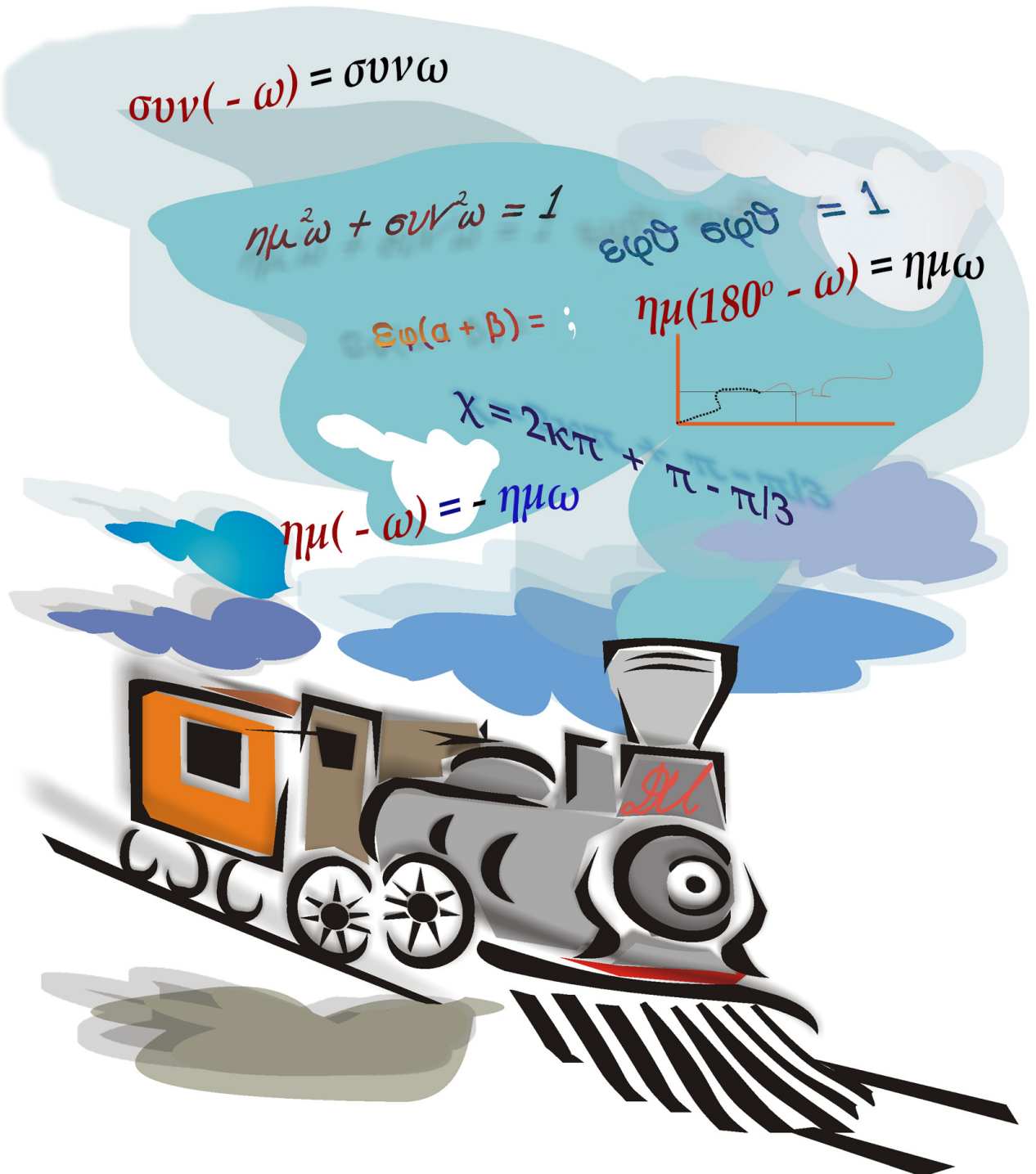


Δαριανός Μωραΐτης

Ανάλεκτα Τριγωνομετρίας



Περιέχει όλη την ύλη για την Α! και Β! Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Αφιερωμένο
σε όλους εκείνους που θέλουν
να προσπαθήσουν

Δαμιανός Μωραΐτης

Ανάλεκτα Τριγωνομετρίας

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

© copyright κειμένου και εικονογράφησης: **Δαμιανός Μωραΐτης**

© copyright για την παρούσα έκδοση:

Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

ISBN: 9786188597341

Προλεγόμενα

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε το 2007, ανανεώθηκε το 2010 με σκοπό να καλύψει την ύλη της Τριγωνομετρίας Α και Β Λυκείου που τότε συμπεριλαμβάνονταν στο αναλυτικό πρόγραμμα. Δεν εκδόθηκε ποτέ σε έντυπη μορφή γιατί ήταν δυσβάσταχτο κόστος.

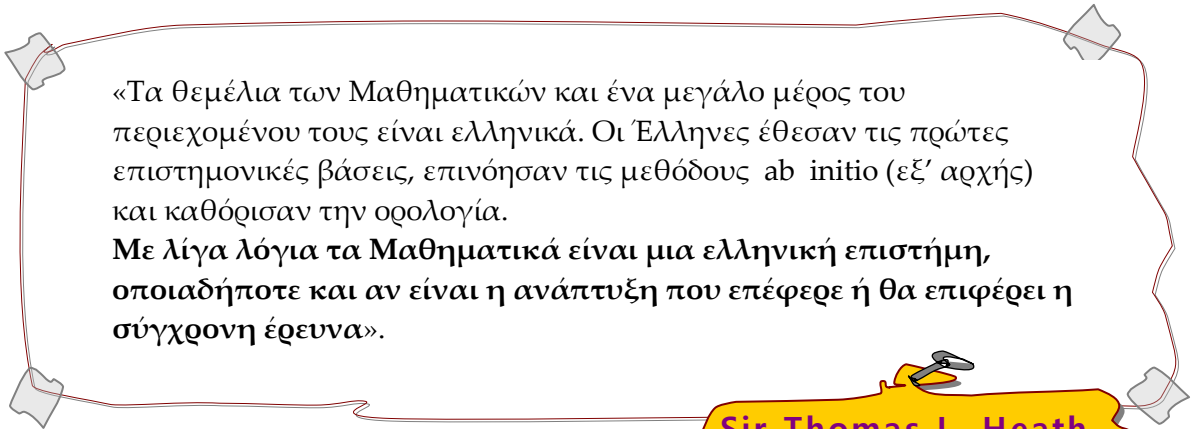
Εκδίδεται σήμερα στο πλαίσιο της ψηφιοποίησης όλων όσων έγραψα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των Μαθηματικών για 42 συνεχόμενα χρόνια, γιατί η τεχνολογία μας παρέχει αυτήν την ευκολία.

Το βιβλίο αυτό διανέμεται δωρεάν για διδακτικούς σκοπούς

Λιβαδειά 2022



Αγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω



«Τα θεμέλια των Μαθηματικών και ένα μεγάλο μέρος του περιεχομένου τους είναι ελληνικά. Οι Έλληνες έθεσαν τις πρώτες επιστημονικές βάσεις, επινόησαν τις μεθόδους *ab initio* (εξ' αρχής) και καθόρισαν την ορολογία.

Με λίγα λόγια τα Μαθηματικά είναι μια ελληνική επιστήμη, οποιαδήποτε και αν είναι η ανάπτυξη που επέφερε ή θα επιφέρει η σύγχρονη έρευνα».



Sir Thomas L. Heath

Σχόλιο: Δείτε τι κάνουν οι σημερινοί κάτοικοι αυτής της χώρας:

Παράδειγμα 1^ο

Στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία ο γνωστός αριθμός 3,14 (κατά προσέγγιση) αναφέρεται (συμβολικά) με το Ελληνικό γράμμα π (Greek letter «π») αναφέροντας ταυτόχρονα ότι οι αρχαίοι «υμών» πρόγονοι είχαν βρει πολλές και διαφορετικές γεωμετρικές προσεγγίσεις του..

Παράδειγμα 2^ο

Στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία αναφέρεται συχνά πυκνά ένας από τους μεγαλύτερους «μαθηματικούς» και φιλοσόφους εκ των αρχαίων «υμών» προγόνων ο **Διόφαντος** .

Αυτά στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία γιατί στην σύγχρονη **σχολική μαθηματική** βιβλιογραφία δεν αναφέρεται τίποτα σχετικό .

Όλοι λοιπόν πλην «νεοελλήνων» δείχνουν τον οφειλόμενο σεβασμό

Δ. Μ.

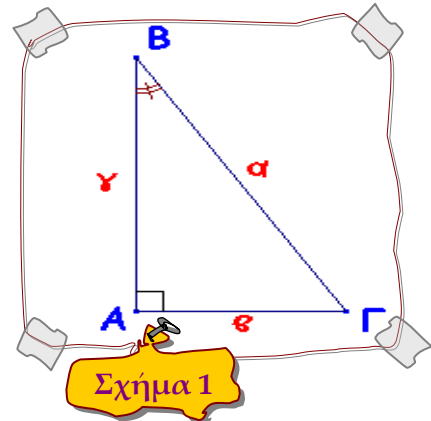
Πίνακας Περιεχομένων

1.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας	13
1.2	Τριγωνομετρικές ταυτότητες	37
1.3°	Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο	47
2°	<u>Κεφάλαιο</u>	
2.1°	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	69
2.2°	Τριγωνομετρικές εξισώσεις	85
2.3°	Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος – διαφοράς γωνιών	101
2.4°	Τριγωνομετρικοί αριθμοί των πολλαπλασίων μιας γωνίας	116
	Παράρτημα Α	85
	Παράρτημα Β	85

1.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω .

Έστω τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) όπως στο διπλανό σχήμα 1.



Σχήμα 1

Ορισμός

Ορίζουμε ως

Ημίτονο της γωνίας B το λόγο $\frac{AG}{BG} = \frac{\beta}{\alpha}$ Συμβολικά $\eta\mu B = \frac{AG}{BG} = \frac{\beta}{\alpha}$

Συνημίτονο της γωνίας B το λόγο $\frac{AB}{BG} = \frac{\gamma}{\alpha}$ Συμβολικά $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{BG} = \frac{\gamma}{\alpha}$

Εφαπτομένη της γωνίας B το λόγο $\frac{AG}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$ Συμβολικά $\epsilon\varphi B = \frac{AG}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$

Συνεφαπτομένη της γωνίας B το λόγο $\frac{AB}{AG} = \frac{\gamma}{\beta}$ Συμβ. $\sigma\varphi B = \frac{AB}{AG} = \frac{\gamma}{\beta}$

✓ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω όπου $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$

Ας υποθέσουμε ότι πάνω στο επίπεδο έχουμε ορίσει ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.

Ας συμφωνήσουμε και τα εξής: Κάθε γωνία πάνω στο επίπεδο θα έχει ως κορυφή το O και ως αρχική πλευρά τον Oχ (τον θετικό ημιάξονα δηλαδή).

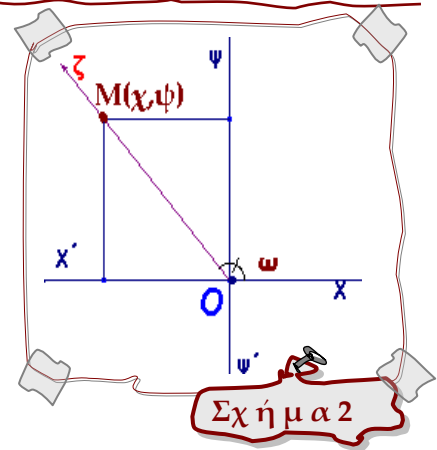
Έστω λοιπόν μια τέτοια γωνία ω η οποία όπως φαίνεται από το σχήμα 2 (της επόμενης σελίδας) έχει:

Κορυφή το Ο, αρχική πλευρά τον Οχ είναι δηλαδή η γωνία $\omega = \chi Οζ$, οπότε τελική πλευρά είναι η Οζ.

Έστω ένα τυχαίο σημείο $M(\chi, \psi)$ πάνω στην τελική πλευρά Οζ της γωνίας $\omega = \chi Οζ$.

Αν θέσουμε $\varrho = OM$ θα είναι

$$\varrho = OM = \sqrt{(\chi - 0)^2 + (\psi - 0)^2} \Leftrightarrow \varrho = \sqrt{\chi^2 + \psi^2} > 0$$



Ορισμός

Ορίζουμε ως

Ημίτονο της γωνίας ω το λόγο $\frac{\text{Τεταγμένη του } M}{\text{Απόσταση } OM} = \frac{\psi}{\varrho}$. Συμβολικά $\eta\omega = \frac{\psi}{\varrho}$

Συνημίτονο της γωνίας ω το λόγο $\frac{\text{Τετμημένη του } M}{\text{Απόσταση } OM} = \frac{\chi}{\varrho}$. Συμβολικά $\sigma\omega = \frac{\chi}{\varrho}$

Εφαπτομένη της γωνίας ω το λόγο $\frac{\text{Τεταγμένη του } M}{\text{Τετμημένη του } M} = \frac{\psi}{\chi}$. Συμβ. $\epsilon\omega = \frac{\psi}{\chi}, \chi \neq 0$

Συνεφαπτομένη της γωνίας ω το λόγο $\frac{\text{Τετμημένη του } M}{\text{Τεταγμένη του } M} = \frac{\chi}{\psi}$. Συμ. $\sigma\omega = \frac{\chi}{\psi}, \psi \neq 0$

Αποδεικνύεται ότι όλοι οι πιο πάνω λόγοι $(\frac{\psi}{\varrho}, \frac{\chi}{\varrho}, \frac{\psi}{\chi}, \frac{\chi}{\psi})$ είναι ανεξάρτητοι από την θέση του σημείου M και εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από την γωνία ω

● **Παρατήρηση 1** → Με τους ορισμούς αυτούς ξεφύγαμε από τις οξείες γωνίες και **επεκτείνουμε** τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και για αμβλείες γωνίες, καθώς και για **μη κυρτές** γωνίες (γωνίες δηλ μεγαλύτερες από 180°).

Έτσι αποδεσμευόμαστε και από τα τρίγωνα και από τα μήκη των πλευρών τους.

Τώρα πια αρκεί να γνωρίζουμε τις **συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου της τελικής πλευράς της γωνίας ω** για να μπορούμε να βρούμε όλους τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς.

● **Παρατήρηση 2** → Αν το $M(\chi, \psi)$ είναι ένα σημείο στην τελική πλευρά μιας γωνίας τότε για να ορίζεται η εφαπτομένη της γωνίας ω πρέπει $\chi \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι όταν το M βρίσκεται πάνω στον Οψ ή στον Οψ' δηλαδή όταν η γωνία ω είναι 90° ή 270° τότε **δεν ορίζεται η εφαπτομένη**.

Για να ορίζεται η συνεφαπτομένη πρέπει $\psi \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι όταν το M βρίσκεται πάνω στον Οχ ή στον Οχ' δηλαδή όταν η γωνία ω είναι 0° ή 180° τότε **δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη**.

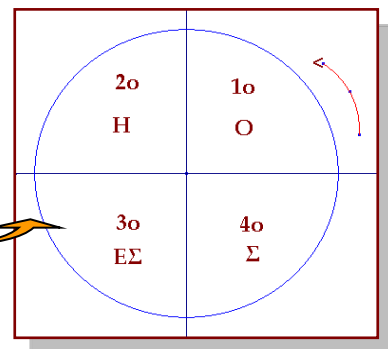
● **Παρατήρηση 3** → Επειδή οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ορίζονται με βάση τις συντεταγμένες χ και ψ ενός σημείου **M** της τελικής πλευράς της γωνίας και το

$\varrho = (OM) = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$ και $\varrho > 0$ άρα το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών εξαρτάται από το πρόσημο των συντεταγμένων του M, δηλαδή ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται το M καθορίζεται και το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών όπως φαίνεται στη διπλανή σελίδα.

ψ ημω , συνω , εφω , σφω + , - , - , - χ' ημω , συνω , εφω , σφω - , - , + , + ψ'	ψ ημω , συνω , εφω , σφω + , + , + , + χ ημω , συνω , εφω , σφω - , + , - , - ψ'
--	---

Δηλαδή **θετικά** είναι: στο 1^ο τεταρτημόριο **Ο**λα, στο 2^ο είναι μόνο το **Η**μίτονο, στο 3^ο είναι μόνο η **Ε**φαπτομένη και **Σ**υνεφαπτομένη και στο 4^ο είναι μόνο το **Σ**υνημίτονο

Συμβολικά τα αρχικά των τριγωνομετρικών αριθμών που είναι θετικοί σε κάθε τεταρτημόριο είναι **Ο.Η.Ε.Σ.Σ**.
(όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα)



και

✓ Επέκταση της έννοιας της γωνίας

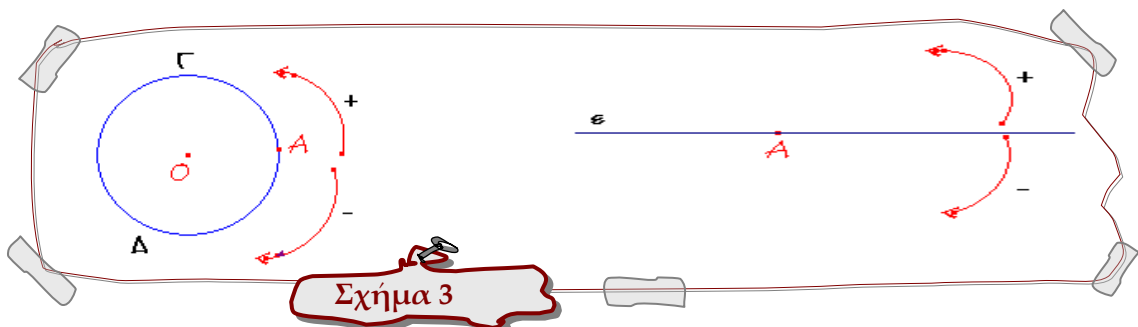
Με βάση τον Γεωμετρικό ορισμό γωνία είναι το «κομμάτι» του επιπέδου το οποίο περιέχεται μεταξύ δύο ημιευθειών. Για τις ανάγκες της φυσικής και ειδικότερα για την μελέτη κυκλικών κινήσεων επεκτείνουμε την έννοια της γωνίας.

➤ Φορά περιστροφής

Έστω κύκλος κέντρου Ο και Α ένα σημείο πάνω του. Μια κυκλική κίνηση μπορεί να γίνει κατά δύο τρόπους : από το Α προς το Γ ή από το Α προς το Δ όπως φαίνεται στο σχήμα 3

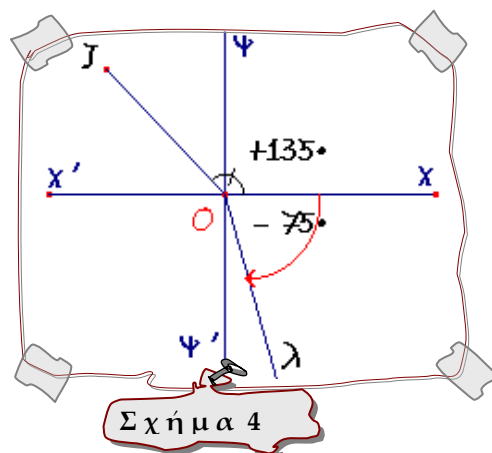
Η φορά κίνησης που είναι **αντίθετη στην κίνηση των δεικτών του ρολογιού** θεωρείται **θετική φορά** και η **άλλη** (που ταιριάζει με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) θεωρείται **αρνητική φορά**.

Το ίδιο ισχύει και για την περιστροφή της ακτίνας ΟΑ καθώς επίσης και για την περιστροφή μιας ευθείας ε γύρω από ένα σημείο της Α (όπως δείχνει και το **σχήμα 3**)



Έτσι λοιπόν αν θεωρήσουμε ένα σύστημα αξόνων (σχήμα 4) και υποθέσουμε ότι οι γωνίες όλες έχουν ως κορυφή το $O(0,0)$ και σχηματίζονται από την περιστροφή του ημιάξονα Ox , τότε θα έχουμε θετικές γωνίες, αν ο ημιάξονας περιστρέφεται κατά τη θετική φορά και αρνητικές γωνίες αν ο ημιάξονας περιστρέφεται κατά την αρνητική φορά περιστροφής.

Έτσι είναι: $\text{γωνία } \chi O \zeta = +135^\circ$
και $\text{γωνία } \chi O \lambda = -75^\circ$



Γωνίες όπως οι $\chi O \zeta$, $\chi O \lambda$ δηλαδή γωνίες οι οποίες έχουν σχηματισθεί από την περιστροφή του ημιάξονα Ox κατά τη θετική ή την αρνητική φορά περιστροφής ονομάζονται προσανατολισμένες γωνίες.

Όλοι οι ορισμοί για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο κλπ) ισχύουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για τις προσανατολισμένες γωνίες.

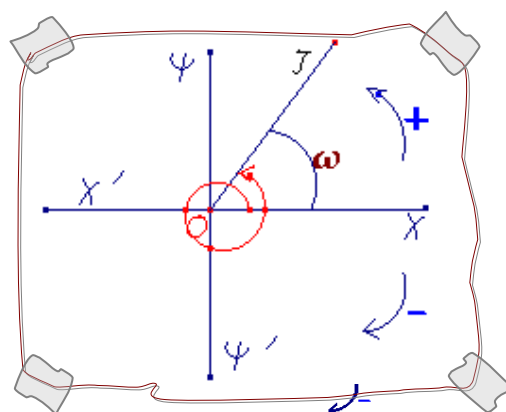
✓ Γωνίες μεγαλύτερες από 360°

Έστω το σύστημα των καρτεσιανών συντεταγμένων του σχήματος 5 και γωνία $\chi O \zeta = \omega$.

Ας φαντασθούμε ότι ο ημιάξονας Ox αρχίζει να περιστρέφεται κατά τη θετική φορά και αφού πρώτα «κάνει» **κ ολόκληρες περιστροφές** σταματάει στην θέση $O \zeta$, τότε ο ημιάξονας Ox θα έχει **διαγράψει** γωνία η οποία όταν μετρηθεί σε μοίρες θα είναι: $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$.

Το κ είναι **θετικός** ακέραιος αν οι κύκλοι διαγράφονται (όπως στο σχήμα) κατά τη θετική φορά (↺ +)

και ο κ είναι **αρνητικός** ακέραιος αν οι κύκλοι διαγράφονται κατά την αρνητική φορά. (↻ -)



Έτσι λοιπόν από δω και πέρα θα βλέπουμε γωνίες 740° ή 1230° κλπ.

Τι σημαίνει λοιπόν γωνία $\theta = 1230^\circ$; αμέσως (!) καταλαβαίνουμε (;) ότι πρόκειται για μια γωνία που έχει προκύψει από περιστροφή του ημιάξονα Ox και μάλιστα από 3 ολόκληρες περιστροφές συν μια γωνία 150° .

Για να εκφράσω μια γωνία θ στη μορφή $\theta = \kappa \cdot 360^\circ + \omega^\circ$, όταν μου δίνεται το **μέτρο** της σε μοίρες, **διαίρω το μέτρο της με το 360** και το μεν ακέραιο πηλίκο είναι ο αριθμός κ των περιστροφών, το δε υπόλοιπο είναι η επιπλέον γωνία η οποία είναι προφανώς μικρότερη από 360° .

Παραδείγματα

1. Αν $\theta = 1860^\circ$ τότε η διαίρεση $1860 : 360$ δίνει πηλίκο 5 και υπόλοιπο 60 άρα $\theta = 1860^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 60^\circ$
2. Αν $\varphi = -2565^\circ$, επειδή η διαίρεση $2565 : 360$ δίνει πηλίκο 7 και υπόλοιπο 45 η γωνία $\varphi = -2565^\circ = -(7 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = (-7) \cdot 360^\circ - 45^\circ$

● **Παρατήρηση** Έστω η $\theta = 1860^\circ$ τότε $\theta = 5 \cdot 360^\circ + 60^\circ$, αυτό σημαίνει ότι για να σχηματισθεί η θ θα πρέπει ο ημιάξονας Οχ να κάνει 5 πλήρεις περιστροφές και να συνεχίσει διαγράφοντας επιπλέον γωνία 60° . Δηλαδή η γωνία $\theta = 1860^\circ$ έχει αρχική και τελική πλευρά ίδια με την γωνία των 60° .

Γενικότερα, όπως φαίνεται και από το σχήμα 5, (προηγούμενη σελ), η γωνία $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$ και η γωνία ω έχουν αρχική πλευρά τον Οχ, όπως όλες οι γωνίες, και τελική πλευρά την τελική πλευρά της ω .

Για τις γωνίες τις μεγαλύτερες από 360° ορίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημίτονο, συνημίτονο κλπ) ακριβώς όπως πριν, δηλ αν $M(\chi, \psi)$ είναι ένα σημείο στην τελική πλευρά της γωνίας τότε :

$$\begin{aligned} \rho &= OM = \sqrt{\chi^2 + \psi^2} > 0 \quad \text{και} \\ \eta\mu\omega &= \frac{\psi}{\rho}, \quad \text{συν}\omega = \frac{\chi}{\rho}, \\ \varepsilon\varphi\omega &= \frac{\psi}{\chi} \quad \text{όταν } \chi \neq 0, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} \quad \text{όταν } \psi \neq 0 \end{aligned}$$

Επειδή, όπως είδαμε πριν, οι γωνίες $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$ και ω έχουν την ίδια τελική πλευρά, αν $M(\chi, \psi)$ είναι σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω τότε το $M(\chi, \psi)$ θα είναι και στην τελική πλευρά της γωνίας $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$ άρα είναι :

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \frac{\psi}{\rho} = \eta\mu\omega, \quad \text{συν}(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \frac{\chi}{\rho} = \text{συν}\omega, \quad \text{κλπ} \quad \text{άρα ισχύουν οι τύποι.}$$

$$\begin{aligned} \eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu\omega, \quad \text{συν}(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \text{συν}\omega \quad (1) \\ \varepsilon\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) &= \varepsilon\varphi\omega, \quad \sigma\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega \end{aligned}$$

Προσοχή

Οι γωνίες $\varphi = \kappa \cdot 360^\circ + \omega$ και ω έχουν όλους τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς ίδιους.

Παράδειγμα

- Είναι i) $\eta\mu(1860^\circ) = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta\mu(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ii) $\varepsilon\varphi(2570^\circ) = \varepsilon\varphi(7 \cdot 360^\circ + 50^\circ) = \varepsilon\varphi(50^\circ)$

✓ Μονάδες μέτρησης των γωνιών και των τόξων

➤ Μοίρα

Η πιο γνωστή μονάδα με την οποία μετρούσαμε μέχρι στιγμής τα τόξα και τις γωνίες ήταν η μοίρα την οποία είχαμε ορίσει ως εξής :

Τόξο μιας μοίρας είναι ένα τόξο που ισούται με το $\frac{1}{360}$ του κύκλου στον οποίο ανήκει.

Γωνία μιας μοίρας είναι η επίκεντρη γωνία που έχει αντίστοιχο τόξο μιας μοίρας.

Είναι προφανές ότι αν το αντίστοιχο τόξο μιας επίκεντρης γωνίας είναι 57° π χ τότε και η επίκεντρη γωνία είναι 57° και αντίστροφα .

Προσοχή Άλλο «πράγμα» είναι η γωνία 57° (που είναι 57 γωνίες ίσες με 1°) και άλλο «πράγμα» είναι το τόξο 57° (που είναι 57 τόξα ίσα με 1°).

Με άλλα λόγια το μέτρο της επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό.

➤ Ακτίνιο (ή rad)

Όπως ξέρεις τα τόξα έχουν μήκος (όπως όλες οι γραμμές άλλωστε).

Ακτίνιο ή **rad** λοιπόν ονομάζεται το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου από τον οποίο προέρχεται.

Γωνία ενός ακτινίου είναι η επίκεντρη γωνία που έχει αντίστοιχο τόξο ενός ακτινίου.

Ένας κύκλος «έχει» 360° και 2π ακτίνια έτσι λοιπόν με «την απλή μέθοδο των τριών» μπορούμε να μετατρέπουμε τις μοίρες μιας γωνίας ή ενός τόξου σε ακτίνια και αντίστροφα .

Γενικά έχουμε :

Αν ένα τόξο είναι μ° τότε θα είναι και α ακτινίων οπότε

Οι 360° αντιστοιχούν σε 2π ακτίνια άρα
οι μ° »»» σε α »»» επομένως

$$\frac{360^\circ}{\mu^\circ} = \frac{2\pi}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \quad (1)$$

Παράδειγμα

Να βρεις i) Πόσα ακτίνια είναι η γωνία 60° και

ii) Πόσες μοίρες είναι η γωνία $\frac{2\pi}{3}$ ακτινίων .

Απάντηση :

i) Έστω ότι η γωνία 60° είναι α ακτινίων τότε από τον τύπο (1) έχω

$$\frac{1}{3} \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow 3 \cdot \alpha = \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

ii) Έστω ότι η γωνία $\frac{2\pi}{3}$ είναι μ° μοιρών τότε από τον τύπο (1) έχω $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{3}{\pi}$ άρα

$$\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{3}{\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \cdot \frac{3}{\pi} \text{ άρα } \mu = 120^\circ$$

Παρατήρηση → Όταν κάνουμε πρακτική εφαρμογή της τριγωνομετρίας (σχέδια, κατασκευές κλπ) χρησιμοποιούμε τις μοίρες επειδή η μέτρηση σε μοίρες είναι πιο ακριβής και πιο εύκολη (χρήση του **μοιρο**γνωνομνίου), η θεωρία όμως διευκολύνεται από την χρήση του ακτινίου.

Για τον λόγο αυτό, σταδιακά, στα επόμενα θα πάψουμε να χρησιμοποιούμε τις μοίρες και θα χρησιμοποιούμε τα ακτίνια.

Προσοχή Είναι λάθος να γράφουμε $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ή ότι ο αριθμός $120 = \frac{2\pi}{3}$ διότι ο αριθμός $\frac{2\pi}{3} \approx 2,1$ που είναι διαφορετικό από το 120.

Το σωστό είναι να λέμε ότι οι 120° ισούνται με $\frac{2\pi}{3}$ ακτίνια.

Γενικότερα, «ως είναι γνωστό εκ της Φυσικής» (!!)» απλοποιήσεις γίνονται μόνον αν οι μονάδες είναι ίδιες.

Παράδειγμα

Από κάποιο μαθητή ζήτησαν να μετατρέψει μια γωνία 120° σε ακτίνια και αυτός απάντησε ως εξής : Ο τύπος μετατροπής είναι $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ άρα $\alpha = \frac{120^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{120^\circ}{180^\circ} \pi = 120$ (αφού $\pi = 180^\circ$) άρα $\alpha = 120$ ακτίνια . Η απάντηση είναι λανθασμένη γιατί το $\pi \approx 3,14 \neq 120$. Έτσι λοιπόν η σωστή απάντηση είναι $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ άρα $\frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3} \pi$ **ακτίνια**

Έτσι για μια οξεία γωνία ω ισχύει πάντα $0 \leq \omega < \frac{\pi}{2}$

και γενικότερα για μια κυρτή γωνία θ ισχύει πάντα $0 \leq \theta \leq \pi$.

Ακολουθεί ένας πίνακας αντιστοίχισης μοιρών και ακτινίων.

μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Άρα οι τύποι (1) της σελ 5 αν η γωνία μετρείται σε ακτίνια γίνονται :

$$\begin{aligned} \eta\mu(2\kappa \cdot \pi + \omega) &= \eta\mu\omega & , & \quad \text{συν}(2\kappa \cdot \pi + \omega) = \text{συν}\omega \\ \epsilon\phi(2\kappa \cdot \pi + \omega) &= \epsilon\phi\omega & , & \quad \sigma\phi(2\kappa \cdot \pi + \omega) = \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

Παρατήρηση → Για να βρεις αν δυο γωνίες φ, ω έχουν την ίδια τελική πλευρά τις αντικαθιστάς στην εξίσωση $\varphi = 2\lambda\pi + \omega$ και αν προκύπτει ακέραια λύση για το λ τότε έχουν την ίδια τελική πλευρά.

Παράδειγμα

Να βρεις αν οι γωνίες $-\frac{3\pi}{14}$ και $\frac{81\pi}{14}$ έχουν την ίδια τελική πλευρά.

Λύση : Για να 'χουν οι γωνίες την ίδια τελική πλευρά πρέπει να έχει λύση η εξίσωση

$$-\frac{3\pi}{14} = 2\lambda\pi + \frac{81\pi}{14} \Leftrightarrow -\frac{3}{14} = 2\lambda + \frac{81}{14} \Leftrightarrow -3 = 28\lambda + 81 \Leftrightarrow 28\lambda = -3 - 81 \Leftrightarrow 28\lambda = -84 \Leftrightarrow \lambda = -3. \text{ Άρα οι}$$

γωνίες συνδέονται με την σχέση $-\frac{3\pi}{14} = (-3)2\pi + \frac{81\pi}{14} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{14} = -6\pi + \frac{81\pi}{14}$ επομένως έχουν την ίδια τελική πλευρά

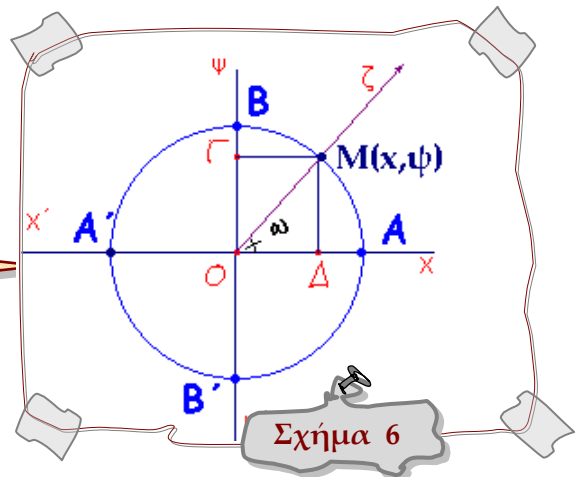
✓ **Τριγωνομετρικός κύκλος**

Έστω ένα κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 1$.

Αν τοποθετήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο κέντρο του κύκλου όπως σχήμα 6 τότε :

Ο κύκλος αυτός ονομάζεται
Τριγωνομετρικός κύκλος

Έστω μια γωνία ω και $M(x, \psi)$, το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά OZ της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο τότε :

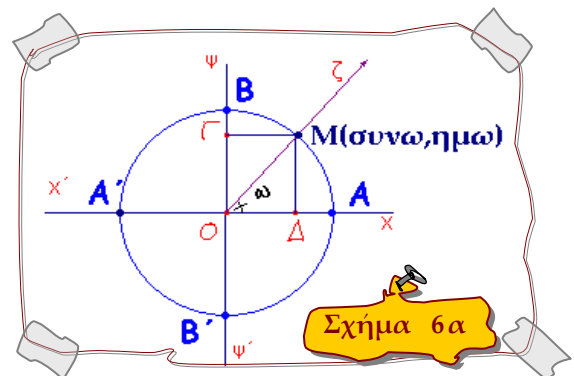


Είναι

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi}{1} = \psi \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x \end{aligned}$$

(επειδή πρόκειται για τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι $\rho = 1$.)

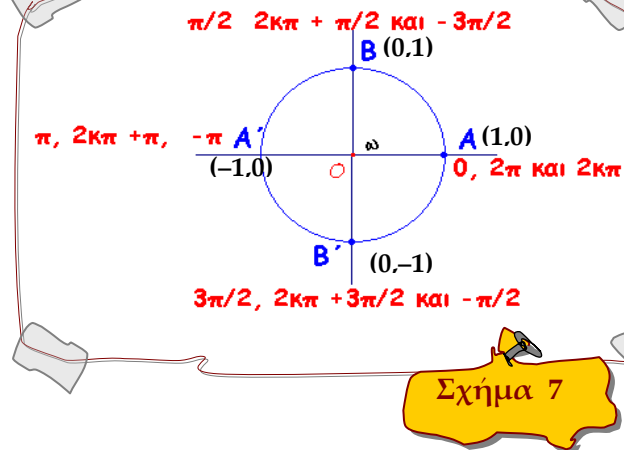
Άρα το σημείο M έχει συντεταγμένες $(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$ είναι δηλ $M(x, \psi) = M(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$ δηλαδή το M έχει ως συντεταγμένες τους **τριγ. αριθμούς της γωνίας ω** όταν το M είναι η τομή της τελικής πλευράς της γωνίας με τον τριγωνομετρικό κύκλο όπως στο **σχήμα 6α**



Παρατήρηση : Είναι προφανές από τα τριγ $O\Delta M$ και $O\Gamma M$ ότι $|O\Delta| < |OM|$ και $|O\Gamma| < |OM|$ (επειδή $O\Delta, O\Gamma$ κάθετες πλευρές και OM υποτείνουσα στα αντίστοιχα τρίγωνα) ισχύει δηλαδή :

$$|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1 \text{ και } |\eta\mu\omega| \leq 1 \text{ ή ισοδύναμα } -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \text{ και } -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Σύμφωνα με τον πίνακα αντιστοίχισης μοιρών και ακτινίων (σελ 7) σε συνδυασμό με τον τριγωνομετρικό κύκλο όπως φαίνεται και στο **σχήμα 7** στα σημεία :
A, A', B, B' τελειώνουν τα τόξα :



α) Στο A τελειώνουν τα τόξα με μέτρο 0, 2π και γενικά 2κπ.

Οπότε με το δεδομένο ότι A(1, 0) άρα θα είναι :

$$\eta\mu 0 = \eta\mu 2\pi = \eta\mu(2\kappa\pi) = 0, \quad \sigma\upsilon\nu 0 = \sigma\upsilon\nu 2\pi = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi) = 1$$

$$\epsilon\varphi 0 = \epsilon\varphi 2\pi = \epsilon\varphi(2\kappa\pi) = 0, \quad \text{Οι } \sigma\varphi 0, \sigma\varphi 2\pi, \sigma\varphi(2\kappa\pi) \text{ δεν ορίζονται.}$$

β) Στο σημείο B τελειώνουν τα τόξα με μέτρο $\frac{\pi}{2}$ και $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$.

Οπότε με το δεδομένο ότι B(0, 1) άρα θα είναι :

$$\eta\mu \frac{\pi}{2} = \eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\epsilon\varphi \frac{\pi}{2}, \epsilon\varphi\left(-\frac{3\pi}{2}\right), \epsilon\varphi\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ δεν ορίζονται, } \sigma\varphi \frac{\pi}{2} = \sigma\varphi\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

γ) Στο A' τελειώνουν τα τόξα με μέτρο π και 2κπ + π και τα τόξα -π και 2κπ - π.

Οπότε με το δεδομένο ότι A'(-1, 0) άρα θα είναι

$$\eta\mu \pi = \eta\mu(-\pi) = \eta\mu(2\kappa\pi + \pi) = 0, \quad \sigma\upsilon\nu \pi = \sigma\upsilon\nu(-\pi) = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \pi) = -1$$

$$\epsilon\varphi \pi = \epsilon\varphi(-\pi) = \epsilon\varphi(2\kappa\pi + \pi) = 0, \quad \sigma\varphi \pi, \sigma\varphi(-\pi), \sigma\varphi(2\kappa\pi + \pi) \text{ δεν ορίζονται}$$

δ) Στο B' τελειώνουν τα τόξα $\frac{3\pi}{2}$, τα τόξα $2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$.

Οπότε με το δεδομένο ότι B'(0, -1) άρα θα είναι :

$$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\epsilon\varphi \frac{3\pi}{2}, \epsilon\varphi\left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right), \kappa\lambda\pi \text{ δεν ορίζονται, } \sigma\varphi \frac{3\pi}{2} = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\varphi\left(2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Παραδείγματα :

1. Να μετατρέψεις σε ακτίνια τις γωνίες α) 30° , β) 45° , γ) 135° , δ) 765° , ε) -1830

Λύση : Είναι α) $\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6}$. Άρα $30^\circ \rightsquigarrow \frac{\pi}{6}$

β) $\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4}$. Άρα $45^\circ \rightsquigarrow \frac{\pi}{4}$

γ) $\frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{135^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{3\pi}{4}$. Άρα $135^\circ \rightsquigarrow \frac{3\pi}{4}$

δ) $\frac{765^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{765^\circ}{180^\circ} \pi = 4\pi + \frac{\pi}{4}$. Άρα $765^\circ \rightsquigarrow 4\pi + \frac{\pi}{4}$

ε) $\frac{-1830^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1830^\circ}{180^\circ} \pi = -10\pi - \frac{\pi}{6}$. Άρα $-1830^\circ \rightsquigarrow -10\pi - \frac{\pi}{6}$

2. Να μετατρέψεις σε μοίρες τις γωνίες $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{45\pi}{4}$

Λύση : Είναι $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \frac{\pi}{4\pi} = 180^\circ \frac{1}{4} = 45^\circ$. Άρα $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow 45^\circ$

$\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \frac{\pi}{12\pi} = 180^\circ \frac{1}{12} = 15^\circ$. Άρα $\frac{\pi}{12} \rightsquigarrow 15^\circ$

$\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{3}}{\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \frac{5\pi}{3\pi} = 180^\circ \frac{5}{3} = 300^\circ$. Άρα $\frac{5\pi}{3} \rightsquigarrow 300^\circ$

$\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{45\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \frac{45\pi}{4\pi} = 180^\circ \frac{45}{4} = 2025^\circ$. Άρα $\frac{45\pi}{4} \rightsquigarrow 2025^\circ$

3. Να βρεις τη μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή των παραστάσεων :

i) $A = 3\sigma\upsilon\nu\omega - 2\eta\mu\omega$

ii) $B = \eta\mu\phi + 3\sigma\upsilon\nu\theta$

Λύση :

i) Είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sigma\upsilon\nu\omega \leq 3$ (1)

και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq -2\eta\mu\omega \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -2\eta\mu\omega \leq 2$ (2)

από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχω $-5 \leq 3\sigma\upsilon\nu\omega - 2\eta\mu\omega \leq 5$

άρα η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης A είναι το 5 και η μικρότερη το -5.

ii) Όμοια έχω $-1 \leq \eta\mu\phi \leq 1$ (1) και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sigma\upsilon\nu\theta \leq 3$ (2) οπότε με πρόσθεση κατά

μέλη έχω $-4 \leq \eta\mu\phi + 3\sigma\upsilon\nu\theta \leq 4$.

Άρα η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης B είναι το 4 και η μικρότερη το -4 ή ισοδύναμα

$-4 \leq B \leq 4 \Leftrightarrow |B| \leq 4$ ή $|\eta\mu\phi + 3\sigma\upsilon\nu\theta| \leq 4$

Πίνακας Τριγωνομετρικών Αριθμών (Οξείων γωνιών)					
Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Μοίρες	Ακτίνια	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Ο πίνακας αυτός είναι εύκολο να σχηματισθεί :

Για να συμπληρώσεις την 1^η στήλη (του ημίτονου) ακολουθείς τον τύπο :

$$\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \text{ όπου } \kappa = 0, 1, 2, 3, 4$$

όταν η γωνία $\omega = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ αντίστοιχα

$$\text{δηλ } \eta\mu 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0, \quad \eta\mu 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Για να συμπληρώσεις την στήλη του συνημίτονου «αναποδογυρίζεις» τη στήλη του ημίτονου.

Κατόπιν βρίσκεις την εφω από τον τύπο $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ π.χ

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Τέλος για να συμπληρώσεις την στήλη της συνεφαπτομένης «αναποδογυρίζεις» τη στήλη της εφαπτομένης.

- ✍ Η χρησιμότητα του πιο πάνω πίνακα είναι τεράστια και θα την διαπιστώνεις διαρκώς. Π.χ. ξέροντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών του πιο πάνω πίνακα ξέρεις και τους τριγ. αριθμούς πολλών άλλων γωνιών (δες πιο κάτω), αλλά και ακόμη περισσότερων όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, για τον λόγο αυτό καλά θα κάνεις να τον μάθεις και να τον συμπληρώνεις σε κάθε περίπτωση που χρειάζεσαι τους τριγ. αριθμούς γνωστών γωνιών ή γωνιών που έχουν σχέση με γνωστές γωνίες.

