^2 = 2p\chi \ , \quad p>0$	**3.** **Υπερβολή**
δ. $\chi^2+\psi^2=\rho^2 , \rho>0$	**4.** **Παραβολή**
	5. **Έλλειψη**

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi+2\psi+3=0$ και το σημείο Μ(2 , 1).

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(2 , –1) και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Μ(2 , 1).

Μονάδες 10

γ. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

Μονάδες 9

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

37. **Εσπερινά 2004** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** ονομασίες γραμμών του επιπέδου.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Δυο στοιχεία της **Στήλης ΙΙ** περισσεύουν)

Στήλη Ι **Είδος κωνικής τομής**	**Στήλη ΙΙ** **Εξίσωση γραμμής**
α. Παραβολή	**1.** $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2,\ \rho > 0$
β. Κύκλος	**2.** $\chi + \psi = \alpha$
γ. Υπερβολή	**3.** $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad , \ \alpha > \beta > 0$
δ. Έλλειψη	**4.** $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \quad \alpha > \beta > 0$
	5. $\psi^2 = 2p\chi\ ,\ \ p > 0$
	6. $\chi^3 = 2p\chi\ ,\ \ p > 0$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οχψ στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση :

$\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 2\lambda\psi = 0$, (1) όπου $\lambda \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(2 , λ) και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$.

Μονάδες 5

γ. Για λ = 2, να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες χ'χ και ψ'ψ σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή Ο, τέτοια ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

δ. Για λ = 2, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση ψ = – χ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο Ο(0 , 0).

Μονάδες 7

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

38. ***πανελλήνιες 2004*** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Έστω δύο σημεία Ε και Ε' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε και Ε' στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Στην παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $\chi = \frac{p}{2}$.

Μονάδες 2

ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + 4\psi + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3\chi + 4\psi + 16 = 0$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα χ΄χ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

[απο το α. ερώτημα είναι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2$]

Μονάδες 10

39. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Το σημείο Α(7 , 5) είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία : 3χ + ψ – 6 = 0.

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του παραπάνω τετραγώνου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = 9$.

α. Αν το σημείο $P(\chi_0, \psi_0)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{5}{3}\chi_0, \frac{4}{3}\psi_0\right)$ ανήκει σε έλλειψη της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής του ερωτήματος β καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 3

Καμπύλες

Διαισθήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1981**

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9\chi^2-16\psi^2=144$, με εστίες Ε΄ και Ε και σημείο Α(κ , λ) πάνω στην υπερβολή.

α.

1. Αν $\kappa\neq\pm5$ τότε :

$9\chi^2-16\psi^2=144\Leftrightarrow\frac{\chi^2}{16}-\frac{\psi^2}{9}=1$, προφανώς είναι $\alpha^2=16,\ \beta^2=9$, άρα από τον τύπο : $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=16+9=25$, και επειδή γ μήκος τμήματος, άρα $\gamma=5$.

Άρα $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$, οι εστίες.

✓ Για την ΑΕ΄ : είναι $\lambda_{AE'}=\frac{\psi_{E'}-\psi_A}{\chi_{E'}-\chi_A}=\frac{0-\lambda}{-5-\kappa}\Leftrightarrow\lambda_{AE'}=\frac{\lambda}{\kappa+5}$ και επειδή περνάει από το Ε΄$(-5,0)$, άρα θα έχει εξίσωση: $\psi-0=\frac{\lambda}{\kappa+5}(\chi+5)\Leftrightarrow\psi=\frac{\lambda}{\kappa+5}(\chi+5)\Leftrightarrow(\kappa-5)\psi=\lambda\chi-5\lambda$

$\lambda\chi+(\kappa+5)\psi-5\lambda=0$.

✓ Για την ΑΕ : είναι $\lambda_{AE}=\frac{\psi_E-\psi_A}{\chi_E-\chi_A}=\frac{0-\lambda}{5-\kappa}=-\frac{\lambda}{5-\kappa}\Leftrightarrow\lambda_{AE}=\frac{\lambda}{\kappa-5}$ και επειδή περνάει από το $E(5,0)$, άρα θα έχει εξίσωση : $\psi-0=\frac{\lambda}{\kappa-5}(\chi-5)\Leftrightarrow\psi=\frac{\lambda}{\kappa-5}(\chi-5)\Leftrightarrow(\kappa-5)\psi=\lambda\chi-5\lambda$

$\lambda\chi+(\kappa-5)\psi+5\lambda=0$.

2. Αν $\kappa=5$ τότε : το Α έχει την ίδια τετμημένη με την εστία Ε και άρα ΑΕ : $\chi=5$.

και επειδή το σημείο Α(κ , λ) είναι σημείο της υπερβολής $9\chi^2-16\psi^2=144$, άρα

$9\cdot5^2-16\lambda^2=144\Leftrightarrow225-16\lambda^2=144\Leftrightarrow16\lambda^2=225-144=81\Leftrightarrow\lambda^2=\frac{81}{16}\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{9}{4}$

Οπότε υπάρχουν δυο σημεία $A_1\left(5,\frac{9}{4}\right)$ και $A_2\left(5,-\frac{9}{4}\right)$ και

✓ $A_1\left(5,\frac{9}{4}\right)$ άρα $\lambda_{A_1E'}=\frac{\frac{9}{4}}{5+5}=\frac{9}{40}$ επομένως $A_1E:\psi-0=\frac{9}{40}(\chi+5)\Leftrightarrow40\psi=9\chi+45\Leftrightarrow$

$A_1E':9\chi-40\psi+45=0$.

✓ $A_2\left(5,-\frac{9}{4}\right)$, άρα $\lambda_{A_2E'}=\frac{-\frac{9}{4}}{5+5}=-\frac{9}{40}$ επομένως $A_2E':\psi-0=-\frac{9}{40}(\chi+5)\Leftrightarrow40\psi=-9\chi-45$

$\Leftrightarrow$ $A_2E':9\chi+40\psi+45=0$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3. Αν κ = 5 τότε : το Α έχει την ίδια τετμημένη με την εστία Ε΄ και άρα ΑΕ΄ : $\chi = -5$.

και επειδή το σημείο Α(κ , λ) είναι σημείο της υπερβολής $9\chi^2 - 16\psi^2 = 144$, άρα

$9\cdot 5^2 - 16\lambda^2 = 144 \Leftrightarrow 225 - 16\lambda^2 = 144 \Leftrightarrow 16\lambda^2 = 225 - 144 = 81 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{9}{4}$

Οπότε υπάρχουν δυο σημεία $A_3\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ και $A_4\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$ και

✓ $A_3\left(-5, \frac{9}{4}\right)$, $\lambda_{A_3E} = \frac{\frac{9}{4}}{-5-5} = -\frac{9}{40}$, επομένως $A_3E : \psi - 0 = -\frac{9}{40}(\chi - 5) \Leftrightarrow 40\psi = -9\chi + 45$

$\Leftrightarrow$ $A_3E : 9\chi + 40\psi - 45 = 0$.

✓ $A_4\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$, $\lambda_{AE'} = \frac{-\frac{9}{4}}{-5-5} = \frac{9}{40}$, επομένως $A_4E : \psi - 0 = \frac{9}{40}(\chi - 5) \Leftrightarrow 40\psi = 9\chi - 45$

$\Leftrightarrow$ ΑΕ΄ : $9\chi - 40\psi - 45 = 0$.

β. Αν κ = 5 ή κ = – 5 τότε : είναι προφανές, από το προηγούμενο ερώτημα, ότι οι ευθείες ΑΕ και ΑΕ΄ δεν είναι κάθετες.

Αν κ ≠ ± 5 τότε : Για να είναι κάθετες οι ΑΕ΄, ΑΕ θα πρέπει $\lambda_{AE}\cdot\lambda_{AE'} = -1 \Leftrightarrow$

$\frac{\lambda}{\kappa-5}\frac{\lambda}{\kappa+5} = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{\kappa^2-25} = -1$ $\lambda^2 = -\kappa^2 + 25$ (1).

Το σημείο Α(κ , λ) είναι σημείο της υπερβολής $9\chi^2 - 16\psi^2 = 144$, άρα $9\kappa^2 - 16\lambda^2 = 144 \Leftrightarrow$

$16\lambda^2 = 9\kappa^2 - 144 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{9}{16}\kappa^2 - 9$ (2).

Οι (1), αν αντικαταστήσεις από την (2) το $\lambda^2 = \frac{9}{16}\kappa^2 - 9$, γίνεται $\frac{9}{16}\kappa^2 - 9 = -\kappa^2 + 25 \Leftrightarrow$

$9\kappa^2 - 144 = -16\kappa^2 + 400 \Leftrightarrow 25\kappa^2 = 544 \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{544}{25}$ άρα $\kappa = \pm\frac{\sqrt{544}}{5} = \pm\frac{4\sqrt{34}}{5}$, οπότε

$\lambda^2 = -\kappa^2 + 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\left(\pm\frac{\sqrt{544}}{5}\right)^2 + 25 = -\frac{544}{25} + 25 = \frac{-544+625}{25} = \frac{81}{25} \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{81}{25} \Leftrightarrow$

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{9}{5}$.

Άρα τα σημεία της υπερβολής στα οποία οι ΑΕ΄ και ΑΕ είναι κάθετες, είναι :

$A_1\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{4}\right)$, $A_2\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, \frac{9}{4}\right)$, $A_3\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{4}\right)$ και $A_4\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}, -\frac{9}{4}\right)$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. **πανελλήνιες 1982**

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 4ο

β. Αν $\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OM}-2\cdot\overrightarrow{OA}\right)=7\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}-2\cdot\overrightarrow{OA}\right)=7$

$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OA}\right)=7\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OA}\right)=7\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{OA}^2=7\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=7\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2-9=7\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=16\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{AM}\right|=4$ και το ***Α είναι σταθερό σημείο***, άρα το **Μ** «γράφει» κύκλο με ***κέντρο Α*** και ***ακτίνα ρ = 4***.

3. **πανελλήνιες 1988** ***Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 4ο

Α. **i)** Θεωρία.

ii) Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι λύσεις του συστήματος : $\begin{cases}\psi^2=2p\chi & (1)\\ \psi=\lambda\chi+\kappa & (2)\end{cases}\Leftrightarrow$

η $(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}(\lambda\chi+\kappa)^2=2p\chi\Leftrightarrow\lambda^2\chi^2+2\lambda\kappa\chi+\kappa^2-2p\chi=0\Leftrightarrow\lambda^2\chi^2+2(\lambda\kappa-p)\chi+\kappa^2=0$.

Για έχουν η ευθεία και η παραβολή ένα διπλό κοινό σημείο πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης να είναι μηδέν .

Είναι $\Delta=4(\lambda\kappa-p)^2-4\lambda^2\kappa^2=0\Leftrightarrow(\lambda\kappa-p)^2-\lambda^2\kappa^2=0\Leftrightarrow(\lambda\kappa-p-\lambda\kappa)(\lambda\kappa-p+\lambda\kappa)=0\Leftrightarrow$

$\begin{cases}p(2\lambda\kappa-p)=0\\ p\neq0\end{cases}\Leftrightarrow p=2\lambda\kappa$

Β. Έστω η παραβολή με εξίσωση $\psi^2=4\chi$, άρα. $2p=4\Leftrightarrow p=2$

i) Αν ε η εφαπτομένη και $A(\chi_1,\psi_1)$ το σημείο επαφής τότε $\varepsilon:\ \psi\psi_1=2(\chi+\chi_1)$ η εξίσωση της ε.

Επειδή το Α ανήκει στην παραβολή, πρέπει $\psi_1^2=4\chi_1$ (1).

✓ Αν $\psi_1=0$ τότε και $4\chi_1=0\Leftrightarrow\chi_1=0$, η εφαπτομένη είναι η $\chi=0$ που σίγουρα δεν είναι κάθετη στην $3\chi+\psi+3=0\Leftrightarrow\psi=-3\chi-3$.

✓ Αν $\psi_1\neq0$ τότε $\psi\psi_1=2(\chi+\chi_1)\Leftrightarrow\psi=\frac{2}{\psi_1}(\chi+\chi_1)$, άρα συντελεστής διεύθυνσης : $\lambda_\varepsilon=\frac{2}{\psi_1}$,

$3\chi+\psi+3=0\Leftrightarrow\psi=-3\chi-3$ άρα συντελεστής διεύθυνσης : $\lambda=-3$, και για είναι κάθετες θα πρέπει $\lambda_\varepsilon(-3)=-1\Leftrightarrow-3\frac{2}{\psi_1}=-1\Leftrightarrow\psi_1=6$, επομένως από την εξίσωση της υπερβολής :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$6^2 = 4\chi_1 \Leftrightarrow 4\chi_1 = 36 \Leftrightarrow \chi_1 = 9$.

Άρα το σημείο στα οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην $3\chi + \psi + 3 = 0$ είναι το $A(9, 6)$

και η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: 6\psi = 2(\chi + 9) \Leftrightarrow \varepsilon: 2\chi - 6\psi + 18 = 0$

ii) Αν ε η εφαπτομένη και $A(\chi_1, \psi_1)$ το σημείο επαφής τότε $\varepsilon: \psi\psi_1 = 2(\chi + \chi_1)$ η εξίσωση της ε.

Επειδή το Α ανήκει στην υπερβολή, πρέπει $\psi_1^2 = 4\chi_1$ (1).

Επειδή η ε εφαπτομένη ε πρέπει να «περνάει» από το $(-2, 1)$, πρέπει $\psi_1 = 2(-2 + \chi_1)$

$\psi_1 = -4 + 2\chi_1$ (2).

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής είναι η λύση του συστήματος (1) και (2)

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (-4 + 2\chi_1)^2 = 4\chi_1 \Leftrightarrow 4\chi_1^2 - 16\chi_1 + 16 - 4\chi_1 = 0 \Leftrightarrow 4\chi_1^2 - 20\chi_1 + 16 = 0 \Leftrightarrow \chi_1^2 - 5\chi_1 + 4 = 0$.

Η τελευταία έχει ρίζες $\chi_1 = 1$ και $\chi_2 = 4$ οπότε $\psi_1 = -4 + 2\cdot 1 = -2$ και $\psi_2 = -4 + 2\cdot 4 = 4$.

Άρα υπάρχουν δυο σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες «περνούν» από το $(-2, 1)$, τα

$A_1(1, -2)$ και $A_2(4, 4)$ και οι εφαπτόμενες είναι :

✓ $\varepsilon_1: -2\psi = 2(\chi + 1) \Leftrightarrow 2\chi + 2\psi + 2 = 0 \Leftrightarrow \chi + \psi + 1 = 0$

✓ $\varepsilon_1: 4\psi = 2(\chi + 4) \Leftrightarrow 2\chi - 4\psi + 8 = 0 \Leftrightarrow \chi - 2\psi + 4 = 0$

4. *πανελλήνιες 1990 Α Δέσμη*

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω κύκλος κέντρου $K(\chi_0, \psi_0)$, ακτίνας ρ, άρα εξίσωση : $(\chi - \chi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho$.

Έστω ακόμη το σημείο $A(\chi_1, \psi_1)$, που ανήκει στον κύκλο και ε η εφαπτομένη στο Α.

Το τυχαίο σημείο $M(\chi, \psi)$ είναι σημείο της εφαπτομένης ε

αν και μόνο αν $KA \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ (1)

Όμως $\overrightarrow{KA} = (\chi_1 - \chi_0, \psi_1 - \psi_0)$ και $\overrightarrow{AM} = (\chi - \chi_1, \psi - \psi_1)$.

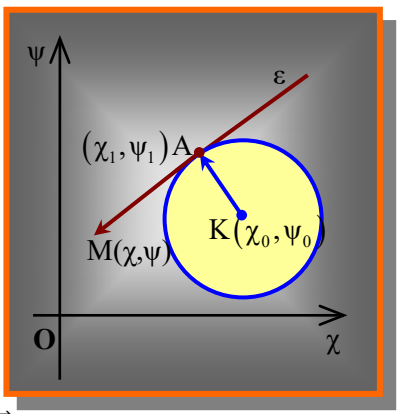
Έτσι η (1) γράφεται $(\chi_1 - \chi_0)(\chi - \chi_1) + (\psi_1 - \psi_0)(\psi - \psi_1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\chi_1 - \chi_0)(\chi - \chi_0 + \chi_0 - \chi_1) + (\psi_1 - \psi_0)(\psi - \psi_0 + \psi_0 - \psi_1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\chi_1 - \chi_0)(\chi - \chi_0) - (\chi_1 - \chi_0)^2 + (\psi_1 - \psi_0)(\psi - \psi_0) - (\psi_1 - \psi_0)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\chi_1 - \chi_0)(\chi - \chi_0) + (\psi_1 - \psi_0)(\psi - \psi_0) = (\chi_1 - \chi_0)^2 + (\psi_1 - \psi_0)^2 \Leftrightarrow$

$(\chi - \chi_0)(\chi_1 - \chi_0) + (\psi - \psi_0)(\psi_1 - \psi_0) = \rho^2$



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Έστω η ευθεία (ε) με εξίσωση $5\chi + 3\psi + 2 = 0$ (1) και ο κύκλος C με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - \chi - 2 = 0$ (2) που τέμνονται στα σημεία Μ και Ν και επομένως οι συντεταγμένες των Μ , Ν είναι οι λύσεις του συστήματος (1) και (2).

$(1) \Leftrightarrow 3\psi = 5\chi - 2 \Leftrightarrow \psi = -\dfrac{5\chi+2}{3}$ (3) , οπότε $(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \chi^2 + \left(-\dfrac{5\chi+2}{3}\right)^2 - \chi - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\chi^2 + \dfrac{(5\chi+2)^2}{9} - \chi - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\chi^2 + 25\chi^2 + 20\chi + 4 - 9\chi - 18 = 0 \Leftrightarrow 34\chi^2 + 11\chi - 14 = 0$

Η τελευταία διακρίνουσα $\Delta = 2025 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2025} = 45$ και ρίζες $\chi_1 = \dfrac{1}{2}$ και $\chi_2 = -\dfrac{14}{17}$.

Αν $\chi_1 = \dfrac{1}{2}$ άρα $\psi = -\dfrac{5\chi_1+2}{3} \Leftrightarrow \psi = -\dfrac{5\frac{1}{2}+2}{3} = -\dfrac{9}{6} = -\dfrac{3}{2}$ άρα $M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Αν $\chi_2 = -\dfrac{14}{17}$ άρα $\psi = -\dfrac{5\chi_2+2}{3} \Leftrightarrow \psi = -\dfrac{5\left(-\frac{14}{17}\right)+2}{3} = -\dfrac{\frac{-70+34}{17}}{3} = -\dfrac{-36}{51} = \dfrac{12}{17}$ άρα $N\left(-\dfrac{14}{17}, \dfrac{12}{17}\right)$.

α. Είναι $\chi^2 + \psi^2 - \chi - 2 + \lambda(5\chi + 3\psi + 2) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - \chi - 2 + 5\lambda\chi + 3\lambda\psi + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\chi^2 + \psi^2 + (5\lambda - 1)\chi + 3\lambda\psi + 2(\lambda - 1) = 0$, η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής :

$\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, με $A = 5\lambda - 1$, $B = 3\lambda$ και $\Gamma = 2(\lambda - 1)$ και

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (5\lambda - 1)^2 + 9\lambda^2 - 4 \cdot 2(\lambda - 1) = 25\lambda^2 - 10\lambda + 1 + 9\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 34\lambda^2 - 18\lambda + 5$.