- ✓ Δεν πρέπει να ξεχνάς στις ασκήσεις, όταν υπάρχει εφαπτομένη, συνεφαπτομένη πρέπει να έχουν νόημα, δηλαδή πρέπει $\sin \neq 0$ και $\eta \mu \neq 0$.

Παραδείγματα

1. Να βρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών
 i) 3270° ii) $\frac{49\pi}{3}$ ακτινίων και iii) $\frac{65\pi}{4}$ ακτινίων.

Απάντηση :

i) Αν διαιρέσω το 3270 με το 360 βρίσκω πηλίκο 9 και υπόλοιπο 30 άρα $3270^\circ = 9 \cdot 360^\circ + 30^\circ$ τότε $\eta \mu 3270^\circ = \eta \mu 30^\circ$ άρα (αν χρησιμοποιήσω τον πίνακα) είναι $\eta \mu 3270^\circ = \frac{1}{2}$

όμοια : $\sin 3270^\circ = \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\epsilon \phi 3270^\circ = \epsilon \phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\sigma \phi 3270^\circ = \sigma \phi 30^\circ = \sqrt{3}$ (

Την $\epsilon \phi$ και την $\sigma \phi$ μπορείς να τις υπολογίσεις και από τους τύπους $\epsilon \phi 3270^\circ = \frac{\eta \mu 3270^\circ}{\sin 3270^\circ} = \frac{\eta \mu 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

$= \dots \dots$ και $\sigma \phi 3270^\circ = \frac{\sin 3270^\circ}{\eta \mu 3270^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\eta \mu 30^\circ} = \dots \dots$

όμως είναι πιο εύκολο όταν έχεις έτοιμο τον πίνακα

ii) α τρόπος ☺ : Αν διαιρέσω το 49 με το 3 βρίσκω πηλίκο 16 και υπόλοιπο 1

άρα $\frac{49\pi}{3} = 16\pi + \frac{\pi}{3} = 8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$ άρα (αν χρησιμοποιήσω τον πίνακα) είναι

$\eta \mu(\frac{49\pi}{3}) = \eta \mu(16\pi + \frac{\pi}{3}) = \eta \mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ όμοια $\sin(\frac{49\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\epsilon \phi(\frac{49\pi}{3}) = \epsilon \phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ και $\sigma \phi(\frac{49\pi}{3}) = \sigma \phi \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

β τρόπος ☺ : Ίσως είναι πιο εύκολο να μετατρέψει κανείς το $\frac{49\pi}{3}$ σε μοίρες

πρώτα και μετά να βρει τους τριγ. αριθμούς της γωνίας, δηλ είναι : $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{49\pi}{3}}{\pi}$

$\Leftrightarrow \mu^\circ = 180^\circ \frac{49\pi}{3\pi} = 60^\circ \cdot 49 = 2940^\circ$ και $2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ$ άρα

$\eta \mu(2940^\circ) = \eta \mu(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \eta \mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin(2940^\circ) = \sin(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\epsilon \phi(2940^\circ) = \epsilon \phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \epsilon \phi 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\sigma \phi(2940^\circ) = \sigma \phi(8 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma \phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

iii) α τρόπος : Αν διαιρέσω το 65 με το 4 βρίσκω πηλίκο 16 και υπόλοιπο 1

$$\begin{aligned} \text{άρα } \frac{65\pi}{4} &= 16\pi + \frac{\pi}{4} = 8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{άρα (αν χρησιμοποιήσω τον πίνακα) είναι } \eta\mu\left(\frac{65\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Όμοια βρίσκω και τα συν}\left(\frac{65\pi}{4}\right) = \text{συν}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon\varphi\left(\frac{65\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\left(\frac{65\pi}{4}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{4} = 1.$$

β τρόπος : Όμως εδώ πραγματικά είναι **πιο εύκολο** να μετατρέψει κανείς το $\left(\frac{65\pi}{4}\right)$ σε μοίρες

πρώτα

$$\text{και μετά να βρει τους τριγ. αριθμούς της γωνίας δηλ είναι : } \frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\frac{65\pi}{4}}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\mu^\circ = 180^\circ \frac{65\pi}{4\pi} = 45^\circ \cdot 65 = 2925^\circ, \quad 2925^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 45^\circ \Leftrightarrow \eta\mu(2925^\circ) = \eta\mu(8 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{συν}(2925^\circ) = \text{συν}(8 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \text{συν} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \varepsilon\varphi(2925^\circ) = \varepsilon\varphi(8 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1 \quad \text{και}$$

$$\sigma\varphi(2925^\circ) = \sigma\varphi(8 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \sigma\varphi 45^\circ = 1$$

2. Αν η ώρα που δείχνει ένα ρολόι είναι μία και πέντε να βρεις :

- i) την γωνία την οποία θα διαγράψει ο λεπτοδείκτης (μεγάλος δείκτης) όταν η ώρα πάει τέσσερις και είκοσι.
- ii) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτής της γωνίας
- iii) τι ώρα θα είναι όταν ο λεπτοδείκτης θα έχει διαγράψει γωνία $-(12\pi + \frac{\pi}{2})$

Απάντηση :

i) Όταν η ώρα που δείχνει το ρολόι είναι μία και πέντε οι δείκτες «δείχνουν» και οι δύο τον αριθμό 1, ενώ όταν η ώρα είναι τέσσερις και είκοσι θα «δείχνουν» και οι δύο τον αριθμό 4, οπότε ο λεπτοδείκτης θα έχει διαγράψει τρεις ολόκληρους κύκλους και το $\frac{1}{4}$ του κύκλου (κατά την αρνητική

φορά βέβαια) δηλαδή ο λεπτοδείκτης θα έχει διαγράψει : $-(3 \cdot 360^\circ + \frac{360^\circ}{4}) = -(1080^\circ + 90^\circ) = -$

$$1170^\circ \quad \text{ή} \quad -(6\pi + \frac{2\pi}{4}) = -(6\pi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{13\pi}{2}$$

ii) Επειδή η γωνία $-\frac{13\pi}{2} = -6\pi - \frac{\pi}{2}$ τελειώνει στο σημείο Β' και με το δεδομένο ότι :

$$\mathbf{B'(0, -1)} \quad \text{άρα θα είναι} \quad \eta\mu\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = -1, \quad \text{συν}\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = 0, \quad \varepsilon\varphi\left(-\frac{13\pi}{2}\right) \text{ δεν ορίζεται, } \sigma\varphi\left(-\frac{13\pi}{2}\right) = 0$$

iii) όταν ο λεπτοδείκτης διαγράφει γωνία $-(12\pi + \frac{\pi}{2})$ σημαίνει ότι διαγράφει 6 ολόκληρους

κύκλους και το $\frac{1}{4}$ του κύκλου (κατά την αρνητική φορά) άρα έχουν περάσει 6 ολόκληρες ώρες και ένα τέταρτο της ώρας, άρα τότε η ώρα είναι επτά και είκοσι λεπτά

3. Αν $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι σημείο της τελικής πλευράς μια γωνίας ω , να βρεθεί το $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας

Απάντηση : είναι

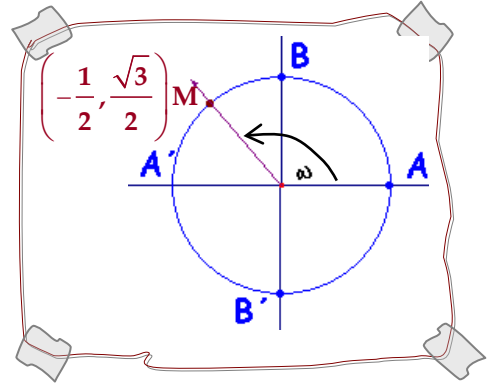
$$OM = \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

(άρα προφανώς το σημείο M ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο).

Οπότε σύμφωνα με τους ορισμούς είναι :

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ και $\eta\mu\omega > 0$ άρα το M βρίσκεται στο II τεταρτημόριο.



4. Αν το M είναι στην τελική πλευρά της γωνίας ω και το $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,347$ και $\epsilon\varphi\omega = 2$ να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο M.

Απάντηση : επειδή $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ και $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} > 0$ άρα θα είναι $\eta\mu\omega < 0$ άρα το M θα είναι στο τρίτο (III) τεταρτημόριο.

5. Αν $\kappa \neq 0$ τότε να δείξετε ότι :

i) $\left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right| \geq 2$

ii) Δεν υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\mu\omega = \kappa + \frac{1}{\kappa}$ ούτε $\sigma\upsilon\nu\omega = \kappa + \frac{1}{\kappa}$.

Απάντηση :

i) Από την Άλγεβρα είναι γνωστό ότι $\left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right|^2 \geq 4 \Leftrightarrow$

$$\left(\kappa + \frac{1}{\kappa}\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa \cdot \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \geq 4 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2 + \frac{1}{\kappa^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2 + \frac{1}{\kappa^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right)^2 \geq 0 \text{ προφανής σχέση.}$$

ii) Αν υπήρχε γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \kappa + \frac{1}{\kappa}$ θα έπρεπε $\left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right| \leq 1$ επειδή $|\eta\mu\omega| \leq 1$, όμως

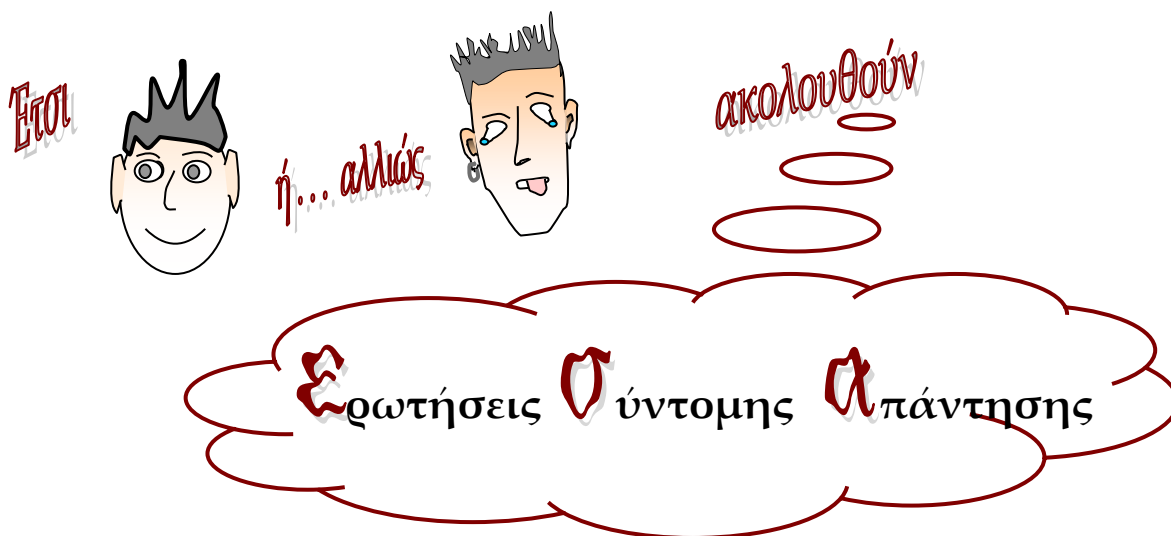
$$\left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right| \leq 1 \text{ είναι άτοπο γιατί όπως δείξαμε προηγούμενα είναι } \left|\kappa + \frac{1}{\kappa}\right| \geq 2.$$

Όμοια και για το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

6. Δίνεται το τριώνυμο $\varphi(x) = 2x^2 - 3x + 5$ με $x \in \mathbb{P}$.
 Να μελετήσετε το πρόσημο του και στη συνέχεια να δείξετε ότι :
 Δεν υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\omega = 2x^2 - 3x + 6$ (ούτε $\sigma\omega = 2x^2 - 3x + 6$)

Απάντηση : Για το πρόσημο του τριωνύμου έχω : $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$ και επειδή $a = 2 > 0$ άρα το $2x^2 - 3x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{P}$

Αν υπήρχε γωνία ω έτσι ώστε $\eta\omega = 2x^2 - 3x + 6$ θα έπρεπε και $2x^2 - 3x + 6 \leq 1$ (επειδή $\eta\omega \leq 1$ ως γνωστόν), όμως $2x^2 - 3x + 6 \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 5 \leq 0$. Από τα πιο πάνω όμως είναι $2x^2 - 3x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{P}$. Άρα δεν μπορεί να υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\omega = 2x^2 - 3x + 6$
 Όμοια και για το $\sigma\omega$.



1. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας (πχ της $\hat{B}$) ορθογωνίου τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$);
2. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;
3. Τι είναι προσανατολισμένη γωνία ;
4. Τι είναι γωνία μεγαλύτερη από 360° , τι σημαίνει γωνία 750° ;
5. Τι πετυχαίνουμε με την επέκταση της έννοιας της γωνίας και σε για γωνίες μεγαλύτερες από 360° ;
6. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τυχαίας οξείας γωνίας (που δεν ανήκει σε ορθογώνιο τρίγωνο) ;
7. Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω με $\omega \geq 360^\circ$ σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων;
8. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας ω όταν $\sigma\omega > 0$ και $\eta\omega < 0$;

9. $A = \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$, $B = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$. Αν $A > 0$ και $B < 0$ σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω ;
10. Τι σχέση έχει η γωνία ω και η γωνία $\theta = 2\kappa\pi + \omega$;
11. Τι σχέση έχουν οι γωνίες $\varphi = 2\kappa\pi + \omega$ και $\theta = 2\lambda\pi + \omega$;
12. Τι σχέση έχουν οι γωνίες ω και θ όταν $\omega - \theta = 2\kappa\pi$;
13. Τι είναι το ακτίνιο (rad) ;
14. Ποιος είναι ο τύπος μετατροπής μοιρών σε ακτίνια και αντίστροφα
15. Από κάποιο μαθητή ζήτησαν να μετατρέψει μια γωνία 30° σε ακτίνια και αυτός απάντησε ως εξής : Ο τύπος μετατροπής είναι $\frac{\mu^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi}$ άρα $\alpha = \frac{30}{180^\circ} \pi = \frac{30}{180^\circ} \pi$ (αφού $\pi = 180^\circ$) άρα $\alpha = 30$ ακτίνια . Είναι σωστή η λάθος η απάντηση και γιατί
16. Τι είναι ο τριγωνομετρικός κύκλος ; τι συντεταγμένες έχει ένα σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο ;
17. Υπάρχει κάποια συνθήκη - περιορισμός που ισχύει για το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας ω και ποια ;
18. Υπάρχει γωνία ω της οποίας όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της να είναι θετικοί και σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική της πλευρά ;
19. Υπάρχει γωνία ω της οποίας **όλοι** οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να είναι αρνητικοί ;
20. Ποια σχέση συνδέει την εφω, (αντίστοιχα την σφω), με το ημω και το συνω ;

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Προσανατολισμένη γωνία είναι η γωνία η οποία είναι θετική ή αρνητική | ☐ | ☐ |
| 2. Μια γωνία 30° είναι ίση και με $\frac{\pi}{4}$ ακτίνια | ☐ | ☐ |
| 3. Η γωνία $\omega = -\frac{7\pi}{4}$ έχει την ίδια τελική πλευρά με την $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ | ☐ | ☐ |
| 4. Η γωνία $\omega = \frac{7\pi}{4}$ έχει την ίδια τελική πλευρά με την $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ | ☐ | ☐ |
| 5. Όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας είναι αρνητικοί στο 3° τεταρτημόριο. | ☐ | ☐ |
| 6. $\text{συν} \frac{\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4} = 1$ | ☐ | ☐ |
| 7. $\text{συν} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ | ☐ | ☐ |
| 8. $\text{σφ}0^\circ$ δεν ορίζεται | ☐ | ☐ |
| 9. $\text{εφ}0^\circ = 0$ | ☐ | ☐ |
| 10. $ \eta\mu\omega \geq 1$ για κάθε ω | ☐ | ☐ |
| 11. $ \text{εφα}\chi \leq 1$ για κάθε χ | ☐ | ☐ |
| 12. $ \text{συν}\chi \leq 1$ και $ \eta\mu\theta \leq 1$ (για κάθε χ και για κάθε θ) | ☐ | ☐ |
| 13. Αν $\eta\mu\chi > 0$ και $\text{συν}\chi < 0$ τότε $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ | ☐ | ☐ |
| 14. Υπάρχει η $\text{εφ}\chi$ και η $\text{σφ}\chi$ για κάθε $\chi \in (0, \frac{\pi}{2})$ | ☐ | ☐ |
| 15. Αν η γωνία φ είναι μεγαλύτερη από 1505° τότε $\eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$ | ☐ | ☐ |
| 16. Υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\text{συν}\omega = \frac{\pi}{3}$ | ☐ | ☐ |
| 17. Υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\mu\omega = \frac{5\pi}{9}$ | ☐ | ☐ |
| 18. Αν μια γωνία είναι αρνητική τότε ένας τουλάχιστον από τους τριγωνομετρικούς της αριθμούς είναι αρνητικός | ☐ | ☐ |

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

Να συμπληρώσεις τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

1. Αν $M(\chi, \psi)$ είναι ένα σημείο στην τελική πλευρά μιας γωνίας ω και $\rho = OM$ (Ο είναι η αρχή του συστήματος των αξόνων) τότε : $\eta\mu\omega = \frac{\chi}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\psi}{\rho}$, $\epsilon\phi\omega = -$, $\sigma\phi\omega = -$.
2. $\eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \dots\dots\dots$, $\epsilon\phi(2\lambda\pi + \omega) = \dots\dots\dots$, $\sigma\phi(2\lambda\pi + \omega) = \dots\dots\dots$, $\sigma\upsilon\nu(2\lambda\pi + \omega) = \dots\dots\dots$
3. Να συμπληρώσεις τα κενά του πίνακα

μοίρες	0°	30°	45°	60°		120°	135°	150°		270°	
ακτίνια		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		2π

4. Να συμπληρώσεις σε κάθε περίπτωση τα πρόσημα των τριγ. αριθμών.

$\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\phi\omega$, $\sigma\phi\omega$	$\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\phi\omega$, $\sigma\phi\omega$
$\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\phi\omega$, $\sigma\phi\omega$	$\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\phi\omega$, $\sigma\phi\omega$

5. Να συμπληρώσεις την σχέση $\frac{\mu^\circ}{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu^\circ}$ όπου μ° και α είναι το μέτρο μιας γωνίας ω σε μοίρες και ακτίνια αντίστοιχα
6. Τριγωνομετρικός είναι ένα κύκλος στον οποίο έχουμε προσαρμόσει ένα σύστημα στο κέντρο του και η ακτίνα του $\rho = \dots\dots\dots$
7. Να συμπληρώσεις τα κενά του πίνακα με τις τιμές της παράστασης $2\sigma\upsilon\nu\omega - 1$

Γωνία ω	0°	$\frac{\pi}{6}$	45°	60°	$\frac{\pi}{2}$
$2\sigma\upsilon\nu\omega - 1$					

8. Να συμπληρώσεις τα κενά του πίνακα με τις τιμές της παράστασης στην κορυφή της κάθε στήλης.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Μοίρες	Ακτίνια	$2\eta\mu\omega - 1$	$\sigma\upsilon\nu\omega + 1$	$3\epsilon\varphi\omega$	$3\sigma\varphi\omega + 1$
0°					
30°					
45°					
60°					
90°					



Ερωτήσεις



Αντιστοίχισης

1. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Αν είναι $B\Gamma = 2A\Gamma$
Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\eta\mu B + 8$	$\frac{19}{3}$
$2\sigma\upsilon\nu\Gamma - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$2\epsilon\varphi^2\Gamma + \epsilon\varphi^2B$	$-\frac{3}{4}$
$\eta\mu^2B - 1$	0
	$\frac{1}{2}$

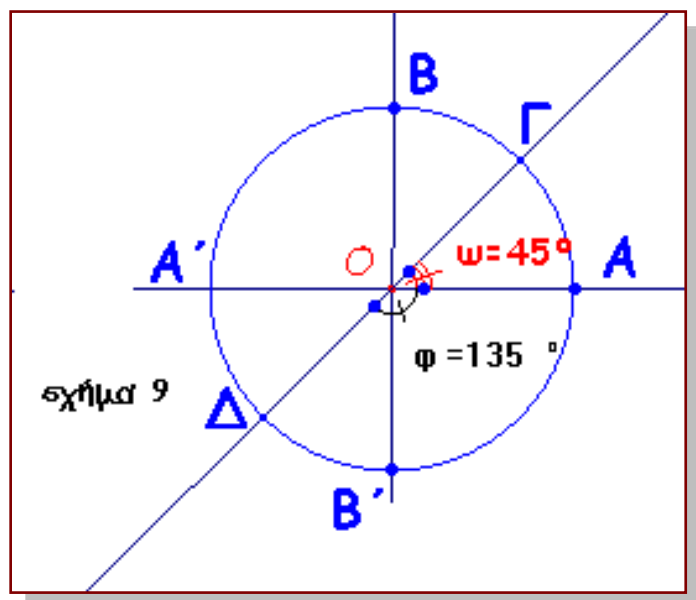
2. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β Πρόσημα
3° τεταρτημόριο	$\left\langle \begin{array}{ccc} \eta\mu\omega & , & \sigma\upsilon\nu\omega & , & \epsilon\phi\omega \\ + & & + & & + \end{array} \right\rangle$
2° τεταρτημόριο	$\left\langle \begin{array}{ccc} \eta\mu\omega & , & \sigma\upsilon\nu\omega & , & \epsilon\phi\omega \\ - & & - & & + \end{array} \right\rangle$
4° τεταρτημόριο	$\left\langle \begin{array}{ccc} \eta\mu\omega & , & \sigma\upsilon\nu\omega & , & \epsilon\phi\omega \\ - & & + & & - \end{array} \right\rangle$
1° τεταρτημόριο	$\left\langle \begin{array}{ccc} \eta\mu\omega & , & \sigma\upsilon\nu\omega & , & \epsilon\phi\omega \\ + & & - & & - \end{array} \right\rangle$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με τη κατάλληλη τιμή σε rad στη στήλη Β.

Στήλη Α Μοίρες	Στήλη Β Ακτίνια
30°	$\frac{\pi}{2}$
765°	$\frac{4\pi}{3}$
270	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{6}$
60°	$8\pi + \frac{\pi}{3}$
1500	$4\pi + \frac{\pi}{4}$
240°	$\frac{3\pi}{2}$

4. Να αντιστοιχίσετε τα γράμματα Α, Γ, Β, Δ, Α', Β' του σχήματος 9 με την κατάλληλη τιμή από την στήλη 1.
(Προσοχή μερικά γράμματα έχουν δύο αντίστοιχες τιμές στη στήλη 1)



Στήλη 1
$-\pi$
2π
$\frac{\pi}{2}$
0
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{3\pi}{4}$



1. Να μετατρέψεις σε ακτίνια τις γωνίες α) 60° , β) -45° , γ) 225° , δ) 2580°

2. Να μετατρέψεις σε μοίρες τις γωνίες $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{27\pi}{4}$

3. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $A = \frac{2\pi}{3}$ και $\Gamma = \frac{\pi}{6}$.

Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου και την σχέση της πλευράς β με την πλευρά γ καθώς και την σχέση που έχει το v_a με την πλευρά γ.

4. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $B = \frac{\pi}{3}$ και $\Gamma = \frac{\pi}{6}$.

Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου και την σχέση της πλευράς α με την πλευρά γ.

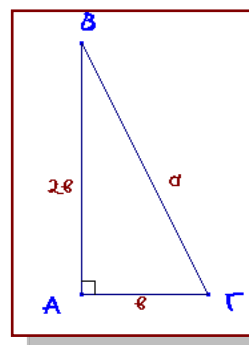
5. Να βρεις τη μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή των παραστάσεων :

i) $3\sigma\upsilon\nu\omega - 2\eta\mu\omega$

ii) $\eta\mu\phi + 3\sigma\upsilon\nu\theta$

iii) $2 - 3\eta\mu\omega + 5\sigma\upsilon\nu\theta$

6. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\eta\mu\varphi = 5\lambda + 3$.
7. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\eta\varphi = -5\lambda - 1$.
8. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\eta\varphi = \lambda^2 - 5\lambda + 5$.
9. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε $\eta\mu\varphi = -\lambda^2 - 5\lambda - 5$.
10. Να βρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :
- i) 390° ii) $\frac{9\pi}{4}$ ακτινίων και iii) $\frac{85\pi}{3}$ ακτινίων
11. Να βρεις τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών
- i) 1125° ii) $\frac{97\pi}{6}$ ακτινίων και ii) $\frac{73\pi}{3}$ ακτινίων
12. Να βρεις την τιμή της παράστασης $\frac{\eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\eta 60^\circ}{\sigma\varphi 60^\circ \eta\mu 90^\circ} - 3\sigma\varphi 30 + 2$
13. Να αποδείξεις ότι $\frac{\sigma\varphi 45^\circ \sigma\upsilon\eta 60^\circ \sigma\upsilon\eta 30^\circ \epsilon\varphi 30^\circ}{\epsilon\varphi 45^\circ \eta\mu 60^\circ \sigma\varphi 60^\circ \eta\mu 30^\circ} = 1$
14. Να βρεις αν υπάρχει γωνία (χωρίς να υπολογισθεί) τέτοια ώστε :
- i) $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$ ii) $\sigma\upsilon\eta\omega = \frac{5}{\sqrt{5}-5}$ iii) $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$
15. Έστω θ τέτοιο ώστε $0 < \theta < \pi$. Να βρεις την τιμή του $\eta\mu\theta$ και στη συνέχεια τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς αν είναι γνωστό ότι $8\epsilon\varphi\theta = 3\eta\mu\theta$
16. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2\kappa\pi + \omega$ όταν είναι γνωστό ότι : το σημείο $M(-\sqrt{3}, -1)$ βρίσκεται στην τελική πλευρά της γωνίας ω .
17. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $2\kappa\pi + \omega$ όταν είναι γνωστό ότι : το σημείο $M(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ βρίσκεται στην τελική πλευρά της γωνίας ω .
18. Να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε :
- i) $\sigma\upsilon\eta^2\varphi \leq 4\sigma\upsilon\eta\varphi - 3$ ii) $\eta\mu^2\varphi \geq \eta\mu\varphi + 2$
19. Δίνεται το τριώνυμο $\varphi(\chi) = 5\chi^2 - 3\chi + 7$ με $\chi \in \mathbb{P}$.
Να μελετήσετε το πρόσημο του και στη συνέχεια να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω έτσι ώστε $\eta\mu\omega = 5\chi^2 - 3\chi + 6$
20. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο είναι $AB = 2\beta$ (δηλαδή η μία κάθετη πλευρά είναι διπλάσια από την άλλη κάθετο. Σ' αυτό λοιπόν το τρίγωνο να βρείτε τους τριγ. Αριθμούς των γωνιών B και Γ



Υποδείξεις Ασκήσεων

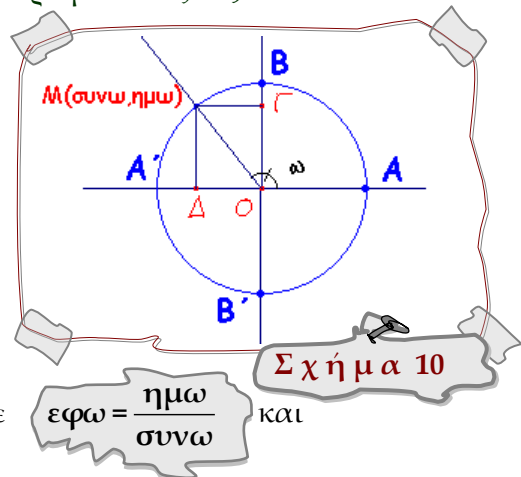
1. Δες παραδείγματα σελίδας 10
2. Δες παραδείγματα σελίδας 10
3. Χρησιμοποίησε τον τύπο $A + B + \Gamma = \pi$ και να υπολογίσεις την B. Το u_α είναι και διχοτόμος ...
4. Χρησιμοποίησε τον τύπο $A + B + \Gamma = \pi$ και να υπολογίσεις την A
5. Δες παραδείγματα σελίδας 10
6. Δες παραδείγματα σελίδας 11
7. Δες παραδείγματα σελίδας 11
8. Δες παραδείγματα σελίδας 11
9. Δες παραδείγματα σελίδας 11
10. Δες παραδείγματα σελίδας 13
11. Δες παραδείγματα σελίδας 13
12. Δες πίνακα σελίδας 12
13. Δες πίνακα σελίδας 12
14. Να εξετάσεις αν ισχύει $\pi\chi \mid \eta\mu\omega \mid \leq 1$ είτε με πράξεις είτε με προσεγγίσεις
15. Αντικατέστησε εφθ με $\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\theta$ με $1 - \eta\mu^2\theta$ και λύσε την εξίσωση
16. Βρες $OM = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$ και μετά χρησιμοποίησε τους ορισμούς
17. Όμοια με πριν
18. Εξέτασε αν η δευτεροβάθμια ανίσωση έχει λύσεις στο $[-1, 1]$
19. Εξέτασε αν η δευτεροβάθμια ανίσωση έχει λύσεις στο $[-1, 1]$
20. α) τρόπος : είναι $\epsilon\phi B = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2}$ άρα $\sigma\phi B = 2$ κλπ ή
β) τρόπος $\alpha = \sqrt{4\beta^2 + \beta^2} = \beta\sqrt{5}$ άρα $\eta\mu B = \dots$

1.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

✓ **Αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου**

Στο διπλανό σχήμα είναι $OM = 1$, $OA = |\sin \omega|$ και $MA = OF = |\eta \mu \omega|$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OMA λόγω Πυθαγορείου Θεωρήματος ισχύει:

$$(MA)^2 + (OA)^2 = (OM)^2 \Leftrightarrow \eta \mu^2 \omega + \sigma \nu \nu^2 \omega = 1$$



Ήδη για την εφω έχει αποδειχθεί ότι όταν $\sigma \nu \nu \omega \neq 0$ τότε

$$\epsilon \phi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma \nu \nu \omega} \text{ και}$$

αντίστοιχα για την σφω όταν $\eta \mu \omega \neq 0$ τότε

$$\sigma \phi \omega = \frac{\sigma \nu \nu \omega}{\eta \mu \omega}$$

Επίσης $\epsilon \phi \omega \cdot \sigma \phi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma \nu \nu \omega} \cdot \frac{\sigma \nu \nu \omega}{\eta \mu \omega} = 1 \Leftrightarrow \epsilon \phi \omega \cdot \sigma \phi \omega = 1$ Οπότε προκύπτουν και οι τύποι

$\sigma \phi \omega = \frac{1}{\epsilon \phi \omega}$ και $\epsilon \phi \omega = \frac{1}{\sigma \phi \omega}$ με την προϋπόθεση βέβαια ότι ορίζονται οι εφω, σφω.

Σημαντικοί για τις πολλές εφαρμογές που έχουν είναι και οι τύποι:

$$A) \quad 1 + \epsilon \phi^2 \omega = \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 \omega} \Leftrightarrow \sigma \nu \nu^2 \omega = \frac{1}{1 + \epsilon \phi^2 \omega}$$

$$\text{Απόδειξη: } 1 + \epsilon \phi^2 \omega = 1 + \frac{\eta \mu^2 \omega}{\sigma \nu \nu^2 \omega} = \frac{\eta \mu^2 \omega + \sigma \nu \nu^2 \omega}{\sigma \nu \nu^2 \omega} = \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 \omega}$$

$$B) \quad 1 + \sigma \phi^2 \omega = \frac{1}{\eta \mu^2 \omega} \Leftrightarrow \eta \mu^2 \omega = \frac{1}{1 + \sigma \phi^2 \omega}$$

$$\text{Απόδειξη: } 1 + \sigma \phi^2 \omega = 1 + \frac{\sigma \nu \nu^2 \omega}{\eta \mu^2 \omega} = \frac{\eta \mu^2 \omega + \sigma \nu \nu^2 \omega}{\eta \mu^2 \omega} = \frac{1}{\eta \mu^2 \omega}$$



Θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε τρεις βασικές κατηγορίες ασκήσεων :

☉ Κατηγορία 1^η

A) Όταν στην άσκηση δίνεται ένα από τα ημω ή συνω και ζητάει να βρεις τους άλλους τριγ. αριθμούς, τότε ξεκινάς **πάντα** από την ταυτότητα : $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και αντικαθιστάς αυτό που σου δίνει, οπότε έχεις μια εξίσωση με άγνωστο τον άλλο τριγωνομετρικό αριθμό.

Παραδείγματα

1. Έστω γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$. Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Απάντηση : Για κάθε γωνία ω είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ άρα $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Προσοχή : η εξίσωση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ δίνει πάντα **δύο λύσεις** είτε ο άγνωστος, όπως εδώ είναι το συνω, είτε ο άγνωστος είναι το ημω, στο σημείο αυτό « έρχεται » ο περιορισμός να σου δείξει ποια από τις δύο λύσεις θα κάνεις δεκτή, δηλαδή στο παράδειγμα επειδή $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$ τότε η γωνία ω

τελειώνει στο 4^ο τεταρτημόριο άρα το συνω είναι θετικό έτσι από τις δύο λύσεις $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\frac{4}{5}$ κάνεις δεκτή την $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$. Αν δεν υπήρχε περιορισμός προφανώς θα έκανα δεκτές και τις δύο λύσεις.

$$\text{Για την εφω έχω : } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \text{ και για την σφω έχω με όμοιο τρόπο } \sigma\varphi\omega = \dots = \frac{4}{3}.$$

Βέβαια την σφω μπορώ να την υπολογίσω (πιο εύκολα) από τον τύπο $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{4} \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega = \frac{4}{3}$$

2. Έστω γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$. Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Απάντηση : Για κάθε γωνία ω είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ άρα $\eta\mu^2\omega + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ άρα

$$\eta\mu^2\omega + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ τότε η γωνία ω τελειώνει στο 3^ο τεταρτημόριο άρα το ημω είναι αρνητικό έτσι

από τις δύο λύσεις $\eta\mu\omega = \pm\frac{4}{5}$ κάνεις δεκτή την $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Για την εφω έχω } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \text{ και για την σφω έχω με όμοιο τρόπο } \sigma\varphi\omega = \dots = -\frac{3}{4}.$$

B) Στην περίπτωση που μου δίνει την εφαπτομένη ή την συνεφαπτομένη ξεκινάω από τον τύπο $\text{συν}^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ αν μου δίνει την εφω και υπολογίζω το συνω ή αν μου δίνει την σφω ξεκινάω από τον τύπο $\eta\mu^2\omega = \frac{1}{1+\sigma\varphi^2\omega}$ και υπολογίζω το ημω και μετά και τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

- 3.** Έστω γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$ και $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω

Απάντηση: Είναι $\text{συν}^2\omega = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \frac{1}{\frac{25}{16}} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \text{συν}\omega = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$.

Από τον περιορισμό $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ «βλέπω» ότι η γωνία ω τελειώνει στο 1° τεταρτημόριο άρα $\text{συν}\omega > 0$ οπότε δεκτή η λύση $\text{συν}\omega = \frac{4}{5}$.

Τότε μπορώ να υπολογίσω το ημω με δύο τρόπους :

α) Από τον τύπο $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$ (που σημαίνει ότι θα βρω δύο λύσεις και θα χρειαστώ τον περιορισμό) . (κλασικός τρόπος)

β) Μπορώ να χρησιμοποιήσω τον τύπο $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega}$, τότε είναι $\eta\mu\omega = \varepsilon\varphi\omega \cdot \text{συν}\omega \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\omega = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \text{ και από τον τύπο } \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \text{ έχω } \frac{3}{4} \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega = \frac{4}{3}$$

 **Συμβουλή** Να ακολουθείς αυτό τον τρόπο που είναι ο εύκολος

☉ **Κατηγορία 2^η** Τις ασκήσεις που ζητούν να αποδείξεις μια ταυτότητα π.χ.

Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{1}{\eta\mu^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega}$

ή να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{1}{\eta\mu^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega}$, που ουσιαστικά είναι το ίδιο πράγμα, τις

αντιμετωπίζεις **αποκλειστικά** (με αλγεβρικούς) μετασχηματισμούς και χρήση των γνωστών

τριγωνομετρικών ταυτοτήτων $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\eta\mu\omega}$, $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$, $\text{συν}^2\omega =$

$$\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}, \eta\mu^2\omega = \frac{1}{1+\sigma\varphi^2\omega}$$

- 4.** Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{1}{\eta\mu^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega}$

Λύση : Ξεκινάω από το 1° μέλος, κάνω τα κλάσματα ομώνυμα και έχω : $\frac{1}{\eta\mu^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega} =$

$$\frac{\text{συν}^2\omega}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega} + \frac{\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega} = \frac{\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega \cdot \text{συν}^2\omega}$$

• **Συμβουλή** → Μερικές φορές μέσα σε άσκηση χρειάζεται να χρησιμοποιήσεις «ανάποδα» μια ταυτότητα, πχ ενώ κατά κανόνα αντικαθιστούμε το $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega$ με το 1, ορισμένες φορές αντικαθιστούμε το 1 με $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega$ ή αντικαθιστούμε το 1 με $\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega$ ή αντικαθιστούμε το $\sigma\varphi\omega$ με $\frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$

• **Υπενθύμιση** → Όταν θέλω να αποδείξω μια ισότητα ή μια ανισότητα τότε :
ευθεία απόδειξη σημαίνει «ξεκινάω από το 1^ο μέλος και με πράξεις καταλήγω στο 2^ο» μέλος
ή «ξεκινάω από το 2^ο μέλος και με πράξεις καταλήγω στο 1^ο» μέλος.
Έμμεση απόδειξη σημαίνει «κάνω πράξεις και στα δύο μέλη και καταλήγω στο ίδιο αποτέλεσμα.
Πολλές φορές επίσης ξεκινάω υποθέτοντας ότι η σχέση που θέλω να αποδείξω ισχύει και κάνοντας πράξεις καταλήγω σε κάτι προφανές και υπάρχει πάντα η «πανάκεια» που είναι η απαγωγή σε άτοπο

5. Να αποδειχθεί η ισότητα $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega + 1 = \frac{2\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1}$

Λύση : Έστω ότι $\frac{2\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega + 1 \Leftrightarrow$

$$2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1)(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega + 1) \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = [(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) - 1][(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) + 1] \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 - 1^2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 1 + 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \text{ προφανής.}$$

6. Να αποδειχθεί η ισότητα $\epsilon\varphi^2\omega = \frac{1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega}{1 - \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi^2\omega}$

Λύση : $\epsilon\varphi^2\omega = \frac{1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega}{1 - \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi^2\omega} \Leftrightarrow 1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega = (1 - \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi^2\omega)\epsilon\varphi^2\omega \Leftrightarrow$

$$1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega = \epsilon\varphi^2\omega - \sigma\varphi\omega \epsilon\varphi^2\omega + \sigma\varphi^2\omega \epsilon\varphi^2\omega \Leftrightarrow$$

$$1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega = \epsilon\varphi^2\omega - \sigma\varphi\omega \epsilon\varphi\omega \epsilon\varphi\omega + 1 \Leftrightarrow 1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega = \epsilon\varphi^2\omega - 1 \epsilon\varphi\omega + 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega = \epsilon\varphi^2\omega - \epsilon\varphi\omega + 1 \text{ προφανής}$$

7. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\epsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega + \epsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega}$

Λύση : $\frac{\epsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega + \epsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta = \sigma\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\theta \cdot \epsilon\varphi\theta \Leftrightarrow$

$$1 + \sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta = \sigma\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\omega + 1 \text{ προφανής}$$

8. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\theta} = \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\theta$

Λύση : $\frac{\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\theta} = \frac{\frac{1}{\sigma\varphi\omega} + \frac{1}{\sigma\varphi\theta}}{\frac{\sigma\varphi\theta + \sigma\varphi\omega}{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta}} = \frac{\frac{\sigma\varphi\theta + \sigma\varphi\omega}{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta}}{\frac{\sigma\varphi\theta + \sigma\varphi\omega}{(\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi\theta)\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta}} = \frac{1}{\sigma\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\theta} =$

$$\frac{1}{\sigma\varphi\omega} \cdot \frac{1}{\sigma\varphi\theta} = \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\theta \text{ προφανής}$$

9. Να αποδειχθεί η ισότητα $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}$

Λύση : $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}$

10. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$

Λύση : $\frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\eta\mu^2\chi + (1+\sigma\upsilon\nu\chi)^2}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{\eta\mu^2\chi + 1^2 + 2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} =$

$$\frac{1+1+2\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{2+2\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\chi)}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$$

11. Αν $0 \leq \chi < \frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}} = \frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Λύση : Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή του 1ου μέλους με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έχω :

$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi}} = \frac{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})}{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})} =$$

$$\frac{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})^2}{(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\chi})^2 - (\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\chi})^2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi + 2\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu\chi)(1-\sigma\upsilon\nu\chi)} + 1-\sigma\upsilon\nu\chi}{(1+\sigma\upsilon\nu\chi) - (1-\sigma\upsilon\nu\chi)} =$$

$$\frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{2\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2(1+\sqrt{\eta\mu^2\chi})}{2\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1+|\eta\mu\chi|}{\sigma\upsilon\nu\chi} \text{ και επειδή } 0 \leq \chi < \frac{\pi}{2} \text{ άρα } \eta\mu\chi \geq 0 \text{ άρα } |\eta\mu\chi| = \eta\mu\chi \text{ άρα}$$

$$\frac{1+|\eta\mu\chi|}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

12. Να βρεθούν τα τόξα χ για τα οποία ισχύει : $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$.

Λύση : Θέτω $\lambda = \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$. Θα πρέπει $|\lambda| \leq 1$ και επειδή είναι $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$. Θα πρέπει και $\lambda^2 + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε είναι $\left|\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \leq 1$.

Αν

ι) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε όπως φαίνεται από τον «γνωστό μας» πίνακα θα πρέπει $\chi = 45^\circ$

ιι) $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε όπως θα μάθουμε πιο κάτω είναι $\chi = -135^\circ$

Παρατήρηση : Αν σε μια άσκηση ζητάει να εξετάσουμε αν υπάρχει ω ή αν λέει «Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ω » τέτοιο ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = \alpha$ (όπου α συγκεκριμένος αριθμός $\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$) τότε αν $|\alpha| \leq 1$

απαντάω ως εξής : Έστω ότι υπάρχει ω με $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = \alpha$, επειδή $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θα πρέπει $\alpha^2 + \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 1$ αντικαθιστώ το α , κάνω πράξεις και καταλήγω συνήθως σε

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ που είναι άτοπο αφού } \alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

13. Να εξετάσεις αν υπάρχει ω έτσι ώστε $\eta\omega = \sigma\omega = 1$

Λύση : Έστω ότι υπάρχει ω με $\eta\omega = \sigma\omega = 1$, τότε επειδή $\eta\omega^2 + \sigma\omega^2 = 1$ θα πρέπει $1^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο

Παρατήρηση : Αν σε μια άσκηση ζητάει να εξετάσουμε αν υπάρχει ω ή αν λέει «Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ω » τέτοιο ώστε $\eta\omega = f(\alpha)$, $\sigma\omega = g(\alpha)$ όπου α τυχαίος αριθμός (παράμετρος) τότε απαντάω ως εξής : Έστω ότι υπάρχει ω με $\eta\omega = f(\alpha)$, $\sigma\omega = g(\alpha)$, τότε

$$1^{\text{ov}} |f(\alpha)| \leq 1 \text{ και } |g(\alpha)| \leq 1 \quad (\text{I})$$

2^{ov} επειδή $\eta\omega^2 + \sigma\omega^2 = 1$ θα πρέπει $[f(\alpha)]^2 + [g(\alpha)]^2 = 1$ (II). Στη συνέχεια λύνω την (II) και

αν υπάρχουν λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τους περιορισμούς (I) απαντάω πως ναι υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε ... αλλιώς απαντάω πως δεν υπάρχει γωνία ω ...

Πχ

14. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\omega = \frac{2\kappa}{\kappa-1}$ και

$$\sigma\omega = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}.$$

Λύση : Πρέπει $1^{\text{ov}} \left| \frac{2\kappa}{\kappa-1} \right| \leq 1$, $\left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right| \leq 1$ (I) και $2^{\text{ov}} \left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} \right)^2 + \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right)^2 = 1$

$$\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} \right)^2 + \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(2\kappa)^2}{(\kappa-1)^2} + \frac{(\kappa+1)^2}{(\kappa-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 4\kappa^2 + \kappa^2 + 2\kappa + 1 = \kappa^2 - 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$

$$4\kappa^2 + 4\kappa = 0 \Leftrightarrow 4\kappa(\kappa+1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = -1$$

Όπως εύκολα μπορούμε να ~~α~~ το $\kappa = 0$ αλλά και το $\kappa = -1$ ικανοποιούν τους περιορισμούς (I) άρα υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\omega = \frac{2\kappa}{\kappa-1}$ και $\sigma\omega = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$.

15. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία χ τέτοια ώστε $\eta\chi = \alpha + 1$ και $\sigma\chi = 2\alpha - 1$.

Λύση : Πρέπει $1^{\text{ov}} |\alpha+1| \leq 1$, $|2\alpha-1| \leq 1$ (I) και $2^{\text{ov}} (\alpha+1)^2 + (2\alpha-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ (1). Επειδή όμως $\Delta = \dots - 16 < 0$ η (1) δεν έχει λύσεις για το α άρα δεν υπάρχει γωνία χ τέτοια ώστε ...

☉ **Κατηγορία 3^η** Οι ασκήσεις που σου δίνει το $\eta\mu\chi + \sigma\mu\chi = \kappa$ και ζητάει να βρεις το $\eta\mu\chi \cdot \sigma\mu\chi$ ή να βρεις το $\eta\mu\chi - \sigma\mu\chi$ και γενικότερα όταν σου δίνει μια από τις

$$A = \eta\mu\chi + \sigma\mu\chi$$

τρεις παραστάσεις $B = \eta\mu\chi - \sigma\mu\chi$ και σου ζητάει να βρεις τις άλλες δύο

$$\Gamma = \eta\mu\chi \cdot \sigma\mu\chi$$

μπορείς να κάνεις τα εξής : Ξεκινώντας από το $A = \eta\mu\chi + \sigma\mu\chi$ έχεις $A^2 = (\eta\mu\chi + \sigma\mu\chi)^2 \Leftrightarrow$

$$A^2 = \eta^2\chi + 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\mu\chi + \sigma^2\chi \Leftrightarrow A^2 = 1 + 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\mu\chi \Leftrightarrow A^2 = 1 + 2\Gamma$$

Όμοια $B = \eta\mu\chi - \sigma\mu\chi \Leftrightarrow B^2 \dots = 1 - 2\Gamma$ οπότε στη ουσία έχεις ένα σύστημα με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους A, B, Γ .

πχ

16. Αν σου δίνει $B = \eta\mu\chi - \sigma\mu\chi = \frac{1}{5}$ (1) και ζητάει να βρεις

το $A = \eta\mu\chi + \sigma\mu\chi$ και το $\Gamma = \eta\mu\chi \cdot \sigma\mu\chi$ τότε από την $\Leftrightarrow B^2 = (\eta\mu\chi - \sigma\mu\chi)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$1 - 2\Gamma = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 2\Gamma = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \Gamma = \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{12}{25}$$

$$\text{και } A = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow A^2 = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A^2 = 1 + 2\Gamma \Leftrightarrow A^2 = 1 + 2 \cdot \frac{12}{25} \Leftrightarrow$$

$$A^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Leftrightarrow A = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \pm \frac{7}{5}$$

17. Δίνεται $\Gamma = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ να βρείτε τα $A = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$, και

$$B = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta.$$

Λύση : Έστω $A = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$ και $B = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$. Τότε $A^2 = (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$$A^2 = 1 + 2\Gamma \Leftrightarrow A^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow A^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \pm \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$\text{Όμοια } B^2 = (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \Leftrightarrow B^2 \dots = 1 - 2\Gamma \Leftrightarrow B^2 = 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow B^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$B = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = \pm \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Σημείωση → Κάθε παράσταση που είναι **συμμετρική** ως προς $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$ μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση του $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$ και του $\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ και τελικά μόνο του ενός από τα δύο επειδή όπως πιο πάνω όταν ξέρουμε το ένα υπολογίζουμε και το άλλο όπως $\pi\chi$

$$\text{Αν } \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha \text{ τότε } (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha^2 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\alpha^2 - 1}{2} \text{ οπότε : } \dots\dots$$

18. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi$

Λύση : Για το $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi$ θα χρησιμοποιήσω την ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \text{ οπότε έχω } (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^3 = \alpha^3 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi + 3\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) = \alpha^3 \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = \alpha^3 - 3 \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{2} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi = \frac{2\alpha^3 - 3\alpha^3 + 3\alpha}{2} = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha}{2}$$

Ερωτήσεις

Σωστού -

Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

1. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Σ Λ
☐ ☐

2. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ ☐

3. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$  
4. Επειδή $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$ άρα υπάρχει γωνία θ έτσι ώστε $\eta\mu\theta = \frac{3}{7}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{7}$  
5. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\epsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$  
6. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\epsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$  
7. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\epsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$  
8. Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\epsilon\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  
9. Ισχύει η ισότητα $\eta\mu^2\chi(1 + \sigma\varphi^2\chi) = 1$ για κάθε χ  
10. Ισχύει η ισότητα $\sigma\upsilon\nu^2\chi(1 + \epsilon\varphi^2\chi) = 1$ για κάθε χ  



1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν είναι

i) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{4}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$

ii) $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

2. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν είναι

i) $\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$

ii) $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

3. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν είναι

i) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ ii) $\sigma\varphi\omega = -\sqrt{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

4. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω αν είναι

i) $\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ ii) $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

5. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας χ αν είναι

i) $\varepsilon\varphi\chi = -1$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ ii) $\sigma\varphi\omega = -2$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

6. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1-\varepsilon\varphi\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\varphi\chi} = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$

7. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $(1 - \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 2(1 - \eta\mu\alpha)(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)$

8. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha} = 1 - 2\eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

9. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $(1 - \varepsilon\varphi\omega)^2 + (1 - \sigma\varphi\omega)^2 = \left(\frac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega} \right)^2$

10. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\eta\mu^2\chi(1 + \sigma\varphi^2\chi) + \sigma\upsilon\nu^2\chi(1 + \varepsilon\varphi^2\chi) = 2$

11. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\eta\mu^2\chi(1 + \sigma\varphi^2\chi)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\chi(1 + \varepsilon\varphi^2\chi)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

12. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\varepsilon\varphi\chi(1 - \sigma\varphi^2\chi) + \sigma\varphi\chi(1 - \varepsilon\varphi^2\chi) = 0$

13. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\eta\mu^2\chi\varepsilon\varphi\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi\sigma\varphi\chi = \varepsilon\varphi\chi - \sigma\varphi\chi$

14. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi}{\varepsilon\varphi\chi} = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi$

15. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\sigma\varphi\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\varphi\chi} = 1 + \eta\mu\chi$

16. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\sigma\varphi^2\omega - 1}{\sigma\varphi^2\omega + 1} = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega$

17. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\sigma\varphi^2\omega + \sigma\varphi^4\omega = \frac{1}{\eta\mu^4\omega} - \frac{1}{\eta\mu^2\omega}$

18. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi$
[υπόδειξη : χρησιμοποιείσαι την ταυτότητα $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$]

19. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi$

20. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1}{\eta\mu\omega}$

21. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\frac{1}{\sigma\varphi\omega} + \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$.
22. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{\alpha^2}{2} - 1$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\alpha}{2}$.
23. Να βρείτε για ποιες τιμές του α υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{\alpha}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3\alpha}{2}$.
24. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία χ τέτοια ώστε $\eta\mu\chi = \alpha + 1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha - 1$.



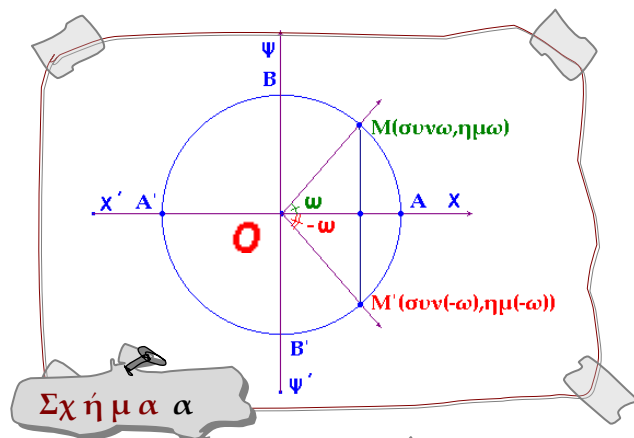
1. Δες παραδείγματα 1 και 2 σελίδας 27
 2. Δες παραδείγματα 1 και 2 σελίδας 27
 3. Δες παραδείγματα 3 σελίδας 28
 4. Δες παραδείγματα 3 σελίδας 28
 5. Δες παραδείγματα 3 σελίδας 28
- Για τις ασκήσεις από 6 έως 16 δες τα παραδείγματα από 4 έως 11
17. Δες παραδείγματα 16, 17, 18 σελίδας 30
 18. Δες παραδείγματα 16, 17, 18 σελίδας 30
 19. Δες παραδείγματα 16, 17, 18 σελίδας 30
 20. Δες παραδείγματα 16, 17, 18 σελίδας 30
 21. Δες παραδείγματα 16, 17, 18 σελίδας 30
 22. Δες παραδείγματα 14, 15, σελίδας 30
 23. Δες παραδείγματα 14, 15, σελίδας 30

1.3 Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο

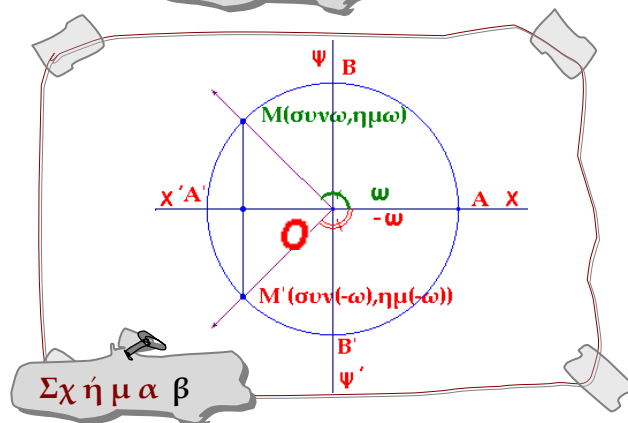
Γωνίες αντίθετες

Συμβολισμός: ω και $-\omega$

Οι εικόνες τους πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο θα είναι όπως στο σχήμα α



ή όπως στο σχήμα β



Και στις δύο περιπτώσεις είναι φανερό ότι τα σημεία $M(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$ και $M'(\sigma\upsilon\nu(-\omega), \eta\mu(-\omega))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi'\chi$ οπότε οι συντεταγμένες τους συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

Δηλαδή οι Αντίθετες γωνίες έχουν:

Τα ίδια συνημίτονα και **αντίθετα όλα τα άλλα**

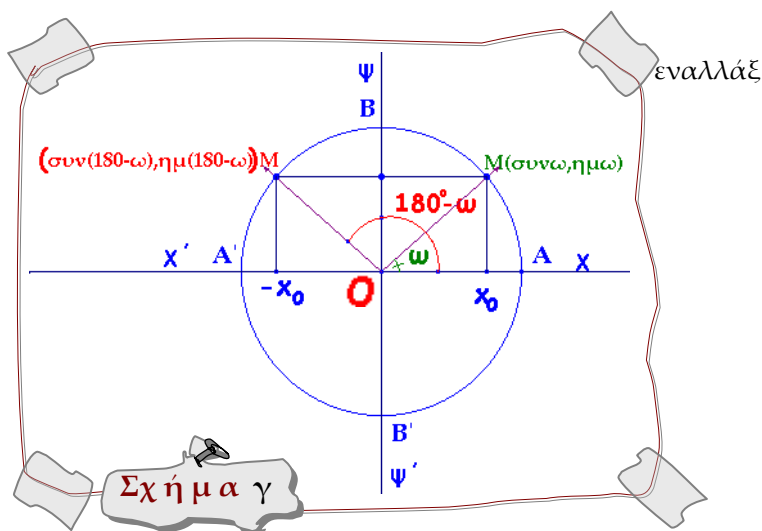
- Παραπληρωματικές γωνίες**

(Γωνίες με άθροισμα 180° ή π ακτίνια)

(Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε το 180° και το π για να συνηθίσουμε τον νέο συμβολισμό)

Συμβολισμός: ω και $180^\circ - \omega$
ή ω και $\pi - \omega$

Οι εικόνες τους πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο θα είναι όπως στο **σχήμα γ**



Είναι φανερό ότι τα σημεία $M(\sin \omega, \cos \omega)$ και $M'(\sin(180^\circ - \omega), \cos(180^\circ - \omega))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $\psi'\psi$ οπότε οι συντεταγμένες τους συνδέονται με τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} \eta\mu(\pi - \omega) &= \eta\mu\omega & \sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\varphi(\pi - \omega) &= -\epsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(\pi - \omega) &= -\sigma\varphi\omega \end{aligned}$$

Δηλαδή οι Παραπληρωματικές γωνίες έχουν :

Τα ίδια ημίτονα και **αντίθετα όλα τα άλλα**

Παρατήρηση : Είναι $2\kappa\pi + (\pi - \omega) = (2\kappa + 1)\pi - \omega$ οπότε

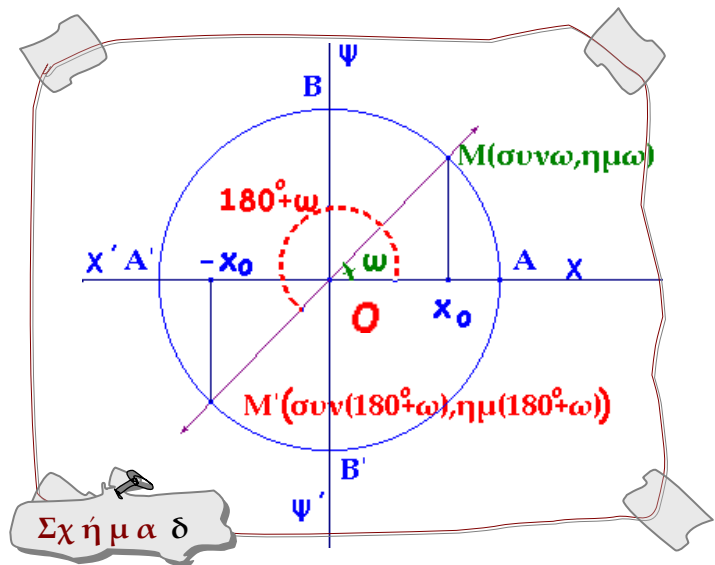
$\eta\mu[(2\kappa + 1)\pi - \omega] = \eta\mu[2\kappa\pi + (\pi - \omega)] = \eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$ και όμοια υπολογίζονται και οι υπόλοιποι τριγ. αριθμοί

- Γωνίες με διαφορά 180° ή π ακτίνια

Συμβολισμός: ω και $180^\circ + \omega$

ή ω και $\pi + \omega$

Οι εικόνες τους πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο θα είναι όπως στο σχήμα δ



Είναι φανερό ότι τα σημεία $M(\sigma\upsilon\nu\omega, \eta\mu\omega)$ και $M'(\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega), \eta\mu(180^\circ + \omega))$ είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$ (κέντρο των αξόνων $x'x$ και $\psi'\psi$) οπότε οι συντεταγμένες τους συνδέονται με τις σχέσεις :

$$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

Δηλαδή οι γωνίες ω και $180^\circ + \omega$ έχουν :

αντίθετα **ημίτονα** και **συνημίτονα** ίδια όλα τα άλλα

Παρατήρηση : Είναι $2\kappa\pi + (\pi + \omega) = (2\kappa + 1)\pi + \omega$ οπότε

$\eta\mu[(2\kappa + 1)\pi + \omega] = \eta\mu[2\kappa\pi + (\pi + \omega)] = \eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$ και όμοια υπολογίζονται και οι υπόλοιποι τριγ. αριθμοί

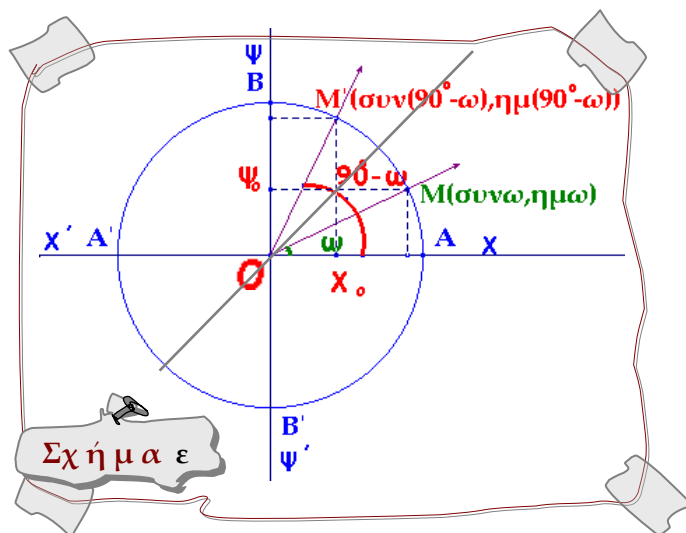
- Συμπληρωματικές γωνίες

(Γωνίες με άθροισμα 90° ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια)

Συμβολισμός: ω και $90^\circ - \omega$

ή ω και $\frac{\pi}{2} - \omega$

Οι εικόνες τους πάνω στον
τριγωνομετρικό κύκλο θα είναι
όπως στο **σχήμα ε**



Είναι φανερό ότι τα σημεία $M(\sin \omega, \cos \omega)$ και $M'(\sin(90^\circ - \omega), \cos(90^\circ - \omega))$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου οπότε οι συντεταγμένες τους συνδέονται με τις σχέσεις :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sin \omega$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \cos \omega$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \cot \omega$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \tan \omega$$

Δηλαδή οι Συμπληρωματικές γωνίες έχουν :

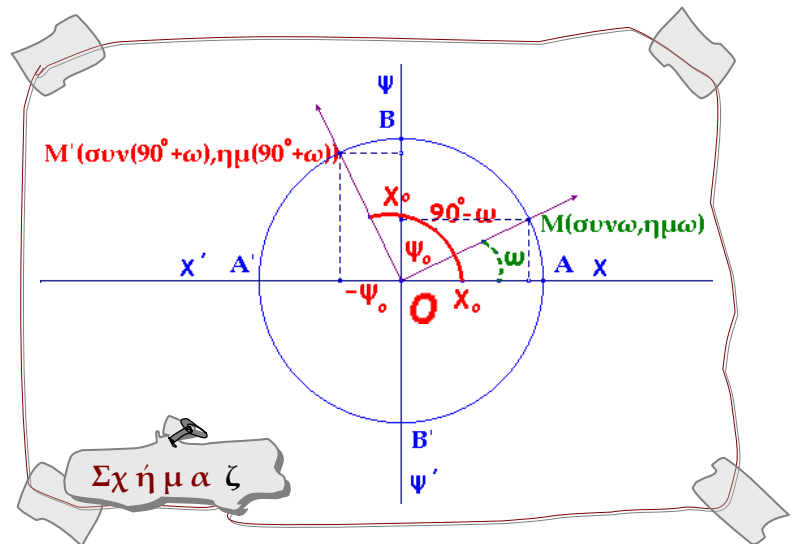
Το ημίτονο της μιας ίσο με το συνημίτονο της άλλης

Την εφαπτομένη της μιας ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης

- Γωνίες με διαφορά 90° ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια
(μια ξεχασμένη περίπτωση)

Συμβολισμός: ω και $90^\circ + \omega$
ή ω και $\frac{\pi}{2} + \omega$

Οι εικόνες τους πάνω στον
τριγωνομετρικό κύκλο θα είναι όπως
στο σχήμα ζ



Είναι φανερό ότι τα σημεία $M(\cos \omega, \sin \omega)$ και $M'(\cos(90^\circ + \omega), \sin(90^\circ + \omega))$ έχουν $X_M = Y_{M'}$ και $Y_M = -X_{M'}$, οπότε οι συντεταγμένες τους συνδέονται με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \omega) &= \cos \omega & \cos(90^\circ + \omega) &= -\sin \omega \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \omega) &= \cos \omega & \cos(\frac{\pi}{2} + \omega) &= -\sin \omega \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Μπορούμε στην περίπτωση της γωνίας $90^\circ + \omega$ να

χρησιμοποιούμε κατάλληλα τον μετασχηματισμό

$$90^\circ + \omega = 180^\circ - (90^\circ - \omega) \text{ ή}$$

αντίστοιχα :

$$\frac{\pi}{2} + \omega = \pi - (\frac{\pi}{2} - \omega).$$

Αν προσθέσουμε και τους τύπους

$$\sin(\text{kg}360^\circ + \omega) = \sin \omega, \quad \cos(\text{kg}360^\circ + \omega) = \cos \omega$$

$$\sin(\text{kg}360^\circ + \omega) = \sin \omega, \quad \cos(\text{kg}360^\circ + \omega) = \cos \omega$$

που αφορά τις γωνίες που διαφέρουν κατά ακέραιο αριθμό περιφερειών τότε ισχύει ο πιο κάτω πίνακας I :

Πίνακας I

Γωνίες με την ίδια τελική πλευρά ω και $2\kappa\pi + \omega$	$\eta\mu(2\kappa\pi + \omega) = \eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ $\epsilon\varphi(2\kappa\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(2\kappa\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$ Όλα ίδια
Γωνίες Αντίθετες ω και $-\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$ Τα ίδια συνημίτονα και αντίθετα όλα τα άλλα
Παραπληρωματικές γωνίες ω και $\pi - \omega$	$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ $\epsilon\varphi(\pi - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega$ Τα ίδια ημίτονα και αντίθετα όλα τα άλλα
Γωνίες με διαφορά 180° ή π ακτίνια ω και $\pi + \omega$	$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ $\epsilon\varphi(\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi(\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$ Αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα ίδια όλα τα άλλα
Συμπληρωματικές γωνίες Γωνίες με άθροισμα 90° ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια ω και $\frac{\pi}{2} - \omega$	$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$ $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$, $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\omega$ Το ημίτονο της μιας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης Η εφαπτομένη της μιας είναι ίση με τη συνεφαπτομένη της άλλης
Γωνίες με διαφορά 90° ή $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια ω και $\frac{\pi}{2} + \omega$	$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$ $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\omega$, $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$

Παρατήρηση 1 → Τα ζεύγη των γνωστών συμπληρωματικών γωνιών είναι $(0^\circ, 90^\circ), (30^\circ, 60^\circ), (45^\circ, 45^\circ)$

ή $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ αντίστοιχα.

Οπότε γι' αυτά τα ζεύγη θα είναι :

0°	90°
ημ0°	ημ90°
συν0°	συν90°
εφ0°	εφ90°
σφ0°	σφ90°

45°	45°
ημ45°	ημ45°
συν45°	συν45°
εφ45°	εφ45°
σφ45°	σφ45°

30°	60°
ημ30°	ημ60°
συν30°	συν60°
εφ30°	εφ60°
σφ30°	σφ60°

Παρατήρηση 2 → Όπως θα δούμε οι πιο πάνω τύποι θα μας φανούν χρήσιμοι κυρίως σε δυο περιπτώσεις : Πρώτον για να υπολογίζουμε τους τριγων. αριθμούς πολλών γωνιών χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας πίνακα τριγων. αριθμών της σελ 12 και δεύτερον για να απλοποιούμε παραστάσεις αντικαθιστώντας πχ το **συν135°** με το ίσον του από το 1° τεταρτημόριο που είναι το $-\text{συν}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Παρατήρηση 3 → Όταν το τόξο είναι της μορφής :

- $2\lambda\pi + \theta$ δεν υπάρχει καμία αλλαγή στους τριγ. αριθμούς πχ είναι $\eta\mu(4\pi + \theta) = \eta\mu\theta$ κλπ,
- $\pi - \theta$ ή $\pi + \theta$ αν υπάρχει αλλαγή θα είναι στο πρόσθετο μόνο πχ $\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta$, $\epsilon\phi(\pi - \theta) = -\epsilon\phi\theta$, $\epsilon\phi(\pi + \theta) = -\epsilon\phi\theta$ κλπ
- $\frac{\pi}{2} - \theta$ ή $\frac{\pi}{2} + \theta$ υπάρχει αλλαγή στον τριγ. αριθμό και ίσως και στο πρόσθετο

πχ $\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\sigma\phi(\frac{\pi}{2} - \theta) = \epsilon\phi\theta$, $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\eta\mu\theta$ κλπ

Παραδείγματα :

1. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $\omega = \pi$

ii) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

iii) $\theta = 2\pi$

Λύση: i) είναι $\eta\mu\pi = \eta\mu 180^\circ = \eta\mu 0^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu\pi = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -\sigma\upsilon\nu 0^\circ = -1$

$\epsilon\varphi\pi = \epsilon\varphi 180^\circ = -\epsilon\varphi 0^\circ = 0$, $\sigma\varphi\pi = \sigma\varphi 180^\circ = -\sigma\varphi 0^\circ = \text{δεν ορίζεται}$

ii) είναι $\eta\mu \frac{3\pi}{2} = \eta\mu 270^\circ = \eta\mu(360^\circ - 90^\circ) = \eta\mu(-90^\circ) = -\eta\mu 90^\circ = -1$,

$\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu 270^\circ = \sigma\upsilon\nu(360^\circ - 90^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-90^\circ) = \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$

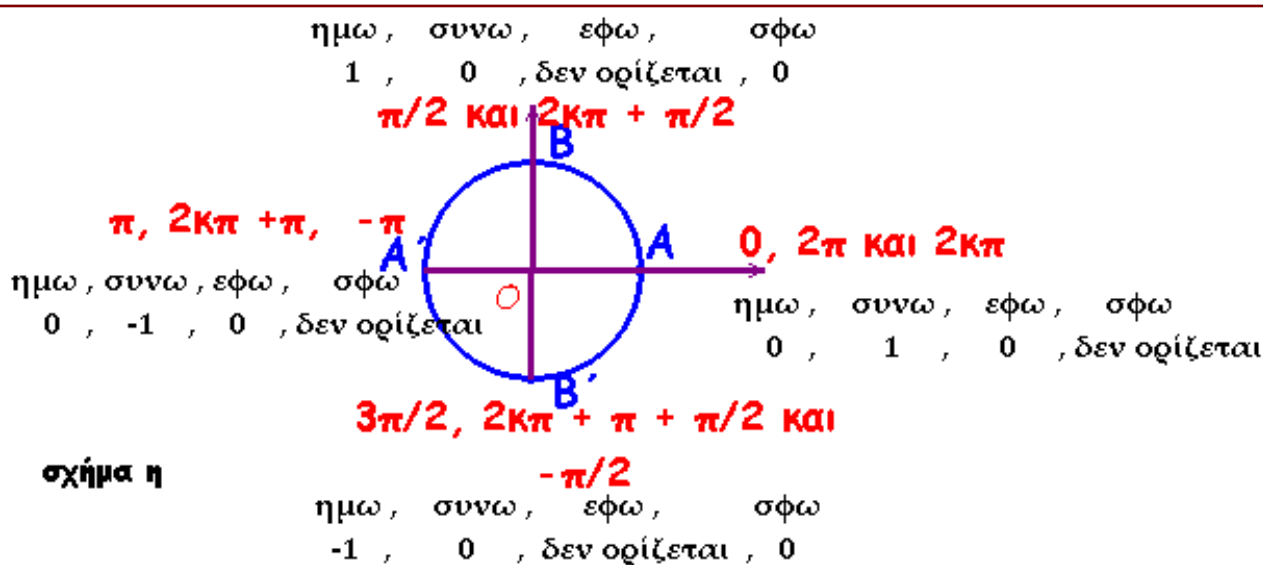
$\epsilon\varphi \frac{3\pi}{2} = \epsilon\varphi 270^\circ = \epsilon\varphi(360^\circ - 90^\circ) = \epsilon\varphi(-90^\circ) = -\epsilon\varphi 90^\circ = \text{δεν ορίζεται}$

$\sigma\varphi \frac{3\pi}{2} = \sigma\varphi 270^\circ = \sigma\varphi(360^\circ - 90^\circ) = \sigma\varphi(-90^\circ) = -\sigma\varphi 90^\circ = 0$

iii) είναι $\eta\mu 2\pi = \eta\mu 360^\circ = \eta\mu 0^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu 2\pi = \sigma\upsilon\nu 360^\circ = \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$

$\epsilon\varphi 2\pi = \epsilon\varphi 360^\circ = \epsilon\varphi 0^\circ = 0$, $\sigma\varphi 2\pi = \sigma\varphi 360^\circ = \sigma\varphi 0^\circ = \text{δεν ορίζεται}$

Μετά απ' αυτό έχουμε υπολογίσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς όλων των τόξων που τελειώνουν στα A, B, A', B', σημεία στα οποία οι άξονες τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο. Τα σημεία A, B, A', B', τα τόξα που τελειώνουν σ' αυτά και οι αντίστοιχοι τριγωνομετρικοί αριθμοί φαίνονται ακριβώς στο **σχήμα η**



2. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $-\pi$ ii) $-\frac{\pi}{2}$

Λύση: i) είναι $\eta\mu(-\pi) = \eta\mu(-180^\circ) = -\eta\mu 180^\circ = 0$, $\sigma\upsilon\nu(-\pi) = \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -\sigma\upsilon\nu 0^\circ = -1$

$\epsilon\varphi(-\pi) = \epsilon\varphi(-180^\circ) = -\epsilon\varphi 180^\circ = 0$, $\sigma\varphi(-\pi) = \sigma\varphi(-180^\circ) = -\sigma\varphi 0^\circ = \text{δεν ορίζεται}$

ii) είναι $\eta\mu(-\frac{\pi}{2}) = \eta\mu(-90^\circ) = -\eta\mu 90^\circ = -1$, $\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu(-90^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$

$\epsilon\varphi(-\frac{\pi}{2}) = \epsilon\varphi(-90^\circ) = -\epsilon\varphi 90^\circ = \text{δεν ορίζεται}$, $\sigma\varphi(-\frac{\pi}{2}) = \sigma\varphi(-90^\circ) = -\sigma\varphi 90^\circ = 0$

3. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $\omega = -60^\circ$ ii) $\theta = -135^\circ$ iii) $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

Λύση : i) είναι $\eta\mu(-60^\circ) = -\eta\mu(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-60^\circ) = \sigma\upsilon\nu(60^\circ) = \frac{1}{2}$,
 $\epsilon\varphi(-60^\circ) = -\epsilon\varphi(60^\circ) = -\sqrt{3}$, $\epsilon\varphi(-60^\circ) = -\epsilon\varphi(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii) είναι $\eta\mu(-135^\circ) = -\eta\mu(135^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu(-135^\circ) = \sigma\upsilon\nu(135^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\epsilon\varphi(-135^\circ) = -\epsilon\varphi(135^\circ) = -[-\epsilon\varphi(45^\circ)] = 1$,

$\sigma\varphi(-135^\circ) = -\sigma\varphi(135^\circ) = -[-\sigma\varphi(45^\circ)] = 1$.

iii) είναι $\eta\mu(-\frac{\pi}{6}) = -\eta\mu(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\epsilon\varphi(-\frac{\pi}{6}) = -\epsilon\varphi(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi(-\frac{\pi}{6}) = -\sigma\varphi(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$

4. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $\omega = 120^\circ$ ii) $\theta = 135^\circ$ iii) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Λύση : i) είναι $\eta\mu(120^\circ) = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu(120^\circ) = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$,

$\epsilon\varphi(120^\circ) = \epsilon\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\epsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$,

$\sigma\varphi(120^\circ) = \sigma\varphi(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\varphi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii) είναι $\eta\mu(135^\circ) = \eta\mu(180^\circ - 45^\circ) = \eta\mu(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu(135^\circ) = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\epsilon\varphi(135^\circ) = \epsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\varphi(45^\circ) = -1$,

$\sigma\varphi(135^\circ) = \sigma\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\varphi(45^\circ) = -1$.

iii) είναι $\eta\mu \frac{5\pi}{6} = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\varepsilon\varphi \frac{5\pi}{6} = \varepsilon\varphi(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma\varphi \frac{5\pi}{6} = \sigma\varphi(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sigma\varphi(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$$

5. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $\theta = 225^\circ$

ii) $\omega = \frac{7\pi}{6}$

Λύση : i) είναι $\eta\mu(225^\circ) = \eta\mu(180^\circ + 45^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sigma\upsilon\nu(225^\circ) = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon\varphi(225^\circ) = \varepsilon\varphi(180^\circ + 45^\circ) = \varepsilon\varphi(45^\circ) = 1,$$

$$\sigma\varphi(225^\circ) = \sigma\varphi(180 + 45^\circ) = \sigma\varphi(45^\circ) = 1.$$

ii) είναι $\eta\mu \frac{7\pi}{6} = \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\varepsilon\varphi \frac{7\pi}{6} = \varepsilon\varphi(\pi + \frac{\pi}{6}) = \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\varphi \frac{7\pi}{6} = \sigma\varphi(\pi + \frac{\pi}{6}) = \sigma\varphi(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

6. Δίνεται ότι $\eta\mu 34^\circ = 0,55$ να βρείτε το $\eta\mu 146^\circ$ και το $\sigma\upsilon\nu 56^\circ$

Λύση :

$$\text{Είναι } 146^\circ = 180^\circ - 34^\circ \text{ άρα } \eta\mu 146^\circ = \eta\mu(180^\circ - 34^\circ) = \eta\mu 34^\circ = 0,55$$

$$\text{Επίσης } 56^\circ = 90^\circ - 34^\circ \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu 56^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 34^\circ) = \eta\mu 34^\circ = 0,55$$

Παράδειγμα «χρησιμότητα» (!) για την φυσική, όπου πολλές φορές δίνει η άσκηση ένα τριγ. αριθμό και χρειάζονται και μερικοί ακόμη που πρέπει να υπολογισθούν η χρειάζεται να γίνουν απλοποιήσεις.

7. Αν $\eta\mu\chi = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{4}{5}$ να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) $\chi + 8\pi$

ii) $11\pi + \chi$

iii) $\chi - \pi$

Λύση : i) $\eta\mu(\chi + 8\pi) = \eta\mu(2 \cdot 4\pi + \chi) = \eta\mu\chi = \frac{3}{5}$,

$$\sigma\upsilon\nu(\chi + 8\pi) = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 4\pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{4}{5},$$

$$\varepsilon\varphi(\chi + 8\pi) = \varepsilon\varphi(2 \cdot 4\pi + \chi) = \varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4},$$

$$\sigma\varphi(\chi + 8\pi) = \sigma\varphi(2 \cdot 4\pi + \chi) = \sigma\varphi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ii)} \quad \eta\mu(11\pi + \chi) = \eta\mu(2 \cdot 5\pi + \pi + \chi) = \eta\mu(\pi + \chi) = -\eta\mu\chi = -\frac{3}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu(11\pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 5\pi + \pi + \chi) = \sigma\upsilon\nu(\pi + \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi(11\pi + \chi) = \varepsilon\varphi(2 \cdot 5\pi + \pi + \chi) = \varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4},$$

$$\sigma\varphi(11\pi + \chi) = \sigma\varphi(2 \cdot 5\pi + \pi + \chi) = \sigma\varphi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{iii)} \quad \eta\mu(\chi - \pi) = \eta\mu[-(\pi - \chi)] = -\eta\mu(\pi - \chi) = -\eta\mu\chi = -\frac{3}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu(\chi - \pi) = \sigma\upsilon\nu[-(\pi - \chi)] = \sigma\upsilon\nu(\pi - \chi) = -\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{4}{5}$$

$$\varepsilon\varphi(\chi - \pi) = \varepsilon\varphi[-(\pi - \chi)] = -\varepsilon\varphi(\pi - \chi) = \varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma\varphi(\chi - \pi) = \sigma\varphi[-(\pi - \chi)] = -\sigma\varphi(\pi - \chi) = \sigma\varphi\chi = \dots = \frac{4}{5}$$

8. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\varphi 1^\circ \sigma\varphi 2^\circ \sigma\varphi 3^\circ \dots \sigma\varphi 89^\circ = 1$

Λύση :

Είναι $\sigma\varphi 89^\circ = \sigma\varphi(90^\circ - 1^\circ) = \varepsilon\varphi 1^\circ$ άρα $\sigma\varphi 1^\circ \sigma\varphi 89^\circ = \sigma\varphi 1^\circ \varepsilon\varphi 1^\circ = 1$
 $\sigma\varphi 88^\circ = \sigma\varphi(90^\circ - 2^\circ) = \varepsilon\varphi 2^\circ$ άρα $\sigma\varphi 2^\circ \sigma\varphi 88^\circ = \sigma\varphi 2^\circ \varepsilon\varphi 2^\circ = 1$ κλπ

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$\frac{\eta\mu \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{3\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}$$

Λύση :

Είναι $\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$, $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ επειδή $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi (= 180^\circ)$, και όμοια $\varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1$, $\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ Άρα τελικά θα είναι :

$$\frac{\eta\mu \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{3\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (-\frac{\sqrt{2}}{2}) (-1)}{(-1) \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{2}{4}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

 **Παρατήρηση** → Μια πολύ ξεχωριστή περίπτωση αποτελούν οι ασκήσεις που

αφορούν τις γωνίες **τριγώνου** ή τις γωνίες **τετραπλεύρου**. Σ' αυτές τις περιπτώσεις ξεκινάω από την σχέση $A + B + \Gamma = \pi$ για τα τρίγωνα και από τη σχέση $A + B + \Gamma + \Delta = 2\pi$ για τα τετράπλευρα όπως στα παραδείγματα :

10. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύει : $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$

Λύση : Ως γνωστό σε κάθε τρίγωνο ισχύει $A + B + \Gamma = \pi$ άρα $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2} \right)$
 $\Leftrightarrow \eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$

11. Εάν A, B, Γ, Δ είναι οι γωνίες ενός κυρτού τετράπλευρου τότε να δείξετε ότι ισχύει :

$$\eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

Λύση : Ως γνωστό σε κάθε τετράπλευρο ισχύει $A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ$ άρα
 $A + B = 360^\circ - (\Gamma + \Delta) \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = 180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \left(180^\circ - \frac{\Gamma+\Delta}{2} \right) \Leftrightarrow$
 $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{2}$

12. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) τότε να δείξετε ότι ισχύει :
 $\sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$

Λύση : Αφού είναι $A = 90^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu(A+B) = \sigma\upsilon\nu(90^\circ + B) = -\eta\mu B$.

Ειδικά στο ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) είναι και $B + \Gamma = 90^\circ$ άρα $B = 90^\circ - \Gamma$ άρα
 $-\eta\mu B = -\eta\mu(90^\circ - \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu \Gamma$

Ερωτήσεις Σύντομης Απάντησης

Στις πιο κάτω ερωτήσεις να απαντήσετε (με λόγια και με συμβολισμούς) δίνοντας και μια σύντομη αιτιολογία

1. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $2\kappa\pi + \omega$ και ω
2. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $(2\kappa + 1)\pi - \omega$ και ω
3. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $(2\kappa + 1)\pi + \omega$ και ω ;
4. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $(2\kappa - 1)\pi - \omega$ και ω ;
5. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\frac{\pi}{2} - \omega$ και ω ;

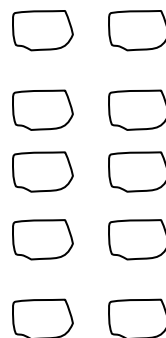
6. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\frac{\pi}{2} + \omega$ και ω ;
7. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\pi - \omega$ και ω ;
8. Τι σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\pi + \omega$ και ω ;
9. Τι είναι αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο και σε τι μας εξυπηρετεί ;
10. Ποιας γωνίας, μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{2}$, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί έχουν σχέση με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{25\pi}{3}$ και ποια ακριβώς σχέση έχουν ;
11. Ποιας γωνίας, μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{2}$, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί έχουν σχέση με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $23\pi + \frac{\pi}{3}$
12. Ποιες γωνίες ω μεταξύ 0 και 2π έχουν $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$
13. Ποιες γωνίες ω μεταξύ 0 και 2π έχουν $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλεις  στο Σωστό ή στο Λάθος)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Η γωνία $\omega = -\frac{7\pi}{4}$ έχει το ίδιο συνημίτονο με την $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ | ☐ | ☐ |
| 2. Είναι $\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$ | ☐ | ☐ |
| 3. Είναι $\eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} = 1$ | ☐ | ☐ |
| 4. Είναι $\eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} = 1$ | ☐ | ☐ |
| 5. Είναι $\eta\mu(3\pi - 3\chi) = 3\eta\mu(\pi - \chi) = 3\eta\mu\chi$ | ☐ | ☐ |
| 6. Η ισότητα $\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \chi) = \sin\chi$ ισχύει για γωνίες μικρότερες από $\frac{\pi}{2}$ | ☐ | ☐ |
| 7. Σε <u>κάθε</u> τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sin \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2}$ | ☐ | ☐ |

8. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\sigma\phi(B + \Gamma) = -\sigma\phi A$
9. Για κάθε γωνία θ ισχύει $\sin|\theta| = |\sin\theta|$
10. Για κάθε γωνία χ ισχύει η ισότητα $\sin^2(\pi - \chi) = \sin^2\chi$
11. Όλες οι γωνίες ενός τριγώνου έχουν ημίτονα θετικά
12. Αν το ABΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο τότε $\sin A + \sin B + \sin \Gamma = 1,5$



Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

Να συμπληρώσεις τα κενά στις παρακάτω προτάσεις :

- $\eta\mu(12\pi + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sigma\phi(15\pi + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\sin(\varphi - 540^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\epsilon\phi(\varphi - 540^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\eta\mu(2160^\circ + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sigma\phi(2340^\circ + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\sin(\chi - 90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\epsilon\phi(\chi - 180^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\eta\mu(12\pi + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sigma\phi(15\pi + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\sin(\theta - 7\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\epsilon\phi(\theta - 7\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\eta\mu(\frac{13\pi}{2} - \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sigma\phi(\frac{13\pi}{2} - \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\sin(\frac{13\pi}{2} - x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\epsilon\phi(\frac{13\pi}{2} - x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\eta\mu(\frac{25\pi}{2} + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sigma\phi(\frac{25\pi}{2} + \omega) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\sin(\frac{25\pi}{2} + x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\epsilon\phi(\frac{25\pi}{2} + x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- Χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0° , 30° , 45° , 60° , 90° τις παραγράφου 1.1, να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Μοίρες	Ακτίνια	$\eta\mu\omega$	$\sin\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
330°					
	$-\frac{5\pi}{6}$				
	$\frac{7\pi}{3}$				

- 660°					
990°					

12. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0°, 30°, 45°, 60°, 90° τις παραγράφου 1.1, να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα

Γωνία ω	135°	$-\frac{\pi}{6}$	210°	$\frac{4\pi}{3}$
ημω				
συνω				
εφω				

13. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0°, 30°, 45°, 60°, 90° τις παραγράφου 1.1, να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα

Γωνία ω	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	870°	$\frac{5\pi}{4}$
ημω				
συνω				
εφω				

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις των στηλών Α και Β όταν αυτές είναι ίσες.