Η $34\lambda^2 - 18\lambda + 5$ έχει διακρίνουσα : $\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 34 \cdot 5 = 324 - 680 = -356 < 0$ άρα για κάθε $\lambda \in R$ είναι $34\lambda^2 - 18\lambda + 5 > 0$, άρα η $\chi^2 + \psi^2 - \chi - 2 + \lambda(5\chi + 3\psi + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο.

Για να «περνάει» από τα σημεία Μ και Ν πρέπει :

✓ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + (5\lambda - 1)\dfrac{1}{2} + 3\lambda\left(-\dfrac{3}{2}\right) + 2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4} + (5\lambda - 1)\dfrac{1}{2} - \dfrac{9\lambda}{2} + 2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$1 + 9 + 2(5\lambda - 1) - 18\lambda + 8(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 10 + 10\lambda - 2 - 18\lambda + 8\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Άρα το Μ ανήκει στον κύκλο $\chi^2 + \psi^2 + (5\lambda - 1)\chi + 3\lambda\psi + 2(\lambda - 1) = 0$ για κάθε $\lambda \in R$.

✓ $\left(-\dfrac{14}{17}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{17}\right)^2 + (5\lambda - 1)\left(-\dfrac{14}{17}\right) + 3\lambda\dfrac{12}{17} + 2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{196}{289} + \dfrac{144}{289} - (5\lambda - 1)\dfrac{14}{17} + \dfrac{36\lambda}{17} + 2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$196 + 144 - 17 \cdot 14(5\lambda - 1) + 17 \cdot 36\lambda + 289 \cdot 2(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$340 - 1190\lambda + 238 + 612\lambda + 578\lambda - 578 = 0 \Leftrightarrow 578 - 578 - 1190\lambda + 1190\lambda = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Άρα το Ν ανήκει στον κύκλο $\chi^2 + \psi^2 + (5\lambda - 1)\chi + 3\lambda\psi + 2(\lambda - 1) = 0$ για κάθε $\lambda \in R$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. Όπως βρήκες «πιο πάνω» ο κύκλος έχει τελικά εξίσωση $\chi^2+\psi^2+(5\lambda-1)\chi+3\lambda\psi+2(\lambda-1)=0$ και μορφή $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=5\lambda-1$, $B=3\lambda$ και $\Gamma=2(\lambda-1)$ άρα έχει κέντρο το σημείο $K(\chi,\psi)-K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{5\lambda-1}{2},-\frac{3\lambda}{2}\right)$, άρα $\begin{cases}\chi=-\frac{5\lambda-1}{2} & (1)\\ \psi=-\frac{3\lambda}{2} & (2)\end{cases}$.

Η (2) γίνεται $2\psi=-3\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{2}{3}\psi$, οπότε η (1) γίνεται $\chi=-\frac{5\lambda-1}{2}\Leftrightarrow 2\chi=-5\lambda+1\Leftrightarrow$

$2\chi=-5\left(-\frac{2}{3}\psi\right)+1\Leftrightarrow 6\chi=10\psi+3\Leftrightarrow 6\chi-10\psi-3=0$, άρα τα κέντρα ανήκουν σε ευθεία ε_1.

5. ***πανελλήνιες 1991 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Η έλλειψη $\frac{\chi^2}{25}+\frac{\psi^2}{16}=1$ έχει $\alpha^2=25$ και $\beta^2=16$ άρα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2\Leftrightarrow\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-16$

$\Leftrightarrow\gamma^2=9\Leftrightarrow\gamma=3.$

Άρα η υπερβολή έχει εστίες Ε΄(–3 , 0) και Ε(3 , 0), $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=9$ και εξίσωση :

$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ (1). Αν η $\chi-\psi+1=0$ (2) είναι εφαπτομένη τότε

θα πρέπει το σύστημα των (1) και (2) να έχει μοναδική λύση.

Από την (2) έχεις $\chi-\psi+1=0\Leftrightarrow\psi=\chi+1$, άρα η (1) γίνεται : $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{(\chi+1)^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$

$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{(\chi+1)^2}{9-\alpha^2}=1\Leftrightarrow(9-\alpha^2)\chi^2-\alpha^2(\chi+1)^2=\alpha^2(9-\alpha^2)\Leftrightarrow$

$(9-\alpha^2)\chi^2-\alpha^2(\chi^2+2\chi+1)^2-\alpha^2(9-\alpha^2)=0\Leftrightarrow(9-\alpha^2)\chi^2-\alpha^2\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^2-9\alpha^2+\alpha^4=0$

$\Leftrightarrow(9-2\alpha^2)\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^2(10-\alpha^2)=0$

Είναι $\Delta=4\alpha^4-4(9-2\alpha^2)(-\alpha^2(10-\alpha^2))=4\alpha^4+(36-8\alpha^2)\alpha^2(10-\alpha^2)=$

$4\alpha^4+(36\alpha^2-8\alpha^4)(10-\alpha^2)=4\alpha^4+360\alpha^2-36\alpha^4-80\alpha^4+8\alpha^6=8\alpha^6-112\alpha^4+360\alpha^2\Leftrightarrow$

$\Delta=8\alpha^2(\alpha^4-14\alpha^2+45)$ και επειδή θα πρέπει να έχει μοναδική λύση άρα $\Delta=0\Leftrightarrow$

$8\alpha^2(\alpha^4-14\alpha^2+45)=0\Leftrightarrow\alpha^4-14\alpha^2+45=0$, $\Delta_1=(-14)^2-4\cdot1\cdot45=196-180=16$

Άρα ρίζες $\alpha^2=\frac{14+4}{2}\Leftrightarrow\alpha^2=9$ ή $\alpha^2=\frac{14-4}{2}\Leftrightarrow\alpha^2=5$.

Η $\alpha^2=9$ απορρίπτεται γιατί από την $\alpha^2+\beta^2=9$ θα είχες $\beta^2=0$, άτοπο, άρα μένει

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\alpha^2 = 5$ και επομένως $\beta^2 = 4$, άρα η υπερβολή έχει εξίσωση : $\frac{\chi^2}{5} - \frac{\psi^2}{4} = 1$.

Β. Ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = 4$ έχει κέντρο το $O(0\ ,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Η παραβολή $\psi^2 = 3\chi$ έχει $p = \frac{3}{2}$, εστία το $E\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ και διευθετούσα την $\chi = -\frac{3}{2}$.

Αν ε η εφαπτομένη της παραβολής $\psi^2 = 3\chi$ στο σημείο $M(\chi_1,\ \psi_1)$ τότε $\psi_1^2 = 3\chi_1$ **(1)** και η εξίσωση της ε είναι : $\psi\psi_1 = \frac{3}{2}(\chi + \chi_1) \Leftrightarrow 2\psi_1\psi = 3\chi + 3\chi_1 \Leftrightarrow 3\chi - 2\psi_1\psi + 3\chi_1 = 0$ **(2)**.

Η ε θα εφάπτεται του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 = 4$ με κέντρο το $O(0\ ,\ 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, αν και μόνο εάν Η απόσταση του Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 2$ άρα πρέπει :

$$d(O,\varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 0 - 2\psi_1\cdot 0 + 3\chi_1|}{\sqrt{3^2 + (-2\psi_1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|3\chi_1|}{\sqrt{9 + 4\psi_1^2}} = 2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{|3\chi_1|}{\sqrt{9 + 12\chi_1}} = 2 \Leftrightarrow 9\chi_1^2 = 4(9 + 12\chi_1) \Leftrightarrow$$

$9\chi_1^2 = 36 + 48\chi_1 \Leftrightarrow 9\chi_1^2 - 48\chi_1 - 36 = 0 \Leftrightarrow 3\chi_1^2 - 16\chi_1 - 12 = 0$, διακρίνουσα $\Delta = 400$, ρίζες :

$\chi_1 = \frac{16 + 20}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \chi_1 = 6$ ή $\chi_1 = \frac{16 - 20}{2\cdot 3} \Leftrightarrow \chi_1 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, απορρίπτεται γιατί από **(1)** πρέπει $\chi_1 > 0$

Άρα $\chi_1 = 6$ και από **(1)** $\Leftrightarrow \psi_1^2 = 3\cdot 6 \Leftrightarrow \psi_1^2 = 18 \Leftrightarrow \psi_1 = \pm 3\sqrt{2}$,

Άρα υπάρχουν 2 εξισώσεις ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $\chi^2 + \psi^2 = 4$ και στην παραβολή $\psi^2 = 3\chi$, προκύπτουν αν στην $3\chi - 2\psi_1\psi + 3\chi_1 = 0$ **(2)** αντικαταστήσεις τις τιμές των $\chi_1 = 6$ και $\psi_1 = \pm 3\sqrt{2}$ και είναι οι $\varepsilon_1 : 3\chi - 6\sqrt{2}\cdot\psi + 18 = 0$, $\varepsilon_2 : 3\chi + 6\sqrt{2}\cdot\psi + 18 = 0$.

6. ***πανελλήνιες 1993 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Αφού η ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το σταθερό σημείο $K(0\ ,\ 2\beta)$, θα έχει εξίσωση $\psi - 2\beta = \lambda(\chi - 0) \Leftrightarrow \psi = \lambda\chi + 2\beta$.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα άκρα του μεγάλου άξονά της έλλειψης είναι $\chi = \alpha$ και $\chi = -\alpha$.

Άρα η $\psi = \lambda\chi + 2\beta$ τέμνει την $\chi = \alpha$ στο $M(\alpha,\ \lambda\alpha + 2\beta)$ και την $\chi = -\alpha$ στο $N(-\alpha,\ -\lambda\alpha + 2\beta)$.

α. Ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ θα έχει κέντρο το μέσον Λ του ΜΝ και ακτίνα το $\Lambda M = \Lambda N = \frac{MN}{2}$.

Είναι $\chi_\Lambda = \frac{\chi_M + \chi_N}{2} = \frac{\alpha + (-\alpha)}{2} = 0$ και $\psi_\Lambda = \frac{\psi_M + \psi_N}{2} = \frac{\lambda\alpha + 2\beta + (-\lambda\alpha + 2\beta)}{2} = 2\beta$

άρα κέντρο το $\Lambda(0,\ 2\beta)$, $\Lambda M = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\lambda\alpha + 2\beta - 2\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2\alpha^2} \Leftrightarrow \rho = \Lambda M = \sqrt{\alpha^2(1 + \lambda^2)}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Επομένως ο κύκλος έχει εξίσωση $(\chi-0)^2+(\psi-2\beta)^2=\left(\sqrt{\alpha^2(1+\lambda^2)}\right)^2 \Leftrightarrow \chi^2+(\psi-2\beta)^2=\alpha^2(1+\lambda^2)$

β. Η έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ $\alpha>\beta>0$ έχει $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2-\beta^2$ και εστίες $E'(-\gamma,0)$ και $E(\gamma,0)$ και επομένως για να διέρχεται ο κύκλος με διάμετρο ΜΝ από τις εστίες της έλλειψης, πρέπει

$\gamma^2+(0-2\beta)^2=\alpha^2(1+\lambda^2) \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+4\beta^2=\alpha^2+\alpha^2\lambda^2 \Leftrightarrow \alpha^2\lambda^2=\alpha^2-\beta^2+4\beta^2-\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2\lambda^2=3\beta^2 \Leftrightarrow \lambda^2=3\frac{\beta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{3}$

7. *πανελλήνιες 1994 Α Δέσμη*

ΘΕΜΑ 3ο

Β. Θεωρία.

8. *πανελλήνιες 1996 Α Δέσμη*

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου έχει εξίσωση $\psi=\chi$ και επομένως αν $M(\chi_1,\psi_1)$ είναι το σημείο επαφής θα είναι $\psi_1=\chi_1$ **(1)**, και η εφαπτομένη στην έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ θα έχει εξίσωση :

$\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\chi_1}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2\chi\chi_1+\alpha^2\psi\chi_1=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2\psi\chi_1=-\beta^2\chi\chi_1+\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$

$\psi=-\frac{\beta^2\chi_1}{\alpha^2\chi_1}\chi+\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\chi_1} \Leftrightarrow \psi=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\chi+\frac{\beta^2}{\chi_1}$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ και επειδή η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό έχει κλίση $-\frac{1}{2}$ θα είναι $-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta^2=\frac{\alpha^2}{2}$ (1),

είναι επίσης $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ από την έλλειψη άρα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^2}{2}=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2=2\alpha^2-2\gamma^2 \Leftrightarrow$

$2\gamma^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ η εκκεντρότητα της έλλειψης.

β. Έστω Α το σημείο του πρώτου τεταρτημόριου στο οποίο η ευθεία $\psi=\lambda\cdot\chi$, $\lambda>0$ τέμνει την παραπάνω έλλειψη, αν $A(\chi_1,\psi_1)$ είναι το σημείο επαφής θα είναι $\psi_1=\lambda\chi_1$ **(1)**, και η εφαπτομένη στην έλλειψη $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ θα έχει εξίσωση :

$\frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\psi_1}{\beta^2}=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\chi\chi_1}{\alpha^2}+\frac{\psi\cdot\lambda\cdot\chi_1}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \beta^2\chi\chi_1+\alpha^2\lambda\psi\chi_1=\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \lambda\alpha^2\chi_1\psi=-\beta^2\chi\chi_1+\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\psi=-\frac{\beta^2\chi_1}{\lambda\alpha^2\chi_1}\chi+\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\chi_1}\Leftrightarrow\psi=-\frac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}\chi+\frac{\beta^2}{\chi_1}$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}$ και επειδή η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό έχει κλίση μ θα είναι $-\frac{\beta^2}{\lambda\alpha^2}=\mu\Leftrightarrow$ $\lambda\cdot\mu=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

9. ***πανελλήνιες 1998 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Ο κύκλος $C:\ \chi^2+\psi^2+1=2\chi+6\psi\Leftrightarrow\chi^2+\psi^2-2\chi-6\psi+1=0$, είναι της μορφής : $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=-2$, $B=-6$ και $\Gamma=1$, άρα έχει κέντρο :

$K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-6}{2}\right)=K(1,3)$.

Η ευθεία $\varepsilon:\ 2\chi+\psi+5=0\Leftrightarrow\psi=-2\chi-5$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-2$ η ζητούμενη ευθεία θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έτσι ώστε $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow-2\lambda=-1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$ και επειδή περνάει από το $K(1,3)$ θα έχει εξίσωση : $\psi-3=\frac{1}{2}(\chi-1)\Leftrightarrow2\psi-6=\chi-1\Leftrightarrow\chi-2\psi+5=0$.

10. ***πανελλήνιες 1999 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω το σημείο $M(\chi,\psi)^2$, με $\chi,\psi\in R$.

α. $\left(\sqrt{(\chi-1)^2+\psi^2}\right)^2+\left(\sqrt{(\chi-3)^2+(\psi-2)^2}\right)^2=6\Leftrightarrow(\chi-1)^2+\psi^2+(\chi-3)^2+(\psi-2)^2=6\Leftrightarrow$

$\chi^2-2\chi+1+\chi^2-6\chi+9+\psi^2+\psi^2-4\psi+4=6\Leftrightarrow2\chi^2-8\chi+2\psi^2-4\psi+8=0\Leftrightarrow$

$\chi^2+\psi^2-4\chi-2\psi+4=0$, που είναι της μορφής : $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=-4$, $B=-2$ και $\Gamma=4$, άρα έχει κέντρο: $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2}{2}\right)=K(2,1)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=$

$\frac{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4\cdot4}}{2}=\frac{\sqrt{16+4-16}}{2}\Leftrightarrow\rho=\frac{\sqrt{4}}{2}$, άρα ακτίνα $\rho=1$.

β. Επειδή οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 άγονται από το Ο θα είναι της μορφής $\psi=\lambda\cdot\chi$ και θα πρέπει να έχουν με τον κύκλο ένα κοινό σημείο, αυτό σημαίνει πως

το σύστημα : $\begin{cases}\chi^2+\psi^2-4\chi-2\psi+4=0 & (1)\\ \psi=\lambda\cdot\chi & (2)\end{cases}$ πρέπει έχει μοναδική λύση.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Όμως $(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\chi^2+(\lambda\cdot\chi)^2-4\chi-2(\lambda\cdot\chi)+4=0\Leftrightarrow\chi^2+\lambda^2\cdot\chi^2-4\chi-2\lambda\cdot\chi+4=0\Leftrightarrow$

$(\lambda^2+1)\chi^2-2(\lambda+2)\chi+4=0$, για να έχει η τελευταία μοναδική λύση, πρέπει η διακρίνουσα $\Delta=0$.

Είναι $\Delta=[2(\lambda+2)]^2-4\cdot(\lambda^2+1)4=0\Leftrightarrow4(\lambda+2)^2-16\cdot(\lambda^2+1)=0\Leftrightarrow\lambda^2+4\lambda+4-4\lambda^2-4=0\Leftrightarrow$

$-3\lambda^2+4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(-3\lambda+4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Άρα η μια ευθεία είναι η $\varepsilon_1:\psi=0$ και η άλλη είναι η $\varepsilon_2:\psi=\dfrac{4}{3}\chi$

- ✓ Αν $M_1(\chi_1,\psi_1)$ είναι το σημείο επαφής της ε_1 με τον κύκλο τότε $\psi_1=0$ και από την εξίσωση του κύκλου έχεις $\chi_1^2+0^2-4\chi_1-2\cdot0+4=0\Leftrightarrow\chi_1^2-4\chi_1+4=0\Leftrightarrow(\chi_1-2)^2=0$ $\Leftrightarrow\chi_1=2$, άρα $M_1(2,0)$.

- ✓ Αν $M_2(\chi_2,\psi_2)$ είναι το σημείο επαφής της ε_2 με τον κύκλο τότε $\psi_2=\dfrac{4}{3}\chi_2$ και από την εξίσωση του κύκλου έχεις $\chi_2^2+\left(\dfrac{4}{3}\chi_2\right)^2-4\chi_2-2\dfrac{4}{3}\chi_2+4=0\Leftrightarrow\chi_2^2+\dfrac{16}{9}\chi_2^2-4\chi_2-\dfrac{8}{3}\chi_2+4=0$

$9\chi_2^2+16\chi_2^2-36\chi_2-24\chi_2+36=0\Leftrightarrow25\chi_2^2-60\chi_2+36=0\Leftrightarrow(5\chi_2-6)^2=0$

$\Leftrightarrow\chi_2=\dfrac{6}{5}$ και $\psi_2=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{8}{5}$ άρα $M_2\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5}\right)$.

11. ***πανελλήνιες 1999 Δ Δέσμη***

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1 , 3), Β(– 1 , 0), Γ(3 , – 1)

Είναι $(AB)=\sqrt{(-1-1)^2+(0-3)^2}\Leftrightarrow\rho=(AB)=\sqrt{13}$, άρα ο κύκλος C με κέντρο το σημείο Α(1 , 3) και ακτίνα $\rho=(AB)=\sqrt{13}$ θα έχει εξίσωση : $(\chi-1)^2+(\psi-3)^2=13$.

Η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{-1-0}{3-(-1)}=-\dfrac{1}{4}$, και περνάει π. χ. από το Β(– 1 , 0),

άρα η ΒΓ έχει εξίσωση : $\psi-0=-\dfrac{1}{4}(\chi+1)\Leftrightarrow4\psi=-\chi-1\Leftrightarrow\chi+4\psi+1=0$

Οι συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ΒΓ με τον παραπάνω κύκλο είναι η λύση του συστήματος : $\begin{cases}(\chi-1)^2+(\psi-3)^2=13\\ \chi+4\psi+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\chi-1)^2+(\psi-3)^2=13 & (1)\\ \chi=-4\psi-1 & (2)\end{cases}$.