Στήλη Α	Στήλη Β
ημ150°	ημ $\frac{\pi}{6}$
ημ30°	συν $\frac{\pi}{4}$
ημ $\frac{3\pi}{2}$	συν $\frac{\pi}{3}$
ημ765°	- ημ $\frac{\pi}{2}$

2. Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις των στηλών Α και Β όταν αυτές είναι ίσες.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\sigma\varphi 150^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$-\eta\mu \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\eta\mu \frac{23\pi}{2}$	Δεν ορίζεται
$\sigma\eta 765^\circ$	1
$\epsilon\varphi \frac{28\pi}{3}$	-1
$\sigma\varphi 1980^\circ$	$\sqrt{3}$

2. Στον πιο κάτω πίνακα δίνονται κάποια ημίτονα, συνημίτονα και εφαπτόμενες (1^η στήλη) και δίπλα από τον καθένα δίνονται κάποιες γωνίες (2^η, 3^η και 4^η στήλη). Να επιλέξεις ποιες από τις γωνίες των στηλών 2, 3, 4 έχουν τους αντίστοιχους τριγωνομετρικούς αριθμούς της 1^{ης} στήλης όπως έχει γίνει στην 1^η γραμμή του πίνακα (προσοχή μπορεί να ταιριάζουν περισσότερες από μία γωνίες)

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη	3 ^η στήλη	4 ^η στήλη
$\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$	$\omega = 320^\circ$	$\omega = 300^\circ$	$\omega = -\frac{\pi}{3}$
$\sigma\eta\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\omega = 150^\circ$	$\omega = -60^\circ$	$\omega = \frac{5\pi}{6}$
$\epsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\omega = -\frac{\pi}{3}$	$\omega = \frac{7\pi}{6}$	$\omega = \frac{5\pi}{6}$
$\sigma\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\omega = 380^\circ$	$\omega = 330^\circ$	$\omega = \frac{7\pi}{3}$

3. Να κάνετε το ίδιο και για τον επόμενο πίνακα :

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη	3 ^η στήλη	4 ^η στήλη
$\eta\mu\omega = -1$	$\omega = 1710^\circ$	$\omega = -180^\circ$	$\omega = -\frac{5\pi}{3}$
$\sigma\eta\omega = \frac{1}{2}$	$\omega = 1740^\circ$	$\omega = -60^\circ$	$\omega = \frac{5\pi}{3}$
$\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$	$\omega = -\frac{\pi}{3}$	$\omega = \frac{5\pi}{3}$	$\omega = \frac{5\pi}{6}$
$\sigma\varphi\omega$ δεν ορίζεται	$\omega = 380^\circ$	$\omega = 360^\circ$	$\omega = \frac{7\pi}{2}$

15. Να αποδείξετε ότι : $\sigma\phi 10^\circ \sigma\phi 20^\circ \dots \sigma\phi 70^\circ \sigma\phi 80^\circ = 1$

16. Να απλοποιηθεί η παράσταση :
$$\frac{\eta\mu \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} \varepsilon\phi \frac{\pi}{4}}{\eta\mu \frac{3\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}}$$

17. Να απλοποιηθεί η παράσταση :
$$\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{8} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \sigma\phi \frac{\pi}{2}}{\eta\mu \frac{\pi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}$$

18. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύει :

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \quad \text{ιι) } \text{όταν } B \neq 90^\circ \text{ τότε } \varepsilon\phi B = - \varepsilon\phi(A + \Gamma)$$

19. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύει :

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A+B}{2} = \frac{1}{1 + \sigma\phi^2 \frac{\Gamma}{2}} \quad \text{ιι) } \frac{1}{\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}} = 1 + \varepsilon\phi^2 \frac{A+B}{2}$$

20. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\text{ι) } A = 90^\circ \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0 \quad \text{ιι) } A = 90^\circ \Leftrightarrow \varepsilon\phi(B + \Gamma) \text{ δεν ορίζεται}$$

21. Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned} \text{ι) } A = 90^\circ &\Leftrightarrow \sigma\phi \frac{B+\Gamma}{2} = \varepsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2} & \text{ιι) } A = 90^\circ &\Leftrightarrow \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2} \\ \text{ιιι) } A = 90^\circ &\Leftrightarrow \eta\mu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

22. Εάν A, B, Γ, Δ είναι οι γωνίες ενός κυρτού τετραπλεύρου τότε να δείξετε ότι τα $(A + B), (\Gamma + \Delta)$ (όπως και κάθε άλλος συνδυασμός ανά δύο πχ $A + \Delta$ και $B + \Gamma$) έχουν τα ίδια συνημίτονα και αντίθετους όλους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

23. Εάν $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο τότε ισχύει

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu A = - \sigma\upsilon\nu \Gamma \text{ και } \sigma\upsilon\nu B = - \sigma\upsilon\nu \Delta$$

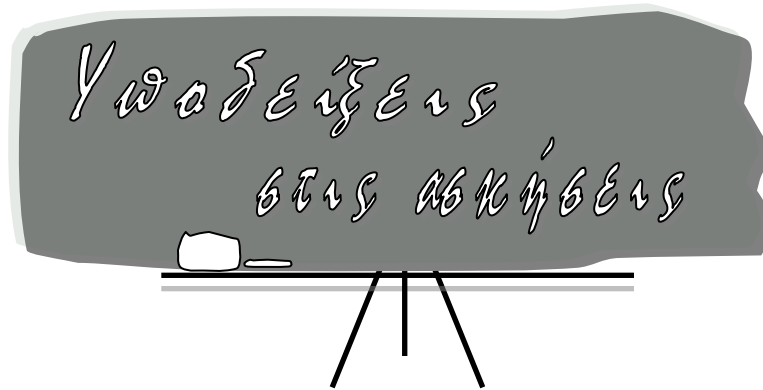
$$\text{ιι) } \eta\mu A = \eta\mu \Gamma \text{ και } \eta\mu B = \eta\mu \Delta$$

24. Εάν $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα κυρτό τετράπλευρο στο οποίο ισχύει $0 < A, \Gamma \leq \pi$ και $\sigma\upsilon\nu A = - \sigma\upsilon\nu \Gamma$ τότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο

Ασκήσεις

Β' Ομάδας (Έτσι χωρίς πρόγραμμα)

- Εάν A, B, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου τότε να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις :
 ι) $\sin(2A + 2B + 2\Gamma) = 1$ ιι) $\eta\mu(\lambda A + \lambda B + \lambda \Gamma) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 ιιι) $\sin(kA + kB + k\Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{αν } k \text{ άρτιο} \\ -1 & \text{αν } k \text{ περιττό} \end{cases}$
- Αν B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $A \neq 90^\circ$ τότε $\sigma\varphi|(B + \Gamma) - 360| = -\sigma\varphi(B + \Gamma)$
- Αν B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $A \neq 90^\circ$ τότε $\varepsilon\varphi|(B + \Gamma) - 360| = -\varepsilon\varphi A$
- Αν B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $A \neq 90^\circ$ τότε $\sigma\varphi\left|\frac{B + \Gamma}{2} - 360\right| = -\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = -\varepsilon\varphi A$
- Αν A, B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ τότε :
 ι) $\eta\mu(B - \Gamma) = \eta\mu(A + 2\Gamma)$ ιι) $\varepsilon\varphi(A - B) = -\varepsilon\varphi(2B + \Gamma)$
- Αν B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ τότε $\sigma\varphi(B - \Gamma) = \varepsilon\varphi(2\Gamma)$
- Δίνεται ότι $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ να βρείτε το $\eta\mu \frac{9\pi}{5}$ και το $\eta\mu \frac{16\pi}{5}$
- Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι σταθερές (είναι ανεξάρτητες του χ)
 ι) $f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi - \varepsilon\varphi(11\pi + \chi)$ ιι) $f(\chi) = \eta\mu(2\pi + \chi) - \eta\mu(\pi - \chi) + \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{5})$
- Να αποδείξετε ότι : $\sigma\varphi 5^\circ \sigma\varphi 10^\circ \sigma\varphi 15^\circ \dots \sigma\varphi 75^\circ \sigma\varphi 80^\circ \sigma\varphi 85^\circ = 1$
- Να αποδείξετε ότι : $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \theta) \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} + \theta) = -1$
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ισχύουν οι σχέσεις :
 ι) $\eta\mu B = \sin \frac{A}{2}$ ιι) $\sin(B + \Gamma) = \eta\mu \frac{A}{2}$ ιιι) $\varepsilon\varphi(A + 2B) = 0$



Για τις ασκήσεις 1, 2, 3, 4 χρησιμοποίησε τους τριγ. αριθμούς των $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ και τον κατάλληλο τύπο που τις συνδέει με αυτές δεξ και λεπτομέρειες :

1. ι) είναι $\eta\mu 3\pi = \eta\mu(2\pi + \pi) = \eta\mu\pi = 0$, $\sigma\upsilon\nu 3\pi = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$ κλπ
 ιι) είναι $\eta\mu(2\lambda\pi + \pi) = \eta\mu\pi = 0$, $\sigma\upsilon\nu(2\lambda\pi + \pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$ κλπ
 ιιι) είναι $\eta\mu 2\lambda\pi = \eta\mu 0 = 0$, $\sigma\upsilon\nu 2\lambda\pi = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$ κλπ

2. ι) είναι $\eta\mu(-5\pi) = -\eta\mu 5\pi = -\eta\mu(4\pi + \pi) = -\eta\mu\pi = 0$,
 $\sigma\upsilon\nu(-5\pi) = \sigma\upsilon\nu 5\pi = \sigma\upsilon\nu(4\pi + \pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$ κλπ

ιι) είναι $\eta\mu(-\frac{3\pi}{2}) = \eta\mu(2\pi - \frac{3\pi}{2}) = \eta\mu(\frac{\pi}{2}) = 1$,
 $\sigma\upsilon\nu(-\frac{3\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu(2\pi - \frac{3\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}) = 0$ κλπ

3. ι) είναι $\eta\mu(2580^\circ) = \eta\mu(7 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 είναι $\sigma\upsilon\nu(2580^\circ) = \sigma\upsilon\nu(7 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \frac{1}{2}$

ιι) $\eta\mu(-1575^\circ) = -\eta\mu(1575^\circ) = -\eta\mu(4 \cdot 360^\circ + 135^\circ) = -\eta\mu 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu(-1575^\circ) = \sigma\upsilon\nu(1575^\circ) = \sigma\upsilon\nu(4 \cdot 360^\circ + 135^\circ) = \sigma\upsilon\nu 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, κλπ

ιιι) είναι $\eta\mu(-\frac{11\pi}{6}) = -\eta\mu(\frac{11\pi}{6}) = -\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -(-\eta\mu \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu(-\frac{11\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{11\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ κλπ.

4. Είναι ι) $\eta\mu(\frac{43\pi}{4}) = \eta\mu(10\pi + \frac{3\pi}{4}) = \eta\mu(\frac{3\pi}{4}) = \eta\mu(\pi - \frac{\pi}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

αναλόγως και τα υπόλοιπα.

ιι) $\eta\mu(\frac{72\pi}{6}) = \eta\mu(12\pi + \frac{5\pi}{6}) = \eta\mu(\frac{5\pi}{6}) = \dots$ αναλόγως και τα υπόλοιπα.

ιιι) Με όμοιο τρόπο όπως και προηγούμενα

5. $\eta\mu^2(\frac{\pi}{2} - \theta) = [\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta)]^2 = \dots$

6. $\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2} + \theta) = (-\eta\mu\theta)^2 = \dots$

7. $\sigma\upsilon\nu^2(\pi - \theta) = [\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)]^2 = \dots$

8. $\eta\mu^2(\theta - \frac{\pi}{2}) = [\eta\mu(\theta - \frac{\pi}{2})]^2 = \dots$, $\eta\mu^2(\pi + \theta) = [\eta\mu(\pi + \theta)]^2 = \dots$

9. Δες παράδειγμα 6
10. Δες παράδειγμα 6
11. Δες παράδειγμα 7
12. Δες παράδειγμα 8
13. Δες παράδειγμα 8
14. Δες παράδειγμα 8
15. Δες παράδειγμα 8
16. Δες παράδειγμα 9
17. Δες παράδειγμα 9
18. Δες παράδειγμα 10, 11
19. Δες παράδειγμα 10, 11
20. Δες παράδειγμα 12
21. Δες παράδειγμα 12
22. Εγγεγραμμένο $\Leftrightarrow A + \Gamma = \pi$, $B + \Delta = \pi$ άρα ...
23. Εγγεγραμμένο $\Leftrightarrow A + \Gamma = \pi$, $B + \Delta = \pi$ άρα ...
24. Αν $\text{syn} A = -\text{syn} \Gamma$ επειδή και $0 \leq A, \Gamma \leq \pi$ άρα ... $A + \Gamma = \dots$ άρα ...
25. Δες παράδειγμα 10, 11
26. Δες παράδειγμα 10, 11
27. Δες παράδειγμα 10, 11
28. Δες παράδειγμα 10, 11
29. Δες παράδειγμα 12
30. Δες παράδειγμα 6 και άσκηση 9
31. Να αντικαταστήσεις τα $\varepsilon\varphi(11\pi + \chi)$ κλπ
32. Δες παράδειγμα 8
33. Να αντικαταστήσεις τα $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} + \chi)$ κλπ
34. Στο ισοσκελές είναι $A + B + \Gamma = A + 2B$ κλπ

2.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι κάθε γωνία, όπως και κάθε τόξο, έχει ακριβώς ένα μέτρο που είναι ένας αριθμός χ .

Επίσης σε κάθε γωνία (ή τόξο) με μέτρο χ αντιστοιχίσαμε μερικούς ακόμη αριθμούς που τους ονομάσαμε ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη αντίστοιχα.

Στην πραγματικότητα έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις $\eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu$, $\epsilon\varphi$, και $\sigma\varphi$ οι οποίες σε κάθε πραγματικό αριθμό χ (που είναι το μέτρο μιας γωνίας ή τόξου) αντιστοιχίζουν το $\eta\mu\chi$, το $\sigma\upsilon\nu\chi$ κλπ, για την ακρίβεια ορίζουμε 4 συναρτήσεις :

Ορισμός

Συνάρτηση **ημίτονο** (συμβολικά $\eta\mu$) : για κάθε $x \in \mathbb{P} \rightarrow \eta\mu(x) = \eta\mu\chi$

Συνάρτηση **συνημίτονο** (συμβολικά $\sigma\upsilon\nu$) : για κάθε $x \in \mathbb{P} \rightarrow \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu\chi$

Συνάρτηση **εφαπτομένη** (συμβολικά $\epsilon\varphi$) : για κάθε $\chi \in \mathbb{P} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \epsilon\varphi(\chi) = \epsilon\varphi\chi$

Συνάρτηση **συνεφαπτομένη** (συμβολικά $\sigma\varphi$) : για κάθε $x \in \mathbb{P} - \{\lambda\pi\} \rightarrow \sigma\varphi(\chi) = \sigma\varphi\chi$

Ορισμός

Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **περιοδική** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε :

Για κάθε $\chi \in A$ 1) $\chi + T \in A$ και το $\chi - T \in A$
Και 2) $\varphi(\chi + T) = \varphi(\chi - T) = \varphi(\chi)$

Αν αυτά συμβαίνουν τότε ο πραγματικός αριθμός T θα λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης φ .

Προσοχή : Ο αριθμός T για να είναι περίοδος πρέπει να είναι αυστηρά μεγαλύτερος από το 0 ($T > 0$) δηλ οπωσδήποτε διάφορος από το 0 ($T \neq 0$).

Ορισμός

Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **άρτια** εάν

Για κάθε $\chi \in A$ 1) $-\chi \in A$
και 2) $\varphi(-\chi) = \varphi(\chi)$

Ορισμός

Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **περιττή** εάν

Για κάθε $\chi \in A$ 1) $-\chi \in A$
και 2) $\varphi(-\chi) = -\varphi(\chi)$

Για τις τέσσερις γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ισχύουν :

✓ Η συνάρτηση $\eta\mu\chi$ έχει πεδίο ορισμού $A = P$. Επειδή $\chi + 2\pi, \chi - 2\pi \in P$ για κάθε $\chi \in P$ και $\eta\mu(\chi + 2\pi) = \eta\mu(\chi - 2\pi) = \eta\mu\chi$ άρα η $\eta\mu\chi$ είναι περιοδική με περίοδο 2π .

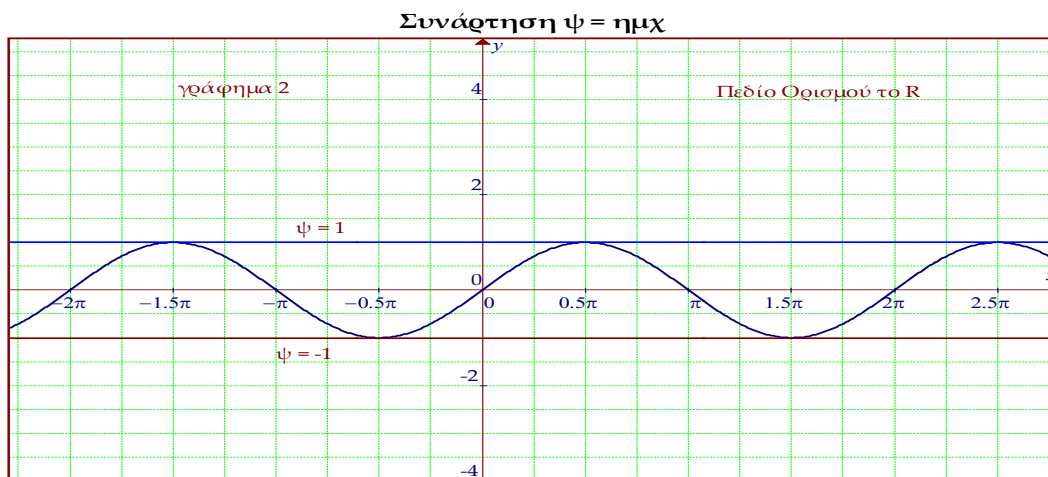
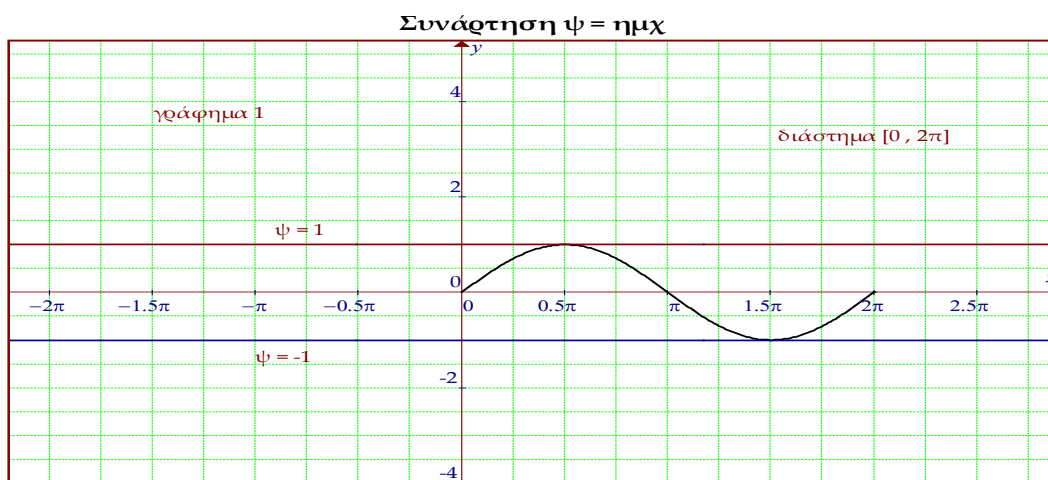
Επίσης για κάθε $\chi \in P$ είναι $-\chi \in P$ και $\eta\mu(-\chi) = -\eta\mu\chi$ άρα η $\eta\mu\chi$ είναι περιττή.

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Πίνακας Μεταβολών της συνάρτησης $\eta\mu\chi$

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\chi$	0	1	0	-1	0

Η δε γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αρχικά και στο P στη συνέχεια φαίνεται στα γραφήματα 1 και 2 αντίστοιχα :



Παρατηρήστε ότι σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση της $\psi = \eta\mu\chi$ βρίσκεται μέσα στη ζώνη που δημιουργούν οι ευθείες $\psi = 1$ και $\psi = -1$.

Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύει ο «αλγεβρικός» περιορισμός : $|\eta\mu\chi| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$. Η τελευταία σχέση μας λέει πως το πεδίο τιμών για τη συνάρτηση $\psi = \eta\mu\chi$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

- ✓ Η συνάρτηση $\sin x$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{P}$. Επειδή $x + 2\pi, x - 2\pi \in \mathbb{P}$ για κάθε $x \in \mathbb{P}$ και $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$ άρα η $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π

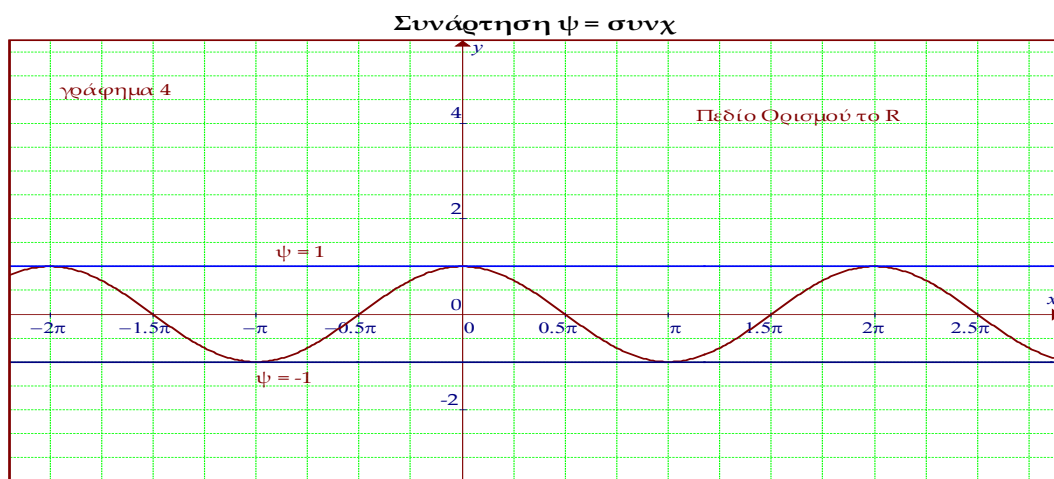
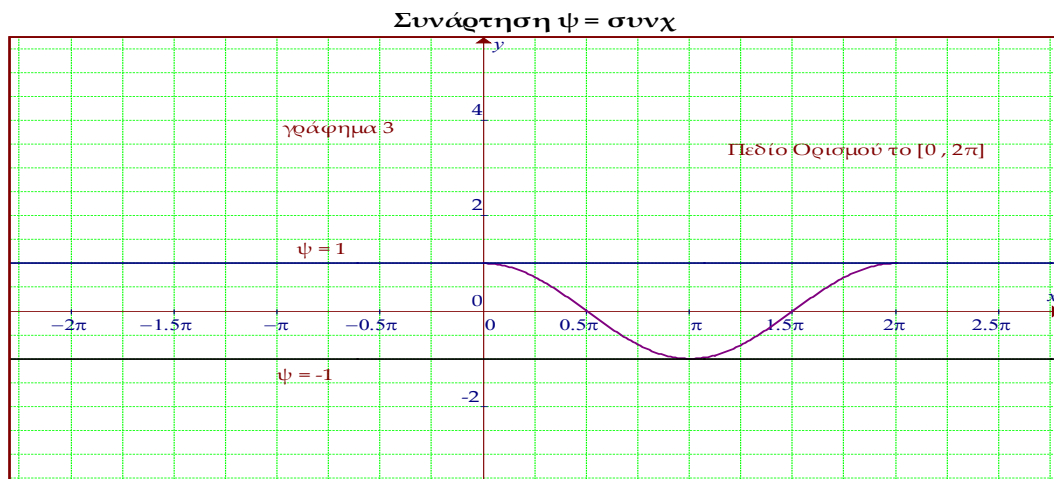
Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{P}$ είναι $-x \in \mathbb{P}$ και $\sin(-x) = -\sin x$ άρα η $\sin x$ είναι άρτια.

Στο διάστημα $[0, 2\pi]$ ισχύει ο πίνακας μεταβολών :

Πίνακας Μεταβολών της συνάρτησης $\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1	0	-1	0	1

Η δε γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αρχικά και στο $\mathbb{P}$ στη συνέχεια φαίνεται στα γραφήματα 3 και 4 αντίστοιχα :



Παρατηρήστε ότι σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση της $\psi = \sin x$ βρίσκεται μέσα στη ζώνη που δημιουργούν οι ευθείες $\psi = 1$ και $\psi = -1$.

Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύει ο «αλγεβρικός» περιορισμός : $|\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$.

Η τελευταία σχέση μας λέει πως το πεδίο τιμών για τη συνάρτηση $\psi = \sin x$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

- ✓ Η συνάρτηση $\cos x$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{P} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$. Επειδή για κάθε $x \in A$ είναι

$\chi + \pi, \chi - \pi \in A$ και $\varepsilon\varphi(\chi + \pi) = \varepsilon\varphi(\chi - \pi) = \varepsilon\varphi\chi$ άρα η $\varepsilon\varphi\chi$ είναι περιοδική με περίοδο π

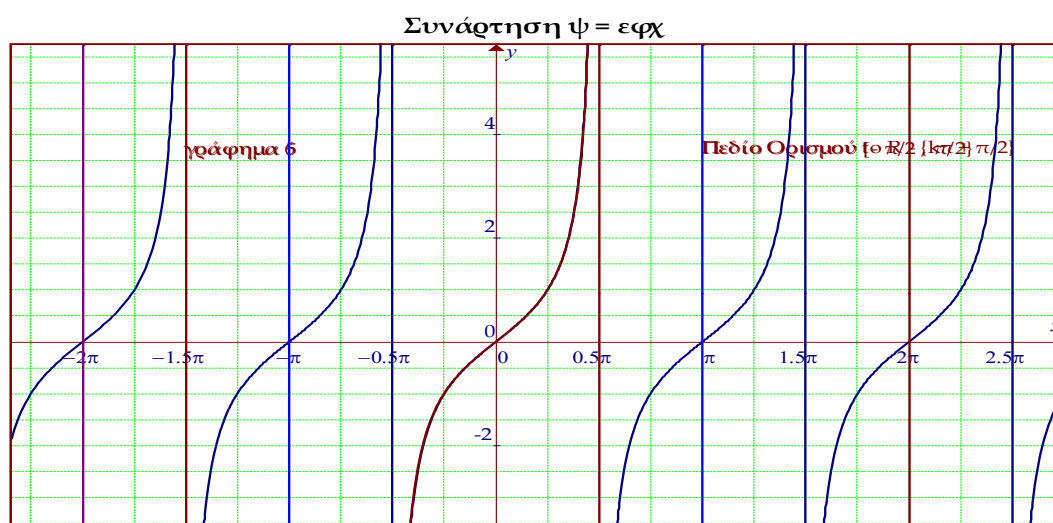
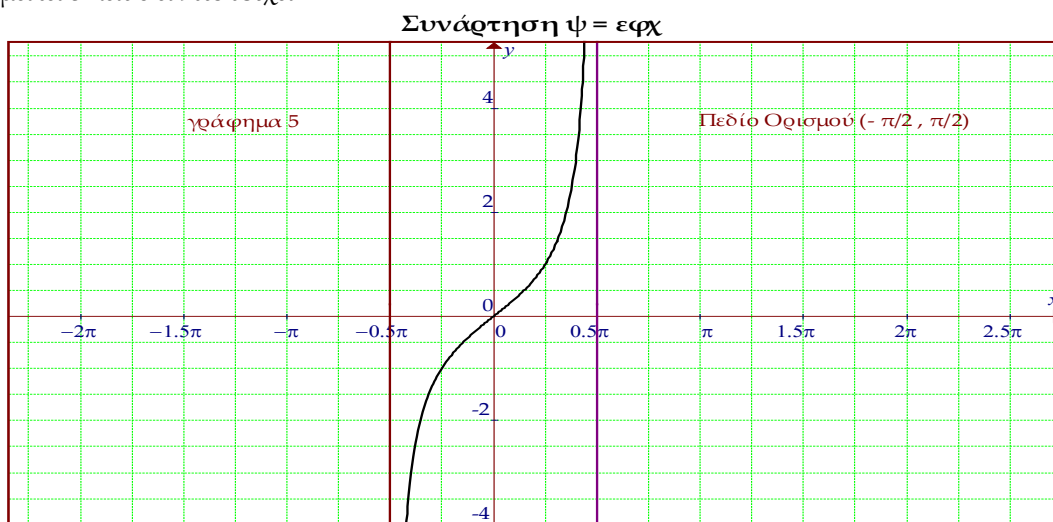
Επίσης για κάθε $\chi \in P$ είναι $-\chi \in P$ και $\varepsilon\varphi(-\chi) = -\varepsilon\varphi\chi$ άρα η $\varepsilon\varphi\chi$ είναι περιττή.

Στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ο εξής πίνακας μεταβολών

Πίνακας Μεταβολών της συνάρτησης $\varepsilon\varphi\chi$

χ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varepsilon\varphi\chi$	$(-\infty)$ δεν ορίζεται	0	$(+\infty)$ δεν ορίζεται

Η δε γραφική της παράσταση στο διάστημα αρχικά $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και στο $A = P - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ φαίνεται στα γραφήματα 5 και 6 αντίστοιχα



- ✓ Η συνάρτηση $\sigma\varphi\chi$ έχει πεδίο ορισμού το $A = P - \{\kappa\pi\}$. Επειδή για κάθε $\chi \in A$ είναι $\chi + \pi, \chi - \pi \in A$ και $\sigma\varphi(\chi + \pi) = \sigma\varphi(\chi - \pi) = \sigma\varphi\chi$ άρα είναι περιοδική με περίοδο π

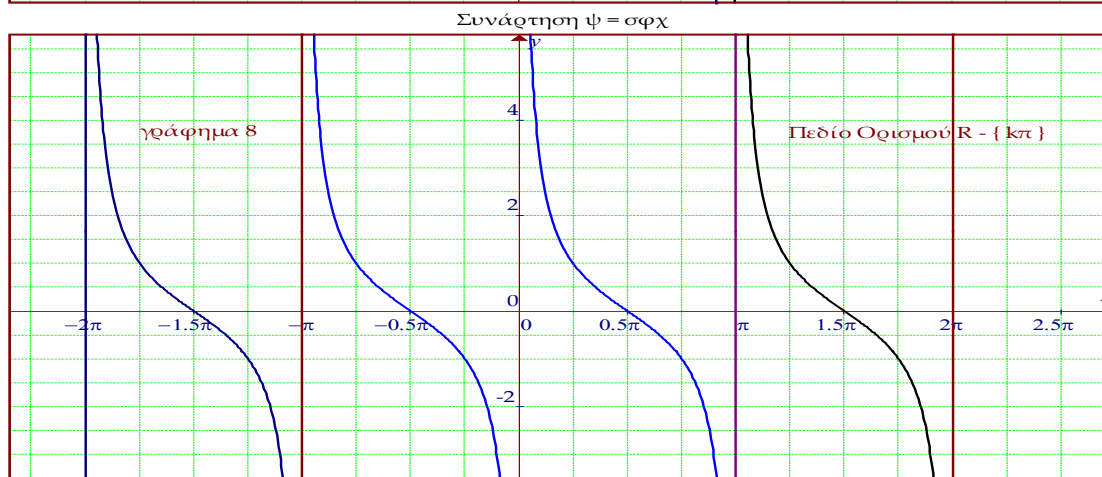
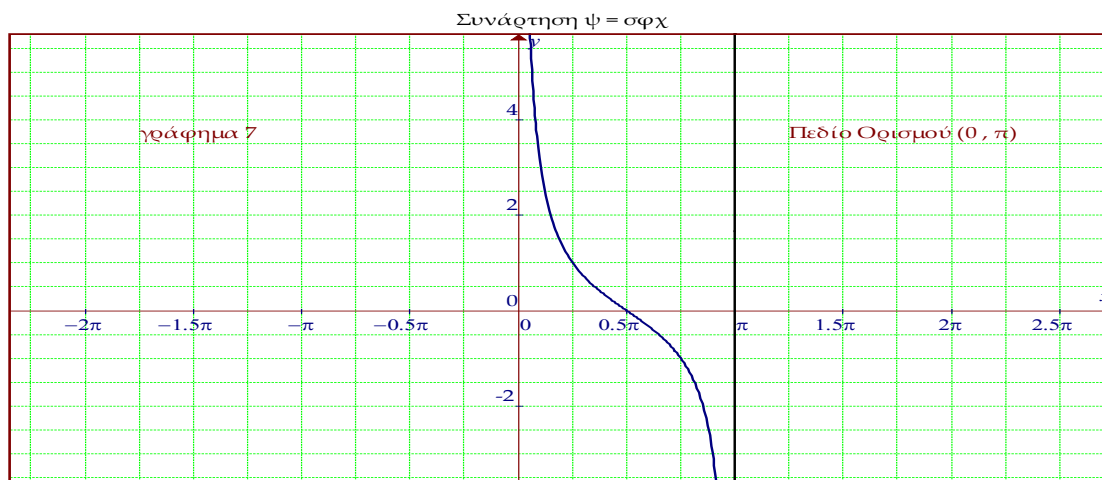
Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{P}$ είναι $-x \in \mathbb{P}$ και $\sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x$ άρα η $\sigma\phi x$ είναι περιττή.

Στο διάστημα $(0, \pi)$ ισχύει ο εξής πίνακας μεταβολών :

Πίνακας Μεταβολών της συνάρτησης $\sigma\phi x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sigma\phi x$	$(+\infty)$ δεν ορίζεται	0	$(+\infty)$ δεν ορίζεται

Η δε γραφική της παράσταση στο διάστημα $(0, \pi)$ αρχικά και στο $\mathbb{A} = \mathbb{P} - \{k\pi\}$ φαίνονται στα γραφήματα 7 και 8 αντίστοιχα



Συγκρίνετε τις γραφικές παραστάσεις εφαπτομένης και συνεφαπτομένης για να διαπιστώσετε ότι είναι «ανάστροφές» .

Και φυσικά αυτό οφείλεται στη σχέση τους δηλαδή στο γεγονός ότι : $\epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\phi x}$



πως ακριβώς «εκφράζεται» η έννοια της περιοδικότητας στη γραφική

παράσταση μιας περιοδικής συνάρτησης

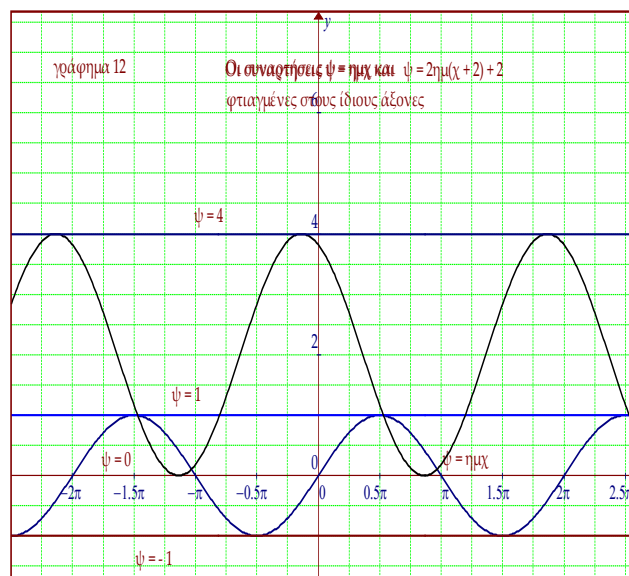
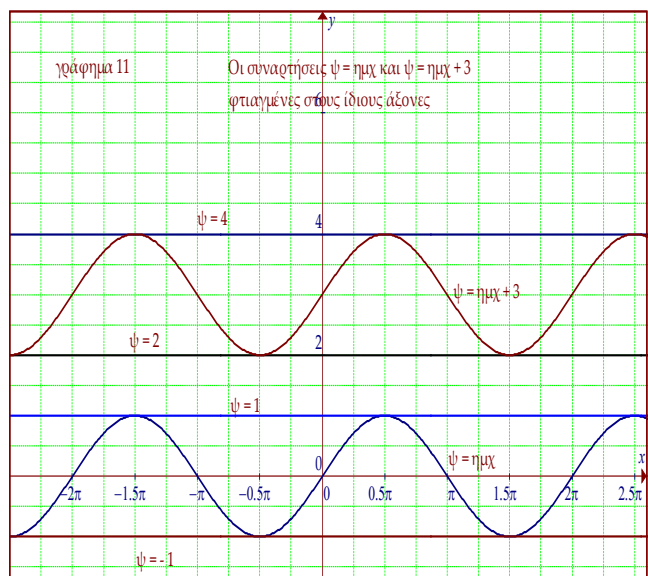
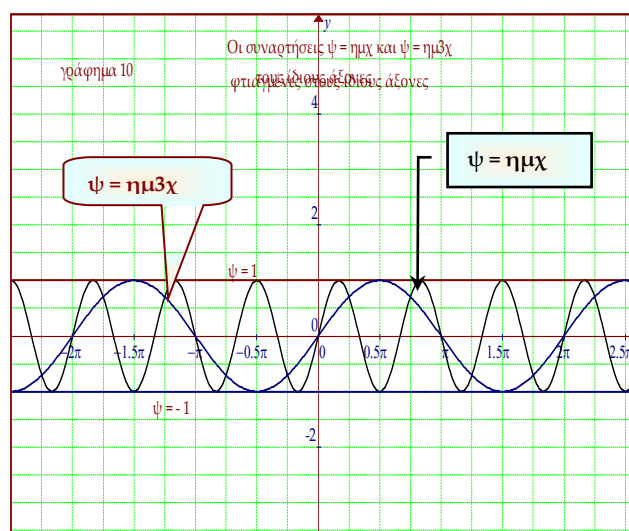
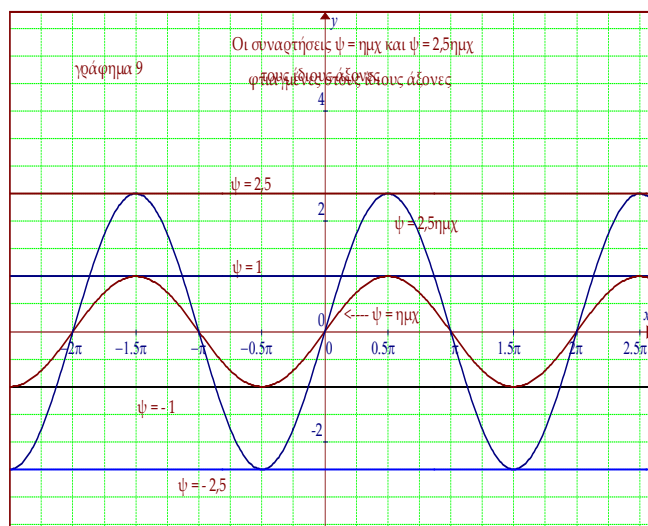
(Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι κλασικό παράδειγμα περιοδικών συναρτήσεων).

Βλέπεται ότι το τμήμα της γραφικής παράστασης που υπάρχει μέσα σε μια περίοδο επαναλαμβάνεται αυτούσιο και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού.

Έτσι λοιπόν δεν χρειάζεται μια τέτοια συνάρτηση να την μελετάμε σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της αλλά στο διάστημα μιας περιόδου.

Με τη βοήθεια αυτών μπορούμε σε να σχεδιάζουμε (και να μελετάμε γενικότερα) συναρτήσεις οι οποίες συνδέονται με τις απλές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Δείτε σε παραδείγματα τις γραφικές παραστάσεις μερικών τέτοιων συναρτήσεων.



Παρατηρήστε επίσης και τα εξής :

Κάθε φορά η γραφική παράσταση της νέας συνάρτησης περιέχεται σε μια «ζώνη».

Αυτό συμβαίνει μόνο όταν η συνάρτηση είναι το ημίτονο (όπως εδώ) ή το συνημίτονο όπου υπάρχει «μέγιστη» και «ελάχιστη» τιμή η οποία καθορίζεται όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν :

Παραδείγματα :

1. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\varphi(x) = 2,5\eta\mu x$ (γράφημα 9).

Απάντηση : Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -2,5 \leq \eta\mu x \leq 2,5$ άρα η **μέγιστη τιμή είναι το 2,5** και η **ελάχιστη τιμή το -2,5**

2. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\varphi(x) = 2\eta\mu(x+2) + 2$. (γράφημα 12).

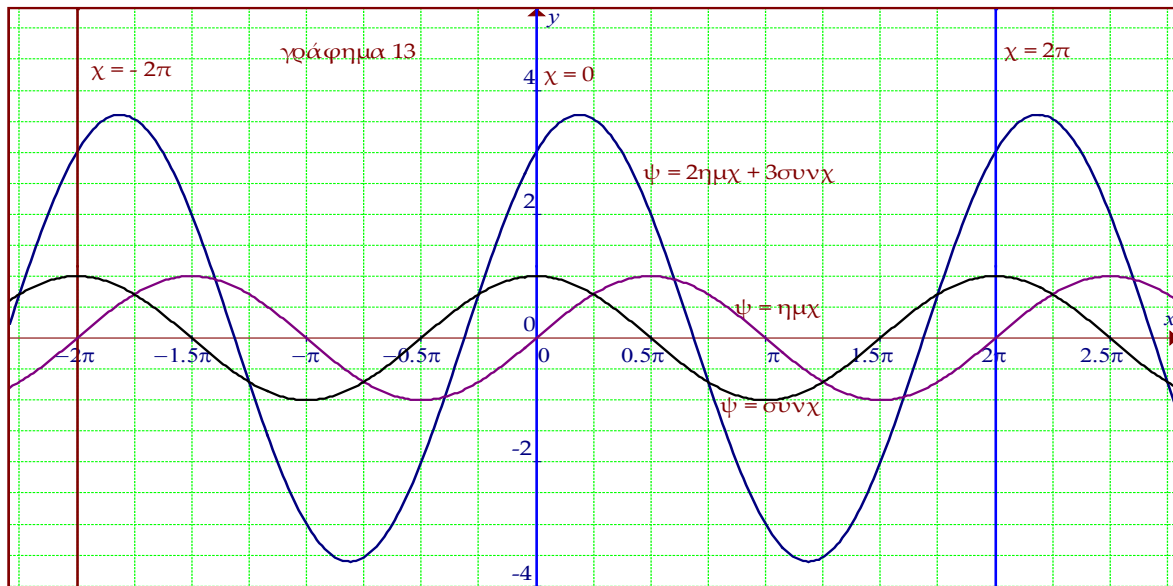
Απάντηση : Επειδή $-1 \leq \eta\mu(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu(x+2) \leq 2 \Leftrightarrow -2+2 \leq 2\eta\mu(x+2) + 2 \leq 2+2 \Leftrightarrow 0 \leq 2\eta\mu(x+2) + 2 \leq 4$ άρα η μέγιστη τιμή είναι το 4 και η ελάχιστη τιμή το 0

Δείτε στο **γράφημα 13** που ακολουθεί τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi = \eta\mu x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ (με περίοδο 2π και οι δύο) και την γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Παρατηρήστε ότι : η γραφική παράσταση της $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[-2\pi, 0]$

(δηλ το τμήμα που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $x = -2\pi$ και $x = 0$) **επαναλαμβάνεται** στο διάστημα $[0, 2\pi]$, (δηλαδή το τμήμα που περιέχεται μεταξύ των ευθειών $x = 0$ και $x = 2\pi$).

Η $f(x)$ είναι επίσης **περιοδική** και μάλιστα με την **ίδια περίοδο 2π** με τις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$.



Διαπιστώστε ότι :

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική τότε και οι $kf(x)$, η $f(x+\lambda)$, η $kf(x) + \lambda$ με $k, \lambda \in \mathbb{P}$ είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις.

Γενικότερα αν δύο συναρτήσεις **$f(x)$ και $g(x)$ είναι περιοδικές** τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός των f και g δηλαδή **$\varphi(x) = kf(x) + \lambda g(x)$ είναι επίσης περιοδική συνάρτηση**

Βέβαια από τα **δυσκολότερα προβλήματα** στην άλγεβρα των συναρτήσεων είναι ο υπολογισμός της περιόδου μιας συνάρτησης. Έτσι λοιπόν θα περιοριστούμε στις απλές και στοιχειώδεις περιπτώσεις, όπως αυτές περίπου που μπορεί κανείς να συναντήσει στις εξετάσεις.

Κριτήρια «Περιοδικότητας» αποτελούν τα πιο πάνω αναφερθέντα δηλαδή :

Βασιανός Μωραϊτης

Λιβαδειά

Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι περιοδικές και $\kappa, \lambda \in \mathbb{P}$ τότε :

- α) Η $\varphi_1(x) = \kappa f(x)$, η $\varphi_2(x) = \kappa f(x + \lambda)$ και η $\varphi_3(x) = \kappa f(x) + \lambda$ είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις.
 β) Η $\varphi(x) = \kappa f(x) + \lambda g(x)$ είναι επίσης περιοδική συνάρτηση.

Σ' αυτά τα κριτήρια και στον ορισμό στηρίζομαστε για να «διαπιστώσουμε» (στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής ή σωστού λάθους) αν μια συνάρτηση είναι περιοδική.

Για να υπολογίσουμε τώρα την περίοδο μιας συνάρτησης που είναι και το δύσκολο, είναι απαραίτητο να θυμόμαστε και τα εξής :

- α) Οι συναρτήσεις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$ έχουν **περίοδο 2π** , ενώ οι συναρτήσεις $\epsilon\varphi x$ και $\sigma\varphi x$ έχουν **περίοδο π** .
 β) Αν T είναι η ελάχιστη (μικρότερη θετική) περίοδος μιας συνάρτησης τότε και η $2T$, $3T$ και γενικά η κT είναι επίσης περίοδος της συνάρτησης.
 γ) Κάθε συνάρτηση της μορφής $\varphi(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με **περίοδο 2π** και κάθε συνάρτηση της μορφής $\varphi(x) = \alpha \epsilon\varphi x + \beta \sigma\varphi x$ είναι επίσης περιοδική με **περίοδο π** , ενώ κάθε συνάρτηση της μορφής $\varphi(x) = \alpha \epsilon\varphi x + \beta \sigma\upsilon\nu x$ ή της μορφής $\varphi(x) = \alpha \eta\mu x + \beta \sigma\varphi x$ είναι περιοδική με **περίοδο 2π** (το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των δύο περιόδων).
 δ) Οι συναρτήσεις $\eta\mu(\kappa x)$, και $\sigma\upsilon\nu(\kappa x)$ έχουν περίοδο $\frac{2\pi}{\kappa}$. Οι συναρτήσεις $\epsilon\varphi(\kappa x)$, και $\sigma\varphi(\kappa x)$ έχουν περίοδο $\frac{\pi}{\kappa}$. Πχ η $\sigma\upsilon\nu 3x$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{3}$ και η $-\epsilon\varphi 5x$ έχει περίοδο $\frac{\pi}{5}$, η $\sigma\varphi \frac{3x}{2}$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{3}$ και γενικά για να βρούμε την περίοδο μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα βήματα της περίπτωσης ε) πιο κάτω.
 ε) Για να βρούμε την περίοδο μιας «περίεργης» συνάρτησης θέτουμε σ' αυτήν όπου x το $x + T$ και προσπαθούμε να υπολογίσουμε το T όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

3. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$;

Απάντηση :

Είναι $T = 2\pi > 0$ η περίοδος, διότι $\varphi(x + 2\pi) = 3\eta\mu(x + 2\pi) - \sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) = 3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \varphi(x)$

4. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = 5\sigma\varphi x + \frac{12}{7}\epsilon\varphi x$;

Απάντηση :

Είναι $T = \pi > 0$ η περίοδος, διότι $\varphi(x + \pi) = 5\sigma\varphi(x + \pi) + \frac{12}{7}\epsilon\varphi(x + \pi) = 5\sigma\varphi x + \frac{12}{7}\epsilon\varphi x = \varphi(x)$

5. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\varphi x$;

Απάντηση :

Είναι $T = 2\pi > 0$ η περίοδος, διότι $\varphi(x + 2\pi) = 3\eta\mu(x + 2\pi) - 2\sigma\varphi(x + 2\pi) = 3\eta\mu x - 2\sigma\varphi x = \varphi(x)$

6. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = \eta\mu\left(\frac{3x - 5\pi}{7}\right) + 3$;

Απάντηση :

Δαμιανός Μωραΐτης

Λιβαδειά

Αν $T > 0$ τότε $\varphi(\chi + T) = \eta\mu\left(\frac{3(\chi + T) - 5\pi}{7}\right) + 3 = \eta\mu\left(\frac{3\chi - 5\pi + 3T}{7}\right) + 3 = \eta\mu\left(\frac{3\chi - 5\pi}{7} + \frac{3T}{7}\right) + 3$ και επειδή
 πρέπει $\varphi(\chi + T) = \eta\mu\left(\frac{3\chi - 5\pi}{7} + \frac{3T}{7}\right) + 3 = \varphi(\chi) = \eta\mu\left(\frac{3\chi - 5\pi}{7}\right) + 3$ άρα $\frac{3T}{7} = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{14\pi}{3}$

7. Να βρείτε την περίοδο της $\varphi(\chi) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi$.

Απάντηση :

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ την οποία βρίσκω ως εξής : Είναι $T_1 = 2\pi$ η περίοδος της $\eta\mu\chi$ και $T_2 = \pi$ η περίοδος της $\sigma\upsilon\nu 2\chi$ τότε η

$\varphi(\chi) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi$ θα έχει περίοδο το Ε.Κ.Π των δύο περιόδων δηλαδή θα είναι **$T = 2\pi$**

και πράγματι είναι $\varphi(\chi + 2\pi) = \eta\mu(\chi + 2\pi) + \sigma\upsilon\nu 2(\chi + 2\pi) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu(2\chi + 4\pi) = \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = \varphi(\chi)$

Επισήμανση

Για να είναι μια συνάρτηση περιοδική (τουλάχιστον για τα «δικά» μας δεδομένα) θα πρέπει αυστηρά να είναι γραμμικός συνδυασμός περιοδικών και μόνο συναρτήσεων πχ κάθε συνάρτηση της μορφής $\kappa \eta\mu\chi + \lambda\chi$ δεν είναι περιοδική

8. Ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι περιοδική :

ι) $\varphi(\chi) = 3\chi + 2\eta\mu 3\chi$ ιι) $g(\chi) = \epsilon\varphi 8\chi$ ιιι) $f(\chi) = \eta\mu(2\chi^4 - 3\chi^5)$ ιιιι) $\theta(\chi) = \chi^2 - 9\eta\mu^2 \chi$

Απάντηση :

ι) $\varphi(\chi) = 3\chi + 2\eta\mu 3\chi$ ιι) **$g(\chi) = \epsilon\varphi 8\chi$** ιιι) $f(\chi) = \eta\mu(2\chi^4 - 3\chi^5)$ ιιιι) $\theta(\chi) = \chi^2 - 9\eta\mu^2 \chi$

9. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης **$\varphi(\chi) = \epsilon\varphi\chi$** είναι το

σύνολο **$A = \{\chi / \chi \in \mathbb{P} : \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0\} = \mathbb{P} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$** .

Απάντηση :

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης **$\varphi(\chi) = \epsilon\varphi\chi$** είναι το

σύνολο **$A = \{\chi / \chi \in \mathbb{P} : \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0\} = \mathbb{P} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$** .

Σ Λ
☐ ☐

☒ ☐

10. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $f(\chi) = \frac{11}{2} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\chi}{11}\right)$

ι) 4π ιι) 3π ιιι) $\frac{11\pi}{2}$ ιιιι) $\frac{6\pi}{11}$ ν) $\frac{2\pi}{11}$ νι) 11π

Απάντηση :

ι) 4π ιι) 3π ιιι) $\frac{11\pi}{2}$ ιιιι) $\frac{6\pi}{11}$ ν) $\frac{2\pi}{11}$ νι) **11π**

11. Αν $\frac{\pi}{3} < \chi, \psi < \frac{\pi}{2}$ να συγκρίνετε τα ι) $\sigma\upsilon\nu 2\chi, \sigma\upsilon\nu 2\psi$ και ιι) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right), \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6} - \psi\right)$

Απάντηση :

Είναι $\frac{\pi}{3} < \chi < \psi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\chi < 2\psi < \pi$. Στο 2° τεταρτημόριο όμως η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα όπως φαίνεται και από τον πίνακα μεταβολών της (σελίδα 3). Άρα θα είναι $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} > \sigma\upsilon\nu 2\chi > \sigma\upsilon\nu 2\psi > \sigma\upsilon\nu \pi \Leftrightarrow$ **$-1 < \sigma\upsilon\nu 2\psi < \sigma\upsilon\nu 2\chi < -\frac{1}{2}$**

12. Για την συνάρτηση $\theta(\chi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)$ να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή καθώς επίσης και αν είναι περιοδική. Αν είναι περιοδική να βρείτε την περίοδό της

Δαμιανός Μωραΐτης

Λιβαδειά

Απάντηση :

Για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ είναι και $-\chi \in \mathbb{P}$ και $\theta(-\chi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \chi\right) \neq \theta(\chi)$, αλλά και

$$\theta(-\chi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \chi\right) \neq -\theta(\chi) \quad \text{επομένως η συνάρτηση } \theta(\chi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)$$

δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

Η συνάρτηση $\theta(\chi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)$ είναι περιοδική με περίοδο π . Πράγματι για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ είναι

$$\chi + \pi \in \mathbb{P} \text{ και } \theta(\chi + \pi) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - (\chi + \pi)\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi - \pi\right) = \sigma\varphi\left(\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right) - \pi\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right) = \theta(\chi)$$

Προσοχή S.O.S

13. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(\chi) = \eta\mu 3\chi$.

Λύση

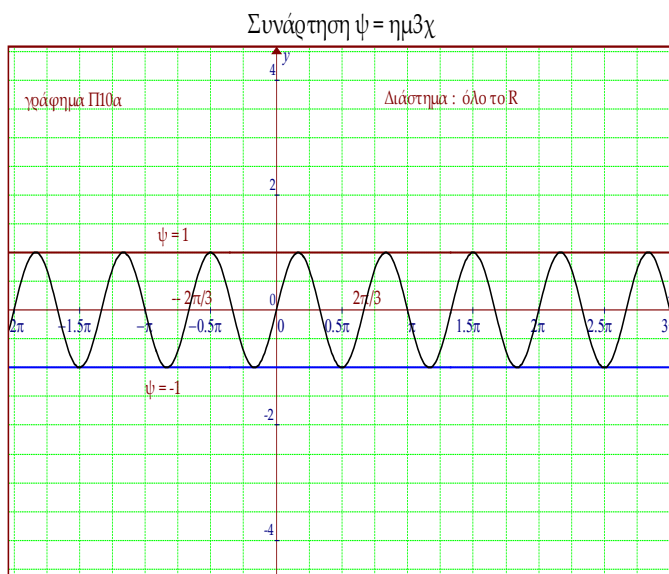
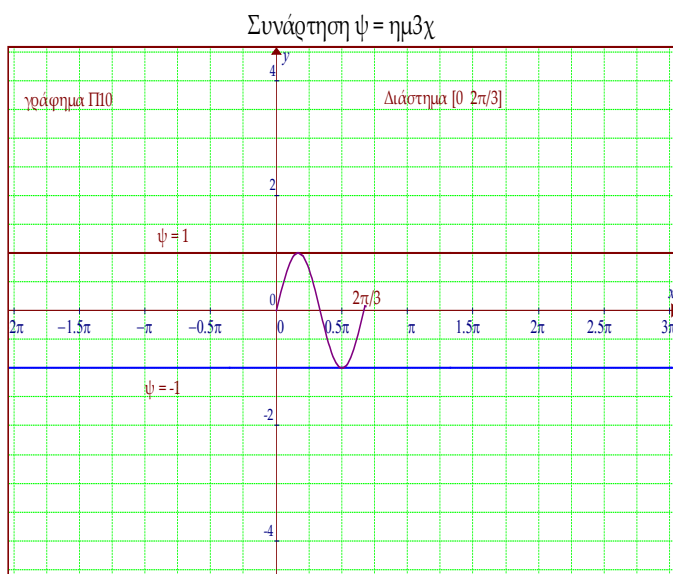
Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \eta\mu 3\chi$ είναι : α) περιττή διότι $\varphi(-\chi) = \eta\mu(-3\chi) = -\eta\mu 3\chi$ β) είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$ (η $\eta\mu(k \cdot \chi)$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{k}$). Για να βρω τις χαρακτηριστικές τιμές για το χ που θα «βάλω» στον πίνακα μεταβολών, διαιρώ κατ' αρχήν την περίοδο με το 4 (επειδή 4 είναι τα τεταρτημόρια) οπότε στο παράδειγμα είναι $\frac{2\pi}{3} : 4 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ άρα οι χαρακτηριστικές τιμές είναι :

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{έτσι λοιπόν θα ισχύει ο πίνακας :}$$

Πίνακας Τιμών - Μεταβολών της συνάρτησης $\eta\mu 3\chi$

χ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\eta\mu 3\chi$	0	1	0	-1	0

Η γραφικής της παράσταση στο $[0, 2\pi]$ και στο $(-\infty, \infty)$ φαίνεται στα γραφήματα Π10 και Π10α.



14. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu 2\chi + 3$.

Λύση

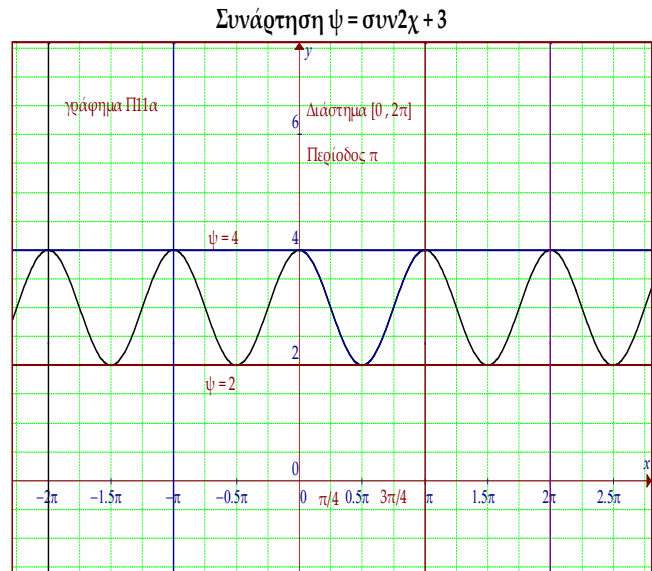
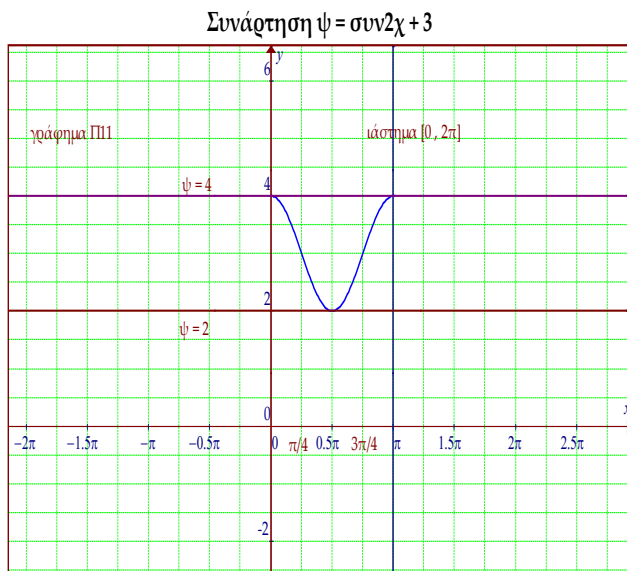
Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \sin 2\chi + 3$ είναι: α) άρτια διότι $\varphi(-\chi) = \sin 2(-\chi) + 3 = \sin(-2\chi) + 3 = -\sin 2\chi + 3$ β) είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$ (η $\sin(k \cdot \chi)$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{k}$). Για να βρω τις χαρακτηριστικές τιμές του χ , που θα «βάλω» στον πίνακα μεταβολών, διαιρώ την περίοδο με το 4 (επειδή 4 είναι τα τεταρτημόρια) οπότε στο παράδειγμα είναι $\pi : 4 = \frac{\pi}{4}$ άρα οι χαρακτηριστικές τιμές είναι :

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4} = \pi \text{ και για τη } \varphi(\chi) = \sin 2\chi + 3 \text{ ισχύει ο}$$

Πίνακας Μεταβολών της συνάρτησης $\sin 2\chi + 3$

χ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2\chi + 3$	4	3	2	3	4

Η δε γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αρχικά και στο P στη συνέχεια φαίνεται στα γραφήματα Π11 και Π11α αντίστοιχα :



15. Να βρεθεί το κ έτσι ώστε η συνάρτηση $f(\chi) = 2 - 3\kappa \sin(2003\pi - \chi)$ να «περνάει» από το $A\left(\frac{\pi}{3}, 11\right)$

Απάντηση :

Αν η $f(\chi) = 2 - 3\kappa \sin(2003\pi - \chi)$ «περνάει» από το $A\left(\frac{\pi}{3}, 11\right)$ τότε θα είναι

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11 \Leftrightarrow 2 - 3\kappa \sin\left(2003\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 11 \Leftrightarrow -3\kappa \left[-\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\right] = 11 - 2 \Leftrightarrow 3\kappa \frac{1}{2} = 9 \Leftrightarrow \kappa = 6.$$

16. Για κάθε τιμή της γωνίας θ δείξτε ότι ισχύει: $|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1$. (1)

Απάντηση :

Επειδή και τα δύο μέλη της (1) είναι θετικά, αν υψώσουμε στο τετράγωνο θα έχουμε :

$$(|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta|)^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2|\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1 \Leftrightarrow 1 + 2|\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta| \geq 0$$

προφανής άρα ...

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό ή στο Λάθος)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \sigma\varphi x$ είναι το σύνολο $A = \{x / x \in \mathbb{P} : \eta\mu x \neq 0\} = \mathbb{P} - \{\kappa\pi\}$ | ☐ | ☐ |
| 2. Η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{P} - \{\lambda\pi\}$ | ☐ | ☐ |
| 3. Η συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x-15\pi}{5}\right)$ στο διάστημα $[6\pi, 8\pi)$ έχει ελάχιστο το -5 όταν $x = \frac{20\pi}{3}$. | ☐ | ☐ |
| 4. Η συνάρτηση $g(x) = 5\eta\mu\left(\frac{3x-15\pi}{5}\right)$ στο διάστημα $[6\pi, 8\pi)$ έχει μέγιστο το 5 όταν $x = \frac{35\pi}{2}$. | ☐ | ☐ |
| 5. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ είναι το 9 . | ☐ | ☐ |
| 6. Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$ «περνάει» Από το $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. | ☐ | ☐ |
| 7. Μια συνάρτηση $\varphi(x)$ λέγεται περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν $\varphi(x+T) = \varphi(x)$. | ☐ | ☐ |
| 8. Μια περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu 5x$ είναι $T = \frac{2\pi}{5}$. | ☐ | ☐ |
| 9. Μια περίοδος της συνάρτησης $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3x$ είναι $T = \frac{2\pi}{3}$. | ☐ | ☐ |
| 10. Η συνάρτηση $\varphi(x) = -3\sigma\upsilon\nu(-3x)$ είναι περιοδική. | ☐ | ☐ |
| 11. Η συνάρτηση $g(x) = -3\sigma\upsilon\nu 3x$ είναι περιττή. | ☐ | ☐ |
| 12. Η συνάρτηση $f(x) = 3\epsilon\varphi^2 3x$ είναι άρτια | ☐ | ☐ |

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \eta\mu x$ είναι το σύνολο
 - $A = \{x / x \in \mathbb{P} : \eta\mu x \neq 0\}$
 - $A = [-1, 1]$
 - $A = \mathbb{P}$
 - $A = (-1, 1)$
 - Τίποτε απ' όλα αυτά .
- Η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\varphi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο :
 - $\mathbb{P} - \kappa\pi$
 - $A = [-1, 1]$
 - $\mathbb{P} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$
 - $A = (-1, 1)$
 - $A = \mathbb{P} - \{0\}$
 - Τίποτε απ' όλα αυτά .
- Ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι περιοδική :
 - $\varphi(x) = 8x + \eta\mu 8x$
 - $\varphi(x) = \sigma\eta\mu 8x$
 - $\varphi(x) = \eta\mu(3x^4 + 3x^3)$
 - $\varphi(x) = 2x^2 + 6\eta\mu x$
- Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(-x)$ είναι:
 - -2π
 - 3π
 - $-\pi$
 - 2π
 - $\frac{3\pi}{2}$
- Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \frac{3}{13} \sigma\eta\mu\left(\frac{13x}{3}\right)$
 - 2π
 - 3π
 - $\frac{3\pi}{13}$
 - $\frac{6\pi}{13}$
 - $\frac{13\pi}{3}$
- Η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\eta\mu x$ είναι :
 - άρτια
 - περιττή
 - ούτε άρτια ούτε περιττή
 - άρτια και περιττή
- Η συνάρτηση $f(x) = -\epsilon\varphi x$ είναι:
 - άρτια
 - περιττή
 - ούτε άρτια ούτε περιττή
 - άρτια και περιττή
- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\eta\mu(-x)$ είναι:
 - άρτια
 - περιττή
 - ούτε άρτια ούτε περιττή
 - άρτια και περιττή
- Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\varphi(x) = 2\sigma\eta\mu(x - \sqrt{3}\pi) - 1$ είναι:
 - -5
 - $2\sqrt{3} - 1$
 - -3
 - τίποτε απ' όλα αυτά
- Η συνάρτηση $f(x) = -\epsilon\varphi x$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:
 - γνησίως αύξουσα
 - γνησίως φθίνουσα
 - τίποτε απ' όλα αυτά
- Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha \sigma\eta\mu x + \beta \eta\mu x$.
Αν $\epsilon\varphi x = \frac{\alpha}{\beta}$ και $A = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{\varphi(-x) + \varphi(x)}$ τότε το A ισούται με :
 - -1
 - $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$
 - $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$
 - 1
 - Τίποτε απ' όλα .

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Περίοδος συνάρτησης
1. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 18\theta$	α) $\frac{2\pi}{3}$
2. $\varphi(\chi) = \eta\mu 3\chi$	β) 2π
3. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta$	γ) $\frac{\pi}{9}$
4. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) π

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

2. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β μέγιστο
1) $\varphi(\theta) = 3\sigma\upsilon\nu(18\pi + \theta)$	α) -6
2) $\varphi(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu 3\chi + 1$	β) 3
3) $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu(2\chi + \frac{15\pi}{2}) - 3$	γ) 4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-2\chi + \pi) - 7$	δ) 2

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	
2)	
3)	
4)	

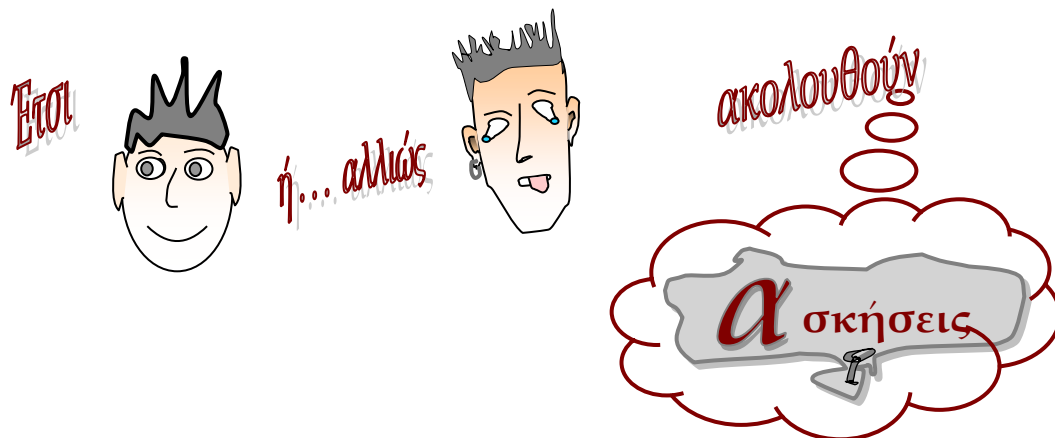
3. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Σημείο που «περνάει»
1. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1$	α) $A\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $\varphi(\chi) = \eta\mu 2\chi - 3$	β) $B\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
3. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta - 2$	γ) $\Gamma\left(\pi - \frac{\pi}{4}, -3\right)$
4. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) $\Delta\left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	



1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = -\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της αν υπάρχει.
2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\varphi x - \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της αν υπάρχει.
3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της αν υπάρχει.
4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = 6\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x + \frac{3\pi}{2}}{5}\right)$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της.
5. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \varepsilon\varphi\left(3x - \frac{11\pi}{6}\right)$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της.
6. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right) + \varepsilon\varphi\left(3x - \frac{11\pi}{6}\right)$ είναι περιοδική, να βρείτε την περίοδο της.
7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\varphi x$ είναι άρτια ή περιττή.
8. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = 2\varepsilon\varphi x + 3\sigma\varphi x$ είναι άρτια ή περιττή.
9. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x$ είναι άρτια ή περιττή.
10. Να βρεθεί το ελάχιστο και το μέγιστο της συνάρτησης $\varphi(x) = -5\eta\mu\left(\frac{2004\pi}{2003} + 3x\right)$
11. Να βρεθεί το ελάχιστο και το μέγιστο της συνάρτησης :

$$g(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2002}{2001}\pi - 7x\right) - 5\eta\mu\left(\frac{2004}{2003}\pi + 3x\right)$$
12. Η συνάρτηση $\varphi(x) = 2\sigma\varphi(x - 3\pi) + 5$ «περνάει» από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$ και $B\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (2003^{2002} + 2004^{2001}) \sin 3x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$
14. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = 5 \sin 2x - 2$ έχει μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστη την -7.
15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = 5 \sin 2x$.
16. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \sin 3x + 2$
17. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \sin 2x + \eta \mu 3x$.
18. Αν το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = \sin(2004\pi + x) + \kappa \eta \mu(2003 - \frac{x}{2})$ τότε $\kappa = -3$
19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\alpha + 1) \sin(\beta \cdot \pi \cdot x)$, όπου α και β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν η μέγιστη τιμή της $f(x)$ είναι 3 και η περίοδος της είναι 4, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$

(Πανελλήνιες Σεπτ. 2003)



2.2 Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Τριγωνομετρικές ονομάζονται οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμπλέκεται σε

τριγωνομετρικό αριθμό πχ $\sqrt{3} \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ή $\eta\mu^2\chi - 5\eta\mu\chi - 6 = 0$ κλπ.

Η ποικιλία των τριγωνομετρικών εξισώσεων είναι αρκετά μεγάλη.

Θα δούμε τις πιο γνωστές και χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων εξισώσεων.

1. Εξισώσεις της μορφής:
$$\begin{cases} \eta\mu\chi = \alpha, & \sigma\upsilon\nu\chi = \alpha \\ \epsilon\phi\chi = \alpha, & \sigma\phi\chi = \alpha \end{cases}$$

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής είναι οι πιο απλές και λύνονται ως εξής :

✓ $\eta\mu\chi = \alpha$

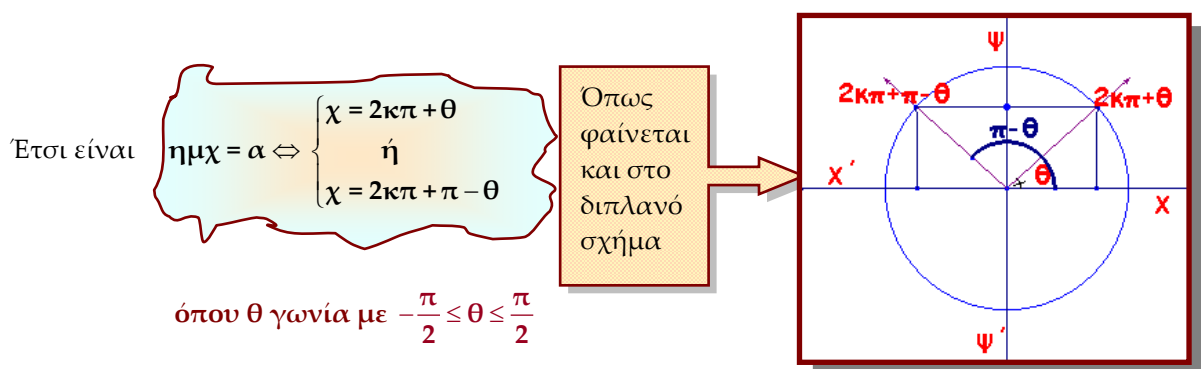
Αν $|\alpha| > 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση (διότι πρέπει $|\eta\mu\chi| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$ για κάθε χ)

Αν $|\alpha| \leq 1$ τότε κάνοντας αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο, δηλαδή χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γνωστών γωνιών και των σχέσεων που μάθαμε στην

παράγραφο 1.3 βρίσκουμε γωνία θ με $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ τέτοια ώστε : $\eta\mu\theta = \alpha$.

Άρα $\eta\mu\chi = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\theta$ και επειδή ως γνωστόν ισχύει : $\eta\mu(2\kappa\pi + \theta) = \eta\mu\theta$ άρα μία σειρά λύσεων για την $\eta\mu\chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \theta$.

Είναι επίσης και $\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta = \alpha$. Όμοια είναι $\eta\mu[2\kappa\pi + (\pi - \theta)] = \eta\mu(2\kappa\pi + \pi - \theta) = \eta\mu(\pi - \theta)$ άρα μία δεύτερη σειρά λύσεων για την $\eta\mu\chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \theta$.



✓ **συνχ = α**

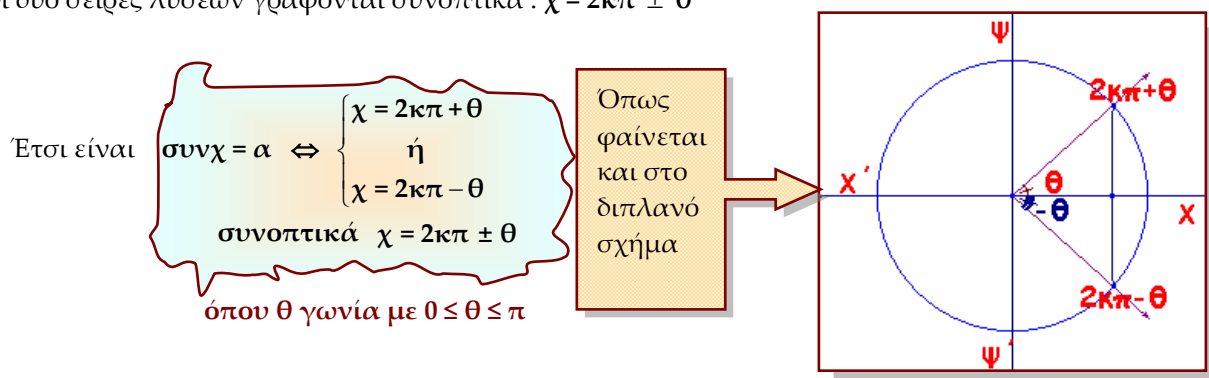
Αν $|\alpha| > 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση (διότι πρέπει $|\sin \chi| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin \chi \leq 1$ για κάθε χ)

Αν $|\alpha| \leq 1$ τότε **κάνοντας** αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο, βρίσκουμε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$ τέτοια ώστε **συνθ = α**.

Άρα $\sin \chi = \alpha \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \theta$ και επειδή ως γνωστόν ισχύει: $\sin(2\kappa\pi + \theta) = \sin \theta$ άρα μία σειρά λύσεων για την $\sin \chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \theta$.

Είναι και $\sin(-\theta) = \sin \theta = \alpha$. Όμοια είναι $\sin[2\kappa\pi + (-\theta)] = \sin(2\kappa\pi - \theta) = \sin(-\theta) = \alpha$ άρα μία δεύτερη σειρά λύσεων για την $\sin \chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi - \theta$

Οι δυο σειρές λύσεων γράφονται συνοπτικά: $\chi = 2\kappa\pi \pm \theta$

✓ **εφχ = α**

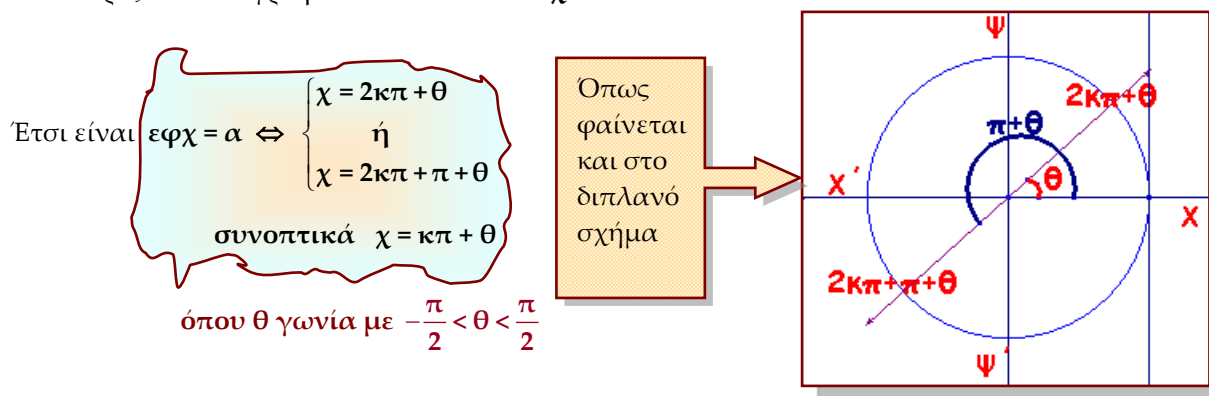
Η εξίσωση έχει λύση για κάθε α

Με αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο, βρίσκουμε θ με $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ τέτοια ώστε **εφθ = α**.

Είναι επίσης **εφ(π + θ) = εφθ = α** και επειδή ως γνωστόν ισχύει: $\tan(2\kappa\pi + \theta) = \tan \theta = \alpha$ άρα μία σειρά λύσεων για την $\tan \chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \theta$.

Και μία δεύτερη σειρά λύσεων για την $\tan \chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \pi + \theta$

Οι δυο σειρές λύσεων γράφονται συνοπτικά: $\chi = \kappa\pi + \theta$



✓ $\sigma\varphi\chi = \alpha$

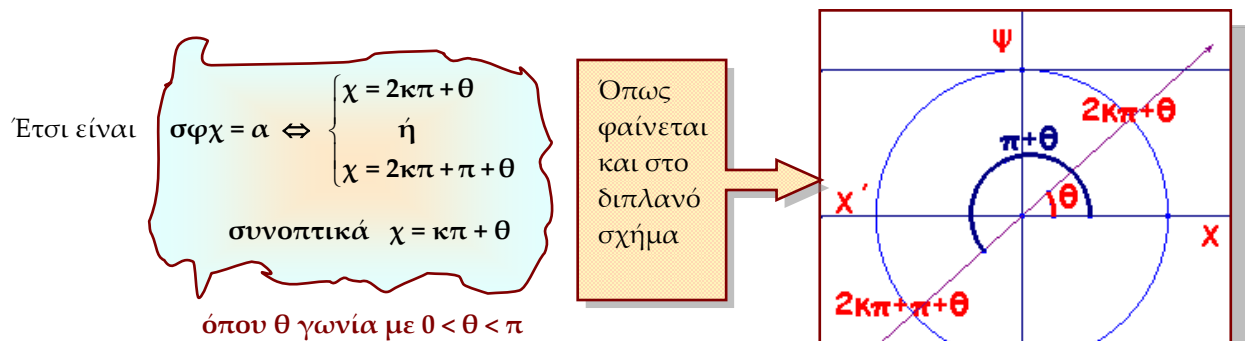
Η εξίσωση έχει λύση για κάθε α

Οπότε **κάνοντας** αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο, βρίσκουμε γωνία θ με $0 < \theta < \pi$ τέτοια ώστε $\sigma\varphi\theta = \alpha$.

Είναι επίσης $\sigma\varphi(\pi + \theta) = \sigma\varphi\theta = \alpha$ και επειδή ως γνωστόν ισχύει : $\sigma\varphi(2\kappa\pi + \theta) = \sigma\varphi\theta = \alpha$ άρα μία σειρά λύσεων για την $\sigma\varphi\chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \theta$.

Και μία δεύτερη σειρά λύσεων για την $\sigma\varphi\chi = \alpha$ είναι η $\chi = 2\kappa\pi + \pi + \theta$

Οι δυο σειρές λύσεων γράφονται συνοπτικά: $\chi = \kappa\pi + \theta$



Παραδείγματα :

1. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση : Ως γνωστόν είναι $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$ άρα θα είναι : $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$

● **Παρατήρηση 1** → Όπως θα δούμε και πιο κάτω όλες αυτές οι εξισώσεις ($\eta\mu\chi = \alpha$ κλπ) έχουν δύο σειρές λύσεων.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$

Λύση : Ως γνωστόν είναι $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ και $0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$ είναι επίσης $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ άρα

$\eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $\chi = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$

● **Παρατήρηση 2** → Όταν ο τριγωνομετρικός αριθμός είναι αρνητικός τότε βρίσκω την γωνία θ για τον θετικό και μετά χρησιμοποιώ τις αντίθετες γωνίες (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα) αν η εξίσωση είναι της μορφής $\eta\mu\chi = \alpha$ ή της μορφής $\epsilon\varphi\chi = \alpha$ ή της μορφής $\sigma\varphi\chi = \alpha$ και τις παραπληρωματικές γωνίες (όπως στο επόμενο παράδειγμα) αν η εξίσωση είναι της μορφής $\sigma\eta\chi = \alpha$

3. Να λυθεί η εξίσωση $\sin \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση : Ως γνωστόν είναι $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi$ επιπλέον δε είναι

$$\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{άρα } \sin \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \chi = 2k\pi - (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi - \pi + \frac{\pi}{4}$$

4. Να λυθεί η εξίσωση $\sin \chi = -1$

Λύση : Είναι $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ και $0 \leq \frac{\pi}{2} \leq \pi$ επιπλέον δε είναι $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$.

$$\text{Άρα } \sin \chi = -1 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \chi = k\pi + (-\frac{\pi}{2}) = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

(σύμφωνα με τον συνοπτικό τύπο).

5. Να λυθεί η εξίσωση $\cos \chi = \sqrt{3}$

Λύση : Είναι $\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ και $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$. Άρα $\cos \chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos \chi = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\chi = k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

2. Εξισώσεις της μορφής : $\begin{cases} \eta\mu[\varphi(\chi)] = \alpha, & \sin[\varphi(\chi)] = \alpha \\ \epsilon\varphi[\varphi(\chi)] = \alpha, & \cos[\varphi(\chi)] = \alpha \end{cases}$

Όπου $\varphi(\chi)$ είναι συνήθως παράσταση της μορφής $\alpha\chi + \frac{k\pi}{\lambda}$ με k, λ φυσικούς

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής είναι επίσης απλές και λύνονται ως εξής :

✓ $\eta\mu[\varphi(\chi)] = \alpha$

Εργαζόμαστε όπως πριν δηλαδή :

Αν $|\alpha| \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση (διότι είναι $|\eta\mu[\varphi(\chi)]| \leq 1$ για κάθε χ)

Αν $|\alpha| \leq 1$ τότε βρίσκουμε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$ τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = \alpha$.

$$\text{Τότε είναι } \eta\mu[\varphi(\chi)] = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\chi) = 2k\pi + \theta & (1) \\ \text{ή} & \text{όπου } \theta \text{ γωνία με } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \varphi(\chi) = 2k\pi + \pi - \theta & (2) \end{cases}$$

Και στη συνέχεια λύνω τις (1) και (2) αλγεβρικά όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

✓ **συν[φ(χ)] = α**

Λύνεται με όμοιο τρόπο με την $\eta\mu[\varphi(\chi)] = \alpha$ δηλαδή :

Αν $|\alpha| \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση (διότι είναι $|\sigma\upsilon\nu\chi| \leq 1$ για κάθε χ)

Αν $|\alpha| \leq 1$ τότε βρίσκουμε γωνία θ με $0 \leq \theta \leq \pi$ τέτοια ώστε **συνθ = α**.

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu[\varphi(\chi)] = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(\chi) = 2\kappa\pi + \theta & (1) \\ \text{ή} & \text{όπου } \theta \text{ γωνία με } 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi(\chi) = 2\kappa\pi - \theta & (2) \end{cases}$$

Και στη συνέχεια λύνω τις (1) και (2) αλγεβρικά όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

✓ **εφ[φ(χ)] = α**

Με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η εφαπτομένη η εξίσωση έχει λύση για κάθε α.

Με ανάλογο τρόπο έχω : $\epsilon\varphi[\varphi(\chi)] = \alpha \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \lambda\pi + \theta$ (1) θ γωνία με $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

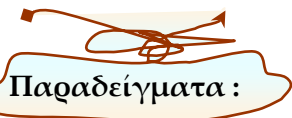
Και στη συνέχεια λύνω την (1) αλγεβρικά όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

✓ **σφ[φ(χ)] = α**

Με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η συνεφαπτομένη η εξίσωση έχει λύση για κάθε α.

Με ανάλογο τρόπο έχω : $\sigma\varphi[\varphi(\chi)] = \alpha \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \lambda\pi + \theta$ (1), θ γωνία με $0 < \theta < \pi$

Και στη συνέχεια λύνω την (1) αλγεβρικά όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.



6. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση : Είναι $\eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και άρα θα είναι : $\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{24} \quad \text{η μία σειρά λύσεων και}$$

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi - \frac{5\pi}{24} \quad \text{η δεύτερη σειρά λύσεων.}$$

7. Να λυθεί η εξίσωση $\sin(\frac{5\pi}{3} - \chi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύση : Είναι $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi$ και $\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα θα είναι

$$\sin \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\frac{5\pi}{3} - \chi) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad (1) \quad \eta$$

$$\frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi - (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2\kappa\pi - \pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$(1) \quad \frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \frac{5\pi}{3} - 2\kappa\pi - \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \dots 2(-\kappa)\pi + \frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\lambda\pi + \frac{11\pi}{12} \quad \eta \text{ μία σειρά λύσεων και}$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi - \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \frac{5\pi}{3} - 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \dots 2(-\kappa)\pi + \frac{29\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\lambda\pi + \frac{29\pi}{12} \quad \eta \text{ δεύτερη σειρά λύσεων.}$$

8. Να λυθεί η εξίσωση $\sin(\chi - \frac{\pi}{6}) = -1$

Λύση : Είναι $\sin \frac{\pi}{4} = 1$ και $0 \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi$ επιπλέον δε είναι $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -1$.

$$\text{Άρα } \sin(\chi - \frac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow \sin(\chi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \chi - \frac{\pi}{6} = \kappa\pi + (-\frac{\pi}{4}) = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$(\text{σύμφωνα με τον συνοπτικό τύπο}). \text{ Άρα } \chi - \frac{\pi}{6} = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}$$

3. Εξισώσεις της μορφής $\begin{cases} \eta\mu\chi = \sin\theta, & \sin\chi = \eta\mu\theta \\ \epsilon\phi\chi = \sigma\phi\theta, & \sigma\phi\chi = \epsilon\phi\theta \end{cases}$

Για να λύσω μια τέτοια εξίσωση χρησιμοποιώ τους μετασχηματισμούς :

$$\sin\theta = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta), \quad \eta\mu\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta), \quad \sigma\phi\theta = \epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - \theta), \quad \epsilon\phi\theta = \sigma\phi(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

Οπότε ισχύουν
οι ισοδυναμίες

$$\begin{cases} \eta\mu\chi = \sin\theta & \Leftrightarrow & \eta\mu\chi = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \sin\chi = \eta\mu\theta & \Leftrightarrow & \sin\chi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \epsilon\phi\chi = \sigma\phi\theta & \Leftrightarrow & \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - \theta) \\ \sigma\phi\chi = \epsilon\phi\theta & \Leftrightarrow & \sigma\phi\chi = \sigma\phi(\frac{\pi}{2} - \theta) \end{cases}$$

Στη συνέχεια δουλεύω όπως
στις εξισώσεις της μορφής 1

❖ Με όμοιο ακριβώς τρόπο δουλεύω και σε εξισώσεις της μορφής $\eta\mu[f(\chi)] = \sin[g(\chi)]$
δηλαδή $\eta\mu[f(\chi)] = \sin[g(\chi)] \Leftrightarrow \eta\mu[f(\chi)] = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - g(\chi))$ και στη συνέχεια δουλεύω όπως
στις εξισώσεις της μορφής 1

Δείτε και τα παραδείγματα που ακολουθούν :

Παραδείγματα :

9. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$

Λύση : Είναι $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \eta\mu \frac{\pi}{3}$. Έτσι $\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

(1) $2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{24}$ η μία σειρά λύσεων και

(2) $2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow$

$\chi = \kappa\pi + \frac{5\pi}{24}$ η δεύτερη σειρά λύσεων.

10. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{3} - \chi) = \eta\mu(2\chi - \frac{\pi}{6})$

Λύση : Είναι $\eta\mu(2\chi - \frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - (2\chi - \frac{\pi}{6})) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2\chi + \frac{\pi}{6}) = \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3} - 2\chi)$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{3} - \chi) = \eta\mu(2\chi - \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{3} - \chi) = \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3} - 2\chi) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi + (\frac{2\pi}{3} - 2\chi) = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - 2\chi \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$\frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi - (\frac{2\pi}{3} - 2\chi) = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} + 2\chi \quad (2)$$

(1) $\frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - 2\chi \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \pi$ η μία σειρά λύσεων και

(2) $\frac{5\pi}{3} - \chi = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} + 2\chi \Leftrightarrow 3\chi = \frac{5\pi}{3} - 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 3\chi = (-\kappa)\pi + \frac{7\pi}{3} = 2 \Leftrightarrow$

$\chi = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{3}$ η δεύτερη σειρά λύσεων.

11. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\varphi(\chi - \frac{\pi}{6}) = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{4}$

Λύση : Είναι $\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} = \sigma\varphi(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sigma\varphi \frac{\pi}{4}$ και $-\sigma\varphi \frac{\pi}{4} = \sigma\varphi(-\frac{\pi}{4})$.

Άρα $\sigma\varphi(\chi - \frac{\pi}{6}) = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\varphi(\chi - \frac{\pi}{6}) = \sigma\varphi(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \chi - \frac{\pi}{6} = \kappa\pi + (-\frac{\pi}{4}) = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

(σύμφωνα με τον συνοπτικό τύπο). Άρα $\chi - \frac{\pi}{6} = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}$

4. Λύση Τριγωνομετρικής Εξίσωσης σε διάστημα.

Παράδειγμα:

12. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ στο διάστημα $[4\pi, 6\pi]$

Λύση:

$$\text{Είναι } \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και άρα θα είναι: } \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

η μία σειρά λύσεων και

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{5\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

η δεύτερη σειρά λύσεων.

Για να βρω τις λύσεις που ανήκουν στο διάστημα $[4\pi, 6\pi]$ πρέπει να λύσω τις εξής ανισώσεις:

$$4\pi \leq \chi \leq 6\pi \Leftrightarrow 4\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{24} \leq 6\pi \quad (I) \quad \text{και} \quad 4\pi \leq \kappa\pi - \frac{5\pi}{24} \leq 6\pi \quad (II), \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$(I) \Leftrightarrow 4 \leq \kappa + \frac{1}{24} \leq 6 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{24} \leq \kappa \leq 6 - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \frac{95}{24} \leq \kappa \leq \frac{143}{24} \Leftrightarrow \kappa = 4 \text{ ή } 5 \text{ άρα } \chi = 4\pi + \frac{\pi}{24} \text{ ή } \chi = 5\pi + \frac{\pi}{24}$$

$$(II) \Leftrightarrow 4 \leq \kappa - \frac{5}{24} \leq 6 \Leftrightarrow 4 + \frac{5}{24} \leq \kappa \leq 6 + \frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{101}{24} \leq \kappa \leq \frac{149}{24} \Leftrightarrow \kappa = 5 \text{ ή } 6 \text{ άρα } \chi = 5\pi - \frac{5\pi}{24} \text{ ή } \chi = 6\pi - \frac{5\pi}{24}$$

5. Τριγωνομετρικές Εξισώσεις Αλγεβρικής μορφής.

Είναι οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος βρίσκεται «μέσα» σε τριγωνομετρικό αριθμό και ο τριγωνομετρικός αριθμός είναι ο «άγνωστος» μιας εξίσωσης, όπως στις εξισώσεις:

$$3\eta\mu(2\chi - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi + 6 = 0$$

Τέτοιες εξισώσεις αντιμετωπίζονται, κατά κανόνα, πρώτα αλγεβρικά και έπειτα τριγωνομετρικά όπως στα παραδείγματα:

Παραδείγματα:

13. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3} = -2\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4})$

$$\text{Λύση: Είναι } \sqrt{3} = -2\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = -\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Επειδή } \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ άρα θα είναι: } \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{4}) = \eta\mu(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow$$

$$2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$\text{ή } 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{7\pi}{24} \quad \text{και}$$

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\chi = \dots 2\kappa\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{24} \quad \text{η δεύτερη σειρά λύσεων.}$$

14. Να λυθεί η εξίσωση $3\sin^2\chi + \sin\chi + 5 = 3 + 6\sin\chi + \sin^2\chi$ (1)

Παρατήρηση : Μπορείς να κάνεις την αντικατάσταση $\sin\chi = \psi$ οπότε

Λύση : Αν στην (1) θέσω $\psi = \sin\chi$ γίνεται $3\psi^2 + \psi + 5 = 3 + 6\psi + \psi^2$.

Τα μεταφέρω όλα στο 1° μέλος και έχω $3\psi^2 + \psi + 5 - 3 - 6\psi - \psi^2 = 0 \Leftrightarrow 2\psi^2 - 5\psi + 2 = 0$

η οποία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το ψ . Την λύνω σύμφωνα με τους τύπους της 2^{βαθμιας}

$$\text{και βρίσκω } \psi = 2 \text{ και } \psi = \frac{1}{2}$$

Η ρίζα $\sin\chi = \psi = 2$ απορρίπτεται διότι πρέπει $|\sin\chi| \leq 1$

$$\text{Από την } \sin\chi = \psi = \frac{1}{2} \text{ έχω } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ οπότε } \sin\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

15. Να λυθεί η εξίσωση $\sin^4\chi - 4\sin^2\chi + 3 = 0$ (1).

Λύση : Η εξίσωση (1) είναι **διτετραγώνη** με άγνωστο την $\sin\chi$ οπότε την λύνω σύμφωνα με αυτά που ξέρω από την 1^η Λυκείου

Παρατήρηση : Μπορείς να κάνεις την αντικατάσταση $\sin^2\chi = \psi$ οπότε η (1) γίνεται

$$\psi^2 - 4\psi + 3 = 0 \Leftrightarrow \dots \psi_1 = 3 \text{ και } \psi_2 = 1.$$

Οπότε $\sin^2\chi = 3$ και $\sin^2\chi = 1$ τότε :

$$\sin^2\chi = 3 \Leftrightarrow \sin^2\chi = \pm\sqrt{3}. \quad \text{Άρα} \begin{cases} \sin\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \sin\chi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin^2\chi = 1 \Leftrightarrow \sin^2\chi = \pm 1. \quad \text{Άρα} \begin{cases} \sin\chi = 1 \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin\chi = -1 \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

16. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2|\eta\mu\chi|-1}{3} + |\eta\mu\chi| = 3|\eta\mu\chi| - 1$ (1).

Λύση : Ως γνωστόν από την Α Λυκείου τέτοιες εξισώσεις λύνονται πιο εύκολα αν κάνεις την αντικατάσταση $|\eta\mu\chi| = \omega$ οπότε η (1) γίνεται :

$$\frac{2\omega-1}{3} + \omega = 3\omega - 1 \Leftrightarrow 2\omega - 1 + 3\omega = 9\omega - 3 \Leftrightarrow -4\omega = -2 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\eta\mu\chi| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu\chi = -\frac{1}{2}.$$

$$ι) \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$ή ιι) \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

6. Τριγωνομετρικές Εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = 0$.

Η λύση εξισώσεων αυτής της μορφής στηρίζεται στην παρατήρηση πως $\eta\mu\chi \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ ταυτόχρονα γιατί αν ήταν $\pi\chi \eta\mu\chi = 0$ τότε από την εξίσωση θα έπρεπε και $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ πράγμα άτοπο. Δες και τα σχετικά παραδείγματα.

1. Να λυθεί η εξίσωση $3\eta\mu\chi + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 0$

Λύση: $3\eta\mu\chi + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow 3\eta\mu\chi = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi$ και επειδή δεν μπορεί να είναι

$\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ γιατί θα έπρεπε και $\eta\mu\chi = 0$ πράγμα αδύνατο άρα η $\eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\epsilon\varphi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και κατά τα γνωστά επειδή $\epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ θα πρέπει $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0$

Λύση: $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi$ και επειδή δεν μπορεί να είναι $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ γιατί θα έπρεπε

και $\eta\mu\chi = 0$ πράγμα αδύνατο άρα η $\eta\mu\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = -1$ και κατά τα γνωστά

επειδή $\epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ θα πρέπει $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

– Η συγκεκριμένη άσκηση αλλά και κάθε άλλη της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ με $\alpha, \beta = \pm 1$, όπως έχεις δει πιο πάνω λύνονται και με πιο απλό τρόπο.

Παρατήρηση «Θεωρητικά» κάθε εξίσωση που μάθαμε μέχρι τώρα, στην άλγεβρα, καθώς και κάθε εξίσωση που θα μάθουμε στο μέλλον μπορεί να μετατραπεί σε τριγωνομετρική εξίσωση αλγεβρικής μορφής αν ο άγνωστος αντικατασταθεί με ένα ημίτονο, συνημίτονο κ.λπ.

Παραδείγματος χάριν η εξίσωση $\chi^2 - 2\chi - 3 = 0$ γίνεται :

$$ι) \sigma\varphi^2\chi - 2\sigma\varphi\chi - 3 = 0 \text{ ή } ιι) \epsilon\varphi^2\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) - 2\epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) - 3 = 0 \text{ ή } ιιι) \eta\mu^2\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) - 2\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right) - 3 = 0$$

Όπως βλέπεις από μια μόνο αλγεβρική εξίσωση δημιουργήσαμε αμέσως τρεις και θα μπορούσαμε να φτιάξουμε χιλιάδες τριγ. εξισώσεις αλγεβρικής μορφής.

Όλες αυτές λοιπόν λύνονται με την αντίστροφη πορεία, δηλ αντικαθιστώ την

$\sigma\varphi\chi$ ή την $\epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)$ ή το $\eta\mu\left(\chi + \frac{5\pi}{4}\right)$ με ω οπότε γυρίζω στην $\omega^2 - 2\omega - 3 = 0$ και ακολουθώ την

πορεία των προηγούμενων παραδειγμάτων.

Ερωτήσεις σωστού - λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  στο Σωστό ή στο Λάθος)

- | | Σ | Λ |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$ είναι $x = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbb{Z}$. | ☐ | ☐ |
| 2. Το $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = 0$. | ☐ | ☐ |
| 3. Οι εξισώσεις $\eta\mu x = 0$ και $\sin x = 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. | ☐ | ☐ |
| 4. Ο $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = 1$. | ☐ | ☐ |
| 5. Ο $x = -\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\sin x = 1$. | ☐ | ☐ |
| 6. Ο $x = -\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\sin x = -1$. | ☐ | ☐ |
| 7. Ο $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \sin x$. | ☐ | ☐ |
| 8. Μια λύση της $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι και η $x = \frac{\pi}{3}$. | ☐ | ☐ |
| 9. Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\pi}{6}$. | ☐ | ☐ |
| 10. Η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ έχει λύσεις τις $x = 2\lambda\pi \pm \theta, \lambda \in \mathbb{Z}$. | ☐ | ☐ |
| 11. Η εξίσωση $2\sin^2 x - 3\sin x + 5 = 0$ είναι αδύνατη. | ☐ | ☐ |
| 12. Η εξίσωση $2\eta\mu^2 x - 9\sin x + 10 = 0$ είναι αδύνατη. | ☐ | ☐ |
| 13. Η εξίσωση $\epsilon\varphi^2 x - 5\epsilon\varphi x + 6 = 0$ είναι αδύνατη. | ☐ | ☐ |
| 14. Οι εξισώσεις $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ και $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις. | ☐ | ☐ |
| 15. Η εξίσωση $\epsilon\varphi x = -\sigma\varphi$ έχει μοναδική λύση την $2\lambda\pi + \omega, \lambda \in \mathbb{Z}$. | ☐ | ☐ |
| 16. Ο $x = 2\lambda\pi + \frac{11\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. | ☐ | ☐ |
| 17. Ο $x = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. | ☐ | ☐ |
| 18. Οι εξισώσεις $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ και $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις. | ☐ | ☐ |
| 19. Οι εξισώσεις $ \sin x = 1$ και $\eta\mu x = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. | ☐ | ☐ |
| 20. Η εξίσωση $ -2 + 2\epsilon\varphi x = 4$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει λύση την $x = -\frac{\pi}{4}$. | ☐ | ☐ |

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Η εξίσωση $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει λύσεις $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
2. Η εξίσωση $\sqrt{3}\cos\omega = 1$ έχει λύσεις $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
3. Η εξίσωση $\sqrt{3}\sin\chi = \frac{3}{2}$ έχει λύσεις $\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
4. Η εξίσωση $\sin^2\chi - 6\sin\chi + 9 = 0$ έχει λύσεις $\underline{\hspace{2cm}}$ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
5. Η $\chi = \frac{\pi}{3}$ είναι λύση της $7\sin(\chi - \underline{\hspace{1cm}}) - 7 = 0$.
6. Αν η εξίσωση $\sin\chi = \alpha$ έχει λύση τότε για το α ισχύει η ανισότητα : $\underline{\hspace{1cm}} \alpha \underline{\hspace{1cm}}$

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sin\chi = -\frac{1}{2}$ είναι :
 ι) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα
2. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι :
 ι) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $\chi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $\chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα
3. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi + \theta$ ή $2\lambda\pi + \pi - \theta$ $\lambda \in \mathbf{Z}$;
 ι) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\theta$ ιι) $\sin\chi = \sin\theta$ ιιι) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$ ιν) $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi(\pi - \theta)$ ν) καμιά απ' όλες
4. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύσεις $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}$ $\lambda \in \mathbf{Z}$;
 ι) $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ιι) $\sin\chi = \frac{1}{2}$ ιιι) $\epsilon\phi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ιν) $\epsilon\phi\chi = \sqrt{3}$ ν) καμιά απ' όλες
5. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύσεις $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}$ $\lambda \in \mathbf{Z}$;
 ι) $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ ιι) $\sin\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ιιι) $\epsilon\phi\chi = 1$ ιν) $\sigma\phi\chi = -1$ ν) καμιά απ' όλες

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$3 \eta \mu \chi - 5 = 0$	ταυτότητα
$\sqrt{2} \sigma \upsilon \nu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$
$2 \eta \mu \left(2\chi + \frac{\pi}{4} \right) = 2$	$\chi = \frac{\lambda\pi}{8}$
	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$
	αδύνατη

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$2 \sigma \upsilon \nu \chi = 1$	ταυτότητα
$\epsilon \varphi^2 \chi = \frac{1}{3}$	$\chi = \lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\sqrt{2} \eta \mu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ή $\frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}$
	αδύνατη

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$\sigma \upsilon \nu \chi = 0$	$\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$
$\eta \mu \chi = -1$	ταυτότητα
$2 \eta \mu \chi = 1$	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$
$\sigma \upsilon \nu 3 \chi = -1$	$\chi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$
	αδύνατη

4. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α εξίσωση	Στήλη Β Λύσεις
1. $\text{συν}2\chi = 1$	α) $\frac{5\lambda\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$
2. $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	β) $\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$
3. $\eta\mu \frac{3\chi}{5} = 0$	γ) $\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$
4. $\sigma\varphi 3\chi = 1$	δ) $4\lambda\pi + \frac{2\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
5. $\text{συν}(\chi + \pi) = 0$	ε) $\frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \lambda \in \mathbf{Z}$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Άσκησης

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\chi} = 1$ (1).
2. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\chi + \text{συν}\chi = 2$.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi\chi = 2\eta\mu\chi$.
4. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2 3\chi + \text{συν}^2 2\chi = 1$.
5. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{5}\right) - \text{συν}\frac{2\pi}{3} = \text{συν}2\chi + \eta\mu\frac{\pi}{6}$
6. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} + \chi\right) \text{συν}\left(\frac{2\pi}{3} - 2\chi\right) = 0$
7. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 2\chi = \text{συν}(\pi + 3\chi)$
8. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(3\chi - \frac{2\pi}{3}\right) + \text{συν}\chi = 0$
9. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2\left(\chi - \frac{\pi}{5}\right) - 3\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{5}\right) = -2$
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{συν}^2 5\chi - \eta\mu^2 5\chi = 1$
11. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{συν}^2 5\chi + 5\eta\mu^2 5\chi = 4$
12. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\varphi 3\chi \sigma\varphi 4\chi = 1$
13. Να λυθεί η εξίσωση: $\varepsilon\varphi 7\chi \varepsilon\varphi 4\chi = 1$
14. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\varphi \frac{2\chi}{3} = 1$

15. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = -1$
16. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$
17. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \varepsilon\varphi\chi$
18. Να λύσετε την εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu\chi = 3\varepsilon\varphi\chi$
19. Να λύσετε την εξίσωση : $2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi = 1$
20. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^3 2\chi + 3\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + 2\eta\mu 2\chi = 3$
21. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^2(7\chi - \frac{\pi}{7}) - \sigma\upsilon\nu^2(2\chi + \frac{\pi}{3}) = 0$
22. Να λύσετε την εξίσωση : $4\eta\mu^2\chi + \sqrt{3} - 2(1 + \sqrt{3})\eta\mu\chi = 0$
23. Να λύσετε την εξίσωση : $4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 2(\sqrt{2} + 1)\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{2} = 0$
24. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = \frac{1}{2}$ [Υπόδειξη εφαρμόστε την $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$]
25. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu(2\chi - \frac{3\pi}{8}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
26. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \eta\mu\chi} = 2$
27. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{3\varepsilon\varphi\chi + 2\sigma\varphi\chi}{3\varepsilon\varphi\chi + 5\sigma\varphi\chi} = \frac{2}{3}$
28. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi}$
29. Να λυθεί η εξίσωση : $2(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi}$
30. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\chi \square \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\chi$
31. Να λύσετε την εξίσωση : $3\varepsilon\varphi^2\chi - 4\sqrt{3}\varepsilon\varphi\chi + 3 = 0$
32. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi}$
33. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $2\sigma\upsilon\nu^2\chi - (\sqrt{3} + 4)\sigma\upsilon\nu\chi + 2\sqrt{3} = 0$
34. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $2\eta\mu^2\chi - 9\eta\mu\chi - 5 = 0$
35. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^2\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi$
36. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{P}$ ώστε η εξίσωση $\kappa^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2 = 3\kappa\eta\mu^2 \frac{\theta}{2}$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό π

37. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{P}$ ώστε η εξίσωση $\kappa^2 \sin^2 \omega = 5\kappa \eta \mu^2 \frac{\omega}{2} + \sin \omega$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{3}$
38. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{P}$ ώστε η εξίσωση $\kappa \varphi^2 \chi - 4\sigma \varphi \chi + 1 = 2\kappa \sigma \varphi \chi - \kappa$ να έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα
39. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $\eta \mu^2 \chi - \sin \chi = \frac{1}{4}$
40. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta \mu \chi \sin \chi + \sin^2 \chi - \eta \mu^2 \chi = 1$
41. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma \varphi^2 \chi + \frac{2}{\eta \mu \chi} + 2 = 0$
42. Να λυθεί η εξίσωση $\sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[2\pi, 4\pi]$.
43. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta \mu \chi + 1 = 0$ στο διάστημα $[3\pi, 5\pi]$
44. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) + 1 = 0$ στο διάστημα $[5\pi, 7\pi]$
45. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ την εξίσωση: $\eta \mu \chi + \sin \chi = 1 + \sin \chi \eta \mu \chi$
46. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ την εξίσωση: $(2\eta \mu \chi - \sqrt{3})(3\epsilon \varphi \chi - \sqrt{3}) \sin \chi = 0$
47. Αν $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(\sin \chi) = 0$
48. Αν $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu(\sigma \varphi \chi) = 0$
49. Αν $\frac{\pi}{2} < \chi \leq \pi$ να λύσετε την εξίσωση: $\sin(\eta \mu \chi) = \frac{1}{2}$
50. Αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση: $\sin(\eta \mu \chi) = \eta \mu(\sin \chi)$
51. Αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ να λύσετε την εξίσωση: $\sin(\sin \chi + \eta \mu \chi) = 1$
52. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το σύνολο των λύσεων των παρακάτω βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων:
 1. $\eta \mu \chi = \alpha$, όπου $\alpha = \eta \mu \theta$ 2. $\sin \chi = \alpha$, όπου $\alpha = \sin \theta$ 3. $\epsilon \varphi \chi = \alpha$, όπου $\alpha = \epsilon \varphi \theta$
 (Πανελλήνιες Εσπερινά 2002)
53. Έστω η συνάρτηση $f(\chi) = (\alpha + 1) \sin(\beta \cdot \pi \cdot \chi)$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.
 για τις τιμές $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ να λύσετε την εξίσωση
 (Πανελλήνιες Σεπτ. 2003)

2.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος – διαφοράς γωνιών

✓ **Συνημίτονο και Ημίτονο** αθροίσματος – διαφοράς γωνιών

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{συν}(\alpha + \beta) &= \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta & \eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \text{συν}\beta + \text{συν}\alpha \cdot \eta\mu\beta \\ \text{συν}(\alpha - \beta) &= \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta & \eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu\alpha \cdot \text{συν}\beta - \text{συν}\alpha \cdot \eta\mu\beta \end{aligned}$$

✓ **Εφαπτομένη αθροίσματος – διαφοράς**

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ για τα οποία η $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$, $\varepsilon\varphi\alpha$, $\varepsilon\varphi\beta$ έχουν νόημα ισχύει:

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} \\ \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} \end{aligned}$$

<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$ πρέπει $\text{συν}(\alpha + \beta) \neq 0$ $\alpha + \beta \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$	<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)$ πρέπει $\text{συν}(\alpha - \beta) \neq 0$ $\alpha - \beta \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$
<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\varepsilon\varphi\alpha$ πρέπει $\text{συν}\alpha \neq 0$ $\alpha \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$	<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\varepsilon\varphi\beta$ πρέπει $\text{συν}\beta \neq 0$ $\beta \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$

✓ **Συνεφαπτομένη αθροίσματος – διαφοράς**

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ για τα οποία η $\sigma\varphi(\alpha + \beta)$, $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$, $\sigma\varphi\alpha$, $\sigma\varphi\beta$ έχουν νόημα ισχύει:

$$\begin{aligned} \sigma\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} \\ \sigma\varphi(\alpha - \beta) &= \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha} \end{aligned}$$

<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\sigma\varphi(\alpha + \beta)$ πρέπει $\eta\mu(\alpha + \beta) \neq 0$ $\alpha + \beta \neq \lambda\pi$	<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$ πρέπει $\text{συν}(\alpha - \beta) \neq 0$ $\alpha - \beta \neq \lambda\pi$
<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\sigma\varphi\alpha$ πρέπει $\eta\mu\alpha \neq 0$ $\alpha \neq \lambda\pi$	<u>Για να έχει νόημα η:</u> $\sigma\varphi\beta$ πρέπει $\eta\mu\beta \neq 0$ $\beta \neq \lambda\pi$

Αναγγελία θυέλλης

Για τις ανάγκες των ασκήσεων θα πρέπει να μάθεις «νεράκι» τους τύπους όλους και μερικούς ακόμη.

Παρατήρηση «Ημέρας» Νο 1 !

Όταν μας δίνει μερικούς από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημα, συνα, ημβ, συνβ και ζητάει κάποιους από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\alpha + \beta$ ή $\alpha - \beta$ τότε εφαρμόζουμε τους τύπους που μάθαμε για τα $\alpha + \beta$ ή $\alpha - \beta$ υπολογίζοντας εν τω μεταξύ όσους από τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς των α, β μας χρειάζονται

Παραδείγματα :

1. Αν είναι $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{5}{13}$ και $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu(\alpha + \beta)$

Λύση : Επειδή $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \eta\mu\beta$ υπολογίζω τα $\sigma\upsilon\nu\alpha, \eta\mu\beta$ που λείπουν.

$$\bullet \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \frac{3}{5} \text{ και επειδή } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ άρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad \eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \pm \frac{12}{13} \text{ και επειδή } 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ άρα}$$

$$\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } \eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

$$\text{Άρα } \eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$$

2. Αν είναι $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$ να υπολογίσετε την $\sin(\alpha + \beta)$

Λύση: Υπολογίζω πρώτα ότι λείπει και χρειάζεται.

$$\eta\mu^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu \alpha = \pm \frac{4}{5} \text{ και επειδή } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ άρα } \eta\mu \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Επομένως } \epsilon\varphi \alpha = \frac{\eta\mu \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \epsilon\varphi \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \epsilon\varphi \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\eta\mu^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \Leftrightarrow \eta\mu^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \beta = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \eta\mu \beta = \pm \frac{12}{13} \text{ και επειδή } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ άρα } \eta\mu \beta = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Επομένως } \epsilon\varphi \beta = \frac{\eta\mu \beta}{\sin \beta} \Leftrightarrow \epsilon\varphi \beta = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} \Leftrightarrow \epsilon\varphi \beta = -\frac{12}{5}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta}{1 - \epsilon\varphi \alpha \cdot \epsilon\varphi \beta} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{12}{5}}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{12}{5}\right)} = \frac{-\frac{20+36}{15}}{1 - \frac{48}{15}} = \frac{-\frac{56}{15}}{-\frac{33}{15}} = -\frac{56}{33}. \text{ Άρα } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{56}{33}$$

3. Αν είναι $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = -\frac{7}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ να υπολογίσετε το $\sin(\alpha + \beta)$

Λύση

$$\bullet \quad 1 + \sin^2 \alpha = \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} = 1 + \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 \alpha} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \eta\mu \alpha = \pm \frac{3}{5} \text{ και επειδή } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ άρα } \eta\mu \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \eta\mu^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5} \text{ και επειδή } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ άρα } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{άρα } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$1 + \sin^2 \beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \beta} = 1 + \frac{49}{25} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \beta} = \frac{74}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \beta = \frac{25}{74} \Leftrightarrow \sin \beta = \pm \frac{5}{\sqrt{74}} = \pm \frac{5\sqrt{74}}{74}$$

$$\text{και επειδή } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \text{ άρα } \sin \beta = -\frac{5\sqrt{74}}{74}$$

$$\eta\mu^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \Leftrightarrow \eta\mu^2 \beta = 1 - \left(-\frac{5\sqrt{74}}{74}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \beta = 1 - \frac{25 \cdot 74}{(74)^2} = 1 - \frac{25}{74} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \beta = \frac{49}{74} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \beta = \pm \frac{7\sqrt{74}}{74} \text{ και επειδή } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi \text{ άρα } \eta\mu \beta = -\frac{7\sqrt{74}}{74}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5\sqrt{74}}{74}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{7\sqrt{74}}{74}\right) = -\frac{15\sqrt{74}}{370} - \frac{21\sqrt{74}}{370} = -\frac{36\sqrt{74}}{370}.$$

$$\text{Άρα } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{36\sqrt{74}}{370}$$

Παρατήρηση «Ημέρας» Νο 2

Όταν μας δίνει $\sin \alpha$ ή $\cos \alpha$ και $\sin \beta$ ή $\cos \beta$ και ζητάει $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ κλπ χρησιμοποιούμε πρώτα τους τύπους $1 + \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ και $1 + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ και $\eta\mu^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ για να βρούμε τα $\eta\mu \alpha$, $\sin \alpha$, $\eta\mu \beta$, $\sin \beta$

M.M.

4. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Λύση :

$$\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta) = \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \eta\mu^2\alpha) \cdot \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \text{ άρα}$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta \text{ και αν αντικαταστήσω το } \eta\mu^2\alpha \text{ και } \eta\mu^2\beta \text{ έχω}$$

$$\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha \text{ άρα είναι και}$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

5. Να υπολογισθεί το $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$

Λύση :

$$\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) = \eta\mu[(\alpha + \beta) + \gamma] = \eta\mu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\eta\mu\gamma =$$

$$(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma + (\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta)\eta\mu\gamma =$$

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu\gamma - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma.$$

Άρα $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma$

6. Να υπολογισθεί ή $\epsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$

Λύση :

$$\epsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = \epsilon\varphi[(\alpha + \beta) + \gamma] = \frac{\epsilon\varphi(\alpha + \beta) + \epsilon\varphi\gamma}{1 - \epsilon\varphi(\alpha + \beta)\epsilon\varphi\gamma} = \frac{\frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta} + \epsilon\varphi\gamma}{1 - \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta} \epsilon\varphi\gamma} = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\gamma - \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta \cdot \epsilon\varphi\gamma}{1 - \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta - (\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta) \cdot \epsilon\varphi\gamma}$$

Άρα $\epsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\gamma}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta - \epsilon\varphi\beta\epsilon\varphi\gamma - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\gamma}$

7. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τις γωνίας $\omega = 75^\circ$

Λύση :

Είναι $\omega = 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ άρα $\eta\mu\omega = \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) =$ Για να υπολογίσουμε τους τριγ. Αριθμούς μερικών γωνιών πχ $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 285^\circ$ κλπ εφαρμόζουμε τους τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς «πάνω» σε δύο «γνωστές» γωνίες.

M.M.

• Είναι $\omega = 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ άρα $\eta\mu\omega = \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

- Για το $\sigma\upsilon\nu 75^\circ$ έχω δύο τρόπους

1ος τρόπος : $\eta\mu^2 75^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 75^\circ = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^\circ = 1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \right]^2 = 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1)^2 = \dots = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$

2ος τρόπος : $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(45^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

- Την $\epsilon\varphi 75^\circ$ μπορώ να την υπολογίσω (αυτόνομα) από τον τύπο :

$$\varepsilon\varphi 75^0 = \varepsilon\varphi(45^0 + 30^0) = \frac{\varepsilon\varphi 45^0 + \varepsilon\varphi 30^0}{1 - \varepsilon\varphi 45^0 \cdot \varepsilon\varphi 30^0} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$\frac{12 + 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

• Την $\varepsilon\varphi 75^0$ μπορώ να την υπολογίσω και από τον τύπο : $\varepsilon\varphi 75^0 = \frac{\eta\mu 75^0}{\sigma\upsilon\nu 75^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}$

$$= \dots = 2 + \sqrt{3}$$

• Την $\sigma\varphi 75^0$ μπορώ να την υπολογίσω με τρεις τρόπους :

α) από τον τύπο : $\sigma\varphi 75^0 = \sigma\varphi(45^0 + 30^0) = \frac{\sigma\varphi 45^0 \cdot \sigma\varphi 30^0}{1 + \sigma\varphi 45^0 \cdot \sigma\varphi 30^0} = \dots = 2 - \sqrt{3}$

β) από τον τύπο : $\sigma\varphi 75^0 = \frac{\sigma\upsilon\nu 75^0}{\eta\mu 75^0} = \dots = 2 - \sqrt{3}$

γ) από τον τύπο : $\sigma\varphi 75^0 = \frac{1}{\varepsilon\varphi 75^0} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \dots = 2 - \sqrt{3}$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τις γωνίας $\varphi = 285^0$

• Είναι $\theta = 285^0 = 330^0 - 45^0$ άρα $\eta\mu\theta = \eta\mu 285^0 = \eta\mu(330^0 - 45^0) = \eta\mu 330^0 \sigma\upsilon\nu 45^0 - \sigma\upsilon\nu 330^0 \eta\mu 45^0$
 - Όμως $\eta\mu(330^0) = \eta\mu(360^0 - 30^0) = -\eta\mu 30^0 = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu(330^0) = \sigma\upsilon\nu(360^0 - 30^0) = \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $\eta\mu 285^0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 285^0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (= - $\eta\mu 75^0$ πράγμα φυσιολογικό αφού $285^0 + 75^0 = 360^0$ κα επομένως έχουν αντίθετα ημίτονα)

• Για το $\sigma\upsilon\nu 285^0$ έχω : $\sigma\upsilon\nu 285^0 = \sigma\upsilon\nu(330^0 - 45^0) = \sigma\upsilon\nu 330^0 \sigma\upsilon\nu 45^0 + \eta\mu 330^0 \eta\mu 45^0$

Άρα $\sigma\upsilon\nu 285^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 285^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (= $\sigma\upsilon\nu 75^0$ πράγμα φυσιολογικό αφού $285^0 + 75^0 = 360^0$ κα επομένως έχουν ίδια συνημίτονα)

• Την $\varepsilon\varphi 285^0$ και την $\sigma\varphi 285^0$ τις υπολογίζουμε με ανάλογο τρόπο με την $\varepsilon\varphi 75^0$, $\sigma\varphi 75^0$

• **Παρατήρηση 1** → Με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και άλλων γωνιών όπως πχ των $15^0 = 45^0 - 30^0$ (ή $15^0 = 60^0 - 45^0$) , $105^0 = 60^0 + 45^0$ κλπ
 Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αυτών των γωνιών (15^0 , 105^0 κλπ) θα τους ξαναβρούμε και πιο κάτω και θα τους υπολογίσουμε με διαφορετικό τρόπο.

• **Παρατήρηση 2** → Υπάρχει μια σειρά εξισώσεων οι οποίες για να λυθούν πρέπει να χρησιμοποιήσεις τους τύπους για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$, δες τα επόμενα παραδείγματα.



9. Αν $\varepsilon\varphi\omega = 5\sqrt{3}$ να λυθεί η εξίσωση : $2\sigma\upsilon\nu(\chi + \omega) = -3\sigma\upsilon\nu(\chi - \omega)$.

Λύση

Δαμιανός Μωραϊτης

Λιβαδειά

$$2\sin(\chi + \omega) = -3\sin(\chi - \omega) \Leftrightarrow 2(\sin\chi \cdot \sin\omega - \eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega) = -3(\sin\chi \cdot \sin\omega + \eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega) \Leftrightarrow$$

$$2\sin\chi \cdot \sin\omega - 2\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega = -3\sin\chi \cdot \sin\omega - 3\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega \Leftrightarrow$$

$$2\sin\chi \cdot \sin\omega + 3\sin\chi \cdot \sin\omega = 2\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega - 3\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega \Leftrightarrow 5\sin\chi \cdot \sin\omega = -\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\omega \quad (1)$$

Αν ήταν $\eta\mu\chi = 0$ τότε από την (1) επειδή $\eta\mu\omega, \sin\omega \neq 0$ θα έπρεπε να είναι και $\eta\mu\chi = 0$ άτοπο άρα

$$\sin\chi \neq 0 \text{ και έτσι η (1) } \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = -\frac{1}{5}\epsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = -\frac{1}{5}5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow$$

$$\chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$$

10. Να λυθεί η εξίσωση $\sin 4\chi = \sin\chi \sin 3\chi$

Λύση

$$\sin 4\chi = \sin\chi \cdot \sin 3\chi \Leftrightarrow \sin(\chi + 3\chi) = \sin\chi \cdot \sin 3\chi \Leftrightarrow \sin\chi \cdot \sin 3\chi - \eta\mu\chi \cdot \eta\mu 3\chi = \sin\chi \cdot \sin 3\chi \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi \cdot \eta\mu 3\chi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\chi = 0 & \chi = \lambda\pi \\ \text{ή} & \Leftrightarrow \text{ή} \\ \eta\mu 3\chi = 0 & 3\chi = \kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \lambda\pi \\ \chi = \kappa \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

11. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega}{1+\epsilon\varphi\omega} + \epsilon\varphi\omega = \sqrt{3}\epsilon\varphi(\omega - \frac{\pi}{4})$

Λύση

Πρέπει $\omega \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$ για να έχει νόημα η $\epsilon\varphi\omega$, $\epsilon\varphi\omega \neq -1$ άρα $\epsilon\varphi\omega \neq \epsilon\varphi(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \omega \neq \lambda\pi - \frac{\pi}{4}$

$$\frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega}{1+\epsilon\varphi\omega} + \epsilon\varphi\omega = \sqrt{3}\epsilon\varphi(\omega - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega}{1+\epsilon\varphi\omega} + \epsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \frac{\epsilon\varphi\omega - \epsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\epsilon\varphi\omega\epsilon\varphi\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega}{1+\epsilon\varphi\omega} + \epsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \frac{\epsilon\varphi\omega - 1}{1+\epsilon\varphi\omega}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega}{1+\epsilon\varphi\omega} + \epsilon\varphi\omega - \sqrt{3} \frac{\epsilon\varphi\omega - 1}{1+\epsilon\varphi\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\omega(1+\epsilon\varphi\omega) - \sqrt{3}(\epsilon\varphi\omega - 1)}{1+\epsilon\varphi\omega} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi^2\omega + \sqrt{3}}{1+\epsilon\varphi\omega} = 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2\omega + (\sqrt{3}+1)\epsilon\varphi\omega + \sqrt{3} = 0 \text{ οπότε ως γνωστόν θέτω } \epsilon\varphi\omega = \psi \text{ και έχω}$$

$$\psi^2 + (\sqrt{3}+1)\psi + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{3}+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 =$$

$$(\sqrt{3}-1)^2 \text{ άρα ρίζες } \psi_1 = \dots = -\sqrt{3} \text{ και } \psi_1 = \dots = -1 \text{ άρα}$$

$$(1) \epsilon\varphi\omega = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \omega = \lambda\pi - \frac{\pi}{6} \text{ και}$$

(2) $\epsilon\varphi\omega = -1$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών

12. Να λυθεί η εξίσωση $\sin\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\chi - \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

Λύση :

$$\sin\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\chi - \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\chi - \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\chi - \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\chi - \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\chi + \frac{\pi}{3} + \chi\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2\chi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\chi + \frac{\pi}{3} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \lambda\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{12}$$

13. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\sin\chi - 3\eta\mu\chi = 3$

Λύση

$$\sqrt{3}\sin\chi - 3\eta\mu\chi = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\chi - \eta\mu\chi = 1 \text{ επειδή } \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ άρα η εξίσωση γίνεται}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \cdot \sin\chi - \eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\chi - \eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \sin\chi - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = -2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3}$$

14. Να λυθεί η εξίσωση $\sin\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -2\eta\mu\chi$

Λύση

$$\sin\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -2\eta\mu\chi \Leftrightarrow \sin\chi \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \eta\mu\chi \cdot \eta\mu\frac{\pi}{6} = -2\eta\mu\chi \Leftrightarrow \sin\chi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \eta\mu\chi \cdot \frac{1}{2} = -2\eta\mu\chi \Leftrightarrow$$

$\sqrt{3}\sin\chi - \eta\mu\chi = -4\eta\mu\chi \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\chi = -3\eta\mu\chi$ (1) και επειδή δεν μπορεί να είναι $\sin\chi = 0$ γιατί θα ήταν ταυτόχρονα και $\eta\mu\chi = 0$ που είναι άτοπο άρα $\sin\chi \neq 0$ και έτσι η (1) γίνεται :

$$\varepsilon\varphi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

- **Παρατήρηση 1** → Εξισώσεις της μορφής $\sin\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\chi$ (1) ή $\sigma\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\chi$ (2) που

εμφανίζονται σε πολλά βιβλία να λύνονται με «ανάπτυξη» του $\sin\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)$ ή της $\sigma\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)$

λύνονται πιο εύκολα αν κάνεις τον μετασχηματισμό $\eta\mu\chi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)$ οπότε η (1) γίνεται :

$$\sin\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ ή στην (2) μπορείς βάλεις } \varepsilon\varphi\chi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \text{ και να γίνει:}$$

$$\sigma\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \text{ και μετά να την λύσεις πολλή πιο απλά.}$$

- **Παρατήρηση 2** → Αρκετό ενδιαφέρουν παρουσιάζουν οι πολλές, μα πάρα πολλές ταυτότητες, που αντιστοιχούν σ' αυτό το τμήμα ύλης και ειδικότερα οι ταυτότητες που αφορούν γωνίες τριγώνου ή τετραπλεύρου. Οπότε να σου θυμίσω ότι όταν πρόκειται για γωνίες τριγώνου ξεκινάω πάντα από τη σχέση $A + B + \Gamma = \pi$ ή από την σχέση $A + B + \Gamma + \Delta = 2\pi$ αν πρόκειται για γωνίες τετραπλεύρου, δες σχετικά παραδείγματα πιο κάτω.

Ταυτότητες και ταυτότητες με συνθήκες

Συμβουλές προς κολυμβητάς

Για να αποδείξω μια ταυτότητα η οποία συνοδεύεται από μια συνθήκη, αν η συνθήκη αποτελείται από σχέση γωνιών, τότε μετατρέπω τη σχέση των γωνιών σε σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών που εμφανίζονται στην ταυτότητα.

Αν η συνθήκη αποτελείται από σχέση τριγωνομετρικών αριθμών τότε με αντικαταστάσεις προσπαθώ να την μετατρέψω στην ταυτότητα συνήθως ξεκινώντας από το 1^ο μέλος με αντικαταστάσεις και χρησιμοποιώντας την συνθήκη προσπαθώ να φτάσω στο 2^ο μέλος.