Όμως $(1)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}(-4\psi-1-1)^2+(\psi-3)^2=13\Leftrightarrow(-4\psi-2)^2+(\psi-3)^2=13\Leftrightarrow4(\psi+1)^2+(\psi-3)^2=13\Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$4(\psi^2+2\psi+1)+(\psi^2-6\psi+9)^2=13 \Leftrightarrow 4\psi^2+8\psi+4+\psi^2-6\psi+9-13=0 \Leftrightarrow 5\psi^2+2\psi=0 \Leftrightarrow$

$\psi(5\psi+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\psi_1=0\\ \psi_2=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$, και αντίστοιχα $\begin{cases}\chi_1=-4\psi_1-1=-4\cdot 0-1\\ \chi_2=-4\psi_2-1=-4\cdot\left(-\dfrac{2}{5}\right)-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi_1=-1\\ \chi_2=\dfrac{3}{5}\end{cases}$.

Άρα δυο σημεία τομή της ΒΓ με τον κύκλο C, τα $M_1(-1,0)$ και $M_2\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

12. ***πανελλήνιες 1999 θετικής*** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Από τα δεδομένα ισχύει $(\chi-1)^2+\psi^2=2\eta(\chi+\psi-1)$ όπου : $\eta=1,2,3,\cdots,1999$ **(1)**

οπότε $\chi^2-2\chi+1+\psi^2-2\eta\chi-2\eta\psi+2\eta=0 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2(1+\eta)\chi-2\eta\psi+2\eta+1=0$ **(2)**

Η (2) είναι εξίσωση της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A=-2(1+\eta)$, $B=-2\eta$ και $\Gamma=2\eta+1$

Οπότε για να αποτελεί εξίσωση κύκλου πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Πράγματι $A^2+B^2-4\Gamma=4(\eta+1)^2+4\eta^2-4(2\eta+1)=4(\eta^2+2\eta+1+\eta^2-2\eta-1)^2=8\eta^2>0$ **άρα η**

(2) δηλαδή η (1) παριστάνουν κύκλο C για κάθε τιμή του η.

Είναι $-\dfrac{A}{2}=-\dfrac{-2(\eta+1)}{2}=\eta+1$, $-\dfrac{B}{2}=-\dfrac{-2\eta}{2}=\eta$ και $\rho=\dfrac{\sqrt{8\eta^2}}{2}=\eta\sqrt{2}$.

Άρα κέντρο $K(\eta+1,\eta)$ και $\rho=\eta\sqrt{2}$.

Σημείωση : πρόκειται για παραμετρική εξίσωση κύκλου, προφανώς !

β. Έστω $A(\chi_A,\psi_A)$ το σταθερό σημείο που ζητάμε (η φωλιά των μερμηγκιών) .

Σύμφωνα με την εκφώνηση το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου C για κάθε τιμή του η.

Άρα πρέπει : $\chi_A^2+\psi_A^2-2(1+\eta)\chi_A-2\eta\psi_A+2\eta+1=0$ (3) για κάθε τιμή του η.

Άρα και όταν $\eta=1$ και $\eta=2$ οπότε η εξίσωση (3) γίνεται $\begin{cases}\chi_A^2+\psi_A^2-4\chi_A-2\psi_A+3=0\\ \chi_A^2+\psi_A^2-6\chi_A-4\psi_A+6=0\end{cases}$ με αφαίρεση

κατά μέλη έχεις $2\chi_A+2\psi_A-2=0 \Leftrightarrow \chi_A+\psi_A-1=0 \Leftrightarrow \psi_A=1-\chi_A$ και αντικαθιστώντας σε μια

από τις δυο π. χ. στην πρώτη έχω : $\chi_A^2+(1-\chi_A)^2-4\chi_A-2(1-\chi_A)+3=0 \Leftrightarrow$

$\chi_A^2+1-2\chi_A+\chi_A{}^2-4\chi_A-2+2\chi_A+3=0 \Leftrightarrow 2\chi_A^2-4\chi_A+2=0 \Leftrightarrow \chi_A^2-2\chi_A+1=0 \Leftrightarrow (\chi_A-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \chi_A=1$ επομένως από $\psi_A=1-\chi_A \Leftrightarrow \psi_A=0$ άρα το σημείο $A(1,0)$ είναι κοινό σημείο της

τροχιάς του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ μυρμηγκιού.

Στη συνέχεια επαληθεύεις ότι το $A(1,0)$ είναι κοινό σημείο και για τις τροχιές και των άλλων μυρμηγκιών αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του Α στην γενική εξίσωση :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$1^2+0^2-2(1+\eta)1-2\eta\cdot 0+2\eta+1=1-2-2\eta+2\eta+1=0$

Άρα όλα τα μυρμήγκια περνάνε από το σημείο $A(1,0)$.

γ. Έστω ε: $\chi+\psi-1=0$ και d(K, ε) η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου C από την ευθεία (ε).

Είναι : $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|\chi+\psi-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|\eta+1+\eta-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2\eta|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(K,\varepsilon)=\eta\sqrt{2}=\rho$ άρα οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας (ε) : $\chi+\psi-1=0$.

Το σημείο επαφής είναι το σημείο $A(1,0)$, αφού 1 + 0 – 1 = 0 δηλαδή οι συντεταγμένες του Α ικανοποιούν την εξίσωση $\chi+\psi-1=0$.

13. επαναληπτικές 1999 θετικής

Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **Θεωρία.**

Β.

α. Το μήκος (ΟΑ) είναι :

Η σωστή απάντηση είναι

Α. – 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 1

β. $\chi^2+\psi^2=25$

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\chi^2+\psi^2=25$ άρα $\psi=0 \Leftrightarrow \chi^2=25 \Leftrightarrow \chi=\pm 5$ άρα ο κύκλος C τέμνει τον χ΄χ στα σημεία $A(5,0)$ και $A'(-5,0)$.

Αν $\chi=0 \Leftrightarrow \psi^2=25 \Leftrightarrow \psi=\pm 5$ άρα ο κύκλος C τέμνει τον ψ΄ψ στα σημεία $B(0,5)$ και $B'(0,-5)$.

14. πανελλήνιες 2000 Α Δέσμη

ΘΕΜΑ 4ο

Β. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με $\varphi\in[0,2\pi)$.

α. **i)** $M(\chi,\psi)=M(4\sigma\upsilon\nu\varphi,5\eta\mu\varphi)\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=4\sigma\upsilon\nu\varphi\\ \psi=5\eta\mu\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\chi}{4}\\ \eta\mu\varphi=\dfrac{\psi}{5}\end{cases}$ (1) και επειδή ισχύει η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1$ θα είναι λόγω της (1) :

$\left(\dfrac{\chi}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\psi}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{\chi^2}{16}+\dfrac{\psi^2}{25}=1$, άρα τα σημεία $M(\chi,\psi)=M(4\sigma\upsilon\nu\varphi,5\eta\mu\varphi)$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ανήκουν σε έλλειψη με εξίσωση $\frac{\chi^2}{16}+\frac{\psi^2}{25}=1$.

ii) Η εξίσωση της έλλειψης, σε κάθε σημείο της είναι : $\frac{\chi\chi_1}{16}+\frac{\psi\psi_1}{25}=1$, άρα και στο

$M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ είναι : $\frac{\chi 4\sigma\upsilon\nu\varphi}{16}+\frac{\psi 5\eta\mu\varphi}{25}=1 \Leftrightarrow \frac{\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{4}+\frac{\psi\cdot\eta\mu\varphi}{5}=1 \Leftrightarrow$

$5\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+4\psi\cdot\eta\mu\varphi-20=0$.

β. Έστω $E(\varphi)$, με $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο $M(4\sigma\upsilon\nu\varphi, 5\eta\mu\varphi)$ με τους άξονες χ΄ χ και ψ΄ ψ.

Η εφαπτομένη $5\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+4\psi\cdot\eta\mu\varphi-20=0$ τέμνει τον άξονα :

✓ χ΄χ στο σημείο Α με $\psi=0$ άρα $5\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+4\cdot 0\cdot\eta\mu\varphi-20=0\Leftrightarrow 5\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=20\Leftrightarrow\chi=\frac{20}{5\sigma\upsilon\nu\varphi}$

άρα $A\left(\frac{20}{5\sigma\upsilon\nu\varphi},0\right)$.

✓ ψ΄ψ στο σημείο Β με $\chi=0$ άρα $5\cdot 0\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+4\cdot\psi\cdot\eta\mu\varphi-20=0\Leftrightarrow 4\psi\cdot\eta\mu\varphi=20\Leftrightarrow\psi=\frac{20}{4\eta\mu\varphi}$

άρα $B\left(0,\frac{20}{4\eta\mu\varphi}\right)$.

Προφανώς $E(\varphi)=(OAB)=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\left|\frac{20}{5\sigma\upsilon\nu\varphi}\right|\cdot\left|\frac{20}{4\eta\mu\varphi}\right|=\left|\frac{400}{40\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\varphi}\right|\Leftrightarrow$

$E(\varphi)=\left|\frac{20}{\eta\mu 2\varphi}\right|$, είναι $|\eta\mu 2\varphi|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\eta\mu 2\varphi}\right|\ge 1\Leftrightarrow\left|\frac{20}{\eta\mu 2\varphi}\right|\ge 20$, άρα $E(\varphi)\ge 20$

15. ***πανελλήνιες 2000 τεχνολογικής*** **Σάββατο 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δες σχολικό βιβλίο

Β.

Β.1. Η σωστή απάντηση είναι **β)** $K(2,-1), \rho=2$

Β.2. σωστή απάντηση είναι **δ)** $3\chi+2\psi=7$

Β.3.

Α(0 , 7)	**2.**	Σημείο του κύκλου C
Β(3 , 4)	**1.**	Εσωτερικό σημείο του κύκλου C
Γ(7 , – 2)	**3.**	Εξωτερικό σημείο του κύκλου C
Δ(– 7 , 0)	**2.**	Σημείο του κύκλου C

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

16. **Εσπερινά 2000 τεχνολογικής** **Πέμπτη 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 3ο

α. Το κέντρο $K(3,-4)$ και η ακτίνα του **ρ = 3.**

β. Τα σημεία N(0 , – 4), P(3 , – 7) είναι σημεία του κύκλου.

γ. Το σημείο O(0 , 0) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

17. **Εσπερινά 2000 Θετικής** **Πέμπτη 22 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

α. **(ΑΒ) = 10** .

β. Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι το O(0 , 0).

γ. Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος, άρα το μέσον του O(0 , 0) θα είναι το κέντρο του κύκλου και η ακτίνα θα είναι ΟΑ = 5 επομένως η εξίσωση είναι $\chi^2+\psi^2=25$.

δ. Η εφαπτομένη στο σημείο Α έχει εξίσωση $-4\chi+3\psi=25 \Leftrightarrow 4\chi-3\psi+25=0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\chi_\Gamma=2\chi_A-\chi_B=2\cdot3-5 \Leftrightarrow \chi_\Gamma=1$, $\psi_\Gamma=2\psi_A-\psi_B=2\cdot2-1 \Leftrightarrow \psi_\Gamma=3$ άρα $\Gamma(1,3)$

β. Ο σταθμός εκπέμπει ακτινωτά. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής είναι 5 μονάδες, τότε η εμβέλεια θα «παριστάνεται» από τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=25$ και άρα ο σταθμός μπορεί να επικοινωνήσει με τα πλοία που είναι στο εσωτερικό η πάνω στον κύκλο δηλ με τα σημεία : Α(3 , 2) γιατί $OA=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}<25$, Γ(1 , 3) γιατί $O\Gamma=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}<25$.

Για μια διαφορετική προσέγγιση δες την λύση, του αντίστοιχου θέματος, στο κεφάλαιο 1.

18. **πανελλήνιες 2000 θετικής** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα ρ, είναι $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$.

Α.2. Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο όταν $\mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}$, έχει κέντρο το σημείο $\mathbf{K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)}$ και ακτίνα $\mathbf{\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}}$

Α.3 Θεωρία.

Β.1. Η σωστή απάντηση είναι : **Γ.** $\chi-3\psi=10$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β.2. **Η σωστή απάντηση είναι**

Στήλη Α	Στήλη Β
α.	**3.**
β.	**1.**

:

Β.3.

α. **Σωστό** διότι $1^2+(-1)^2=2$

β. **Λάθος** διότι αν π.χ. λύσεις το σύστημα $\begin{cases}\chi^2+\psi^2=4\\ \psi=2\chi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2+(2\chi)^2=4\\ \psi=2\chi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi^2+(2\chi)^2=4\\ \psi=2\chi\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5\chi^2=4\\ \psi=2\chi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=\pm\sqrt{\frac{4}{5}}\\ \psi=2\chi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \psi=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

δηλαδή δυο λύσεις άρα δυο κοινά σημεία επομένως η ευθεία $\psi=2\chi$ και ο κύκλος $\chi^2+\psi^2=2$ τέμνονται.

Ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης : Παρατήρησε πως το κέντρο του κύκλου $\chi^2+\psi^2=2$ που είναι το Ο(0,0) επαληθεύει την εξίσωση $\psi=2\chi$, άρα η ευθεία περνάει από το κέντρο του κύκλου άρα δεν μπορεί να εφάπτεται. ! ! !

γ. **Λάθος** γιατί $\chi^2+\psi^2+\lambda^2=0\Leftrightarrow\chi^2+\psi^2=-\lambda^2$ και $\lambda^2\le 0$ άρα δεν πρόκειται για εξίσωση κύκλου .

19. ***επαναληπτικές 2000 θετικής***

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η εξίσωση $(\chi-1)(\chi-3)+(\psi-3)(\psi-5)=0\Leftrightarrow\chi^2-4\chi+3+\psi^2-8\psi+15=0\Leftrightarrow$

$\chi^2+\psi^2-4\chi-8\psi+18=0$.

Είναι $A=-4$, $B=-8$ και $\Gamma=18$ οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+(-8)^2-4\cdot 18=16+64-72=8>0$

άρα η εξίσωση $(\chi-1)(\chi-3)+(\psi-3)(\psi-5)=0$ **παριστάνει κύκλο.**

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-6}{2},-\frac{-8}{2}\right)\Leftrightarrow K(3,4)$ και ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-6)^2+(-8)^2-4\cdot 18}}{2}=\frac{8}{2}\Leftrightarrow\rho=4$

β. Για να αποδείξεις ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους που αντιπροσωπεύονται από τα σημεία Α(1 , 3), Β(3 , 3), Γ(3 , 5) και Δ(1 , 5) αρκεί βρεις εξίσωση κύκλου που να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ.

Όπως είναι γνωστό τρία οποιαδήποτε σημεία άρα και τα Α, Β, Γ βρίσκονται πάντα πάνω σε κύκλο ο οποίος έστω ότι έχει γενική εξίσωση $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$. Τότε θα είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$$\begin{cases} 1^2+3^2+A\cdot 1+B\cdot 3+\Gamma=0 \\ 3^2+3^2+A\cdot 3+B\cdot 3+\Gamma=0 \\ 3^2+5^2+A\cdot 3+B\cdot 5+\Gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+9+A+3B+\Gamma=0 \\ 9+9+3A+3B+\Gamma=0 \\ 9+25+3A+5B+\Gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10+A+3B+\Gamma=0 & (1) \\ 18+3A+3B+\Gamma=0 & (2) \\ 34+3A+5B+\Gamma=0 & (3) \end{cases}$$ με

αφαίρεση (2) – (1) και (3) – (2) έχουμε το σύστημα $\begin{cases} 8+2A=0 \\ 16+2B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=-8 \end{cases}$ οπότε αντικαθιστώντας

στην πρώτη έχεις $10-4-24+\Gamma=0 \Leftrightarrow \Gamma=18$ οπότε ο κύκλος των σημείων Α, Β, Γ είναι :

$\chi^2+\psi^2-4\chi-8\psi+18=0$

Αν αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες του Δ(1 , 5) θα είναι $1^2+5^2-4\cdot 1-8\cdot 5+18=0 \Leftrightarrow$

$1+25-4-40+18=0 \Leftrightarrow 0=0$, οπότε ο κύκλος των σημείων Α, Β, Γ διέρχεται και από το Δ.

γ. Έστω ότι οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου Κ για κάθε χρονική στιγμή t (t > 0) είναι (t , t + 2) τότε όπως είναι γνωστό από το 2ο κεφάλαιο το Κ θα κινείται σε ευθεία γραμμή.

Πράγματι αν (χ_K,ψ_K) οι συντεταγμένες του Κ ως προς τους άξονες, αυτές δηλαδή που είναι

ανεξάρτητες του t, θα ισχύει : $\begin{cases} \chi_K=t \\ \psi_K=t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_K=t \\ \psi_K=\chi_K+2 \end{cases}$ επομένως οι συντεταγμένες (χ_K,ψ_K)

του Κ ικανοποιούν την εξίσωση **ψ = χ + 2.**

Αν λύσεις το σύστημα αυτής της εξίσωσης με τον κύκλο $\chi^2+\psi^2-4\chi-8\psi+18=0$ του

προηγούμενου ερωτήματος θα έχεις $\chi^2+(\chi+2)^2-4\chi-8(\chi+2)+18=0 \Leftrightarrow$

$\chi^2+\chi^2+4\chi+4-4\chi-8\chi-16+18=0 \Leftrightarrow 2\chi^2-10\chi+6=0 \Leftrightarrow \chi^2-4\chi+3=0 \Leftrightarrow \Delta=\cdots=4>0$ άρα

δυο λύσεις $\chi_1=3$ και $\chi_2=1 \Leftrightarrow \psi_1=3+2=5$, $\psi_2=1+2=3$ άρα η ευθεία **ψ = χ + 2** έχει με τον

κύκλο : $\chi^2+\psi^2-4\chi-8\psi+18=0$ δυο κοινά σημεία, τα **Α(1 , 3)** και **Β(3 , 5).**

20. *Εσπερινά 2000 Τεχνολογικής* — Παρασκευή 8 Σεπτεμβρίου — Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα ρ, είναι

$$(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$$

β) Η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ είναι $\chi^2+\psi^2=\rho^2$.

Β.

ΣΤΗΛΗ **Ι**	ΣΤΗΛΗ **ΙΙ**
Α.	**5.**
Β.	**3.**
Γ.	**1.**
Δ.	**2.**
Ε.	**7.**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

21. ***Εσπερινά 2000 Θετικής*** **Πέμπτη 14 Σεπτεμβρίου**

Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 3 είναι $\chi^2+\psi^2=9$.

β. Η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο Κ (0 , 1) και ακτίνα $\rho=4$, είναι $\chi^2+(\psi-1)^2=16$

γ. Είναι $2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=9$ άρα το Α ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 3 .

Είναι $2^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=4+(5-2\sqrt{5}+1)=10-2\sqrt{5}\neq 9$ άρα το Α δεν ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ (0 , 1) και ακτίνα $\rho=4$.

22. ***πανελλήνιες 2001 Α Δέσμη***

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_\alpha:\alpha\chi-\psi=0$ και $\zeta_\alpha:\chi+\alpha\psi=2$, $\alpha\in R$.