Παραδείγματα :

15. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (ή $\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa\pi + \pi$) και $\alpha, \beta, \gamma \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα :
- $$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \quad (\text{αποτελεί γενίκευση του παραδείγματος του σχολικού βιβλίου})$$

Λύση :

$\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\kappa\pi + \pi - \gamma \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ άρα έχει νόημα η $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$. Επίσης λόγω των περιορισμών έχουν νόημα οι $\varepsilon\varphi\alpha, \varepsilon\varphi\beta, \varepsilon\varphi\gamma$ έτσι λοιπόν ξεκινώντας από τη σχέση γωνιών θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε σε σχέση τριγωνομετρικών αριθμών και συγκεκριμένα εφαπτομένων.

$$\alpha + \beta = 2\kappa\pi + \pi - \gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi(2\kappa\pi + \pi - \gamma) = -\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} = -\varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = -\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma$$

- **Παρατήρηση** → Αν $\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma = 2\kappa\pi + \pi$ τότε με όμοια απόδειξη θα έχω :

$$\varepsilon\varphi(\lambda\alpha) + \varepsilon\varphi(\lambda\beta) + \varepsilon\varphi(\lambda\gamma) = \varepsilon\varphi(\lambda\alpha) \cdot \varepsilon\varphi(\lambda\beta) \cdot \varepsilon\varphi(\lambda\gamma) \quad \text{πχ}$$

$$\varepsilon\varphi(3\alpha) + \varepsilon\varphi(3\beta) + \varepsilon\varphi(3\gamma) = \varepsilon\varphi(3\alpha) \cdot \varepsilon\varphi(3\beta) \cdot \varepsilon\varphi(3\gamma)$$

16. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa\pi + \pi$ τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$$

Λύση :

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2\kappa\pi + \pi - \gamma \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin(2\kappa\pi + \pi - \gamma) = -\sin\gamma \Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha\sin\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = -\sin\gamma \Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \Leftrightarrow$$

$$(\sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma)^2 = (\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\gamma = \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\gamma = (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin^2\gamma = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$$

17. Αν $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta$ τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2$

Λύση :

$$\text{Ξεκινώντας από τη συνθήκη έχω } \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \sin\beta \Leftrightarrow \sin\alpha \cdot \sin\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\Leftrightarrow -\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = 0 \text{ ή } \eta\mu\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi \text{ ή } \beta = \kappa\pi$$

$$\text{Αν } \alpha = \kappa\pi \text{ τότε } \eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2(\kappa\pi + \beta) = (0 + \eta\mu\beta)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\beta \text{ προφανής.}$$

Όμοια αν $\beta = \kappa\pi$

18. Αν $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$ και $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τότε να αποδειχθεί ότι : $\sin(\alpha - \beta) = -\sin\frac{\pi}{3}$

Λύση :

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{4} \text{ και}$$

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \frac{3}{4} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη}$$

$$\acute{\epsilon}\chi\omega \quad \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$2 + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = 1 \Leftrightarrow 2(\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta) = 1 - 2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{1}{2} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$$

19. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\epsilon\varphi^2 3\alpha - \epsilon\varphi^2 2\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 3\alpha \cdot \epsilon\varphi^2 2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi 5\alpha$

Λύση :

$$\frac{\epsilon\varphi^2 3\alpha - \epsilon\varphi^2 2\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 3\alpha \cdot \epsilon\varphi^2 2\alpha} = \frac{(\epsilon\varphi 3\alpha + \epsilon\varphi 2\alpha) \cdot (\epsilon\varphi 3\alpha - \epsilon\varphi 2\alpha)}{(1 - \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha) \cdot (1 + \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha)} = \epsilon\varphi(3\alpha + 2\alpha) \cdot \epsilon\varphi(3\alpha - 2\alpha) = \epsilon\varphi 5\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha$$

Ερωτήσεις Σύντομης Απάντησης

1. Αν ισχύει ο τύπος $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει το $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$
2. Αν ισχύει ο τύπος $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει το $\eta\mu(\alpha + \beta)$
3. Αν ισχύει ο τύπος $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει το $\eta\mu(\alpha - \beta)$
4. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει την $\epsilon\varphi(\alpha + \beta)$ και να βρείτε τους περιορισμούς
5. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu(\alpha - \beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει την $\epsilon\varphi(\alpha - \beta)$ και να βρείτε τους περιορισμούς
6. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει την $\sigma\varphi(\alpha + \beta)$ και να βρείτε τους περιορισμούς
7. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu(\alpha - \beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει την $\sigma\varphi(\alpha - \beta)$ και να βρείτε τους περιορισμούς
8. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 0$ τότε να δείξετε ότι $\eta\mu(2\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha$ (Υποδ. $\eta\mu(2\alpha + \beta) = \eta\mu[\alpha + (\alpha + \beta)]$)
9. Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) τότε να δείξετε ότι $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\sigma\varphi\Gamma = \epsilon\varphi B$
10. Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) τότε να δείξετε ότι :
 $\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2 \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2 \eta\mu B \eta\mu\Gamma = 2 \eta\mu B \sigma\upsilon\nu B = 2 \eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό ή στο Λάθος)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Είναι $\sin^2(\chi + \psi) = \sin^2\chi + 2\sin\chi \cdot \sin\psi + \sin^2\psi$. | ☐ | ☐ |
| 2. Είναι $\operatorname{εφ}[(\chi + \psi)^2] = \operatorname{εφ}^2\chi + 2\operatorname{εφ}\chi \cdot \operatorname{εφ}\psi + \operatorname{εφ}^2\psi$. | ☐ | ☐ |
| 3. Είναι $\sigma\varphi(\chi + \psi) = \sigma\varphi\chi + \sigma\varphi\psi$. | ☐ | ☐ |
| 4. Η τιμή του κλάσματος $\frac{\sigma\varphi 15^\circ \sigma\varphi 30^\circ - 1}{\sigma\varphi 15^\circ + \sigma\varphi 30^\circ}$ είναι 1 | ☐ | ☐ |
| 5. Η τιμή του κλάσματος $\frac{\operatorname{εφ} \frac{8\pi}{13} + \operatorname{εφ} \frac{5\pi}{13}}{1 - \operatorname{εφ} \frac{8\pi}{13} \cdot \operatorname{εφ} \frac{5\pi}{13}}$ είναι 0 | ☐ | ☐ |
| 6. Είναι $\sin 21^\circ 30' \sin 23^\circ 30' - \eta\mu 21^\circ 30' \eta\mu 23^\circ 30' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. | ☐ | ☐ |
| 7. Υπάρχει τρίγωνο ABΓ έτσι ώστε $\sin(B - \Gamma) = 2 \sin B \sin \Gamma$ | ☐ | ☐ |
| 8. Υπάρχει τρίγωνο ABΓ έτσι ώστε $\sin(B - \Gamma) = 2 \eta\mu B \eta\mu \Gamma$ | ☐ | ☐ |
| 9. Ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = \operatorname{εφ}\alpha + \operatorname{εφ}\beta$ | ☐ | ☐ |
| 10. Ισχύει η σχέση $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} = \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta$ | ☐ | ☐ |
| 11. Ισχύει η σχέση $\frac{\sigma\varphi 4\alpha \cdot \sigma\varphi 3\alpha - 1}{\sigma\varphi 4\alpha + \sigma\varphi 3\alpha} = \sigma\varphi\alpha$ | ☐ | ☐ |
| 12. Ισχύει η σχέση $\operatorname{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{εφ}\alpha + \operatorname{εφ}\beta}{1 - \operatorname{εφ}\alpha \cdot \operatorname{εφ}\beta}$ όπου $\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$ | ☐ | ☐ |
| (Πανελλήνιες 2002 Εσπερινό) | | |
| 13. Ισχύει η σχέση $\operatorname{εφ}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{εφ}\alpha - \operatorname{εφ}\beta}{1 + \operatorname{εφ}\alpha \cdot \operatorname{εφ}\beta}$ όπου $\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$ | ☐ | ☐ |
| (Πανελλήνιες 2002) | | |
| 14. Ισχύει η σχέση $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ | ☐ | ☐ |
| (Πανελλήνιες 2001 και 2002) | | |
| 15. Ισχύει η σχέση $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ | ☐ | ☐ |
| (Πανελλήνιες 2003) | | |

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

- Η τιμή της παράστασης $\sin 33^\circ \cdot \sin 57^\circ - \eta\mu 33^\circ \cdot \eta\mu 57^\circ$ είναι
 ι) 1 ιι) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ιιι) -1 ιν) 0 ν) τίποτε απ' όλα
- Η τιμή του κλάσματος $\frac{\epsilon\varphi 22^\circ + \epsilon\varphi 23^\circ}{1 - \epsilon\varphi 22^\circ \epsilon\varphi 23^\circ}$ είναι
 ι) $\sqrt{3}$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3} - 1$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ν) τίποτε απ' όλα
- Η τιμή του κλάσματος $\frac{\sigma\varphi 15^\circ \sigma\varphi 75^\circ + 1}{\sigma\varphi 15^\circ - \sigma\varphi 75^\circ}$ είναι
 ι) $\sqrt{3} - 1$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3}$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ν) τίποτε απ' όλα
- Αν $A = \frac{\epsilon\varphi \frac{9\pi}{17} + \epsilon\varphi \frac{8\pi}{17}}{1 - \epsilon\varphi \frac{9\pi}{17} \cdot \epsilon\varphi \frac{8\pi}{17}}$ τότε η τιμή της παράστασης A είναι :
 ι) $\sqrt{3}$ ιι) 0 ιιι) 1 ιν) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ νι) τίποτε απ' όλα
- Για να ορίζεται η παράσταση $\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta}{1 - \epsilon\varphi \alpha \cdot \epsilon\varphi \beta}$ πρέπει να είναι :
 ι) $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \kappa\pi$ ιι) $\alpha + \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ιιι) $\alpha, \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
 ιν) $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ν) ορίζεται πάντα νι) τίποτε απ' όλα
- Αν $\epsilon\varphi \omega = 2003$ τότε η $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)$ ισούται με :
 ι) 2004 ιι) $1 - \frac{1}{2003}$ ιιι) $-\frac{2004}{2002}$ ιν) $\frac{2004}{2002}$ ν) $-\frac{2002}{2004}$ νι) τίποτε απ' όλα
- Αν $\epsilon\varphi \omega = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\omega + \theta = 120^\circ$ τότε η $\epsilon\varphi \theta$ ισούται με :
 ι) $5\sqrt{3}$ ιι) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $-5\sqrt{3}$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ν) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ νι) τίποτε απ' όλα
- Αν για τις γωνίες A, B τριγώνου ABΓ ισχύει $\eta\mu A \sin B + \sin A \eta\mu B = 1$ τότε το ABΓ είναι :
 ι) Ισόπλευρο ιι) Οξυγώνιο ιιι) Ορθογώνιο ιν) Αμβλυγώνιο ν) Ισοσκελές νι) τίποτε απ' όλα.
- Αν για τις γωνίες B, Γ τριγώνου ABΓ ισχύει $\eta\mu \Gamma \sin B = \sin \Gamma \eta\mu B$ τότε το ABΓ είναι :
 ι) Ισόπλευρο ιι) Οξυγώνιο ιιι) Ορθογώνιο ιν) Αμβλυγώνιο ν) Ισοσκελές νι) τίποτε απ' όλα.
- Αν για τις γωνίες B, Γ τριγώνου ABΓ ισχύει $\eta\mu A \eta\mu B + \sin A \sin B = 1$ τότε το ABΓ είναι :
 ι) Ισόπλευρο ιι) Οξυγώνιο ιιι) Ορθογώνιο ιν) Αμβλυγώνιο ν) Ισοσκελές νι) τίποτε απ' όλα.

16. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{6}\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right)$
17. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{2\varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega$
18. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)$
19. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
20. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\chi - 3\eta\mu\chi = 3$
21. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\chi + \sigma\varphi\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right)\sigma\upsilon\nu\chi = -1$
22. Να υπολογισθεί το $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma)$
23. Να υπολογισθεί ή $\sigma\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$
24. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$
25. Να αποδείξετε ότι $\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta)}$
26. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta) \cdot \eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\beta$
27. Αν A, B, Γ γωνίες τριγώνου που δεν είναι ορθογώνιο ($A, B, \Gamma \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$) τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\varepsilon\varphi 3A + \varepsilon\varphi 3B + \varepsilon\varphi 3\Gamma = \varepsilon\varphi 3A \cdot \varepsilon\varphi 3B \cdot \varepsilon\varphi 3\Gamma$
28. Αν A, B, Γ, Δ γωνίες τετραπλεύρου τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma + \varepsilon\varphi \Delta}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma + \sigma\varphi \Delta} = \varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi \Gamma \cdot \varepsilon\varphi \Delta$
29. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (ή $\alpha + \beta + \gamma = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$) και $\alpha, \beta, \gamma \neq \kappa\pi$ τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\gamma$
30. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (ή $\alpha + \beta + \gamma = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$) τότε να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma + 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma$
31. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha \cdot \varepsilon\varphi^2 \alpha} = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 3\alpha$
32. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3}{2}$ και $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ τότε να αποδειχθεί ότι : $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$
33. Αν στο τρίγωνο ABΓ ισχύει $\frac{\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)}{\eta\mu A + \eta\mu(B - \Gamma)} = \sigma\varphi B$ να αποδειχθεί ότι το ABΓ είναι ορθογώνιο.

34. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ τότε να αποδειχθεί ότι: $(1 + \epsilon\phi\alpha)(1 + \epsilon\phi\beta) = 2$

35. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$

36. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \eta\mu(\alpha + \beta)$

37. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\sigma\upsilon\nu(36^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(36^\circ + \alpha) - \sigma\upsilon\nu(54^\circ + \alpha)\sigma\upsilon\nu(54^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

38. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\eta\mu((v+1)\alpha) \cdot \eta\mu((v-1)\alpha) + \sigma\upsilon\nu((v+1)\alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu((v-1)\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

39. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$

40. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$

41. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta) \cdot (\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma) \cdot (\epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}$

[υπ $\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}$ κλπ

42. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta) \cdot (\sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma) \cdot (\sigma\phi\gamma + \sigma\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}$

[υπ $\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}$ κλπ

43. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{\epsilon\phi 20^\circ + \epsilon\phi 25^\circ}{1 - \epsilon\phi 20^\circ \cdot \epsilon\phi 25^\circ}$

β) $\eta\mu 15^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ$

γ) $\sigma\upsilon\nu 55^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \eta\mu 55^\circ \eta\mu 10^\circ$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2 15^\circ - 1$

(Πανελλήνιες 2001 Εσπερινό)

44. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{2}$ και $\epsilon\phi\beta = \frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες 2α και 2β είναι συμπληρωματικές.

(Πανελλήνιες 2002 Εσπερινό)

45. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ και

β) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(Πανελλήνιες 2003)

1. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$

2. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $(\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta) \cdot (\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\gamma) \cdot (\epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}$

[υπ $\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}$ κλπ

3. Να αποδειχθεί η ταυτότητα : $(\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta) \cdot (\sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma) \cdot (\sigma\phi\gamma + \sigma\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma}$

[υπ $\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}$ κλπ

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\frac{\epsilon\phi 20^\circ + \epsilon\phi 25^\circ}{1 - \epsilon\phi 20^\circ \cdot \epsilon\phi 25^\circ}$

β) $\eta\mu 15^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ$

γ) $\sigma\upsilon\nu 55^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \eta\mu 55^\circ \eta\mu 10^\circ$

δ) $2\sigma\upsilon\nu^2 15^\circ - 1$

(Πανελλήνιες 2001 Εσπερινό)

5. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{2}$ και $\epsilon\phi\beta = \frac{1}{3}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες 2α και 2β είναι συμπληρωματικές.

(Πανελλήνιες 2002 Εσπερινό)

6. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ και

β) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(Πανελλήνιες 2003)

2.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί των πολλαπλασίων μιας γωνίας.

Ως πολλαπλάσια μιας γωνίας α εννοούνται τα $2\cdot\alpha$, $3\cdot\alpha$ και γενικά $\kappa\cdot\alpha$.

Επειδή $2\cdot\alpha = \alpha + \alpha$, $3\cdot\alpha = 2\cdot\alpha + \alpha$ ότι ισχύει για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $2\cdot\alpha$, $3\cdot\alpha$ κλπ είναι μια απλή εφαρμογή αυτών που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\alpha + \beta$. Δείτε τον υπολογισμό του $\eta\mu 2\alpha$ και θα καταλάβετε.

$$\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(\alpha + \alpha) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Έτσι λοιπόν ισχύουν οι τύποι

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\eta\mu^2\alpha \end{cases} \quad (2)$$

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha} \quad (3)$$

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha} \quad (4)$$

Πάρα πολύ σημαντικοί είναι και οι τύποι για το $\eta\mu 3\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu 3\alpha$

$$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$$

«Κυκλοφορούν» επίσης και οι τύποι $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$, $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1}{2}$ και $\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

Απλώς δες τους να ξέρεις ότι υπάρχουν αλλά δεν χρειάζεται να τους θυμάσαι απ' έξω αλλά να θυμάσαι ότι :

Όταν ξέρω το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ εκτός του ότι μπορώ να υπολογίσω τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α , μπορώ να υπολογίσω και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών α και 3α

Για να υπολογίσω το $\eta\mu\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu\alpha$ από το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ δε χρειάζεται να θυμάμαι τύπος απ' έξω, αντικαθιστώ απλώς το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ στους τύπους που δίνουν του $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ και λύνω ως προς $\eta\mu\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha$, την εφα την βρίσκω ως πηλίκο $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, δες παραδείγματα πιο κάτω.

Μερικές πολύ σημαντικές

Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 1 → Όπως θα δούμε και πιο κάτω ο «μπαξές» έχει απ' όλα :

- Ασκήσεις του τύπου : Δίνεται το $\eta\mu\chi = \dots$ να βρεθούν τα $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ κλπ
- Ασκήσεις όπου υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς «γνωστών» γωνιών
- Ασκήσεις που ζητούν να αποδείξεις μια ταυτότητα (με ή χωρίς συνθήκη)
- Επίλυση εξισώσεων

Για τους πιο πάνω λόγους γίνεται φανερό πως θα εφαρμόσουμε μεθόδους και λογικές παρόμοιες με αυτές που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, της οποίας άλλωστε, όλα αυτά αποτελούν εφαρμογή. Έτσι λοιπόν αποκτούν μεγαλύτερη αξία οι συμβουλές και παρατηρήσεις της παραγράφου 2.3 και θα πρέπει να ανατρέχεις σ' αυτήν για επί μέρους οδηγίες

Παρατήρηση 2 → Το τόξο 2α αναφέρεται και ως «τόξο διπλάσιο του α ». Έτσι λοιπόν οι σχέσεις της προηγούμενης σελίδας συνδέουν ένα τόξο με το διπλάσιό του άρα και μπορούν να εφαρμοστούν και ανάμεσα στο 2α πχ και στο διπλάσιό του το 4α δείτε μερικές πολύ χαρακτηριστικές περιπτώσεις που θα χρειαστούν στις ασκήσεις .

Το 2α είναι διπλάσιο του α
 Το 4α είναι διπλάσιο του 2α
 Το 6α είναι διπλάσιο του 3α
 Το $2\kappa\alpha$ είναι διπλάσιο του $\kappa\alpha$
 όταν $\kappa = 1, 2, 3, \dots$

αλλά και

Το α είναι διπλάσιο του $\frac{\alpha}{2}$
 Το $\frac{\alpha}{2}$ είναι διπλάσιο του $\frac{\alpha}{4}$
 Το $\frac{\alpha}{4}$ είναι διπλάσιο του $\frac{\alpha}{8}$
 Το $\frac{\alpha}{\kappa}$ είναι διπλάσιο του $\frac{\alpha}{2\kappa}$
 όταν $\kappa = 1, 2, 3, \dots$

Παρατήρηση 3 → Όπως θα πρόσεξες για το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ υπάρχουν τρεις τύποι. Πάντα λοιπόν στις ασκήσεις προκύπτει το ερώτημα «με τι τελικά να αντικαταστήσω το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$; » Την απάντηση θα την βρίσκεις πάντα παρατηρώντας το «που θες να φτάσεις» προσέχοντας δηλ το τελικό αποτέλεσμα. Αν στο τελικό αποτέλεσμα υπάρχει πχ μόνο $\eta\mu\alpha$ τότε χρησιμοποιείς τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$, όμοια αν στο τέλος έχεις εφά χρησιμοποιείς τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$. Ενώ αν έχεις στο $\sigma\upsilon\nu\alpha$ ή $\sigma\phi\alpha$ χρησιμοποιείς τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1$. Αν και στην πραγματικότητα όποιον και να χρησιμοποιήσεις το ίδιο είναι γιατί πάντα μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον τύπο $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ και να περάσεις από το ημίτονο στο συνημίτονο και αντίστροφα.

Παραδείγματα :

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} - 1$ ii) $5 + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{5\pi}{8}$ iii) $2\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{8}$ iv) $\frac{2\epsilon\varphi 15^\circ}{1 - \epsilon\varphi^2 15^\circ}$

Λύση : Όπως είναι γνωστό :

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \sigma\upsilon\nu 2 \frac{\pi}{8} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{ii)} \quad 5 + 2\sin^2 \frac{5\pi}{8} = 5 + \sin 2 \frac{5\pi}{8} + 1 = 6 + \sin \frac{5\pi}{4} = 6 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{γιατί} \quad \sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{iii)} \quad 2\sin \frac{3\pi}{8} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{8} = \eta\mu 2 \frac{3\pi}{8} = \eta\mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{γιατί} \quad \eta\mu \frac{3\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{2\epsilon\varphi 15^\circ}{1 - \epsilon\varphi^2 15^\circ} = \epsilon\varphi 2 \cdot 15^\circ = \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



2. Χρησιμοποιώντας τους τύπους διπλασίου τόξου να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i)} \quad \eta\mu 75^\circ \sin 75^\circ \quad \text{ii)} \quad 2\sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) - 1 \quad \text{iii)} \quad \frac{\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} (\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{\left(1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sigma\varphi \frac{\alpha}{2}} \quad \text{iv)} \quad \frac{\epsilon\varphi 150^\circ}{1 - \epsilon\varphi 150^\circ}$$

Λύση : Ως γνωστόν είναι :

$$\text{i)} \quad \eta\mu 75^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \eta\mu 2 \cdot 75^\circ = \frac{1}{2} \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{γιατί} \quad \eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \quad 2\sin^2 \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) - 1 = \sin 2 \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) = \sin \left(2 \frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha \right) = -\eta\mu 2\alpha$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} (\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{\left(1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sigma\varphi \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \cdot \frac{\sigma\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2\sigma\varphi \frac{\alpha}{2}} = \epsilon\varphi \alpha \cdot \sigma\varphi \alpha = 1$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\epsilon\varphi 150^\circ}{1 - \epsilon\varphi 150^\circ} = \epsilon\varphi 2 \cdot 150^\circ = \epsilon\varphi 300^\circ = \epsilon\varphi (-60^\circ) = -\sqrt{3}$$



3. Αν είναι $\eta\mu \alpha = \frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$

Λύση : Επειδή $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu \alpha \sin \alpha$ θα υπολογίσω το $\sin \alpha$

$$\bullet \quad \sin^2 \alpha = 1 - \eta\mu^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \quad \text{και επειδή} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \text{άρα}$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5} \quad \text{Άρα} \quad \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu \alpha \sin \alpha \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) = -\frac{12}{25} \Leftrightarrow \quad \boxed{\eta\mu 2\alpha = -\frac{12}{25}}$$

$$\text{Επειδή} \quad \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \text{θα υπολογίσω και το} \quad \sin 2\alpha$$

$$\bullet \quad \sin 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 - 2 \frac{16}{25} \Leftrightarrow \boxed{\sin 2\alpha = -\frac{7}{25}}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν} \quad \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{-\frac{12}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{12}{7}$$



4. Αν είναι $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ να υπολογίσετε το $\eta\mu \frac{\alpha}{2}$ και την $\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

Λύση : Υπολογίζω πρώτα ότι λείπει και χρειάζεται. Το α και το $\frac{\alpha}{2}$ έχουν σχέση διπλάσιο προς μισό

$$\text{άρα θα είναι} \quad \sin \alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sin \alpha}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{13} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ και επειδή } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ άρα } \eta\mu \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Όμοια } \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{13} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{3\sqrt{13}}{13} \text{ και επειδή } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

$$\text{Επομένως } \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{13}}{13}}{-\frac{3\sqrt{13}}{13}} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{3}$$

5. Αν είναι $\sigma\varphi\alpha = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

Λύση

$$1 + \sigma\varphi^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = 1 + \frac{16}{9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm \frac{3}{5} \text{ και επειδή } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{άρα } \eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \frac{4}{5} \text{ και επειδή}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν } \eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \text{ Άρα } \eta\mu 2\alpha = \frac{24}{25}$$

Το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ μπορώ να το υπολογίσω με δύο τρόπους. Πρώτον από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ και δεύτερον από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - \eta\mu^2 2\alpha$. Έτσι λοιπόν είναι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \text{ άρα } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{7}{25}$$

6. Αν είναι $|\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\epsilon\varphi\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$

Λύση :

$$|\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha| = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow |\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \Leftrightarrow (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \frac{5}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\alpha - 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = 1 - \eta\mu^2 2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \pm \frac{3}{5} \quad (1)$$



Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε τα εξής : πολλές φορές οι άσκηση δίνει περιορισμούς για το α και πρέπει «να βρούμε άκρη» για το 2α , 3α κλπ τότε στον αρχικό περιορισμό βάζουμε το 2α , 3α κλπ και «λύνουμε ως προς α »

Παρατήρηση

Όταν μας δίνει $\epsilon\varphi\alpha$ ή $\sigma\varphi\alpha$ και ζητάει $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ κλπ χρησιμοποιούμε πρώτα τους τύπους :

$$1 + \epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \text{ και } 1 + \sigma\varphi^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$$

και $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ για να βρούμε τα $\eta\mu\alpha$, $\sigma\upsilon\nu\alpha$, και μετά προχωράμε ανάλογα

Για να βρω αν το $\sin 2\alpha$ θα είναι θετικό ή αρνητικό κάνω τα εξής : στον αρχικό περιορισμό

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ βάζω το } 2\alpha \text{ και έχω } 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ οπότε :}$$

α) Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ τότε $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ και άρα το $\sin 2\alpha > 0$ άρα από (1) είναι

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{επομένως } \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = \frac{4}{3}$$

Για την εφα μπορώ να ακολουθήσω την «διαδρομή» : από το $\sin 2\alpha$ βρίσκω $\eta\mu\alpha$ και $\sin\alpha$ και μετά την εφα ως πηλίκο ή μπορώ από τον τύπο $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}$ να αντικαταστήσω την $\eta\mu 2\alpha = \frac{4}{3}$ οπότε

$$\text{έχω } \frac{4}{3} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha} \Leftrightarrow 4-4\epsilon\varphi^2\alpha = 6\epsilon\varphi\alpha \Leftrightarrow 4\epsilon\varphi^2\alpha + 6\epsilon\varphi\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\epsilon\varphi^2\alpha + 3\epsilon\varphi\alpha - 2 = 0 \text{ οπότε}$$

$$\text{διακρίνουσα κλπ έχω : } \Delta = \dots = 25 \text{ άρα ρίζες } \varrho_1 = -2 \text{ και } \varrho_2 = \frac{1}{2} \text{ άρα } \epsilon\varphi 2\alpha = -2 \text{ ή } \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{1}{2}$$

Και μην ξεχνιόμαστε ! όλα αυτά όταν $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ γιατί όταν :

β) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ τότε $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ και άρα το $\sin 2\alpha < 0$ άρα από (1) είναι

$$\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{επομένως } \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \eta\mu 2\alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Από τον τύπο } \eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha} \text{ αντικαθιστώ την } \eta\mu 2\alpha = -\frac{4}{3} \text{ οπότε έχω } -\frac{4}{3} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$-4 + 4\epsilon\varphi^2\alpha = 6\epsilon\varphi\alpha \Leftrightarrow 4\epsilon\varphi^2\alpha - 6\epsilon\varphi\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\epsilon\varphi^2\alpha - 3\epsilon\varphi\alpha - 2 = 0 \text{ οπότε διακρίνουσα κλπ έχω :}$$

$$\Delta = \dots = 25 \text{ άρα ρίζες } \varrho_1 = 2 \text{ και } \varrho_2 = -\frac{1}{2} \text{ άρα } \epsilon\varphi 2\alpha = 2 \text{ ή } \epsilon\varphi 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

7. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τις γωνίας $\omega = 75^\circ$

Λύση :

$$\bullet \text{ Είναι } \omega = 75^\circ = \frac{150^\circ}{2} \text{ άρα}$$

$$\sin 150^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 75^\circ \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\eta\mu^2 75^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^2 75^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 75^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu^2 75^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Leftrightarrow \eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ που}$$

όπως εύκολα διαπιστώνουμε με πράξεις είναι το ίδιο με το $\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο

$$\bullet \text{ Για το } \sin 75^\circ \text{ εργαζόμαστε ανάλογα και βρίσκουμε } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ που}$$

όπως εύκολα διαπιστώνουμε με πράξεις είναι το ίδιο με το $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο

Για την $\epsilon\varphi 75^\circ$ και $\sigma\varphi 75^\circ$ εργαζόμαστε ανάλογα

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγ. αριθμούς μερικών γωνιών πχ $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 285^\circ$ κλπ εφαρμόζουμε τους τύπους του διπλασίου τόξου «πάνω» σε «γνωστές» γωνίες.

- **Παρατήρηση** → Με όμοιο εντελώς τρόπο θα μπορούσα να υπολογίσω και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ διότι $30^\circ = 2 \cdot 15^\circ$ ή $\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\pi}{12}$ οπότε οι 15° είναι το μισό των 30° , στη συνέχεια από τις 15° μπορώ να υπολογίσω τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $7,5^\circ$ δηλαδή των $7^\circ 30'$ ή αλλιώς του $\frac{\pi}{24}$ αφού $\frac{\pi}{12} = 2 \cdot \frac{\pi}{24}$ δείτε ένα τέτοιο παράδειγμα πιο κάτω.

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τις γωνίας $\omega = \frac{\pi}{8} = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$

Είναι $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8} = 2\omega$ άρα από τους τύπους του διπλασίου τόξου θα είναι

$$\bullet \quad \sin \frac{\pi}{4} = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\bullet \quad \sin \frac{\pi}{4} = 2\sin^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

- **Παρατήρηση 1** → Το $\sin \frac{\pi}{8}$ μπορούσα να το υπολογίσω και από τον τύπο $\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} = 1$

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi \frac{\pi}{8} = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2 - \sqrt{2}})(\sqrt{2 + \sqrt{2}})}{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})(\sqrt{2 + \sqrt{2}})} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

$$\bullet \quad \sigma\varphi \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\varepsilon\varphi \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} \Leftrightarrow \sigma\varphi \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$$

- **Παρατήρηση 2** → Συνεχίζοντας θα μπορούσα να υπολογίσω και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{32}$ κλπ επειδή $\frac{\pi}{8} = 2 \frac{\pi}{16}$ και $\frac{\pi}{16} = 2 \frac{\pi}{32}$.

9. Να αποδείξετε ότι

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2^3}$$

Λύση : Είναι $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$ άρα όταν $\alpha = \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ θα είναι

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{7}}{2\eta\mu \frac{\pi}{7}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{7}}{2\eta\mu \frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{7}}{2\eta\mu \frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{7}}{\eta\mu \frac{\pi}{7}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{7}}{\eta\mu \frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{7}}{\eta\mu \frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{7}}{\eta\mu \frac{\pi}{7}} =$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right)}{\eta\mu \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{-\eta\mu \frac{\pi}{7}}{\eta\mu \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu \frac{\pi}{7}}{\eta\mu \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$$

Όταν σε μια παράσταση εμφανίζεται μόνο γινόμενο ημιτόνων ή μόνο συνημιτόνων τότε χρησιμοποιώ τον τύπο $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ και αντικαθιστώ το μεν $\eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha}$ το δε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$

10. Να αποδειχθεί ότι $1 \pm \eta\mu 2\alpha = (\eta\mu\alpha \pm \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$

Να τι θα κάνεις με το $1 + \eta\mu 2\alpha$ ή το $1 - \eta\mu 2\alpha$ όταν «δεν ξέρεις τι να το κάνεις»

Λύση :

$$(\eta\mu\alpha \pm \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \eta\mu^2\alpha \pm 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \pm \eta\mu 2\alpha$$

11. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$

Θα ξεκινήσω από το 1^ο μέλος και όπως σου έχω ξαναπεί θα κάνω αντικαταστάσεις. Παρατηρώ ότι στο 1^ο μέλος υπάρχει το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, άρα πάντα εμφανίζεται ένας προβληματισμός, με ποιόν από τους τρεις τύπους θα αντικαταστήσω το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$; Μην ανησυχείς, η ίδια η άσκηση σου δείχνει, επειδή όπως έχω πει και πιο πάνω, στο 2^ο μέλος υπάρχει $\epsilon\varphi\alpha$ άρα το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ θα αντικατασταθεί με το $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$, έτσι λοιπόν είναι :

Λύση :

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)} = \frac{\cancel{2}\eta\mu\alpha \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$$

12. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$

Λύση :

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1 - (1 - 2\eta\mu^2\alpha) + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 + 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\cancel{2}\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)} = \epsilon\varphi\alpha$$

Παρατήρηση : Εδώ όπως βλέπεις υπάρχει το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ δυο φορές. Επειδή στο 2^ο μέλος υπάρχει η $\epsilon\varphi\alpha$ και $\epsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ στον μεν αριθμητή το αντικαθιστώ με $1 - 2\eta\mu^2\alpha$, στον δε παρονομαστή με $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$.

13. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1 - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = 2 \cdot \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

Λύση : $\frac{1 - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)}$ (1) Αντικαθιστώ κατ' αρχήν το $1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ με $\eta\mu^2\alpha$

(γιατί στο 2^ο μέλος υπάρχει εφ'απτομένη άρα στον αριθμητή θέλω ημίτονο, δεν έχει σημασία ότι είναι $\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$) και έχω $\frac{\eta\mu^2\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{2\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}$ (1)

Στη συνέχεια κάνω και τις μοναδικές αντικαταστάσεις που μπορούν να γίνουν δηλαδή το

$$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \text{ και η (1) γίνεται :}$$

$$\frac{2\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2 \cdot 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\cancel{2} \cdot 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \cdot \cancel{\sigma\upsilon\nu} \frac{\alpha}{2}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$$



14. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+\eta\mu 2\chi}$

Λύση :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)=\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\chi}=\frac{1-\varepsilon\varphi\chi}{1+1\cdot\varepsilon\varphi\chi}=\frac{1-\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi\chi}=\frac{1-\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{1+\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi}$$

πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του αριθμητή (για να δημιουργήσω στον αριθμητή την διαφορά $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$) και έχω

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi}=\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi)}{(\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi)}=\frac{(\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu^2\chi}=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1+2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}$$



15. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi 2\alpha - \sigma\varphi 2\alpha = -2\sigma\varphi 4\alpha$

Λύση :

$$\varepsilon\varphi 2\alpha - \sigma\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{\eta\mu^2 2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{-(\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - \eta\mu^2 2\alpha)}{\frac{\eta\mu 4\alpha}{2}} = -2 \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha} = -2\sigma\varphi 4\alpha$$



16. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} = 4$ (ή $\frac{1}{\eta\mu 10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^0} = 4$)

Λύση :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} &= \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{18}} - \frac{\sigma\varphi\frac{\pi}{6}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} = \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{18}} - \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\eta\mu\frac{\pi}{6}}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} = \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{18}} - \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} = \\ &= \frac{\eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{18}}{\eta\mu\frac{\pi}{18} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{18}} = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right)}{\eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{18}}{2}} = 2 \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{18}}{\eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}} = 2 \frac{\eta\mu\frac{\pi}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{9}} = 4 \end{aligned}$$

Ακολουθούν μερικές εξισώσεις οι οποίες για να λυθούν πρέπει να χρησιμοποιήσεις τους τύπους με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α όπως στα επόμενα παραδείγματα.



Παραδείγματα :



17. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu 3\chi \cdot \eta\mu 3\chi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu 3\chi \cdot \eta\mu 3\chi = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \eta\mu 6\chi = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \eta\mu 6\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 6\chi = \eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 6\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } 6\chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{2\lambda\pi}{6} + \frac{\pi}{24} \text{ ή } \chi = \frac{2\lambda\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{24} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

18. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin 2\chi - 2\sin \chi = \sqrt{3}(1 - 2\sin \chi) - 2$

Λύση

$$2\sin 2\chi - 2\sin \chi = \sqrt{3}(1 - 2\sin \chi) - 2 \Leftrightarrow 4\sin^2 \chi - 2 - 2\sin \chi = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sin \chi - 2 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2 \chi - 2\sin \chi - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sin \chi = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 \chi + 2(\sqrt{3} - 1)\sin \chi - \sqrt{3} = 0 \text{ θέτω } \sin \chi = \psi \text{ και έχω}$$

$$4\psi^2 + 2(\sqrt{3} - 1)\psi - \sqrt{3} = 0, \Delta = \dots = 4(\sqrt{3} + 1)^2 \text{ άρα ρίζες } \psi_1, \psi_2 = \frac{-2(\sqrt{3} - 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)}{8} \Leftrightarrow \psi_1 = \frac{1}{2}, \psi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{άρα } \sin \chi = \frac{1}{2} \text{ ή } \sin \chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha) \sin \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\beta) \sin \chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



Παρατήρηση Είναι χρήσιμο να ξανακοιτάξεις όλα όσα είπαμε στην παράγραφο 2. 2 περί εξισώσεων. Ισχύουν ακριβώς τα ίδια. Το μόνο που αλλάζει είναι ότι τώρα (πιθανόν) θα χρειάζεται να εφαρμόσεις και κάποιο μετασχηματισμό για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α . Μια επανάληψη λοιπόν της παραγράφου 2. 2 «επειγόντως»



19. Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2\chi - \eta\mu\chi - 1 = 0$

Λύση

$$\sin 2\chi - \eta\mu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\eta\mu^2 \chi) - \eta\mu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 \chi - \eta\mu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 \chi + \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi(2\eta\mu\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = 0 \text{ ή } 2\eta\mu\chi + 1 = 0$$

$$\alpha) \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi$$

$$\beta) 2\eta\mu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \text{ ή } \chi = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3}$$



Παρατήρηση Όταν μέσα σε μια εξίσωση υπάρχουν συγχρόνως το χ με το 2χ ή το χ με το $\frac{\chi}{2}$ ή το 2χ με το 4χ κλπ δηλαδή μια γωνία και η διπλάσιά της τότε τα αντικαθιστάς όλα σε σχέση με την μικρότερη γωνία όπως πιο πάνω. Ενώ αν υπάρχουν συγχρόνως μέσα στην εξίσωση μια γωνία το διπλάσιό της και το μισό της τότε αν βολεύει τα «ανάγεις» όλα σε σχέση με το «μεσαίο» $\pi\chi$ αν υπάρχουν μαζί το χ , 2χ και το $\frac{\chi}{2}$ τότε τα «ανάγεις» σε σχέση με το χ όπως στο παράδειγμα.



20. Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2\chi + \sin \chi - 2\eta\mu^2 \frac{\chi}{2} = -\frac{1}{2}$

Λύση :

$$\sin 2\chi + \sin \chi - 2\eta\mu^2 \frac{\chi}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 \chi - 1 + \sin \chi - (1 - \sin \chi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 \chi + 2\sin \chi - 2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2 \chi + 4\sin \chi - 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta = \dots = 64 \text{ άρα ρίζες } \sin \chi = \frac{1}{2} \text{ (δεκτή) και } \sin \chi = \frac{3}{2} \text{ (απορρίπτεται γιατί}$$

$$\frac{3}{2} > 1 \text{ . Έτσι λοιπόν } \sin \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$$



21. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\sin 2\chi + 1} + \sqrt{\sin 2\chi - 1} = 0$

Λύση :

για να ισχύει $\sqrt{\sin 2\chi + 1} + \sqrt{\sin 2\chi - 1} = 0$ πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι $\begin{cases} \sin 2\chi + 1 = 0 \\ \text{και} \\ \sin 2\chi - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin 2\chi = -1 \\ \text{και} \\ \sin 2\chi = 1 \end{cases} \quad \text{άτοπο άρα η εξίσωση δεν έχει λύση}$$

Ερωτήσεις Σύντομης Απάντησης

1. Αν είναι γνωστός ο τύπος για το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει το $\eta\mu 2\alpha$.
2. Από το τύπο του $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει το $\sin 2\alpha$
3. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ και το $\sin(\alpha + \beta)$ τότε να υπολογίσετε τον τύπο που δίνει την $\epsilon\varphi 2\alpha$ και να βρείτε τους περιορισμούς
4. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\alpha$ σε συνάρτηση του $\sin 2\alpha$
5. Να υπολογίσετε το $\sin\alpha$ σε συνάρτηση του $\sin 2\alpha$
6. Να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi\alpha$ σε συνάρτηση του $\sin 2\alpha$
7. Να υπολογίσετε την $\sigma\varphi\alpha$ σε συνάρτηση του $\sin 2\alpha$
8. Αν είναι γνωστοί οι τύποι για το $\eta\mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\epsilon\varphi 2\alpha$, $\sigma\varphi 2\alpha$ σε συνάρτηση του α τότε να υπολογίσετε τα $\eta\mu\alpha$, $\sin\alpha$, $\epsilon\varphi\alpha$, $\sigma\varphi\alpha$ ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας $\frac{\alpha}{2}$
9. Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) τότε να δείξετε ότι $\eta\mu 2B = 2\sin B \cos B$
10. Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($A = 90^\circ$) τότε να δείξετε ότι : $\sin 2B = 1 - 2\sin^2 B$
11. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 2\alpha = 2 \eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha$ (Πανελλήνιες Μάιος 2001)
12. Να αποδείξετε ότι: $\sin 2\alpha = \sin^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ (Πανελλήνιες Μάιος 2002)
13. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α) $\eta\mu 15^\circ \sin 15^\circ$ β) $2\sin^2 15^\circ - 1$ (Πανελλήνιες Μάιος 2001)
14. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\eta\mu\beta = \frac{1}{2}$, τότε :
να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$ και $\sin 2\beta$ (Πανελλήνιες Μάιος 2003)

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης II** να κάνετε την αντιστοίχιση .

Στήλη I	Στήλη II
A. $\eta\mu 2\alpha$	1. $2 \sin^2 \alpha$
B. $1 - \sin 2\alpha$	2. $2 \eta\mu^2 \alpha$
Γ. $\epsilon\varphi 2\alpha$	3. $\frac{\sin \alpha}{2}$
Δ. $1 + \sin 2\alpha$	4. $2 \eta\mu \alpha \sin \alpha$
	5. $\frac{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}{2 \epsilon\varphi \alpha}$
	6. $\frac{2 \epsilon\varphi \alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 \alpha}$

2. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης II** να κάνετε την αντιστοίχιση .

Στήλη I	Στήλη II
A. $\eta\mu^2 \alpha$	1. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$
B. $\sin^2 \alpha$	2. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$
Γ. $\epsilon\varphi^2 \alpha$	3. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$
	4. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$

3. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με μια μόνο παράσταση της **Στήλης II** να κάνετε την αντιστοίχιση .

Στήλη I	Στήλη II
A. $\epsilon\varphi(\alpha+\beta)$	1. $2 \sin^2 \alpha - 1$
B. $\sin 2\alpha$	2. $2 \eta\mu^2 \alpha - 1$
Γ. $\sin(\alpha-\beta)$	3. $\sin \alpha \sin \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta$
Δ. $\eta\mu(\alpha+\beta)$	4. $2 \sin \alpha$
	5. $\frac{\epsilon\varphi \alpha + \epsilon\varphi \beta}{1 - \epsilon\varphi \alpha \cdot \epsilon\varphi \beta}$
	6. $\eta\mu \alpha \sin \beta + \sin \alpha \eta\mu \beta$

(Πανελλήνιες Μάιος 2001)



Καθηγητής που σκέφτεται ... τα μαθήματα
γιατί οι μαθητές ...
σκέφτονται τις διακοπές από τώρα !

Αναγγελία Θυέλλης

Για τις ανάγκες των ασκήσεων θα πρέπει να μάθεις
«νεράκι» τους τύπους όλους και μερικούς ακόμη.

(Στη ζωή δεν υπάρχουν μόνο καλά...)

Όταν μας δίνει εφ α ή σφ α και εφ β ή σφ β και ζητάει
ημ $(\alpha \pm \beta)$, συν $(\alpha \pm \beta)$ κλπ

χρησιμοποιούμε πρώτα τους τύπους

$$1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\text{συν}^2\omega} \quad \text{και} \quad 1 + \sigma\varphi^2\omega = \frac{1}{\eta\mu^2\omega}$$

και $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$ για να βρούμε τα ημ α , συν α ,
ημ β , συν β

Για να υπολογίσουμε τους τριγ. αριθμούς μερικών
γωνιών πχ 15°, 75°, 105°, 285° κλπ εφαρμόζουμε τους
τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς «πάνω»
σε δύο «γνωστές» γωνίες.

M.M.