β. Επειδή το $M(\chi,\psi)$ είναι κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_\alpha:\alpha\chi-\psi=0$ (1) και

$\zeta_\alpha:\chi+\alpha\psi=2$ (2), άρα οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν, ταυτόχρονα και τις δυο εξισώσεις.

Αν $\chi\neq 0$ τότε $\varepsilon_\alpha:\alpha\chi-\psi=0\Leftrightarrow\alpha\chi=\psi\Leftrightarrow\alpha=\frac{\psi}{\chi}$, οπότε η (2) γίνεται : $\chi+\frac{\psi}{\chi}\psi=2\Leftrightarrow$

$\chi^2+\psi^2=2\chi\Leftrightarrow\chi^2+\psi^2-2\chi=0$ που είναι της μορφής : $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=-2$,

$B=0$ και $\Gamma=0$, άρα έχει κέντρο: $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-2}{2},-\frac{0}{2}\right)=\boldsymbol{K(1,0)}$ και ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+0^2-4\cdot 0}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}$, άρα ακτίνα $\boldsymbol{\rho=1}$.

Παρατήρηση 1η Επειδή η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi=0$ ικανοποιείται όταν $\chi=\psi=0$ άρα ο κύκλος διέρχεται από το Ο(0 , 0)

Παρατήρηση 2η κάθε φορά που σου δίνονται δυο ***παραμετρικές εξισώσεις*** και θες να βρεις που κινείται ένα σημείο, που ικανοποιεί και τις δυο, θα λύνεις τη μια ως προς την παράμετρο και αντικαθιστάς στην άλλη, ότι προκύψει είναι η εξίσωση που ζητά, από την μορφή της εξίσωσης καταλαβαίνεις και τη μορφή της γραμμής.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

23. **πανελλήνιες 2001 Δ Δέσμη**

ΘΕΜΑ 2ο

Β.

α. Η εξίσωση : $\chi^2+\psi^2+6\chi-8\psi=0$ είναι της μορφής : $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$, με $A=6$, $B=8$ και $\Gamma=0$, είναι $A^2+B^2-4\Gamma=6^2+8^2-4\cdot0=100>0$ άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο : $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{6}{2},-\frac{-8}{2}\right)=K(-3,4)$ και ακτίνα :

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{6^2+8^2-4\cdot0}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}$, άρα ακτίνα **ρ = 5.**

β. Επειδή $0^2+0^2+6\cdot0-8\cdot0=0$ και $(-6)^2+8^2+6(-6)-8\cdot8=36+64-36-64=0$ άρα τα σημεία Ο (0 , 0) και Α(– 6 , 8) ανήκουν στον κύκλο.

Αν $M(\chi,\psi)$ είναι το μέσον του ΟΑ τότε $\chi_M=\frac{0-6}{2}=-3$ και $\psi_M=\frac{0+8}{2}=4$ δηλαδή το μέσον του ΟΑ είναι το κέντρο του κύκλου, άρα η ΟΑ διάμετρος .

24. **πανελλήνιες 2001 θετικής** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Μονάδες 7

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $\chi+\psi+2=0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

Μονάδες 6

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, η εξίσωση αυτή είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A=6\mu$, $B=8\lambda$ και $\Gamma=0$.

οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(6\mu)^2+(8\lambda)^2-4\cdot0=36\mu^2+64\lambda^2>0$ μιας και μ, λ ≠ 0.

Άρα η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$ παριστάνει κύκλο.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{6\mu}{2},-\frac{8\lambda}{2}\right)\Leftrightarrow K(-3\mu,-4\lambda)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{36\mu^2+64\lambda^2}}{2}=\frac{\sqrt{4(9\mu^2+16\lambda^2)}}{2}=\frac{2\sqrt{9\mu^2+16\lambda^2}}{2}\Leftrightarrow \rho=\sqrt{9\mu^2+16\lambda^2}$$

Είναι προφανές ότι οι συντεταγμένες του O(0 , 0) επαληθεύουν την εξίσωση : $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$.

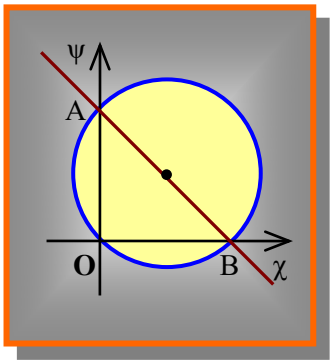
α. Τα κέντρα των κύκλων $\chi^2+\psi^2+6\mu\chi+8\lambda\psi=0$ είναι $K(-3\mu,-4\lambda)$, όπως είναι γνωστό από το 2ο κεφάλαιο, το Κ θα κινείται σε ευθεία γραμμή.

Πράγματι αν (χ_K,ψ_K) οι συντεταγμένες του Κ ως προς τους άξονες, αυτές δηλαδή που είναι ανεξάρτητες των μ και λ, θα ισχύει : $\begin{cases}\chi_K=-3\mu\\ \psi_K=-4\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=-\frac{\chi_K}{3}\\ \lambda=-\frac{\psi_K}{4}\end{cases}$ και επειδή ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$

με αντικατάσταση των μ και λ έχεις $-\chi_K-\frac{\psi_K}{2}=0\Leftrightarrow\psi_K=-2\chi_K$ επομένως οι συντεταγμένες (χ_K,ψ_K) του Κ ικανοποιούν την εξίσωση **ψ = –2χ** άρα το Κ «κινείται» στην ευθεία αυτή η οποία προφανώς ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του O(0 , 0), άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Έστω ο ζητούμενος κύκλος όπως στο διπλανό σχήμα, επειδή $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ θα είναι $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ άρα η γωνία $\widehat{AOB}=90^o$.

Επειδή τα Ο, Α και Β είναι σημεία του κύκλου η ΑΒ θα είναι διάμετρος του κύκλου.



Επομένως η ευθεία (ε) με εξίσωση χ + ψ + 2 = 0 διέρχεται από το κέντρο Κ(– 3μ, – 4λ) του κύκλου άρα τα – 3μ και – 4λ ικανοποιούν την χ + ψ + 2 = 0 οπότε είναι –3μ – 4λ + 2 = 0 (1) και από την εκφώνηση ισχύει 3μ + 2λ = 0 (2)

Άρα ισχύει το σύστημα : $\begin{cases}-3\mu-4\lambda+2=0\\ 3\mu+2\lambda=0\end{cases}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχεις $-2\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=1$,

άρα $3\mu+2\lambda=0\Leftrightarrow3\mu+2=0\Leftrightarrow\mu=-\frac{2}{3}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Αν $\lambda = 1$ και $\mu = -\frac{2}{3}$ ο κύκλος είναι $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 8\psi = 0$ και έχει κέντρο $K(2, -4)$ και

ακτίνα $\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2} = \sqrt{4 + 16}\rho = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{5}$ άρα $(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$

και η AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\chi + \psi + 2 = 0$ οπότε $d(O, AB) = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$d(O, AB) = \sqrt{2}$ άρα $E_{OAB} = \frac{1}{2}|AB \cdot d(O, AB)| = \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow E_{OAB} = 2\sqrt{10}$.

2ος τρόπος : Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 8\psi = 0$ και της ευθείας

$\chi + \psi + 2 = 0$, άρα λύσεις του συστήματος $\begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 8\psi = 0 \\ \chi + \psi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 8\psi = 0 \\ \psi = -\chi - 2 \end{cases}$ άρα η 1η

εξίσωση γίνεται $\chi^2 + (-\chi - 2)^2 - 4\chi + 8(-\chi - 2) = 0 \Leftrightarrow \cdots \begin{cases} \chi_1 = 2 - \sqrt{10} \\ \chi_2 = 2 + \sqrt{10} \end{cases}$ οπότε λύσεις τα σημεία

$A(2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$ και $B(2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10})$ άρα $\overrightarrow{OA}(2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$ και

$\overrightarrow{OB}(2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10})$, έτσι $E_{OAB} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})| \cdots \Leftrightarrow E_{OAB} = 2\sqrt{10}$.

25. *πανελλήνιες 2001 Εσπερινά* — Τετάρτη 6 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α.
Α $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 3
Β $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 2
Γ $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 1

Β. **1.** **α)** Το κέντρο του κύκλου είναι $K(\chi_0, \psi_0) = K(3, 10)$ και η ακτίνα του **ρ = 8**.

β) Πράγματι είναι : $(11 - 3)^2 + (10 - 10)^2 = 8^2 + 0^2 = 64$

2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Β(2 , 2) είναι $2\chi + 2\psi = 8 \Leftrightarrow$ **χ + ψ = 4**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έστω $A(\chi_1, \psi_1)$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\chi^2+\psi^2=25$ στο Α θα είναι $\varepsilon: \chi_1\chi+\psi_1\psi=25$.

Επειδή το $A\in C$ θα πρέπει $\chi_1^2+\psi_1^2=25$ **(1)**. Επειδή η ε «περνάει» από το Μ θα πρέπει $\chi_1\cdot 0+\psi_1(-10)=25$ **(2).** Οι **(1)** και **(2)** αποτελούν σύστημα : $\begin{cases}-10\psi_1=25\\ \chi_1^2+\psi_1^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\psi_1=-\frac{5}{2}\\ \chi_1^2+\frac{25}{4}=25\end{cases}$.

Από τη 2η έχεις $\chi_1=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}$, άρα δυο εφαπτόμενες τις $\varepsilon_1: \frac{5\sqrt{3}}{2}\chi-\frac{5}{2}\psi=25\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\chi-\psi=10$,

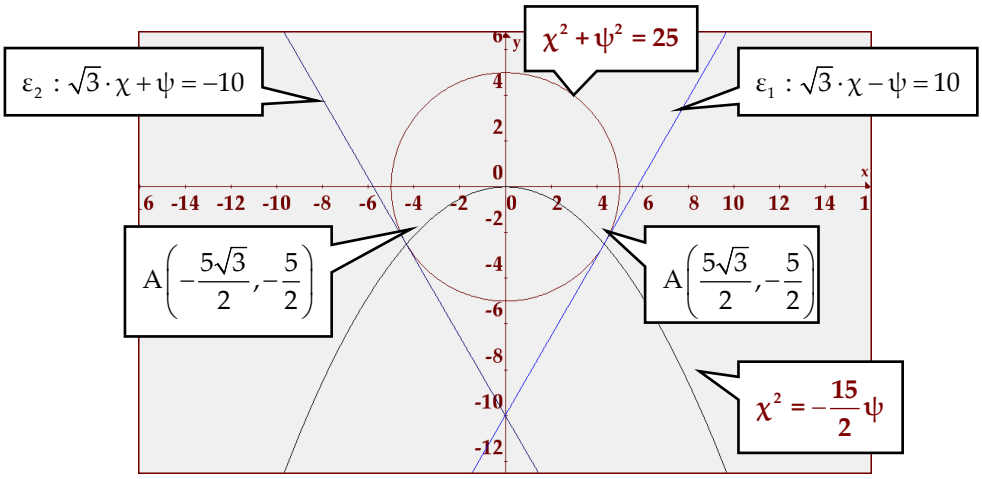
$\varepsilon_2: \frac{-5\sqrt{3}}{2}\chi-\frac{5}{2}\psi=25\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\chi+\psi=-10$.

β) Τα σημεία επαφής είναι $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

γ) Επειδή τα σημεία Α και Β είναι συμμετρικά ως προς τον ψ'ψ άρα η παραβολή που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία Α και Β θα έχει άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ και επομένως οι εστίες στον ψ'ψ και εξίσωση $\chi^2=2p\psi$ και επειδή «περνάει» από το $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2}\right)$ θα πρέπει : $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=2p\left(-\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{75}{4}=-5p\Leftrightarrow p=-\frac{15}{4}$ άρα η παραβολή έχει εξίσωση : $\chi^2=-\frac{15}{2}\psi$ και έχει εστία $E\left(0,-\frac{15}{8}\right)$ και διευθετούσα $\chi=-\frac{15}{8}$

Δες έτσι από περιέργεια το σχήμα πιο κάτω.

(Πρόσεχε μόνο, μην είσαι πολύ περίεργος γιατί η περιέργεια σκοτώνει.)



Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2. **Εσπερινά – επαναληπτικές Ιουλίου 2001** | **Πέμπτη 12 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση κύκλου $\chi^2+\psi^2-8\chi-6\psi=0$.

α. Το κέντρο του κύκλου $\chi^2+\psi^2-8\chi-6\psi=0$ είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K(4,3)$ και ακτίνα

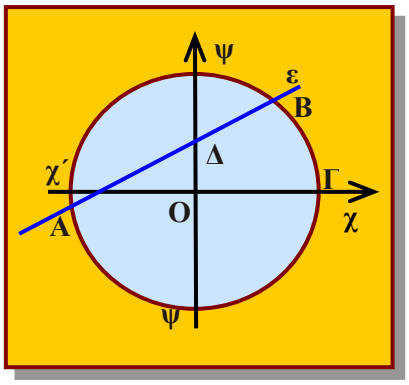
$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{(-8)^2+(-6)^2-4\cdot 0}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}\Rightarrow \rho=5.$$

β. Για το σημείο Α(–1 , 3) έχω $(-1)^2+3^2-8(-1)-6\cdot 3=1+9+8-18=0$ άρα είναι σημείο του κύκλου.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο Α(–1 , 3) είναι $-1\cdot\chi+3\cdot\psi=5^2\Leftrightarrow -\chi+3\psi=25$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Ο κύκλος C με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=25$ και η ευθεία ε με εξίσωση $\psi=\frac{1}{2}\chi+\frac{5}{2}$ αποτελούν σύστημα : $\begin{cases}\chi^2+\psi^2=25\\ \psi=\frac{1}{2}\chi+\frac{5}{2}\end{cases}$



και αν αντικαταστήσεις το ψ στην 1η θα έχεις :

$$\chi^2+\left(\frac{1}{2}\chi+\frac{5}{2}\right)^2=25\Leftrightarrow \chi^2+\left(\frac{\chi+5}{2}\right)^2=25\Leftrightarrow$$

$$\chi^2+\frac{\chi^2+10\chi+25}{4}=25\Leftrightarrow 4\chi^2+\chi^2+10\chi+25=100\Leftrightarrow 5\chi^2+10\chi+25=100\Leftrightarrow \chi^2+2\chi-15=0,$$ άρα

$\chi_1=-5$, $\chi_2=3$ επομένως από την $\psi=\frac{1}{2}\chi+\frac{5}{2}$ προκύπτει : $\psi_1=0$, $\psi_2=4$

Άρα **Α(–5,0)** και **Β(3,4)** τα κοινά σημεία.

β. Αν Γ(5 , 0) είναι σημείο τομής του άξονα χ'χ με τον κύκλο C, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{1}{2}$.

Άρα θα είναι της μορφής $\psi=\frac{1}{2}\chi+\beta$ και επειδή θα ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του Γ,

θα πρέπει $0=\frac{1}{2}5+\beta\Leftrightarrow \beta=-\frac{5}{2}$, άρα η ευθεία έχει τελικά εξίσωση $\psi=\frac{1}{2}\chi-\frac{5}{2}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Αν Δ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα ψ΄ψ τότε θα είναι Δ(0 , ψ) όπου ψ η λύση της : $\psi = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \psi = \frac{5}{2}$ άρα $\Delta\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Η εξίσωση της κάθετης στην ε, ευθείας θα έχει συντελεστή λ για τον οποίο θα ισχύει $\lambda\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow$ $\lambda = -2$ άρα η εξίσωσή της θα είναι $\psi = -2\chi + \beta$ και θα πρέπει να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του σημείου $\Delta\left(0,\frac{5}{2}\right)$, δηλαδή πρέπει : $\frac{5}{2} = -2\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \psi = -2\chi + \frac{5}{2}$.

3. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001*** **Β**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αν η παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = \alpha\chi$ διέρχεται από το σημείο Α(2 , 4) τότε θα είναι $4^2 = \alpha\cdot 2 \Leftrightarrow$ $16 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 8$ άρα $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$ και η εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right) = E(2,0)$ και η εξίσωση γίνεται $\psi^2 = 8\chi$.

β. Αν Ε' είναι το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα ψ΄ψ τότε $E'(-2,0)$.

Αν Μ(χ , ψ) είναι ένα σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{E'E}$ τότε $\overrightarrow{ME} = (2-\chi, 0-\psi) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ME} = (2-\chi,-\psi)$ και $\overrightarrow{E'E} = (2-(-2),0-0) = (4,0)$ οπότε $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{E'E} \Leftrightarrow$

$(2-\chi)^2 + (-\psi)^2 = (2-\chi)\cdot 4 + (-\psi)\cdot 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi + 4 + \psi^2 = 8 - 4\chi \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 = 4$.

Άρα το σημείο Μ(χ , ψ) ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0 , 0) και ακτίνα 2.

γ. Για βρεις τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α θα ακολουθήσεις την **κλασική διαδικασία :**

Έστω $M(\chi_1,\psi_1)$ το σημείο επαφής τότε επειδή το Μ ανήκει στην παραβολή $\psi^2 = 8\chi$ θα πρέπει $\psi_1^2 = 8\chi_1$ (1) και η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ θα είναι $\varepsilon : \psi\psi_1 = 4(\chi + \chi_1)$.

Αναζητάς την εφαπτομένη της παραβολής που διέρχεται από το σημείο Α(2 , 4) .

Άρα θα πρέπει $4\psi_1 = 4(2 + \chi_1) \Leftrightarrow \psi_1 = 2 + \chi_1$ και με αντικατάσταση στην (1) έχεις $(\chi_1 + 2)^2 = 8\chi_1 \Leftrightarrow$

$\chi_1^2 + 4\chi_1 + 4 = 8\chi_1 \Leftrightarrow \chi_1^2 - 4\chi_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\chi_1 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi_1 = 1}$ οπότε $\psi_1 = 2 + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi_1 = 3}$ άρα το σημείο επαφής $\mathbf{M(1,3)}$ και η εφαπτομένη είναι $\varepsilon : \psi\psi_1 = 4(\chi + \chi_1) \Leftrightarrow \varepsilon : 3\psi = 4(\chi + 1) \Leftrightarrow$

ε : 4χ - 3ψ + 4 = 0 .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

4. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001 εσπερινά** **Τρίτη 11 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-6\chi+8\psi=24 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-6\chi+8\psi-24=0$ είναι της μορφής

$\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με **$A=-6$ και $B=8$** και **$\Gamma=-24$** οπότε

$A^2+B^2-4\Gamma=(-6)^2+8^2-4\cdot(-24)=196>0$.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-6}{2},-\frac{8}{2}\right) \Leftrightarrow K(3,-4)$ και η ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{196}}{2}=\frac{14}{2} \Leftrightarrow \rho=7$.

β. Για το Α (10, – 4) ισχύει : $10^2+(-4)^2-6\cdot10+8(-4)-24=100+16-60-32-24=0$ άρα το Α ανήκει.

Για το Β (3, 3) ισχύει : $3^2+3^2-6\cdot3+8\cdot3-24=9+9-18+24-24=0$ άρα το Β ανήκει.

Για το Γ (1 , 0) ισχύει : $1^2+0^2-6\cdot1+8\cdot0-24=1+0-6+0-24=-29\neq0$ άρα το Γ δεν ανήκει.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία Α(2 , 2), Β(5 , 0), Γ(3 , – 6), Ο(0 , 0).

β. $\overrightarrow{O\Delta}=3\cdot(2,2)-2\cdot(5,0)+(3,-6)=(6,6)-(10,0)+(3,-6) \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Delta}=(-1,0)$.

$(-1)^2+\frac{0^2}{4}=1 \Leftrightarrow 1=1$, άρα Δ είναι σημείο της έλλειψης : $\chi^2+\frac{\psi^2}{4}=1$

5. **Εσπερινά 2002** **Δευτέρα 27 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **3.** **δ)** $\chi^2+\psi^2=\rho^2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η εξίσωση του κύκλου C_1 είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A=-4$, $B=-2$ και $\Gamma=1$ οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+(-2)^2-4\cdot1=16>0$.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2}{2}\right) \Leftrightarrow K_1(2,1)$ και η ακτίνα

$\rho_1=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow \rho_1=2$

β. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(2,1)$ και ακτίνα $\rho_1=2$.

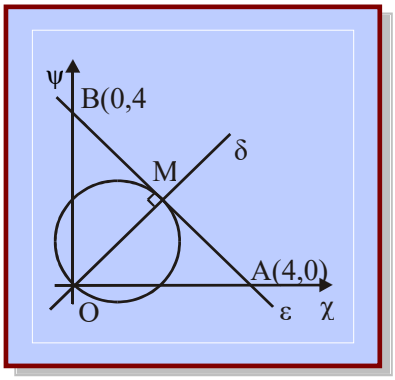
Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Από την εξίσωση του κύκλου C_2 είναι φανερό ότι το κέντρο του κύκλου είναι $K_2(-2\kappa, \lambda)$ και η ακτίνα $\rho_2 = 5$ οπότε για να έχουν το ίδιο κέντρο πρέπει $(-2\kappa = 2$ και $\lambda = 1) \Leftrightarrow$ **(κ = – 1 και λ = 1)** .

γ. επειδή $4^2 + 1^2 - 4\cdot 4 - 2\cdot 1 + 1 = 16 + 1 - 16 - 2 = 0$ άρα το σημείο Α(4 , 1) ανήκει στον C_1, ενώ το Β(1 , 1) δεν ανήκει στον κύκλο C_1 επειδή $1^2 + 1^2 - 4\cdot 1 - 2\cdot 1 + 1 = 1 + 1 - 4 - 2 + 1 = -3 \neq 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ. Αν ο κύκλος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. τότε θα έχει κέντρο το μέσον Κ του ΟΜ και ακτίνα $KO = \frac{OM}{2}$.



Είναι $\chi_K = \frac{\chi_O + \chi_M}{2} = \frac{0+2}{2} \Leftrightarrow \chi_K = 1$ και $\psi_K = \frac{\psi_O + \psi_M}{2} = \frac{0+2}{2}$ $\Leftrightarrow \psi_K = 1$ άρα το κέντρο **Κ(1 , 1)** και

$OM = \sqrt{(\chi_M - \chi_O)^2 + (\psi_M - \psi_O)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow OM = 2\sqrt{2}$

άρα $KO = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow KO = \sqrt{2}$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(\chi - \chi_K)^2 + (\psi - \psi_K)^2 = (KO)^2 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 + (\psi - 1)^2 = 2$

6. πανελλήνιες 2002

Πέμπτη 6 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **δ.** **Σωστό** Η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Δ. Α $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 2 , Β $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 3
Γ $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 1 , Δ $\xrightarrow{\text{σωστή απάντηση}}$ 6

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$ άρα η εστία είναι $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E(1, 0)$ και η διευθετούσα της παραβολής είναι $\chi = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow \chi = -1$.

Β. Οι ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής $E(1, 0)$ είναι οι :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 : \chi = 1 & \text{και} \\ \varepsilon_2 : \psi - 0 = \lambda(\chi - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 : \chi - 1 = 0 & \text{και} \\ \varepsilon_2 : \lambda\chi - \psi - \lambda = 0 \end{cases} .$$

Θα εξετάσεις πρώτα αν η $\varepsilon_1 : \chi - 1 = 0$ (που είναι και συγκεκριμένη, ανεξάρτητη του λ) αν απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $d(O,\varepsilon_1)=\frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η $\varepsilon_1:\chi-1=0$ δεν ικανοποιεί της προϋποθέσεις και επομένως δεν είναι λύση.

Θα αναζητήσεις αν υπάρχουν και άλλες λύσεις μέσα από την παραμετρική εξίσωση $\varepsilon_2:\lambda\chi-\psi-\lambda=0$.

Είναι $d(O,\varepsilon_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|0-0-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2|\lambda|=\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow 4\lambda^2=2\lambda^2+2\Leftrightarrow$
$2\lambda^2=2\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$

Άρα υπάρχουν δυο ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής $E(1,0)$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases}\varepsilon_2:\ \psi-0=1(\chi-1)\\ \text{και}\\ \varepsilon'_2:\ \psi-0=-1(\chi-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon_2:\ \psi=\chi-1\\ \text{και}\\ \varepsilon'_2:\ \psi=-\chi+1\end{cases}$$ συμμετρικές ως προς τον χ΄χ.

Γ. Για να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi=\chi-1$ θα ακολουθήσω την **κλασική διαδικασία :**

Έστω $M(\chi_1,\psi_1)$ το σημείο επαφής τότε επειδή το Μ ανήκει στην παραβολή $\psi^2=4\chi$ θα πρέπει $\psi_1^2=4\chi_1$ **(1)** και η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ θα είναι $\varepsilon:\ \psi\psi_1=2(\chi+\chi_1)\Leftrightarrow$
$\varepsilon:\ \psi\psi_1=2\chi+2\chi_1\Leftrightarrow\varepsilon:\ 2\chi-\psi\psi_1+2\chi_1=0$.

Το παράλληλο στην ε διάνυσμα είναι $\vec{\delta}=(-B,A)\Leftrightarrow\vec{\delta}=(\psi_1,2)$.

Αναζητάς την εφαπτομένη της παραβολής που είναι παράλληλη στην $\psi=\chi-1\Leftrightarrow\chi-\psi-1=0$ η οποία έχει παράλληλο διάνυσμα $\vec{\delta'}=(-B,A)\Leftrightarrow\vec{\delta'}=(1,1)$.

Άρα θα πρέπει $\vec{\delta}\,//\,\vec{\delta'}\Leftrightarrow\det(\vec{\delta},\vec{\delta'})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\psi_1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\psi_1-2=0\Leftrightarrow\psi_1=2$ και από την (1) έχεις $\psi_1^2=4\chi_1\Leftrightarrow 4=4\chi_1\Leftrightarrow\chi_1=1$ άρα το σημείο επαφής $M(1,2)$ και η εφαπτομένη είναι
$\varepsilon:\ \psi\psi_1=2(\chi+\chi_1)\Leftrightarrow\varepsilon:\ 2\psi=2(\chi+1)\Leftrightarrow\varepsilon:\ 2\chi-2\psi+2=0\Leftrightarrow\varepsilon:\ \chi-\psi+1=0$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi\sigma\upsilon\nu\theta-2\psi\eta\mu\theta-1=0$, $0\le\theta<2\pi$.

Α. Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με **Α = –2συνθ και Β = –2ημθ** και **Γ = –1** οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(-2\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(-2\eta\mu\theta)^2-4\cdot(-1)=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\eta\mu^2\theta+4=$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$4\left(\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta+1\right)=8>0$.

Άρα η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi\text{συν}\theta-2\psi\text{ημ}\theta-1=0$ παριστάνει κύκλο.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-2\text{συν}\theta}{2},-\frac{-2\text{ημ}\theta}{2}\right)\Leftrightarrow \mathbf{K(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)}$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \boxed{\rho=\sqrt{2}}$. Πρόκειται για ίσους κύκλους.

Β. Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$, τότε ο κύκλος έχει κέντρο το $K\left(\text{συν}\frac{\pi}{2},\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{K(0,1)}$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho=\sqrt{2}}$ άρα η εξίσωση του κύκλου παίρνει τη μορφή $\chi^2+\psi^2-2\chi\text{συν}\frac{\pi}{2}-2\psi\text{ημ}\frac{\pi}{2}-1=0\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\chi^2+\psi^2-2\psi-1=0}$ ή στη μορφή $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$ είναι $(\chi-0)^2+(\psi-1)^2=2\Leftrightarrow$

$\chi^2+(\psi-1)^2=2$.

Αν ε η εφαπτομένη στο Μ(1 , 2) τότε $\varepsilon\perp KM$ όμως $\lambda_{KM}=\frac{\psi_M-\psi_K}{\chi_M-\chi_K}=\frac{2-1}{1-0}=1$ άρα $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{KM}=-1\Leftrightarrow$ $\lambda_\varepsilon\cdot1=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-1$ άρα η εφαπτομένη είναι, σε τελευταία ανάλυση, η ευθεία που περνάει από το Μ(1 , 2) και έχει συντελεστή λ = – 1 άρα έχει εξίσωση $\psi-2=-1(\chi-1)\Leftrightarrow \boxed{\psi=-\chi+3.}$

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0 , 0) και ακτίνα ρ = 1.

Είναι ένα δείγμα «ΠΑΝΕΞΥΠΝΗΣ» ερώτησης :

Απάντηση :

Τα κέντρα των κύκλων είναι $\mathbf{K(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)}$ και από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι τα σημεία με συντεταγμένες $(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)$ βρίσκονται στον τριγωνομετρικό κύκλο ο οποίος έχει κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1

Ένα άλλος τρόπος προσέγγισης είναι να κάνεις την πολύ «**δύσκολη απάντηση**» λέγοντας :

Ο κύκλος ο οποίος έχει κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1 έχει εξίσωση $\chi^2+\psi^2=1$ και επειδή $\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta=1$ οι συντεταγμένες του $\mathbf{K(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)}$ ικανοποιούν την εξίσωση $\chi^2+\psi^2=1$ άρα για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

7. **εσπερινά επαναληπτικές 2002** **Παρασκευή 6 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η εξίσωση του κύκλου είναι : $(\chi-3)^2+(\psi-3)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow (\chi-3)^2+(\psi-3)^2=8$.

β. Είναι $(1-3)^2+(5-3)^2=4+4=8$ άρα το Γ ανήκει στον κύκλο.

γ. Τα κοινά σημεία Α και Β του κύκλου και της ευθείας είναι λύσεις του συστήματος :

$$\begin{cases}\psi=\chi\\(\chi-3)^2+(\psi-3)^2=8\end{cases}$$ οπότε $(\chi-3)^2+(\psi-3)^2=8 \Leftrightarrow (\chi-3)^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases}\chi-3=4 \ \text{ή}\\ \chi-3=-4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\chi=7 \ \text{ή}\\ \chi=-1\end{cases}$ άρα $\begin{cases}\psi=7 \ \text{ή}\\ \psi=-1\end{cases}$ και επομένως Α(7 , 7) και Β(– 1 , – 1) .

δ. Το $\overrightarrow{B\Gamma}=(1-(-1)\ ,\ 5-(-1))=(2\ ,\ 6)$ και το $\overrightarrow{A\Gamma}=(1-7\ ,\ 5-7)=(-6\ ,\ -2)$ και $\chi_1\chi_1+\psi_1\psi_1=2(-6)+6(-2)=0$ άρα τα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

8. **επαναληπτικές 2002** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία.

Β. γ. Λάθος Η παραβολή με εξίσωση $\chi^2=2p\psi$ δεν έχει την εστία της πάνω στον άξονα χ΄χ.

Γ. α. Ο κύκλος με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $\boldsymbol{\chi^2+\psi^2=\rho^2}$.

β. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$, έχει εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ με συντεταγμένες $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$. .

γ. Η υπερβολή $\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $\psi=\frac{\alpha}{\beta}\chi$ και $\psi=-\frac{\alpha}{\beta}\chi$.

δ. Η παραβολή με **εξίσωση** $\psi^2=2p\chi$ έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση $\chi=-\frac{p}{2}$.

9. **Εσπερινά 2003** **Δευτέρα 26 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. 3. Σωστό **4. Σωστό**

ΘΕΜΑ 3ο

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α) Η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\lambda\chi+\lambda^2=5 \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-2\lambda\chi+\lambda^2-5=0$ είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με **$A=-2\lambda$ και $B=0$** και **$\Gamma=\lambda^2-5$** οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=$ $(-2\lambda)^2+0^2-4\cdot(\lambda^2-5)=4\lambda^2-4\lambda^2+20=20>0$.

Άρα η εξίσωση **$\chi^2+\psi^2-2\lambda\chi+\lambda^2=5$** παριστάνει κύκλο.

β) Για $\lambda=1$, εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\lambda\chi+\lambda^2=5$ γίνεται $\chi^2+\psi^2-2\chi-4=0$ και είναι $A=-2$, $B=0$ και $\Gamma=-4$ οπότε το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-2}{2},-\frac{0}{2}\right) \Leftrightarrow$ **$K(1,0)$** και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{20}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$ **$\rho=\sqrt{5}$**.

γ) Για $\lambda=1$, ο κύκλος παίρνει τη μορφή $\chi^2+\psi^2-2\chi-4=0$ (δες προηγούμενο ερώτημα) οπότε τα κοινά σημεία με την ευθεία θα προκύπτουν από τη λύση του συστήματος : $\begin{cases}\chi^2+\psi^2-2\chi-4=0\\ \psi=\chi\end{cases}$ και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση έχεις $\chi^2+\chi^2-2\chi-4=0 \Leftrightarrow 2\chi^2-2\chi-4=0 \Leftrightarrow \chi^2-\chi-2=0$ $\Leftrightarrow \Delta=9$ άρα $\cdots$ λύσεις τα $\begin{cases}\chi=2\\ \chi=-1\end{cases}$ άρα και $\begin{cases}\psi=2\\ \psi=-1\end{cases}$ άρα τα κοινά σημεία της ευθείας $\psi=\chi$ με τον κύκλο $\chi^2+\psi^2-2\chi-4=0$ είναι τα **Α(2 , 2)** και **Β(– 1 , – 1).**

10. ***πανελλήνιες 2003*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **β.** **Σωστό**

γ. **Σωστό**.

δ. **Δες στο σχολικό βιβλίο τον ορισμό της παραβολής.**

ΘΕΜΑ 3ο

Β.

β. Εάν $\lambda=1$ τότε Α(1 , 5) το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, και η ακτίνα του θα είναι η $d(A,B\Gamma)$

Βρίσκεις την εξίσωση της ΒΓ από τα Β και Γ.

Είναι $\lambda_{B\Gamma}=\frac{\psi_\Gamma-\psi_B}{\chi_\Gamma-\chi_B}=\frac{3-2}{2-1}=1$ και επειδή περνάει από το Β θα έχει εξίσωση : $\psi-2=1\cdot(\chi-1) \Leftrightarrow$ $\psi-2=\chi-1 \Leftrightarrow \chi-\psi+1=0$ οπότε $d(A,B\Gamma)=\frac{|1-5+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(A,B\Gamma)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ άρα ο ζητούμενος κύκλος θα έχει εξίσωση $(\chi-1)^2+(\psi-5)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\chi-1)^2+(\psi-5)^2=\frac{9}{2}$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για να βρεις τις εστίες και γενικότερα για να κάνεις οτιδήποτε με μια καμπύλη πρέπει πρώτα να μετασχηματίσεις την εξίσωσή της στην κανονική της μορφή

Η εξίσωση της έλλειψης γίνεται $4\chi^2+2\psi^2=3p^2 \Leftrightarrow \frac{4\chi^2}{3p^2}+\frac{2\psi^2}{3p^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\chi^2}{\frac{3p^2}{4}}+\frac{\psi^2}{\frac{3p^2}{2}}=1$

Και επειδή προφανώς είναι $\frac{3p^2}{4}<\frac{3p^2}{2}$ άρα έχει τη μορφή $\frac{\chi^2}{\beta^2}+\frac{\psi^2}{\alpha^2}=1$ όπου $\alpha^2=\frac{3p^2}{4} \Leftrightarrow \alpha=\frac{p\sqrt{3}}{2}$.

και $\beta^2=\frac{3p^2}{2} \Leftrightarrow \beta=\frac{p\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \beta=\frac{p\sqrt{6}}{2}$ γιατί $p>0$.

Επομένως οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης βρίσκονται στον άξονα χ΄χ .

Επίσης από την σχέση $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ έχεις $\left(\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{p\sqrt{6}}{2}\right)^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{p^2\cdot 3}{4}=\frac{p^2\cdot 6}{4}-\gamma^2 \Leftrightarrow$

$\gamma^2=\frac{p^2\cdot 6}{4}-\frac{p^2\cdot 3}{4} \Leftrightarrow \gamma^2=\frac{p^2\cdot 3}{4} \Leftrightarrow \gamma=\frac{p\sqrt{3}}{2}$ και επομένως εστίες είναι τα σημεία

$E\left(0,\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Β. Για να βρεις τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών θα λύσεις το σύστημα των δυο εξισώσεων : $\psi^2=2p\chi$ και $4\chi^2+2\psi^2=3p^2$ δηλαδή $\begin{cases}4\chi^2+2\psi^2=3p^2\\ \psi^2=2p\chi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\chi^2+2\cdot 2p\chi=3p^2\\ \psi^2=2p\chi\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}4\chi^2+4p\chi-3p^2=0\\ \psi^2=2p\chi\end{cases}$.

Η εξίσωση $4\chi^2+4p\chi-3p^2=0$ έχει $\Delta=16p^2-4\cdot 4\cdot(-3p^2)=16p^2+48p^2 \Leftrightarrow \Delta=64p^2$ άρα λύσεις

$\chi_1=\frac{-4p-8p}{2\cdot 4}=\frac{-12p}{8} \Leftrightarrow \chi_1=\frac{-3p}{2}$ απορρίπτεται γιατί αφού το $p>0$ τότε από την εξίσωση της παραβολής $\psi^2=2p\chi$ πρέπει και $\chi>0$ (το χ είναι πάντα ομόσημο του p στην παραβολή) και

$\chi_2=\frac{-4p+8p}{8}=\frac{4p}{8} \Leftrightarrow \chi_2=\frac{p}{2}$ που είναι δεκτή, άρα αντίστοιχα για το ψ είναι $\psi^2=2p\chi \Leftrightarrow$

$\psi^2=2p\frac{p}{2} \Leftrightarrow \psi^2=p^2 \Leftrightarrow \psi=\pm p$ άρα κοινά σημεία είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2},p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2},-p\right)$.

Γ. Οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2},p\right)$ είναι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

✔ Της $\psi^2 = 2p\chi$: η εφαπτομένη έχει τύπο $\psi\psi_1 = p(\chi + \chi_1)$ με $\chi_1 = \frac{p}{2}$ και $\psi_1 = p$ άρα η εφαπτομένη είναι $p\psi = p\left(\chi + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow \psi = \chi + \frac{p}{2}$ και προφανώς έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$

✔ Η εξίσωση της έλλειψης γίνεται $4\chi^2 + 2\psi^2 = 3p^2 \Leftrightarrow \frac{4\chi^2}{3p^2} + \frac{2\psi^2}{3p^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\chi^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{\psi^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1$

Και επειδή προφανώς είναι $\frac{3p^2}{4} < \frac{3p^2}{2}$ άρα έχει τη μορφή $\frac{\chi^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 1$, δες προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η εφαπτομένη έχει τύπο $\frac{\chi\chi_1}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{\psi\psi_1}{\frac{3p^2}{2}} = 1$ με $\chi_1 = \frac{p}{2}$ και $\psi_1 = p$ άρα η εφαπτομένη είναι

$$\frac{\chi \cdot \frac{p}{2}}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{\psi \cdot p}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4\chi \cdot p}{2 \cdot 3p^2} + \frac{2\psi \cdot p}{3p^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\chi}{3p} + \frac{2\psi}{3p} = 1 \Leftrightarrow 2\chi + 2\psi = 3p \Leftrightarrow \psi = -\chi + \frac{3}{2}p$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda' = -1$ άρα $\lambda \cdot \lambda' = -1$ **άρα οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.**

11. ***εσπερινά επαναληπτικές 2003*** **Παρασκευή 5 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η εξίσωση του κύκλου C είναι : $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ με $2 = -\frac{A}{2} \Leftrightarrow A = -4$ και $2 = -\frac{B}{2} \Leftrightarrow B = -4$ άρα η εξίσωση γίνεται $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 4\psi + \Gamma = 0$ και πρέπει να ικανοποιείται από τις συντεταγμένες του O(0 , 0) άρα $0^2 + 0^2 - 4\cdot 0 - 4\cdot 0 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 4\psi = 0$ και η ακτίνα είναι $KO = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

β. Για το Β ισχύει: $0^2 + 4^2 - 4\cdot 0 - 4\cdot 4 = 0$ άρα το Β ανήκει στον κύκλο, για το Γ ισχύει : $\left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 - 4\cdot\left(2 + 2\sqrt{2}\right) - 4\cdot 2 = 4 + 8\sqrt{2} + 8 + 4 - 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$, άρα το Γ ανήκει στον κύκλο,

Είναι $B\Gamma = \sqrt{\left(2 + 2\sqrt{2} - 0\right)^2 + \left(2 - 4\right)^2} = \sqrt{4 + 8\sqrt{2} + 8 + 4} = \sqrt{16 + 8\sqrt{2}} = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

Είναι $O\Gamma = \sqrt{\left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 8\sqrt{2} + 8 + 4} = \sqrt{16 + 8\sqrt{2}} = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

άρα το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Η απόσταση του κέντρου K(2 , 2) από την ευθεία **ε** με εξίσωση $\psi = \chi + 4 \Leftrightarrow \chi - \psi + 4 = 0$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|2-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$, άρα $d(K,\varepsilon)=KO$, άρα η ε εφάπτεται στον κύκλο C και επειδή το σημείο Β ανήκει και στην $\chi - \psi + 4 = 0$ μιας και οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση $(0 - 4 + 4 = 0)$ άρα η $\chi - \psi + 4 = 0$ εφάπτεται στο σημείο Β.

12. επαναληπτικές 2003

Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

Β. **δ.** **Σωστό**

Γ.

α	**5**
β	**3**
γ	**4**
δ	**1**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με **Α = – 4, Β = 2** και **Γ = 3** οπότε $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+2^2-4\cdot 3=8>0$.

Άρα η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi+2\psi+3=0$ παριστάνει κύκλο.

Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-4}{2},-\frac{2}{2}\right)\Leftrightarrow K(2,-1)$ και ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \rho=\sqrt{2}$

β. Έστω $A(\chi_1,\psi_1)$ **το σημείο επαφής,** τότε οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου δηλαδή θα ισχύει $\chi_1^2+\psi_1^2-4\chi_1+2\psi_1+3=0$ **(2).**

Αν ε_1 η εφαπτομένη στο Α, έστω Μ(χ , ψ) τυχαίο σημείο της εφαπτομένης τότε θα ισχύει $\overrightarrow{KA}\perp\overrightarrow{AM}$ άρα $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ και $\overrightarrow{KA}=(\chi_1-2,\psi_1+1)$ και $\overrightarrow{AM}=(2-\chi_1,1-\psi_1)$ έτσι $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow$ $(\chi_1-2)(2-\chi_1)+(\psi_1+1)(1-\psi_1)=0\Leftrightarrow-(\chi_1-2)^2+(\psi_1+1)(1-\psi_1)=0\Leftrightarrow-\chi_1^2+4\chi_1-4+1-\psi_1^2=0$ $\Leftrightarrow \chi_1^2+\psi_1^2-4\chi_1+3=0$ **(3)**

Αν αφαιρέσεις κατά μέλη τις εξισώσεις (2) – (3) θα έχεις : $2\psi_1=0\Leftrightarrow\psi_1=0$ (4) την οποία αντικαθιστάς στην (3) και έχεις $\chi_1^2-4\chi_1+3=0$,

$\Delta=4$ άρα $\chi_1=1$ ή $\chi_1=3$ άρα δυο σημεία επαφής τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$ άρα δυο εξισώσεις,

την ε_1 που διέρχεται από το $A(1,0)$ και το $M(2,1)$ και την ε_2 που διέρχεται από το $B(3,0)$ και το

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$M(2,1)$.

Είναι $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{\psi_M-\psi_A}{\chi_M-\chi_A}=\frac{2-1}{1-0}=1$, η ευθεία διέρχεται από το $A(1,0)$ άρα έχει εξίσωση $\psi-0=1\cdot(\chi-1)$

$\Leftrightarrow$ $\psi=\chi-1$ (1) και

$\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{\psi_M-\psi_B}{\chi_M-\chi_B}=\frac{2-3}{1-0}=-1$, η ευθεία διέρχεται από το $B(3,0)$ άρα έχει εξίσωση $\psi-0=-1\cdot(\chi-1)\Leftrightarrow$

$\psi=-\chi+1$ (2)

γ. Έστω Α, Β είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, τότε, από το προηγούμενο ερώτημα, είναι $A(1,0)$ και $B(3,0)$, το $M(2,1)$ και το εμβαδόν του τριγώνου MAB θα είναι $E_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\right|$.

Το $\overrightarrow{MA}=(1-2,0-1)=(-1,-1)$ και το $\overrightarrow{MB}=(3-2,0-1)=(1,-1)$ άρα

$E_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(1+1)\Leftrightarrow E_{MAB}=1$ **τ. μ.** .

13. ***Εσπερινά 2004*** **Δευτέρα 24 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α α. 5. , β. 1. , γ. 4. , δ. 3.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή $0^2+0^2-4\cdot0-2\lambda\cdot0=0$ άρα η εξίσωση (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του O(0 , 0), άρα «περνάει» από το O(0 , 0) για κάθε $\lambda\in R$

β. Για τις διάφορες τιμές του λ, η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\chi^2+\psi^2+A\chi+B\psi+\Gamma=0$ με $A=-4$, $B=-2\lambda$ και $\Gamma=0$, είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(-4)^2+(-2\lambda)^2-4\cdot0=16+4\lambda^2>0$ άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=K\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2\lambda}{2}\right)=$ K(2 , λ) και

$\rho=\frac{\sqrt{4\lambda^2+16}}{2}=\frac{\sqrt{4(\lambda^2+4)}}{2}=\sqrt{\lambda^2+4}$,επομένως η εξίσωση παίρνει και τη μορφή

$(\chi-2)^2+(\psi-\lambda)^2=\lambda^2+4$.

γ. Για $\lambda=2$, η εξίσωση του κύκλου γίνεται : $(\chi-2)^2+(\psi-\lambda)^2=2^2+4\Leftrightarrow$

$(\chi-2)^2+(\psi-\lambda)^2=8$ και το κέντρο είναι το K(2 , 2) , άρα για $\chi=0$ έχεις

$2^2+(\psi-2)^2=8\Leftrightarrow(\psi-2)^2=4\Leftrightarrow\psi=4$ και για $\psi=0\Leftrightarrow$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$(\chi-2)^2+2^2=8 \Leftrightarrow (\chi-2)^2=4 \Leftrightarrow \chi=4$.

Άρα ο κύκλος «περνάει»από τα Α(4 , 0) και Β(0 , 4).

Είναι $OA=\sqrt{4^2+0^2}=4$ και $OB=\sqrt{0^2+4^2}=4$ άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

δ. Για λ = 2, η εξίσωση του κύκλου γίνεται : $(\chi-2)^2+(\psi-\lambda)^2=8$,

Η απόσταση του κέντρου Κ(2 , 2) από την ευθεία **ε** με εξίσωση $\psi=-\chi \Leftrightarrow \chi+\psi=0$ είναι

$d(K,\varepsilon)=\frac{|2+2|}{\sqrt{1^2++1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ και αφού $d(K,\varepsilon)=KO$ εφάπτεται στον κύκλο C,

επειδή το σημείο Ο ανήκει και στην $\chi+\psi=0$ μιας και οι συντεταγμένες του $0+0=0$ ικανοποιούν την εξίσωση άρα η $\chi+\psi=0$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Ο.

14. *πανελλήνιες 2004* Σάββατο 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

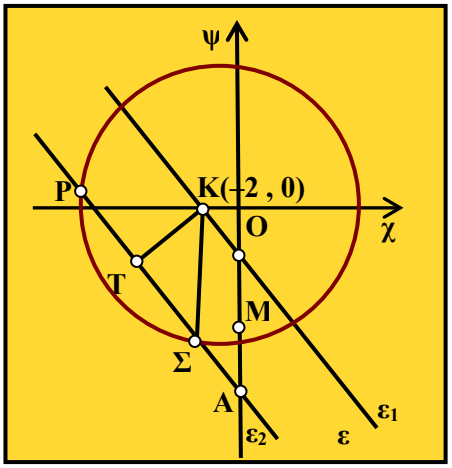
Β. **Θεωρία** .

Γ.

α. **Σωστό**
β. **Λάθος**
γ. **Σωστό**
δ. **Σωστό**
ε. **Λάθος**

ΘΕΜΑ 4ο

Γ. Η $\varepsilon_1: 3\chi+4\psi+6=0$ όταν $\psi=0$ δίνει $3\chi+4\cdot 0+6=0 \Leftrightarrow \chi=-2$ άρα το **Κ(– 2 , 0)** είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου.



Θέλουμε $P\Sigma=d=4\sqrt{3}$, αν Τ το μέσον του ΡΣ τότε

$PT=2\sqrt{3}$ και $KT\perp P\Sigma$.

Επίσης από το **α.** ερώτημα είναι $KT=2$, άρα από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΡΤ είναι

$PK=\sqrt{PT^2+KT^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$.

Οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $(\chi+2)^2+\psi^2=4^2$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

15. **επαναληπτικές 2004** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

α. Επειδή $3\cdot 7+5-6=20\neq 0$ η κορυφή Α(7 , 5) δεν ανήκει στην $3\cdot\chi+\psi-6=0$ και επειδή πρόκειται για τετράγωνο άρα η άλλη διαγώνιος θα είναι η κάθετη στην $3\cdot\chi+\psi-6=0$ από το Α(7 , 5).

$3\cdot\chi+\psi-6=0\Leftrightarrow\psi=-3\cdot\chi+6$ άρα $\lambda_1=-3$ οπότε αν λ_2 ο συντελεστής της άλλης διαγωνίου τότε $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow -3\cdot\lambda_2=-1\Leftrightarrow \lambda_2=\frac{1}{3}$, οπότε η εξίσωση της άλλης διαγωνίου είναι $\psi-5=\frac{1}{3}(\chi-7)$ $\Leftrightarrow 3\psi-15=\chi-7\Leftrightarrow \chi-3\psi+8=0$.

β. **1ος τρόπος :** Το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι διαγώνιες , οπότε λύνεις το σύστημα : $\begin{cases}3\cdot\chi+\psi-6=0\\ \chi-3\psi+8=0\end{cases}$ και βρίσκεις Κ(1 , 3).

2ος τρόπος : Διαπιστώνεις ότι το Κ(1 , 3) ικανοποιεί και τις δυο εξισώσεις των διαγώνιων, άρα είναι το κοινό τους σημείο, άρα είναι το κέντρο του τετραγώνου.

γ. Το κέντρο του κύκλου θα είναι το Κ(1 , 3) και ακτίνα η :

$$(\text{ΚΑ})=\sqrt{(7-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

άρα ο ζητούμενος κύκλος θα έχει εξίσωση : $(\chi-1)^2+(\psi-3)^2=40$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2=9$.

α. Αν το σημείο $\Pi(\chi_0,\psi_0)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, τότε θα ισχύει : $\chi_0^2+\psi_0^2=9$ (1).

Αν το $\Mu\left(\frac{5}{3}\chi_0,\frac{4}{3}\psi_0\right)$ ανήκει σε έλλειψη θα πρέπει οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ δηλαδή πρέπει να ισχύει : $\frac{\left(\frac{5}{3}\chi_0\right)^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{4}{3}\psi_0\right)^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$

$\frac{25\cdot\chi_0^2}{9\cdot\alpha^2}+\frac{16\cdot\psi_0^2}{9\cdot\beta^2}=1$ (2)

οπότε αν $\alpha^2=25$ και $\beta^2=16$ η εξίσωση (2) γίνεται $\frac{25\cdot\chi_0^2}{9\cdot 25}+\frac{16\cdot\psi_0^2}{9\cdot 16}=1\Leftrightarrow\frac{\chi_0^2}{9}+\frac{\psi_0^2}{9}=1\Leftrightarrow$

$\chi_0^2+\psi_0^2=9$, που ισχύει .

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Άρα το $M\left(\frac{5}{3}\chi_0,\frac{4}{3}\psi_0\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{\chi_0^2}{\frac{9}{25}}+\frac{\psi_0^2}{\frac{9}{16}}=1$

Είναι $\alpha^2=25$ και $\beta^2=16$ άρα $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-16=9 \Leftrightarrow \gamma=3$, άρα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{5}$.

β. Οι εστίες της έλλειψης είναι Ε ‘ (– 3 , 0) και Ε ‘ (– 3 , 0) . Άρα αν η υπερβολή έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη θα έχει γ = 3 και επειδή στην ισοσκελή υπερβολή είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\sqrt{2}$ άρα $\frac{3}{\alpha}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ οπότε η εξίσωση είναι : $\chi^2-\psi^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \chi^2-\psi^2=\frac{9}{2}$

γ. Επειδή η υπερβολή είναι ισοσκελής, οι ασύμπτωτες θα έχουν εξισώσεις ψ = χ και ψ = – χ και προφανώς είναι κάθετες μεταξύ τους.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Καταυθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αριθμών

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1974**

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Ένα πολυώνυμο σ(χ) βαθμού **ν** λαμβάνει την ίδια τιμή ξ για $\nu+1$ τουλάχιστον διαφορετικές τιμές του χ. Να δείξετε ότι το σ(χ) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

β) Έστω ότι $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu$ είναι ακέραιοι διαφορετικοί ανά δυο. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και ότι αυτό δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1.

Επειδή το θέμα αναφερόταν στα πολυώνυμα θα το δείτε και εκεί.

2. **πανελλήνιες 1975**

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω μια συνάρτηση $f:Q_+^*\to R$ με $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ για κάθε $\chi,\psi\in Q_+^*$

1. Να δείξετε ότι: $f(1)=0$ και $f\left(\frac{1}{\rho}\right)=-f(\rho)$, για κάθε $\rho\in Q_+^*$.

3. Υποθέτουμε ακόμα ότι ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t, για τον οποίο ισχύει : f(t) = 0 είναι ο t = 1.

Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί ρ και τ με $\rho\neq t$ και f (ρ) = f (τ).

4. ***πανελλήνιες 1976***

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αν $\kappa\in Z_+^*$ (θετικός ακέραιος) δείξτε ότι ο αριθμός $\kappa^2+4\kappa$ βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δυο διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών.

β. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Z_+^*$ (θετικοί ακέραιοι) δείξτε ότι το γινόμενο : $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ δεν μπορεί να είναι θετικός ακέραιος

5. ***πανελλήνιες 1980***

ΘΕΜΑ 4ο

Βρείτε τον Μ. Κ. Δ. των ακεραίων 11 και 15 και έπειτα προσδιορίστε ακεραίους χ και ψ τέτοιους ώστε $11\chi+15\psi=(11,15)$.

Το θέμα ***είναι τελείως εκτός ύλης*** της Β' Λυκείου, και δεν θα απαντηθεί.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. ***πανελλήνιες 1999 θετικής*** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί α = 2κ + 2 και β = 6κ + 7, όπου κ ακέραιος αριθμός.

Να αποδείξετε ότι:

α. Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους . ***Τώρα πια εκτός ύλης***.

Μονάδες 9

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού (2β – α) με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

γ. Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός (α + β – 2) είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

7. ***επαναληπτικές 1999 θετικής*** **Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

α. Αν ο ακέραιος αριθμός λ δεν διαιρείται με το 3, να δείξετε ότι ο αριθμός λ^2+5 είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 15

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του ακεραίου κ, ο ακέραιος $\kappa\left(\kappa^2+5\right)$ είναι πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 10

8. ***πανελλήνιες 2000 θετικής*** **Σάββατο 24 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής α = 6κ + υ, με 0 ≤ υ < 6 και κ ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α. Οι παραπάνω ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή : α = 6κ + 1 ή τη μορφή α = 6κ + 5, όπου κ ακέραιος.

Μονάδες 10

β. Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha^2=3\mu+1$, όπου μ ακέραιος.

Μονάδες 10

γ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος **α.** είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

9. ***επαναληπτικές 2000 θετικής***

ΘΕΜΑ 2ο

Αν α είναι ένας άρτιος ακέραιος αριθμός να αποδείξετε ότι :

α. $(\alpha+1)^2-1=4\lambda$, όπου λ ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 10

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

β. $\dfrac{\alpha^2+(\alpha+1)^2+(\alpha+3)^2-2\alpha+2}{4}=3\mu$ όπου μ ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 15

10. ***πανελλήνιες 2001 θετικής*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :

α. Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta+\gamma)$.

Μονάδες 4

Α.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha , \beta) < (\beta , \upsilon)$

β. $(\alpha , \beta) = (\beta , \upsilon)$

γ. $(\alpha , \beta) > (\beta , \upsilon)$

δ. $(\alpha , \beta) = (\beta , \upsilon) + 1$

όπου (α , β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β.

Μονάδες 4,5

Το ερώτημα τώρα είναι εκτός ύλης και αναφέρεται για ιστορικούς λόγους .

Β. 1. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 \mid (\alpha+5)$ και $7 \mid 40-\beta$, τότε :

α. $7 \mid (\alpha+\beta)$ β. $7 \mid (\alpha+\beta+1)$ γ. $7 \mid (\alpha+\beta+2)$ δ. $7 \mid (\alpha+\beta-3)$.

Μονάδες 4

Β.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

Το ερώτημα τώρα είναι εκτός ύλης και αναφέρεται για ιστορικούς λόγους .

Β.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

Το ερώτημα τώρα είναι εκτός ύλης και αναφέρεται για ιστορικούς λόγους .

11. ***επαναληπτικές Ιουλίου 2001*** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $\beta=3\alpha+4$ και $\gamma=4\alpha+5$, όπου α ακέραιος αριθμός.

Να δείξετε ότι :

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

α. Οι αριθμοί β, γ έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα **(εκτός ύλης)**

Μονάδες 8

Το ερώτημα τώρα είναι εκτός ύλης και αναφέρεται για ιστορικούς λόγους .

β). Ο αριθμός $\beta\gamma-(\beta+\gamma)$ είναι περιττός

Μονάδες 8

γ. Αν για τους $\beta = 3\alpha + 4$ και $\gamma = 4\alpha + 5$ ισχύει επιπλέον $\alpha = 3\kappa$, όπου κ ακέραιος, τότε ο αριθμός $\gamma^2-\beta^2$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 9

12. ***επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001*** **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει :

α. $3^{3\nu}+51=$ πολ26

Μονάδες 15

β. $3^{3\nu}-1=$ πολ26

Μονάδες 10

13. ***πανελλήνιες 2002*** **Πέμπτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha\left(\alpha^2+1\right)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{\alpha\left(\alpha^2+1\right)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

14. ***επαναληπτικές 2002*** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \kappa - 1$ και $\beta = 5\kappa + 6$, όπου κ ακέραιος αριθμός.

Να αποδείξετε ότι :

α. Εάν ο α είναι άρτιος, τότε ο β είναι περιττός.

Μονάδες 7

β. Ο αριθμός $3\beta - 4\alpha$ είναι πολλαπλάσιος ταυ 11.

Μονάδες 8

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

γ. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών $5\alpha + 3$ και $\beta - 9$ είναι ίσος με 1. **εκτός ύλης**

Μονάδες 10

15. ***πανελλήνιες 2003*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha \in Z$. Να αποδείξετε ότι :

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8\kappa$ όπου $\kappa \in Z$ ή $\alpha^3 = 2\kappa + 1$ όπου $\kappa \in Z$.

Μονάδες 12

Β. Ο αριθμός $\alpha\left(\alpha^2 + 1\right)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

16. ***επαναληπτικές 2003*** **Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β. Έστω α, β μη μηδενικοί ακέραιοι. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$ τότε ισχύει πάντα ότι $\alpha = \beta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3ο

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων αριθμών α και β με το 5 είναι 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2 - 2003$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $8\alpha + 9\beta$ με το 5.

Μονάδες 13

17. ***πανελλήνιες 2004*** **Σάββατο 29 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, κ, λ, με $\alpha \neq 0$.

Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$ τότε $\alpha \mid (\kappa\beta + \lambda\gamma)$

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός α = 12κ – 5, όπου κ ∈ Z.

Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του 4

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=\left(\alpha^2+15\right)\left(\alpha^2-1\right)$ είναι πολλαπλάσιο του 64

Μονάδες 10

18. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι με α, β ≠ 0. Να δείξετε ότι:

α. Αν α | β και β | γ, τότε α | γ

Μονάδες 6

β. Αν α | β, τότε $|\alpha|\le|\beta|$.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

δ. Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με β ≠ 0, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ τέτοιοι, ώστε α = κ·β + υ, 0 ≤ υ < β.

Μονάδες 2

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Θέματα Κατεύθυνσης

Πανελλήνιες 1999 - 2005

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Αριθμών

Απαντήσεις

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

1. **πανελλήνιες 1974**

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έστω ότι το πολυώνυμο $\sigma(\chi)$ είναι βαθμού $\nu \neq 0$ και υπάρχουν $\nu + 1$ τουλάχιστον διαφορετικές

τιμές $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+1}$ έτσι ώστε να λαμβάνει την ίδια τιμή ξ, δηλαδή να ισχύει :

$\sigma(\chi_1)=\xi, \sigma(\chi_2)=\xi, \cdots, \sigma(\chi_{\nu+1})=\xi \Leftrightarrow \sigma(\chi_1)-\xi=0, \sigma(\chi_2)-\xi=0, \cdots, \sigma(\chi_{\nu+1})-\xi=0$.

Θεώρησε το πολυώνυμο $P(\chi) = \sigma(\chi) - \xi$ το οποίο προφανώς είναι βαθμού $\nu \neq 0$ και επιπλέον είναι : $P(\chi_1)=0, P(\chi_2)=0, \cdots, P(\chi_{\nu+1})=0$, άρα το πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει τουλάχιστον $\nu + 1$ ρίζες, τις $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+1}$ επομένως θα έχει ως παράγοντες τα :

$(\chi-\chi_1), (\chi-\chi_2), \cdots, (\chi-\chi_{\nu+1})$ και θα γράφεται

$P(\chi)=(\chi-\chi_1)\cdot(\chi-\chi_2)\cdot \cdots \cdot(\chi-\chi_{\nu+1})\pi(\chi)$.

Το πρώτο μέλος της ισότητας είναι **ν** βαθμού και το 2ο μέλος είναι ν + 1 βαθμού, ***ΑΤΟΠΟ*** .

Κατέληξες σε άτοπο επειδή υπέθεσες πως το $\sigma(\chi)$ είναι βαθμού $\nu \neq 0$, επομένως το $\sigma(\chi)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού δηλαδή σταθερό πολυώνυμο

β. Είναι $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2 \geq 0$ και $1>0$ άρα $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι το $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1 δηλαδή έστω ότι :

$(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1=P_1(\chi)\cdot P_2(\chi)$, τότε θα είναι $P_1(\alpha_1)\cdot P_2(\alpha_1)=1$,

$P_1(\alpha_2)\cdot P_2(\alpha_2)=1$, $P_1(\alpha_\nu)\cdot P_2(\alpha_\nu)=1$ και επειδή τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ είναι ακέραιοι διαφορετικοί ανά δυο, αν υποθέσεις πως έστω ένας από αυτούς είναι ίσος με 1 τότε όλοι οι όλοι θα είναι διαφορετικοί από το 1.

Έστω ο $\alpha_\kappa \neq 1$ τότε θα είναι $P_1(\alpha_\kappa)\cdot P_2(\alpha_\kappa)=1$ ***ΑΤΟΠΟ*** γιατί τα $P_1(\chi)$, $P_2(\chi)$ είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1 και επομένως τα $P_1(\alpha_\kappa), P_2(\alpha_\kappa)$ είναι ακέραιοι αριθμοί άρα $P_1(\alpha_\kappa)\cdot P_2(\alpha_\kappa)=1$ σημαίνει πως $P_1(\alpha_\kappa)=1$ και $P_2(\alpha_\kappa)=1$ όμως τα $P_1(\alpha_\kappa), P_2(\alpha_\kappa)$ είναι ακέραιοι αριθμοί διαφορετικοί από το 1, γιατί μια αλγεβρικοί παράσταση $\alpha_\nu\alpha_\kappa^\nu+\alpha_\nu\alpha_\kappa^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1\alpha_\kappa+\alpha_0$ όπου $\alpha_\kappa \neq 1$ δεν είναι δυνατόν να ισούται με 1.

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε πως το $(\chi-\alpha_1)^2(\chi-\alpha_2)^2\cdots(\chi-\alpha_\nu)^2+1>0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με βαθμούς ≥ 1, άρα η αλήθεια είναι πως αυτό **δεν** μπορεί να συμβεί.

Επειδή το θέμα αναφερόταν στα πολυώνυμα θα το δείτε και εκεί.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

2. πανελλήνιες 1975

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ **(1)** για κάθε $\chi,\psi\in Q_+^*$

α. Έστω $f(\chi\cdot\psi)=f(\chi)+f(\psi)$ **(1)** για κάθε $\chi,\psi\in Q_+^*$ θέσε $\chi=\psi=1$ οπότε

$$f(1\cdot1)=f(1)+f(\psi)\Leftrightarrow f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$$

Επίσης αν θέσεις στην **(1)** $\chi=\rho$ και $\psi=\frac{1}{\rho}$ τότε

$$f\left(\rho\cdot\frac{1}{\rho}\right)=f(\rho)+f\left(\frac{1}{\rho}\right)\Leftrightarrow f(\rho)+f\left(\frac{1}{\rho}\right)=f(1)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\rho}\right)=-f(\rho)$$

β. Έστω ότι ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t, για τον οποίο ισχύει : f(t) = 0 είναι ο t = 1, έστω επίσης ότι υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί ρ και τ με $\rho\neq\tau$ και f (ρ) = f (τ) ⇔

$$-f\left(\frac{1}{\rho}\right)=f(t)\Leftrightarrow f(t)+f\left(\frac{1}{\rho}\right)=0\Leftrightarrow f\left(t\frac{1}{\rho}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\frac{t}{\rho}\right)=0$$ ΑΤΟΠΟ γιατί $t\neq\rho\Leftrightarrow\frac{t}{\rho}\neq1$

και επομένως δεν μπορεί , σύμφωνα με την υπόθεση να είναι $f\left(\frac{t}{\rho}\right)=0$ αφού ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t, για τον οποίο ισχύει : f(t) = 0 είναι ο t = 1 .

Το θέμα είχε δοθεί στις εξετάσεις της Γ΄ Λυκείου γιατί οι καμπύλες γενικά, την περίοδο εκείνη ήταν στην εξεταστέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.

3. πανελλήνιες 1976

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $\kappa^2+4\kappa>(\kappa+1)^2\Leftrightarrow\kappa^2+4\kappa>\kappa^2+2\kappa+1\Leftrightarrow2\kappa>1\Leftrightarrow\kappa>\frac{1}{2}$, σχέση αληθής αφού κ θετικός ακέραιος δηλαδή κ = 1, 2,3, · · · .

Είναι $\kappa^2+4\kappa<(\kappa+2)^2\Leftrightarrow\kappa^2+4\kappa<\kappa^2+4\kappa+4\Leftrightarrow0<4$, σχέση αληθής, άρα :

$(\kappa+1)^2<\kappa^2+4\kappa<(\kappa+2)^2$ και $\kappa+1,\kappa+4$ διαδοχικοί ακέραιοι .

β. Παρ' όλο που η απόδειξη ***ξεφεύγει τελείως*** από το επίπεδο της Β' Λυκείου, την παραθέτω για ιστορικούς και μόνο λόγους .

Έστω $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\kappa\in Z_+^*$ **(1).** Αν θέσεις $\frac{\alpha}{\beta}=\mu$ και $\frac{\gamma}{\delta}=\nu$ η **(1)** γίνεται $(\mu-\nu)\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\mu}\right)=\kappa\Leftrightarrow$

$$(\mu-\nu)\frac{(\mu-\nu)}{\mu\nu}=\kappa\Leftrightarrow(\mu-\nu)^2=\kappa\cdot\mu\nu\Leftrightarrow\mu^2-2\mu\nu+\nu^2=\kappa\cdot\mu\nu\Leftrightarrow\frac{\mu^2-2\mu\nu+\nu^2}{\nu^2}=\frac{\kappa\cdot\mu\nu}{\nu^2}\Leftrightarrow$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

$\frac{\mu^2}{\nu^2}-\frac{2\mu\nu}{\nu^2}+\frac{\nu^2}{\nu^2}=\frac{\kappa\cdot\mu}{\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2-2\frac{\mu}{\nu}+1-\kappa\frac{\mu}{\nu}=0\Leftrightarrow\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2-(\kappa+2)\frac{\mu}{\nu}+1=0$ η τελευταία είναι της μορφής : $\alpha\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma=0$ με συντελεστές $\alpha=1$, $\beta=-(\kappa+2)$, $\gamma=1$ και επαληθεύεται από τον ***ρητό αριθμό*** $\frac{\mu}{\nu}$, επομένως η διακρίνουσα της εξίσωσης ***πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο.***

Όμως $\Delta=(\kappa+2)^2-4\cdot1\cdot1=\kappa^2+4\kappa+4-4=\kappa^2+4\kappa$, πρέπει επομένως το $\kappa^2+4\kappa$ να είναι τέλειο Τετράγωνο.

ΑΤΟΠΟ , γιατί από το **α.** ερώτημα το $(\kappa+1)^2<\kappa^2+4\kappa<(\kappa+2)^2$ δηλαδή :

ο αριθμός $\kappa^2+4\kappa$ βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δυο διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών.

άρα δεν μπορεί να είναι τετράγωνο, άρα το γινόμενο : $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ δεν είναι θετικός ακέραιος.

4. ***πανελλήνιες 1980***

ΘΕΜΑ 4ο

Βρείτε τον Μ. Κ. Δ. των ακεραίων 11 και 15 και έπειτα προσδιορίστε ακεραίους χ και ψ τέτοιους ώστε $11\chi+15\psi=(11,15)$.

Το θέμα ***είναι τελείως εκτός ύλης*** της Β' Λυκείου, και δεν θα απαντηθεί.

5. ***πανελλήνιες 1999 θετικής*** **Σάββατο 26 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

β. Είναι : $2\beta-\alpha=2(6\kappa+7)-(2\kappa+2)=12\kappa+14-2\kappa-2=10\kappa+12=10\kappa+10+2\Leftrightarrow$

$2\beta-\alpha=10(\kappa+1)+2\Leftrightarrow 2\beta-\alpha=10\lambda+2$ όπου $\lambda=\kappa+1$.

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $2\beta-\alpha$ με το 10 είναι το 2.

γ. Αν $\kappa=$ πολ.7 τότε $\kappa=7\lambda$, $\lambda\in\mathbf{Z}$.

Έτσι έχεις $\alpha+\beta-2=2\kappa+2+6\kappa+7-2\Leftrightarrow\alpha+\beta-2=8\kappa+7=8(7\lambda)+7=7(8\lambda+1)\Leftrightarrow$

$\alpha+\beta-2=7\rho$ όπου $\rho=8\lambda+1$ με $\rho\in Z$. Άρα **$\alpha+\beta-2=$ πολ.7**

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

6. **επαναληπτικές 1999 θετικής** Τρίτη 21 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

α. Αν ο ακέραιος αριθμός λ δεν διαιρείται με το 3, τότε ο $\lambda = 3\kappa + 1$ **(1)** ή $\lambda = 3\kappa + 2$ **(2).**

(1) $\Leftrightarrow \lambda^2 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 9\kappa^2 + 6\kappa + 6 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 3\cdot\underbrace{\left(3\kappa^2 + 2\kappa + 2\right)}_{\rho} \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 3\cdot\rho$ άρα

$\lambda^2 + 5 = \pi\circ\lambda 3$.

(2) $\Leftrightarrow \lambda^2 = 9\kappa^2 + 12\kappa + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 9\kappa^2 + 12\kappa + 9 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 3\cdot\underbrace{\left(3\kappa^2 + 4\kappa + 3\right)}_{\mu} \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 = 3\cdot\mu$ άρα

$\lambda^2 + 5 = \pi\circ\lambda 3$.

β. Ο ακέραιος **κ** όταν διαιρεθεί με το 3 θα έχει τα εξής πιθανά υπόλοιπα : $\upsilon_1 = 0$, $\upsilon_2 = 1$, $\upsilon_3 = 2$.

Τότε ο κ θα γράφεται $\begin{cases} \kappa = 3\rho & (1) \\ \kappa = 3\rho + 1 & (2) \\ \kappa = 3\rho + 2 & (3) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \kappa\left(\kappa^2 + 5\right) = 3\rho\cdot\underbrace{\left(\kappa^2 + 5\right)}_{\mu} = 3\underbrace{\rho\cdot\mu}_{\nu} \Leftrightarrow \kappa\left(\kappa^2 + 5\right) = 3\nu \Leftrightarrow \kappa\left(\kappa^2 + 5\right) = \pi\circ\lambda 3$.

(2) $\Leftrightarrow \kappa^2 = 9\rho^2 + 6\rho + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 9\rho^2 + 6\rho + 6 \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 3\cdot\underbrace{\left(3\rho^2 + 2\rho + 2\right)}_{\mu} \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 3\cdot\mu$ άρα

$\kappa^2 + 5 = \pi\circ\lambda 3 \Leftrightarrow \kappa\left(\kappa^2 + 5\right) = \pi\circ\lambda 3$.

(3) $\Leftrightarrow \kappa^2 = 9\rho^2 + 12\rho + 4 \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 9\rho^2 + 12\rho + 9 \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 3\cdot\underbrace{\left(3\rho^2 + 4\rho + 3\right)}_{\mu} \Leftrightarrow \kappa^2 + 5 = 3\cdot\mu$ άρα

$\kappa^2 + 5 = \pi\circ\lambda 3 \Leftrightarrow \kappa\left(\kappa^2 + 5\right) = \pi\circ\lambda 3$.

7. **πανελλήνιες 2000 θετικής** Σάββατο 24 Ιουνίου

ΘΕΜΑ 2ο

α. Όταν έλεγε η εκφώνηση «Οι παραπάνω ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 …» εννοούσε **όσοι από αυτούς** δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή : $\alpha = 6\kappa + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6\kappa + 5$, όπου κ ακέραιος.

Έτσι λοιπόν στη διαίρεση του α με το 6 είναι $\alpha = 6\kappa + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$, επομένως πιθανές τιμές για το υ είναι οι $\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ άρα

1ον $\upsilon = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa = 2(3\kappa) = \pi\circ\lambda 2$, **απορρίπτεται.**

2ον $\upsilon = 1 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa + 1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

3ον $\upsilon = 2 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa + 2 = 2(3\kappa + 1) = \text{πολ}2$, **απορρίπτεται**.

4ον $\upsilon = 3 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa + 3 = 3(2\kappa + 1) = \text{πολ}3$, **απορρίπτεται**.

5ον $\upsilon = 4 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa + 4 = 2(3\kappa + 2) = \text{πολ}2$, **απορρίπτεται**.

6ον $\upsilon = 5 \Leftrightarrow \alpha = 6\kappa + 5$.

Από τα πιο πάνω είναι φανερό ότι οι αποδεκτές τιμές για το α (αυτές δηλαδή που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3) είναι οι $\alpha = 6\kappa + 1$ ή $\alpha = 6\kappa + 5$.

β. Κάθε ακέραιος αριθμός της μορφής του ερωτήματος (α) είναι

1ον $\alpha = 6\kappa + 1$ οπότε το τετράγωνό του μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha^2 = (6\kappa + 1)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = 36\kappa^2 + 12\kappa + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\cdot\underbrace{\left(12\kappa^2 + 4\kappa\right)}_{\mu} + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου $\mu = 12\kappa^2 + 4\kappa$

ακέραιος και κ ε Z.

2ον $\alpha = 6\kappa + 5$ οπότε το τετράγωνό του μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha^2 = (6\kappa + 5)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 = 36\kappa^2 + 60\kappa + 25 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\cdot\underbrace{(12\kappa^2 + 20\kappa + 8)}_{\mu} + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου $\mu = 12\kappa^2 + 20\kappa + 8$

ακέραιος και κ ε Z.

γ.

- ✓ $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 5)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 5)(6\kappa + 5 + 6\mu + 5) = 6(\kappa - \mu)(6\kappa + 6\mu + 10) = \text{πολ}3$.
- ✓ $(6\kappa + 5)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 5 - 6\mu - 1)(6\kappa + 5 + 6\mu + 1) = (6\kappa - 6\mu + 4)(6\kappa + 6\mu + 6) = 6(6\kappa - 6\mu + 4)(\kappa + \mu + 1) = \text{πολ}3$.
- ✓ $(6\kappa + 1)^2 - (6\mu + 1)^2 = (6\kappa + 1 - 6\mu - 1)(6\kappa + 1 + 6\mu + 1) = 6(\kappa - \mu)(6\kappa + 6\mu + 2) = \text{πολ}3$.

8. *επαναληπτικές 2000 θετικής*

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν α είναι άρτιος τότε ο α + 1 είναι περιττός οπότε, σύμφωνα με εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, θα είναι $(\alpha+1)^2 = 8\kappa+1 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 - 1 = 8\kappa = 4\underbrace{(2\kappa)}_{\lambda} \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 - 1 = 4\lambda$

β. Είναι $\dfrac{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha+3)^2 - 2\alpha + 2}{4} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 6\alpha + 9 - 2\alpha + 2}{4} = \dfrac{3\alpha^2 + 6\alpha + 12}{4} =$

$3\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha + 4}{4}$ (1) και επειδή α άρτιος άρα α = 2κ η (1) = $3\dfrac{4\kappa^2 + 4\kappa + 4}{4} = 3\underbrace{\left(\kappa^2 + \kappa + 1\right)}_{\mu} = \mathbf{3\mu}$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

9. **πανελλήνιες 2001 θετικής** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. α. Αν $\alpha|\beta$ τότε $\beta=\kappa\alpha \Leftrightarrow \lambda\beta=\lambda(\kappa\alpha)=(\lambda\kappa)\beta \Leftrightarrow \alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

β. Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\begin{cases}\beta=\kappa\alpha\\ \gamma=\lambda\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \beta+\gamma=\underbrace{(\kappa+\lambda)}_{\mu}\alpha \Leftrightarrow \beta+\gamma=\mu\alpha \Leftrightarrow \alpha|(\beta+\gamma)$.

Β. 1. **Η σωστή απάντηση είναι η δ** γιατί αν $7|(\alpha+5) \Leftrightarrow \alpha+5=7\kappa \Leftrightarrow \alpha=7\kappa-5$ και $7|40-\beta \Leftrightarrow$

$40-\beta=7\lambda \Leftrightarrow \beta=40-7\lambda$ οπότε $\alpha+\beta=7\kappa+5+40-7\lambda \Leftrightarrow \alpha+\beta=7(\kappa-\lambda)+45$ άρα

$\alpha+\beta-3=7(\kappa-\lambda)+42=7\underbrace{[(\kappa-\lambda)+6]}_{\mu} \Leftrightarrow \alpha+\beta-3=7\mu \Leftrightarrow 7|(\alpha+\beta-3)$

10. **επαναληπτικές Ιουλίου 2001** **Πέμπτη 5 Ιουλίου**

ΘΕΜΑ 2ο

β. Είναι $\beta\gamma-(\beta+\gamma)=(3\alpha+4)(4\alpha+5)-(3\alpha+4+4\alpha+5)=12\alpha^2+15\alpha+16\alpha+20-3\alpha-4-4\alpha-5=$

$12\alpha^2+24\alpha+11=12\alpha^2+24\alpha+10+1=2\underbrace{(6\alpha^2+12\alpha+5)}_{\kappa}+1=2\kappa+1$ περιττός

γ. Αν $\alpha=3\kappa$ τότε $\beta=3\alpha+4 \Leftrightarrow \beta=9\kappa+4$ και $\gamma=4\alpha+5=12\kappa+5$ οπότε

$\gamma^2-\beta^2=(\gamma-\beta)(\gamma+\beta)=[(12\kappa+5)-(9\kappa+4)][(12\kappa+5)+(9\kappa+4)]=$

$(12\kappa+5-9\kappa-4)(12\kappa+5+9\kappa+4)=(3\kappa+1)(21\kappa+9)=(3\kappa+1)3(7\kappa+3)=$

$3\underbrace{(3\kappa+1)(3\kappa+3)}_{\lambda}=3\lambda$ που είναι πολλαπλάσιο του 3.

11. **επαναληπτικές Σεπτεμβρίου 2001** **Δευτέρα 10 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η απόδειξη θα γίνει με μαθηματική επαγωγή.

Βήμα 1ο : Για τον φυσικό αριθμό $\nu=1$ είναι $3^{3\cdot1}+51=27+51=78=3\cdot26$ **που ισχύει**

Βήμα 2ο : **Έστω ότι ισχύει για το φυσικό αριθμό ν, δηλαδή έστω ότι ισχύει** $3^{3\nu}+51=$ πολ26

δηλαδή $3^{3\nu}+51=26\kappa$

Βήμα 3ο : **Θα δείξεις ότι ισχύει και για το φυσικό αριθμό ν + 1, δηλαδή θα δείξεις ότι ισχύει :**

$3^{3(\nu+1)}+51=$ πολ26 $\Leftrightarrow 3^{3(\nu+1)}+51=26\cdot\lambda$

Απόδειξη της $3^{3(\nu+1)}+51=26\cdot\lambda$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Είναι $3^{3(\nu+1)}=3^{3\nu+3}=3^3\cdot 3^\nu=27\cdot 3^\nu$ και επειδή $3^{3\nu}+51=26\kappa \Leftrightarrow 3^{3\nu}=26\kappa-51$ θα είναι

$3^{3(\nu+1)}+51=27(26\kappa-51)+51=27\cdot 26\kappa-27\cdot 51+51=27\cdot 26\kappa-26\cdot 51 \Leftrightarrow$

$3^{3(\nu+1)}+51=26\cdot\underbrace{(27\kappa-51)}_{\mu} \Leftrightarrow 3^{3(\nu+1)}+51=26\mu=\text{πολ}26$

Επομένως, η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς .

β. Η απόδειξη θα γίνει όμοια, με μαθηματική επαγωγή.

Βήμα 1ο : Για τον φυσικό αριθμό ν = 1 είναι $3^{3\cdot 1}-1=27-1=26=\text{πολ}26$ **που ισχύει**

Βήμα 2ο : **Έστω ότι ισχύει για το φυσικό αριθμό ν, δηλαδή έστω ότι ισχύει** $3^{3\nu}-1=\text{πολ}26$

δηλαδή $3^{3\nu}-1=26\kappa$

Βήμα 3ο : **Θα δείξεις ότι ισχύει και για το φυσικό αριθμό ν + 1, δηλαδή θα δείξεις ότι ισχύει :**

$3^{3(\nu+1)}-1=\text{πολ}26 \Leftrightarrow 3^{3(\nu+1)}-1=26\cdot\lambda$

Απόδειξη της $3^{3(\nu+1)}-51=26\cdot\lambda$**.** Είναι $3^{3(\nu+1)}=3^{3\nu+3}=3^3\cdot 3^\nu=27\cdot 3^\nu$ και επειδή $3^{3\nu}-1=26\kappa \Leftrightarrow$
$3^{3\nu}=26\kappa+1$ θα είναι $3^{3(\nu+1)}-1=27(26\kappa+1)-1=27\cdot 26\kappa+27-1=27\cdot 26\kappa+26 \Leftrightarrow 26\cdot\underbrace{(27\kappa+1)}_{\mu}$

$\Leftrightarrow 3^{3(\nu+1)}-1=26\mu=\text{πολ}26$

Επομένως, η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς .

12. ***πανελλήνιες 2002*** **Πέμπτη 6 Ιουνίου**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω $\alpha=2\kappa+1$ και $\beta=2\lambda+1$ τότε $\alpha\cdot\beta=(2\kappa+1)(2\lambda+1)=42\kappa\lambda+2\kappa+2\lambda+1=\$$

$2\left(\underbrace{2\kappa\lambda+\kappa+\lambda}_{\mu}\right)+1 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=2\mu+1$ άρα περιττός

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Επειδή τα δυνατά υπόλοιπα του α με τον 2 είναι 0, 1, ο ακέραιος α έχει μία από τις μορφές :
$\alpha=2\kappa$ (άρτιος) ή $\alpha=2\kappa+1$ (περιττός) , $\kappa\in Z$

- Αν $\alpha=2\kappa$ (άρτιος) , τότε $\kappa\in Z$ οπότε $\dfrac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}=\dfrac{2\kappa\left[(2\kappa)^2+1\right]}{2}=\kappa(4\kappa^2+1)$, ακέραιος.

- Αν $\alpha=2\kappa+1$ (περιττός) , $\kappa\in Z$, τότε :

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}=\frac{(2\kappa+1)\left[(2\kappa+1)^2+1\right]}{2}=\frac{(2\kappa+1)\left[4\kappa^2+4\kappa+1+1\right]}{2}=(2\kappa+1)(2\kappa^2+2\kappa+1)\text{, ακέραιος.}$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Γ. Αν ο α είναι περιττός τότε από το ερώτημα **β.** είναι $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}=(2\kappa+1)(2\kappa^2+2\kappa+1)=$

$(2\kappa+1)\left[2\underbrace{(\kappa^2+\kappa)}_{\lambda}+1\right] \Leftrightarrow \frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}=(2\kappa+1)(2\lambda+1)$ άρα με βάση το ερώτημα **α.**

ο $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ ως γινόμενο δυο περιττών αριθμών είναι περιττός.

13. ***επαναληπτικές 2002*** **Δευτέρα 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Εάν ο α είναι άρτιος τότε $\alpha = 2\lambda \Leftrightarrow \kappa - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda + 1$ άρα ο $\beta = 5\kappa + 6 \Leftrightarrow$ $\beta = 5(2\lambda + 1) + 6 \Leftrightarrow \beta = 10\lambda + 11 \Leftrightarrow \beta = 10\lambda + 10 + 1 \Leftrightarrow \beta = 2(5\lambda + 5) + 1 \Leftrightarrow \beta = 2\mu + 1$ άρα είναι περιττός.

β. Ο αριθμός $3\beta - 4\alpha = 3(5\kappa + 6) - 4(\kappa - 1) = 15\kappa + 18 - 4\kappa + 4 \Leftrightarrow 3\beta - 4\alpha = 11\kappa + 22 =$ $11(\kappa + 2) \Leftrightarrow 3\beta - 4\alpha = 11\mu$ άρα είναι πολλαπλάσιος του 11.

14. ***πανελλήνιες 2003*** **Σάββατο 31 Μαΐου**

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. **α.** Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο **β διαιρεί τον α** και θα γράφουμε $\beta \mid \alpha$, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\alpha = \kappa\beta$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Αν ο αριθμός α είναι :

- ✓ Άρτιος δηλαδή $\alpha = 2\lambda \Leftrightarrow \alpha^3 = 8\lambda^3$ και αν θέσεις $\kappa = \lambda$ παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8\kappa$ όπου $\kappa \in Z$
- ✓ Περιττός δηλαδή $\alpha = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8\lambda^3 + 3(2\kappa)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\kappa \cdot 1^2 + 1^3 \Leftrightarrow \alpha^3 = 8\lambda^3 + 12\kappa^2 + 6\kappa + 1$ $\Leftrightarrow \alpha^3 = 2\underbrace{(4\lambda^3 + 6\kappa^2 + 3\kappa)}_{\kappa} + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2\kappa + 1$

- ✓ Ένας διαφορετικός τρόπος προσέγγισης είναι $\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha$ και επειδή «αν α περιττός τότε $\alpha^2 = 8\mu + 1$ (δες παράδειγμα σχολικού βιβλίου) άρα $\alpha^3 = (8\mu + 1)(2\lambda + 1) = 16\mu\lambda + 8\mu + 2\lambda + 1 =$ $2\underbrace{(8\mu\lambda + 4\mu + \lambda)}_{\kappa} + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2\kappa + 1$.

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Β. Αν ο αριθμός α είναι :

✓ Άρτιος δηλαδή $\alpha = 2\lambda \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2+1) = 2\underbrace{\lambda(4\lambda^2+1)}_{\kappa} = 2\kappa$, άρα ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

✓ Περιττός δηλαδή $\alpha = 2\lambda+1$ άρα $\alpha^2 = 8\mu+1 \Leftrightarrow \alpha^2+1 = 8\mu+2 \Leftrightarrow \alpha^2+1 = 2(4\mu+1)$ άρα $\alpha(\alpha^2+1) = (2\lambda+1)2(4\mu+1) \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2+1) = 2\kappa$ άρτιος.

15. επαναληπτικές 2003

Τρίτη 9 Σεπτεμβρίου

ΘΕΜΑ 1ο

β. Έστω α, β μη μηδενικοί ακέραιοι. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε ισχύει πάντα ότι $\alpha = \beta$.

Είναι **Λάθος** διότι «Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε $\alpha = \beta$ **ή** $\alpha = -\beta$»

ΘΕΜΑ 3ο

α. Ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2-2003 = (5\kappa+2)^2+(5\lambda+2)^2-2003 =$

$25\kappa^2+10\kappa+4+25\lambda^2+10\lambda+4-2003 = 25(\kappa^2+\lambda^2)+10(\kappa+\lambda)-1995$ άρα

$\alpha^2+\beta^2-2003 = 5\left[5(\kappa^2+\lambda^2)+2(\kappa+\lambda)-399\right]$ = πολλ 5.

β. Είναι $8\alpha+9\beta = 8(5\kappa+2)+9(5\lambda+2) = 40\kappa+16+45\lambda+18 = 40\kappa+45\lambda+34 = 40\kappa+45\lambda+30+4$

$\Leftrightarrow 8\alpha+9\beta = 5\underbrace{(8\kappa+9\lambda+6)}_{\rho}+4 \Leftrightarrow 8\alpha+9\beta = 5\rho+4$.

άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 8α + 9β με το 5 είναι 4.

16. πανελλήνιες 2004

Σάββατο 29 Μαΐου

ΘΕΜΑ 1ο

γ. **Σωστό**

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\alpha = 12\kappa-5 = 12\kappa-6+1 = 2\underbrace{(6\kappa-3)}_{\lambda}+1 \Leftrightarrow \alpha = 2\lambda+1$, άρα α περιττός.

Β. $\alpha = 12\kappa-5 = 12\kappa-8+3 = 4\underbrace{(2\kappa-2)}_{\mu}+3 \Leftrightarrow \alpha = 4\mu+3$ άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του α δια του 4 είναι υ = 3.

Γ.

1ος τρόπος : α = περιττός άρα $\alpha^2 = 8\mu+1$ (δες παράδειγμα σχολικού βιβλίου), επομένως :

$$A = (\alpha^2+15)(\alpha^2-1) = (8\rho+1+15)(8\rho+1-1) = (8\rho+16)\cdot 8\rho = 64\rho(\rho+2) = \text{πολ}64.$$

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

2ος τρόπος : $\alpha = 12\kappa - 5 \Leftrightarrow \alpha^2 = (12\kappa - 5)^2 = 144\kappa^2 - 120\kappa + 25 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 15 = 144\kappa^2 - 120\kappa + 40 \Leftrightarrow \alpha^2 + 15 = 8\underbrace{(18\kappa^2 - 15\kappa + 5)}_{\lambda} = 8 \cdot \lambda$,

$\alpha^2 - 1 = 144\kappa^2 - 120\kappa + 24 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8\underbrace{(18\kappa^2 - 15\kappa + 3)}_{\mu} = 8 \cdot \mu$

Άρα $(\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1) = 8 \cdot \lambda \cdot 8 \cdot \mu = \pi o \lambda 64$.

17. ***επαναληπτικές 2004*** **Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω α, β, γ ακέραιοι με α, β ≠ 0. Να δείξετε ότι:

α. Θεωρία.

β. Θεωρία.

Γ δ. Σωστό

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά

Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 1ος

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά

Θετικής και Τεχνολογικής

Τόμος 2ος

Παράγωγοι ακρότατα

αόριστα ολοκλήρωμα

μελέτη συνάρτησης ορισμένο

De L' Hospital

Περιέχει θεωρία με παρατηρήσεις, υποδείξεις και σχόλια-μεθοδολογία.

Περιέχει λυμένα παραδείγματα, ασκήσεις για λύση

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

1ος Τόμος

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

ζ

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

2ος Τόμος

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

στις συναρτήσεις

στη στατιστική

και στις πιθανότητες

παράγωγοι

ακρότατα

μέση τιμή

Πιθανότητα

Περιέχει όλα τα θέματα όλων των τύπων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 2000 μέχρι σήμερα, απαντημένα με αναλυτικό και υποδειγματικό τρόπο

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέματα Αρχές Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Περιέχει τη θεωρία και όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 2004 μέχρι σήμερα, απαντημένα με αναλυτικό και τρόπο υποδειγματικό

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέματα

Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

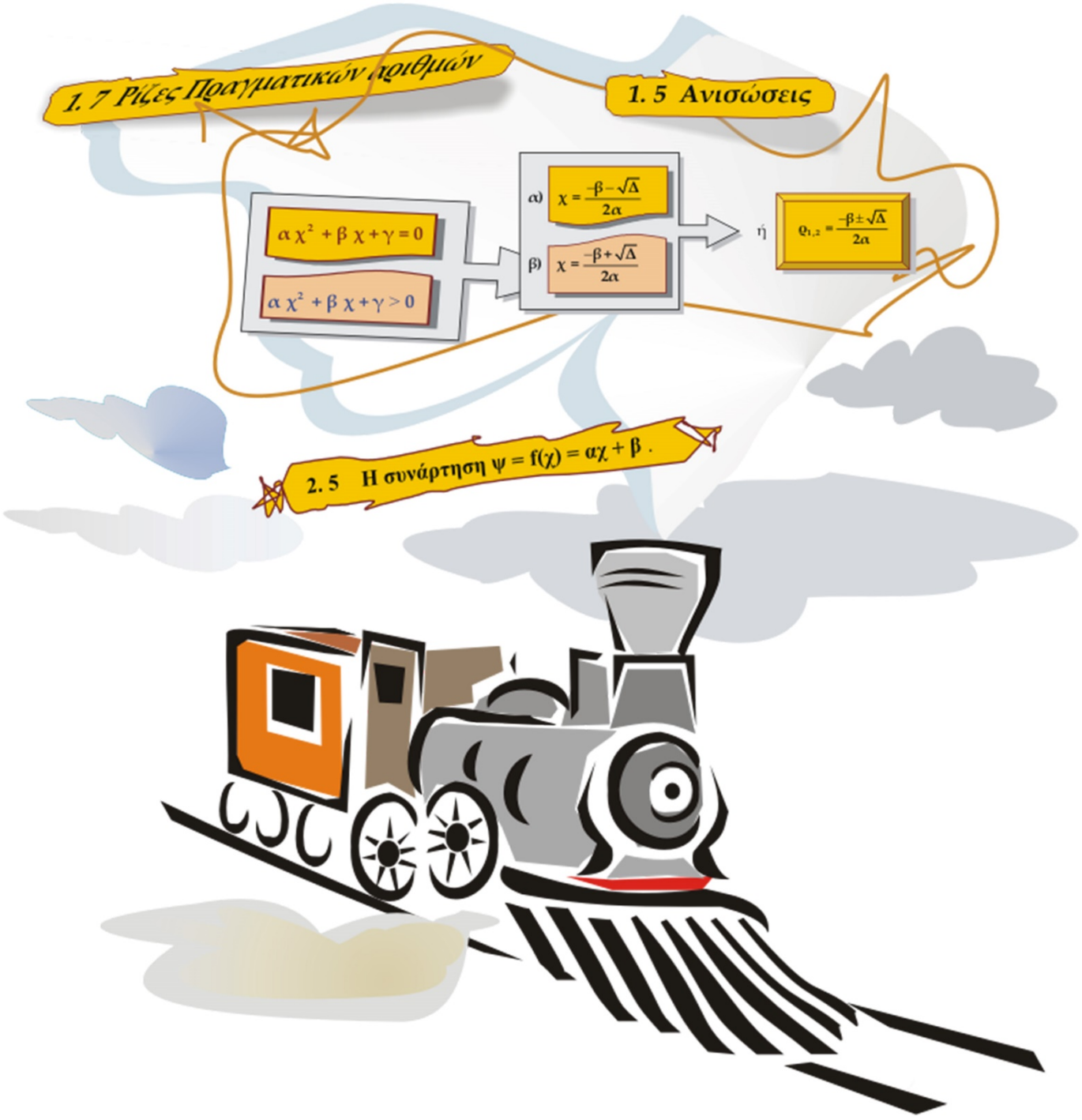
Περιέχει τη θεωρία και όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 1994 μέχρι το 2006.

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ

Δαμιανός Μωραΐτης

Άλγεβρα Α Λυκείου



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