Συμβουλές προς κολυμβητάς

Ερωτήσεις ωστού - Λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό ή στο Λάθος)

4. Είναι $2\eta\mu 75^{\circ}\eta\mu 15^{\circ} = \frac{1}{2}$.
5. Είναι $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1+\epsilon\varphi^2\alpha}$, αν $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$.
6. Είναι $(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
7. Η τιμή του κλάσματος $\frac{2\epsilon\varphi 15^{\circ}\sigma\varphi 15^{\circ}}{2 - \sigma\varphi 15^{\circ}\epsilon\varphi 15^{\circ}}$ είναι 2
8. Η τιμή του κλάσματος $\frac{2\epsilon\varphi 15^{\circ}}{1 - \epsilon\varphi^2 15^{\circ}}$ είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$
9. Είναι $\sigma\upsilon\nu 120^{\circ} = 2\sigma\upsilon\nu^2 60^{\circ} - 1$.
10. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε $\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = 2 \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma$
11. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 2 \eta\mu A \sigma\upsilon\nu A$
12. Ισχύει η σχέση $\epsilon\varphi 2\alpha \cdot \frac{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}{2\epsilon\varphi\alpha} = 1$
13. Αν ισχύει η σχέση $|\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha| = 1$ τότε $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 0$
14. Υπάρχει γωνία α έτσι ώστε $\eta\mu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha$
15. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\chi}{8} - 1$
16. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$
17. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$
18. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha$
19. Ισχύει $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
20. Ισχύει $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$, όπου $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha \neq 0$
21. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

Σ ☐Λ ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

(Πανελλήνιες Μάιος 2002)

☐☐

(Πανελλήνιες Μάιος 2002)

☐☐

(Πανελλήνιες Μάιος 2003)

☐☐

(Πανελλήνιες Μάιος 2003)

☐☐

(Πανελλήνιες Μάιος 2002)

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Η παράσταση $\eta\mu 2\alpha$ είναι ίση με
ι) $2\eta\mu\alpha - 1$ ιι) $2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$ ιιι) $2\eta\mu^2\alpha - 1$ ιν) $2\eta\mu\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
2. Η παράσταση $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι ίση με
ι) $2\eta\mu^2\alpha - 1$ ιι) $2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha$ ιιι) $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ ιν) $\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
3. Η παράσταση $\sigma\varphi 2\alpha$ είναι ίση με
ι) $\frac{2\sigma\varphi\alpha}{1-\sigma\varphi^2\alpha}$ ιι) $\frac{1-\sigma\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha}$ ιιι) $\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}$ ιν) $\frac{1-\sigma\varphi^2\alpha}{2\sigma\varphi\alpha}$ ν) τίποτε απ' όλα
4. Για κάθε τόξο α η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2 3\alpha - \eta\mu^2 3\alpha$ είναι ίση με
ι) $\eta\mu 6\alpha$ ιι) $2\sigma\upsilon\nu 3\alpha$ ιιι) $\eta\mu 3\alpha$ ιν) $\sigma\upsilon\nu 6\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
5. Η παράσταση $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ $\alpha \neq \lambda\pi$ είναι ίση με
ι) $\epsilon\varphi\alpha$ ιι) $\sigma\varphi\alpha$ ιιι) $\eta\mu 2\alpha$ ιν) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
6. Η παράσταση $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ είναι ίση με
ι) $\epsilon\varphi^2\alpha$ ιι) $1 - \epsilon\varphi^2\alpha$ ιιι) $\sigma\varphi^2\alpha$ ιν) $2\epsilon\varphi^2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
7. Η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 40^\circ - \eta\mu^2 40^\circ$ είναι ίση με
ι) $\sigma\upsilon\nu 10^\circ$ ιι) $\sigma\upsilon\nu 20^\circ$ ιιι) $\sigma\upsilon\nu 80^\circ$ ιν) $\eta\mu 80^\circ$ ν) τίποτε απ' όλα
8. Η παράσταση $2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2}\right)$ είναι ίση με
ι) $1 - \eta\mu\chi$ ιι) $1 + \eta\mu\chi$ ιιι) $1 - \eta\mu^2\chi$ ιν) $1 + \sigma\upsilon\nu\chi$ νι) $1 - \sigma\upsilon\nu\chi$ νι) τίποτε απ' όλα.
9. Η παράσταση $\frac{2}{\epsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha}$ είναι ίση με
ι) $\eta\mu 2\alpha$ ιι) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ ιιι) $\epsilon\varphi 2\alpha$ ιν) $\sigma\varphi 2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
10. Η παράσταση $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\epsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ είναι ίση με
ι) $\epsilon\varphi^2\alpha$ ιι) $1 - \epsilon\varphi^2\alpha$ ιιι) $\sigma\varphi^2\alpha$ ιν) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα
11. Αν για τις γωνίες A και B τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} = 1$ τότε είναι :
ι) $A > B$ ιι) $A < B$ ιιι) $A = B$ ιν) $B = 2A$ ν) $A = 2B$ νι) τίποτε απ' όλα.
12. Αν για τη γωνία A τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} = 0$ τότε το $AB\Gamma$ είναι :
ι) Ισόπλευρο ιι) Οξυγώνιο ιιι) Ορθογώνιο ιν) Αμβλυγώνιο ν) Ισοσκελές νι) τίποτε απ' όλα.

13. Αν για τη γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $1 - 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = 0$ τότε το ΑΒΓ είναι :

- ι) Ισόπλευρο ιι) Οξυγώνιο ιιι) Ορθογώνιο ιν) Αμβλυγώνιο ν) Ισοσκελές νι) τίποτε απ' όλα.

14. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τότε ($A = 90^\circ$) το $\eta\mu 2B$ είναι ίσο :

- ι) $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$ ιι) $\frac{\alpha^2}{2\beta\gamma}$ ιιι) $\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^2$ ιν) $2\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$ ν) $\frac{\beta\gamma}{2\alpha^2}$ νι) τίποτε απ' όλα.

15. Η $\epsilon\varphi 2\alpha$ ισούται με.

- ι) $\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}$ ιι) $\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1+\epsilon\varphi^2\alpha}$ ιιι) $\frac{\epsilon\varphi\alpha}{1-\epsilon\varphi^2\alpha}$ (Πανελλήνιες Μάιος 2003)

16. Ο τύπος που εκφράζει το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι:

- ι) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ ιι) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ιιι) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha - 1$
(Πανελλήνιες Σεπτέμβριος 2003)

Άσκησης

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

- ι) $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{12} - 1$ ιι) $5 + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{5\pi}{12}$ ιιι) $2\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{12} \cdot \eta\mu \frac{7\pi}{12}$ ιν) $\frac{2\epsilon\varphi 105^\circ}{1 - \epsilon\varphi^2 105^\circ}$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

- ι) $2\sigma\upsilon\nu 75^\circ \eta\mu 75^\circ \eta\mu 50^\circ$ ιι) $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{12} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{12}$ ιιι) $2\sigma\upsilon\nu^2 135^\circ - 1$ ιν) $4\sigma\upsilon\nu 65^\circ \eta\mu 65^\circ \sigma\upsilon\nu 50^\circ$

3. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi \frac{3\pi}{8} - \epsilon\varphi \frac{\pi}{8} - \epsilon\varphi \frac{3\pi}{8} \cdot \epsilon\varphi \frac{\pi}{8} = 1$

4. Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\sigma\varphi 2\alpha$

5. Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ να βρείτε τα $\eta\mu 2\omega$, $\sigma\upsilon\nu \frac{\omega}{2}$

6. Αν $\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε το $\eta\mu 2\omega$

7. Αν $\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu 2\omega$

8. Αν $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu 2\omega$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega$

9. Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{5}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}$ και την $\sigma\varphi \frac{\alpha}{2}$

10. Αν είναι $\eta\mu\alpha = -0,6$ και $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$, $\epsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ και την $\sigma\varphi\alpha$
11. Αν είναι $\sigma\varphi\alpha = \frac{4}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$
12. Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\omega$, $\epsilon\varphi 2\omega$
13. Αν για την γωνία α είναι $13\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 314\eta\mu\alpha + 299 = 0$, τότε
- α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\alpha = -\frac{12}{13}$
- β) Να υπολογίσετε τα $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ αν επιπλέον είναι $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
14. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu 80^\circ} = 4$
15. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} = 4$
16. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu 10^\circ \sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ = \frac{1}{8}$
17. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$
18. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu^4 \frac{\pi}{4} = \frac{7}{8}$ (χρησιμοποίησε την $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2 \cdot \alpha^2 \beta^2$)
19. Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} + \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}$
20. Να αποδειχθεί ότι $1 - 2\eta\mu^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \eta\mu\alpha$
21. Να αποδειχθεί ότι $\epsilon\varphi^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$
22. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu^4 \frac{\pi}{12} - \sigma\upsilon\nu^4 \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
23. Να αποδειχθεί ότι $(\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\omega - \eta\mu\theta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu \frac{\omega + \theta}{2}$
24. Να αποδειχθεί ότι $(\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\omega + \eta\mu\theta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\omega - \theta}{2}$
25. Να λυθεί η εξίσωση $1 + \sigma\upsilon\nu\chi = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}$
26. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} = 0$

27. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{1+\eta\mu\chi} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi} = 0$
28. Να λυθεί η εξίσωση $|1+\sigma\upsilon\nu 3\chi| + |1-\sigma\upsilon\nu 3\chi| = 0$
29. Να λυθεί η εξίσωση $3|1-\eta\mu 3\chi| + 2|1-\sigma\upsilon\nu\chi| = 0$
30. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2\chi \cdot \epsilon\varphi\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$
31. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$
32. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2\chi = (\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)^2$ στο διάστημα $[4\pi, 6\pi]$
33. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$
34. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi$
35. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu^2\chi + \sqrt{3}\eta\mu 2\chi = 0$ στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$
36. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 3\chi - \eta\mu^2 3\chi = 0$
37. Να λυθεί η εξίσωση $8\sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 4\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 8\chi = 1$
38. Αν A, B γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει: $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{B}{2}$ τότε $A = B$
39. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $1 - \eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu A$ να αποδειχθεί ότι $B + \Gamma = 120^\circ$
40. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B \neq \frac{\pi}{2}$ είναι $\epsilon\varphi B[\eta\mu A - \eta\mu(B - \Gamma)] = \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)$ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
41. Να αποδειχθεί ότι $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$ και $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- (Πανελλήνιες Ιούνης 2002)
42. Για τις οξείες γωνίες α, β δίνεται ότι $\epsilon\varphi\alpha = \frac{1}{2}$ και $\epsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$.
- α) Να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi(\alpha - \beta)$.
- β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = 1$.
- γ) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες 2α και 2β είναι συμπληρωματικές.
- (Πανελλήνιες 2002 Εσπερινό)
43. Για κάθε πραγματικό αριθμό χ να αποδείξετε ότι:
- $$\sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu 2\chi + 4\eta\mu\chi) = (\sigma\upsilon\nu 2\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi + 1)\eta\mu\chi$$
- και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς χ για τους οποίους
- $$\sigma\upsilon\nu 2\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0.$$
- (Πανελλήνιες 2002)

Ἑ
τ
σ
ι

χ
ω
ρ
ί
ς

π
ρ
ό
γ
ρ
α
μ
μ
α

Παράρτημα Α

Ασκήσεις Επαναλήψης

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Για κάθε τιμή της γωνίας θ δείξτε ότι ισχύει: $|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1$.

Λύση

Επειδή είναι και τα δύο μέλη θετικά, αν υψώσουμε στο τετράγωνο θα έχουμε:

$$|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1 \Leftrightarrow (|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta|)^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow |\eta\mu\theta|^2 + 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta|^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\theta + 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| + \sigma\upsilon\nu^2\theta \geq 1 \Leftrightarrow 1 + 2|\eta\mu\theta| |\sigma\upsilon\nu\theta| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2|\eta\mu\theta| |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε γωνία θ .

2. Να υπολογισθεί το κ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \kappa \eta\mu(2004\pi + x) \text{ «περνάει» από το σημείο } A\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$$

Λύση

$$\text{Είναι: } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \eta\mu\left(2004\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow \kappa = 6$$

3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = \kappa \eta\mu x + \lambda$ περνάει από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ να βρείτε το $5\kappa - 2\lambda$

*** Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής ***

4. Ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι περιοδική:

ι) $\varphi(x) = 8x + \eta\mu 8x$ ιι) $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu 8x$ ιιι) $\varphi(x) = \eta\mu(3x^4 + 3x^3)$ ιιιι) $\varphi(x) = 2x^2 + 6\eta\mu x$

Λύση

ι) $\varphi(x) = 8x + \eta\mu 8x$ **ιι) $\varphi(x) = \sigma\upsilon\nu 8x$** ιιι) $\varphi(x) = \eta\mu(3x^4 + 3x^3)$ ιιιι) $\varphi(x) = 2x^2 + 6\eta\mu x$

5. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \frac{3}{13} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13x}{3}\right)$

ι) 2π ιι) 3π ιιι) $\frac{3\pi}{13}$ ιιιι) $\frac{6\pi}{13}$ ιιιιι) $\frac{13\pi}{3}$

Λύση

ι) 2π ιι) 3π ιιι) $\frac{3\pi}{13}$ **ιιιι) $\frac{6\pi}{13}$** ιιιιι) $\frac{13\pi}{3}$

6. Η συνάρτηση συνημίτονο είναι:

- ι) άρτια ιι) περιττή ιιι) ούτε άρτια ούτε περιττή ιν) άρτια και περιττή

Λύση

- ι) άρτια ιι) περιττή ιιι) ούτε άρτια ούτε περιττή ιν) άρτια και περιττή

7. Το ελάχιστο της συνάρτησης $\varphi(x) = -2\sin(x + 12\pi) + 3$ είναι:

- ι) 2 ιι) 1 ιιι) $\frac{1}{2}$ ιν) 4 ν) -1

Λύση

- ι) 2 ιι) 1 ιιι) $\frac{1}{2}$ ιν) 4 ν) -1

8. Το μέγιστο της συνάρτησης $\varphi(x) = -5\eta\mu\left(\frac{2004\pi}{29} + 3x\right) + 2$ είναι :

- ι) 2 ιι) -3 ιιι) $\frac{2004}{29}$ ιν) 7 ν) -7

Λύση

- ι) 2 ιι) -3 ιιι) $\frac{2004}{29}$ ιν) 7 ν) -7

9. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ είναι :

- ι) $x = \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιι) $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$
 ιν) $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi - \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $x = \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιι) $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$
 ιν) $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi - \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

10. Οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$ είναι :

- ι) $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιι) $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$
 ιν) $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{R}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιι) $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ιιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$
 ιν) $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

11. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -1$ είναι :

- ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

12. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi + \theta$ ή $2\lambda\pi + \pi - \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$;

- ι) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\theta$ ιι) $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta$ ιιι) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$
 ιν) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi(\pi - \theta)$ ν) καμιά απ' όλες

Λύση

- ι) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\theta$ ιι) $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta$ ιιι) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$
 ιν) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi(\pi - \theta)$ ν) καμιά απ' όλες

13. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \kappa \eta\mu\chi + \lambda$ περνάει από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ και

$B\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ τότε το $2\kappa - \lambda$ ισούται με :

- ι) -3 ιι) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ιιι) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ιν) 3 ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) -3 ιι) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ιιι) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ιν) 3 ν) Τίποτε απ' όλα .

14. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(\chi) = 2\kappa \sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{2}\lambda$ περνάει από τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{6}, 5\right)$ και $B(\pi, 2(1-\sqrt{3}))$ τότε το $\kappa - \lambda$ ισούται με :

- ι) -1 ιι) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ιιι) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ιν) $\sqrt{2} + 1$ ν) Τίποτε απ' όλα .

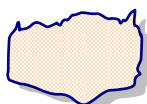
Λύση :

- ι) -1 ιι) $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ιιι) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ιν) $\sqrt{2} + 1$ ν) Τίποτε απ' όλα .

15. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha \sigma\upsilon\nu\chi + \beta \eta\mu\chi$. Αν $\epsilon\varphi\chi = \frac{\alpha}{\beta}$ και $A = \frac{\varphi(\chi) - \varphi(-\chi)}{\varphi(-\chi) + \varphi(\chi)}$ τότε το A ισούται με :

- ι) -1 ιι) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ιιι) $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ιν) 1 ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :



- ι) -1 ιι) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ιιι) $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ ιν) 1 ν) Τίποτε απ' όλα .

16. Η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = 2002 + \sigma\varphi \frac{x - 2003\pi}{2004}$ είναι

- ι) π ιι) 2π ιιι) 2001π ιν) 2002π ν) 2004π ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) π ιι) 2π ιιι) 2001π ιν) 2002π ν) 2004π ν) Τίποτε απ' όλα .

17. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\varphi(x) = 1896 + 100 \cdot \sigma\sigma\nu 2000x + 8 \cdot \eta\mu 2004x$ είναι :

- ι) 1896 ιι) 1996 ιιι) 2000 ιν) 2004 ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) 1896 ιι) 1996 ιιι) 2000 ιν) 2004 ν) Τίποτε απ' όλα .

18. Αν η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ έχει μια λύση θ , τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι :

- ι) μόνο $\eta \theta$ ιι) θ ή $\pi - \theta$ ιιι) $2\lambda\pi \pm \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $2\lambda\pi + \theta$ ή $2\lambda\pi + \pi - \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) μόνο $\eta \theta$ ιι) θ ή $\pi - \theta$ ιιι) $2\lambda\pi \pm \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $2\lambda\pi + \theta$ ή $(2\lambda + 1)\pi - \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) Τίποτε απ' όλα .

19. Αν η εξίσωση $\sigma\sigma\nu(3x - 1) = \alpha$ είναι αδύνατη τότε είναι :

- ι) $x \neq \frac{1}{3}$ ιι) $\alpha \neq \pm 1$ ιιι) $\alpha > 1$ ιν) $\alpha \neq \pm 1$ ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) $x \neq \frac{1}{3}$ ιι) $\alpha \neq \pm 1$ ιιι) $\alpha > 1$ ιν) $\alpha \neq \pm 1$ ν) Τίποτε απ' όλα .

20. Από τους αριθμούς $\eta\mu 10^\circ$, $\eta\mu 20^\circ$, $\eta\mu 30^\circ$, $\eta\mu 40^\circ$, $\eta\mu 50^\circ$ μεγαλύτερος είναι ο :

- ι) $\eta\mu 10^\circ$ ιι) $\eta\mu 20^\circ$ ιιι) $\eta\mu 30^\circ$ ιν) $\eta\mu 40^\circ$ ν) $\eta\mu 50^\circ$ ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) $\eta\mu 10^\circ$ ιι) $\eta\mu 20^\circ$ ιιι) $\eta\mu 30^\circ$ ιν) $\eta\mu 40^\circ$ ν) $\eta\mu 50^\circ$ ν) Τίποτε απ' όλα .

21. Από τους αριθμούς $\eta\mu \pi$, $\eta\mu 2\pi$, $\eta\mu 3\pi$, $\eta\mu 4\pi$, $\eta\mu 5\pi$ μεγαλύτερος είναι ο :

- ι) $\eta\mu 1\pi$ ιι) $\eta\mu 2\pi$ ιιι) $\eta\mu 3\pi$ ιν) $\eta\mu 4\pi$ ν) $\eta\mu 5\pi$ ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση :

- ι) $\eta\mu 1\pi$ ιι) $\eta\mu 2\pi$ ιιι) $\eta\mu 3\pi$ ιν) $\eta\mu 4\pi$ ν) $\eta\mu 5\pi$ ν) Τίποτε απ' όλα .

22. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \eta\mu x$ είναι το σύνολο

ι) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\}$

ιι) $A = [-1, 1]$

ιιι) $A = \mathbb{R}$

ιν) $A = (-1, 1)$

ν) Τίποτε απ' όλα .

Λύση

ι) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\}$

ιι) $A = [-1, 1]$

ιιι) $A = \mathbb{R}$

ιν) $A = (-1, 1)$

ν) Τίποτε απ' όλα .

23. Η συνάρτηση $\varphi(x) = \epsilon\varphi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο :

ι) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\}$

ιι) $A = [-1, 1]$

ιιι) $A = \mathbb{R}$

ιν) $A = (-1, 1)$

ιν) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$

νι) Τίποτε απ' όλα .

Λύση

ι) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \eta\mu x \neq 0\}$

ιι) $A = [-1, 1]$

ιιι) $A = \mathbb{R}$

ιν) $A = (-1, 1)$

ιν) $A = \{x / x \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$

νι) Τίποτε απ' όλα .

24. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι :

ι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιν) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

ι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιν) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ν) τίποτε απ' όλα

25. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι :

ι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιν) $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

ι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιι) $x = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιιι) $x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ιν) $x = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

ν) τίποτε απ' όλα

26. Το $\eta\mu 2\alpha$ είναι ίσο με :

- ι) $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ ιι) $2\eta\mu^2\alpha + 1$ ιιι) $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ ιν) $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ ιι) $2\eta\mu^2\alpha + 1$ **ιιι) $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$** ιν) $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα

27. Το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι ίσο με

- ι) $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ιι) $\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ιιι) $1 - 2\eta\mu^2\alpha$ ιν) $1 - \eta\mu 2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ιι) $\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ **ιιι) $1 - 2\eta\mu^2\alpha$** ιν) $1 - \eta\mu 2\alpha$ ν) τίποτε απ' όλα

28. Η τιμή της παράστασης $\sigma\upsilon\nu 22^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 68^\circ - \eta\mu 22^\circ \cdot \eta\mu 68^\circ$ είναι

- ι) 1 ιι) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ιιι) -1 ιν) 0 ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) 1 ιι) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ιιι) -1 **ιν) 0** ν) τίποτε απ' όλα

29. Η τιμή του κλάσματος $\frac{2\varepsilon\varphi 15^\circ}{1 - \varepsilon\varphi^2 15^\circ}$ είναι

- ι) $\sqrt{3}$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3} - 1$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $\sqrt{3}$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3} - 1$ **ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$** ν) τίποτε απ' όλα

30. Η τιμή του κλάσματος $\frac{2\sigma\varphi 15^\circ}{\sigma\varphi^2 15^\circ - 1}$ είναι

- ι) $\sqrt{3} - 1$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3}$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $\sqrt{3} - 1$ ιι) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ιιι) $\sqrt{3}$ ιν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **ν) τίποτε απ' όλα αυτά**

31. Αν $A = \frac{\varepsilon\varphi \frac{8\pi}{13} + \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{13}}{1 - \varepsilon\varphi \frac{8\pi}{13} \cdot \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{13}}$ τότε η τιμή της παράστασης A είναι :

- ι) $\sqrt{3}$ ιι) 0 ιιι) 1 ιν) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λύση

- ι) $\sqrt{3}$ **ιι) 0** ιιι) 1 ιν) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ν) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ερωτήσεις σωστού λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό ή στο Λάθος)

- 32.** Η συνάρτηση $f(x) = 5\sin\left(\frac{3x-15\pi}{5} + 22\pi\right)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει ελάχιστο το -5 όταν $x = \frac{20\pi}{3}$.

Σ Λ

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

- 33.** Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ είναι το 9.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

- 34.** Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$ «περνάει» από το $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

- 35.** Μια συνάρτηση $\varphi(x)$ λέγεται περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν $\varphi(x+T) = \varphi(x)$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

- 36.** Η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = \sin 5x$ είναι $T = \frac{2\pi}{5}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

- 37.** Αν το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = \lambda \sin(2003\pi - x) + \eta\mu\left(2004 + \frac{x}{2}\right)$ τότε $\lambda = 3$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

- 38.** Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\pi}{4}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

- 39.** Η εξίσωση $\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 1 = 0$ είναι αδύνατη.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

40. Η εξίσωση $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$ είναι αδύνατη.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

41. Η εξίσωση $\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$ είναι αδύνατη.

☐ ☐

Λύση

☐ ☒

42. Η εξίσωση $\cos x = \cos \omega$ έχει μοναδική λύση την $x = 2\lambda\pi + \omega$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐ ☐

Λύση

☐ ☒

43. Η εξίσωση $\sin x = \sin \theta$ έχει λύσεις τις $x = 2\lambda\pi \pm \theta$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

44. Η $\omega = -\frac{3\pi}{2}$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\frac{1+2\sin^2 \omega}{3\cos^2 \omega} = \frac{1}{3}$.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

45. Οι εξισώσεις $\sin x = 0$ και $\cos x = 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

46. Οι εξισώσεις $\sin x = 1$ και $\cos x = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☐ ☒

47. Οι εξισώσεις $\sin x = 1$ και $\cos x = 0$ έχουν κοινές λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

48. Οι εξισώσεις $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\cos x = \frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☐ ☒

49. Οι εξισώσεις $\sin x = -\frac{1}{2}$ και $\cos x = -\frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☐ ☒

50. Οι εξισώσεις $|\sin x| = 1$ και $\cos x = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐ ☐

Λύση

☒ ☐

51. Η εξίσωση $5 + \eta\mu\chi = -1$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

52. Η εξίσωση $1 - 2\sqrt{3}\eta\mu\chi = -2$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

53. Η εξίσωση $|3 + 2\epsilon\varphi\chi| = 5$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει λύση την $\chi = \frac{\pi}{4}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

54. Η εξίσωση $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu^2(\pi - \chi) - 1 = 0$ ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbf{R}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

55. Μια περίοδος της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu 3\chi$ είναι η $T = 5\pi$.

☐ ☐

Λύση : ☐ ☒

56. Μια περίοδος της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \eta\mu 6\chi$ είναι η $T = \pi$.

☐ ☐

Λύση : ☒ ☐

57. Η εξίσωση $\eta\mu\chi = \kappa$ με $\kappa > 1$ ή $\kappa < -1$ είναι αδύνατη.

☐ ☐

Λύση : ☒ ☐

58. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\chi = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbf{P}$.

☐ ☐

Λύση : ☐ ☒

59. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

☐ ☐

Λύση : ☒ ☐

60. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

☐ ☐

Λύση : ☒ ☐

61. Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ και $\epsilon\varphi\chi = 1$ είναι ισοδύναμες.

☐ ☐

Λύση : ☒ ☐

62. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ είναι το διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

☐ ☐

Λύση: ☐ ☒

63. Η εξίσωση $\eta\mu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi = 2004$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

☐ ☐

Λύση: ☐ ☒

64. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \epsilon\varphi\chi$ είναι το σύνολο $A = \{\chi / \chi \in \mathbb{R} : \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0\}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

65. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \sigma\varphi\chi$ έχει νόημα (ορίζεται) όταν $\chi \neq \lambda\pi$

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

66. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = 1$ είναι $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Λύση ☒ ☐

67. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = 1$ είναι $\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbb{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

68. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = 0$ είναι $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

69. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = 0$ είναι $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

70. Ο $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu\chi = -1$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

71. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ είναι $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

72. Είναι ο $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$ λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu\chi = -1$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

73. Ο $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{4}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

74. Ο $\chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

75. Ο $\chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ είναι λύση της εξίσωσης $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

76. Η συνάρτηση $f(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ είναι περιττή.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

77. Η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \epsilon\varphi\chi$ είναι $T = \pi$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

78. Είναι $\eta\mu^2(\chi + \psi) = \eta\mu^2\chi + 2\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\psi + \eta\mu^2\psi$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

79. Είναι $\eta\mu[(\chi + \psi)^2] = \eta\mu^2\chi + 2\eta\mu\chi \cdot \eta\mu\psi + \eta\mu^2\psi$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

80. Ισχύει $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{3} < 0$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

81. Είναι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

82. $1 - 2\eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

☐ ☐

Λύση ☒ ☐

83. Η παράσταση $A = 2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi$ έχει ελάχιστο το $-\frac{1}{5}$.

☐ ☐

Λύση ☐ ☒

84. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει: $\frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\gamma} = \frac{1}{\alpha}$.



Λύση



Ασκήσεις συμπλήρωσης κενού

85. Οι συναρτήσεις _____ και _____ είναι περιοδικές με βασική περίοδο 2π .

Λύση

Οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο είναι περιοδικές με βασική περίοδο 2π .

86. Αν $\chi \in [0, \pi]$ τότε η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\epsilon\varphi(\chi + \pi) + 2$ «περνάει» από τα σημεία $A(\pi, _)$ και $B(_, -1)$

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\epsilon\varphi(\chi + \pi) + 2$ «περνάει» από τα σημεία $A(\pi, 2)$ και $B(-\frac{3\pi}{4}, -1)$

87. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu 2\chi - 2$ έχει μέγιστη τιμή την _____ και ελάχιστη την _____

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu 2\chi - 2$ έχει μέγιστη τιμή την 3 και ελάχιστη την -7.

88. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = (2003^\chi + 2004^\chi) \sigma\upsilon\nu 3\chi$ έχει περίοδο $T = ______$

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = (2003^\chi + 2004^\chi) \sigma\upsilon\nu 3\chi$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$

89. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.

90. Η εξίσωση $\sqrt{3}\epsilon\varphi\omega = 1$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.

91. Η εξίσωση $\sqrt{3}\eta\mu\chi = \frac{3}{2}$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.

92. Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu\chi + 4 = 0$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.

93. Η $\chi = \frac{\pi}{6}$ είναι λύση της $5\eta\mu(\chi + ______) = 5$.

94. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu 2\chi$ έχει μέγιστη τιμή _____, ελάχιστη τιμή _____ και περίοδο _____.

95. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$ είναι _____ .
96. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$ είναι _____ .
97. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι _____ .
98. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\varphi x = 0$ είναι _____ .
99. Η συνάρτηση $\varphi(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο _____ .
100. Αν η εξίσωση $\sin x = \alpha$ έχει λύση τότε για το α ισχύει η ανισότητα : _____ α _____
101. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B Περίοδος
1. $\sin 3x$	α) $\frac{\pi}{2}$
2. $\varepsilon\varphi \frac{x}{3}$	β) 3π
3. $\eta\mu \frac{3x}{5}$	γ) $\frac{2\pi}{3}$
4. $\sigma\varphi 2x$	δ) 2π
5. $\sin(x + 3\pi)$	ε) $\frac{10\pi}{3}$

Πίνακας 2

Στήλη A	Στήλη B
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Λύση :

Πίνακας 1

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B Περίοδος
1. $\sin 3x$	α) $\frac{\pi}{2}$
2. $\varepsilon\varphi \frac{x}{3}$	β) 3π
3. $\eta\mu \frac{3x}{5}$	γ) $\frac{2\pi}{3}$
4. $\sigma\varphi 2x$	δ) 2π
5. $\sin(x + 3\pi)$	ε) $\frac{10\pi}{3}$

Πίνακας 2

Στήλη A	Στήλη B
1.	γ
2.	β
3.	ε
4.	α
5.	δ

102. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α εξίσωση	Στήλη Β Λύσεις
1. $\sin 2\chi = 1$	α) $\frac{5\lambda\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$
2. $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	β) $\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$
3. $\eta\mu \frac{3\chi}{5} = 0$	γ) $\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$
4. $\sigma\varphi 3\chi = 1$	δ) $4\lambda\pi + \frac{2\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
5. $\sin(\chi + \pi) = 0$	ε) $\frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \lambda \in \mathbf{Z}$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Λύση :

Πίνακας 1

Στήλη Α εξίσωση	Στήλη Β Λύσεις
1. $\sin 2\chi = 1$	α) $\frac{5\lambda\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$
2. $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	β) $\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$
3. $\eta\mu \frac{3\chi}{5} = 0$	γ) $\lambda\pi - \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$
4. $\sigma\varphi 3\chi = 1$	δ) $4\lambda\pi + \frac{2\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
5. $\sin(\chi + \pi) = 0$	ε) $\frac{\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \lambda \in \mathbf{Z}$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	β
2.	δ
3.	α
4.	ε
5.	γ

103. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Μέγιστη τιμή
1. $\varphi(\chi) = -5\eta\mu(3\chi - 2\pi)$	α) 1
2. $\varphi(\chi) = -3\sin 3\chi$	β) -3
3. $\varphi(\chi) = \eta\mu\left(-\frac{3\chi}{5}\right)$	γ) 3
4. $\varphi(\chi) = 2\sigma\varphi 3\chi - 5$	δ) 9
5. $\varphi(\chi) = 2\sin(\chi + \pi) + 7$	ε) 5

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	

Λύση :

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Μέγιστη τιμή
1. $\varphi(x) = -5\eta\mu(3x - 2\pi)$	α) 1
2. $\varphi(x) = -3\sigma\upsilon\nu 3x$	β) -3
3. $\varphi(x) = \eta\mu\left(-\frac{3x}{5}\right)$	γ) 3
4. $\varphi(x) = 2\sigma\varphi 3x - 5$	δ) 9
5. $\varphi(x) = 2\sigma\upsilon\nu(x + \pi) + 7$	ε) 5

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	ε
2.	γ
3.	α
4.	β
5.	δ

104. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Περίοδος συνάρτησης
1. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 18\theta$	α) $\frac{2\pi}{3}$
2. $\varphi(x) = \eta\mu 3x$	β) 2π
3. $\varphi(\theta) = \varepsilon\varphi\theta$	γ) $\frac{\pi}{9}$
4. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) π

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Περίοδος συνάρτησης
1. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 18\theta$	α) $\frac{2\pi}{3}$
2. $\varphi(x) = \eta\mu 3x$	β) 2π
3. $\varphi(\theta) = \varepsilon\varphi\theta$	γ) $\frac{\pi}{9}$
4. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) π

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	γ
2.	α
3.	δ
4.	β

105. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1 Έχει δοθεί σαν Άσκηση

Πίνακας 1

Πίνακας 2

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B μέγιστο
1) $\varphi(\theta) = 3\sigma\upsilon\nu(18\pi+\theta)$	α) -6
2) $\varphi(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu 3\chi + 1$	β) 3
3) $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu(2\chi + \frac{15\pi}{2}) - 3$	γ) 4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-2\chi + \pi) - 7$	δ) 2

Στήλη A	Στήλη B
1)	
2)	
3)	
4)	

Λύση

Πίνακας 1

Πίνακας 2

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B μέγιστο
1) $\varphi(\theta) = 3\sigma\upsilon\nu(18\pi+\theta)$	α) -6
2) $\varphi(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu 3\chi + 1$	β) 3
3) $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu(2\chi + \frac{15\pi}{2}) - 3$	γ) 4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-2\chi + \pi) - 7$	δ) 2

Στήλη A	Στήλη B
1)	β
2)	γ
3)	δ
4)	α

106. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Πίνακας 2

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B Σημείο που «περνάει»
6. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1$	α) $A\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
7. $\varphi(\chi) = \eta\mu 2\chi - 3$	β) $B\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
8. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta - 2$	γ) $\Gamma\left(\pi + \frac{\pi}{4}, -3\right)$
9. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) $\Delta\left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$

Στήλη A	Στήλη B
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B Σημείο που «περνάει»
10. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1$	α) $A\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
11. $\varphi(\chi) = \eta\mu 2\chi - 3$	β) $B\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
12. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta - 4$	γ) $\Gamma\left(\pi + \frac{\pi}{4}, -3\right)$
13. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) $\Delta\left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$

Πίνακας 2

Στήλη A	Στήλη B
1.	β
2.	δ
3.	γ
4.	α

107. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B ελάχιστο
1) $\varphi(\theta) = -3\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta)$	α) -52
2) $\varphi(\chi) = 45\sigma\upsilon\nu 3\chi - 7$	β) -3
3) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{5\pi}{3}\right) - 3$	γ) -4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-3\chi + \pi) - 7$	δ) -8

Πίνακας 2

Στήλη A	Στήλη B
1)	
2)	
3)	
4)	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B ελάχιστο
1) $\varphi(\theta) = -3\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta)$	α) -52
2) $\varphi(\chi) = 45\sigma\upsilon\nu 3\chi - 7$	β) -3
3) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{5\pi}{3}\right) - 3$	γ) -4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-3\chi + \pi) - 7$	δ) -8

Πίνακας 2

Στήλη A	Στήλη B
1)	β
2)	α
3)	γ
4)	δ

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

108. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$3 \eta\mu\chi - 5 = 0$	ταυτότητα
$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3\chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$
$2\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\chi = \frac{\lambda\pi}{8}$
	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$
	αδύνατη

Λύση :

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$3 \eta\mu\chi - 5 = 0$	ταυτότητα
$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3\chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$
$2\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{8}$
	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$
	αδύνατη

109. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$2 \sin \chi = 1$	ταυτότητα
$\varepsilon \varphi^2 \chi = \frac{1}{3}$	$\chi = \lambda \pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\sqrt{2} \eta \mu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ή $\frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}$
	αδύνατη

Λύση :

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$2 \sin \chi = 1$	ταυτότητα
$\varepsilon \varphi^2 \chi = \frac{1}{3}$	$\chi = \lambda \pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\sqrt{2} \eta \mu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ή $\frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}$
	αδύνατη

110. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$\sin \chi = 0$	$\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\chi = -1$	ταυτότητα
$2\eta\mu\chi = 1$	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$
$\sin 3\chi = -1$	$\chi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$
	αδύνατη

Λύση:

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$\sin \chi = 0$	$\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\chi = -1$	ταυτότητα
$2\eta\mu\chi = 1$	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$
$\sin 3\chi = -1$	$\chi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$
	αδύνατη

Εξισώσεις

111. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = 1$

Λύση :

Πρέπει $\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi}{3} \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$
 $\chi \neq 3\lambda \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$

$$\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\chi}{3} = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \frac{3}{2}\lambda\pi + \frac{3\pi}{8}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

112. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 1$

Λύση :

Πρέπει $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 2\lambda\pi + \pi$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

113. Να λυθεί η εξίσωση : $\varepsilon\varphi(2\chi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύση :

$$\varepsilon\varphi(2\chi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(2\chi - \frac{\pi}{4}) = \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 2\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = \lambda\pi + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = \lambda\pi - \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \lambda\pi + \frac{13\pi}{24} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = \lambda\pi - \frac{7\pi}{24} \end{cases}$$

114. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi}$

Λύση :

Πρέπει $\eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq \eta\mu 0$
 $\Leftrightarrow \chi \neq \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$

$$\text{Έτσι } \eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi} \Leftrightarrow \eta\mu\chi(\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi\chi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \quad (2)$$

$$1) \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$2) \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$$

115. Να λυθεί η εξίσωση : $\epsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = 2$

Λύση :

Πρέπει

$$1 + \eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi \neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\chi \neq 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Τελικά πρέπει } \chi \neq 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Τότε } \epsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi(1+\eta\mu\chi) + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\sigma\upsilon\nu\chi + 2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\chi \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi + 1 = 2\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi + 1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu\chi + 1)(1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi) = 0. \text{ Επειδή } 1 + \eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

116. Να λυθεί η εξίσωση : $\epsilon\varphi\chi + \frac{\sqrt{3}}{\epsilon\varphi\chi} = \sqrt{3} + 1$

Λύση :

$$\text{Πρέπει } \eta\mu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \lambda\pi$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Τότε } \epsilon\varphi\chi + \frac{\sqrt{3}}{\epsilon\varphi\chi} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\varphi^2\chi + \sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)\epsilon\varphi\chi$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi^2\chi - (\sqrt{3} + 1)\epsilon\varphi\chi + \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = [-(\sqrt{3} + 1)]^2 - 4\sqrt{3} \cdot 1 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 =$$

$$(\sqrt{3} - 1)^2. \text{ Άρα λύσεις :}$$

$$\epsilon\varphi\chi = \frac{(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \frac{(\sqrt{3} + 1) \pm (\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1) \text{ ή } \epsilon\varphi\chi = 1 \quad (2)$$

$$1) \epsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$2) \epsilon\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

117. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $2\eta\mu^2\chi - 9\eta\mu\chi - 5 = 0$

Λύση :

$$2\eta\mu^2\chi - 9\eta\mu\chi - 5 = 0. \text{ Θέτω } \omega = \eta\mu\chi \text{ και έχω } 2\omega^2 - 9\omega - 5 = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121 \Leftrightarrow \omega_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \omega_{1,2} = \frac{9 \pm 11}{4} \Leftrightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{9+11}{4} = \frac{20}{4} = 5 > 1 \text{ αδύνατη και } \omega_2 = \frac{9-11}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ άρα } \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\chi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad \chi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

118. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $2\sigma\upsilon\nu^2\chi - (\sqrt{3} + 4)\sigma\upsilon\nu\chi + 2\sqrt{3} = 0$

Λύση :

$$2\sigma\upsilon\nu^2\chi - (\sqrt{3} + 4)\sigma\upsilon\nu\chi + 2\sqrt{3} = 0. \text{ Θέτω } \omega = \sigma\upsilon\nu\chi \text{ και έχω } 2\chi^2 - (\sqrt{3} + 4)\chi + 2\sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Είναι } \Delta = [-(\sqrt{3} + 4)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 4)^2 - 16\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} + 16 - 16\sqrt{3} =$$

$$(\sqrt{3})^2 - 8\sqrt{3} + 16 \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{3} - 4)^2 \text{ άρα } \omega_{1,2} = \frac{(\sqrt{3} + 4) \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow \omega_{1,2} = \frac{(\sqrt{3} + 4) \pm (\sqrt{3} - 4)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{8}{4} = 2 > 1 \text{ αδύνατη και } \omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad \chi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

119. Να λυθεί στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η $3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^2\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi$

Λύση :

$$3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^2\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu\chi + 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi - 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \text{ (1) ή } \sigma\upsilon\nu\chi + \frac{3}{2} = 0 \text{ (2)}$$

$$1) \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sigma\upsilon\nu\chi + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{3}{2} < -1 \text{ αδύνατη}$$

120. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{P}$ ώστε η εξίσωση $\kappa^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 = 3\kappa\eta\mu^2\theta$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\frac{\pi}{4}$

Λύση :

Ο αριθμός $\frac{\pi}{4}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\kappa^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta + 1 = 3\kappa\eta\mu^2\theta$ όταν και μόνο όταν την επαληθεύει :

$$\text{Όταν } \chi = \frac{\pi}{4} \text{ η εξίσωση γίνεται : } \kappa^2 \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4} + 1 = 3\kappa\eta\mu^2\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \kappa^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 3\kappa \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 \frac{1}{2} + 1 = 3\kappa \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 + 2 = 3\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - 3\kappa + 2 = 0.$$

$$\Delta = \dots = 1 \text{ και } \varrho_1 = 1, \varrho_2 = 2$$

121. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{P}$ ώστε η εξίσωση $\varepsilon\varphi^2\chi + \kappa^2 + 2\kappa \cdot \varepsilon\varphi\chi + 12 = -\kappa - 2 \cdot \varepsilon\varphi\chi$ να έχει λύση στο $\mathbb{P}$.

Λύση :

$\varepsilon\varphi^2\chi + \kappa^2 + 2\kappa \cdot \varepsilon\varphi\chi + 12 = -\kappa - 2 \cdot \varepsilon\varphi\chi \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\chi + 2(\kappa+1)\varepsilon\varphi\chi + \kappa^2 + \kappa + 12 = 0$ η οποία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς την $\varepsilon\varphi\chi$. Για να έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{P}$ αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του κ είναι $\Delta \geq 0$.

Είναι $\Delta = 4(\kappa+1)^2 - 4 \cdot 1(\kappa^2 + \kappa + 12) = 4\kappa^2 + 8\kappa + 4 - 4\kappa^2 - 4\kappa - 48 = 4\kappa - 44$.

Αρα $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4\kappa - 44 \geq 0 \Leftrightarrow \kappa \geq 11$

122. Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Λύση :

Τότε $\varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{2\chi}{3} = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\frac{2\chi}{3} = \lambda\pi - \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \chi = \frac{3\lambda\pi}{2} - \frac{3\pi}{12}, \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \chi = \frac{3\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

123. Να λύσετε την εξίσωση : $\text{syn} \frac{\chi}{3} = \eta\mu 3\chi$

Λύση :

$\text{syn} \frac{\chi}{3} = \eta\mu 3\chi \Leftrightarrow \text{syn} \frac{\chi}{3} = \text{syn} \left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\chi}{3} = 2\lambda\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) \\ \text{ή} \\ \frac{\chi}{3} = 2\lambda\pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 6\lambda\pi + \frac{3\pi}{2} - 9\chi \\ \text{ή} \\ \chi = 6\lambda\pi - \frac{3\pi}{2} + 9\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\chi = 6\lambda\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 8\chi = -6\lambda\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \frac{3\lambda\pi}{5} + \frac{3\pi}{20} \quad \text{ή} \quad \chi = \frac{-3\lambda\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}$$

124. Να λύσετε την εξίσωση : $\sigma\varphi \frac{\chi}{2} = \varepsilon\varphi\chi$

Λύση :

$\sigma\varphi \frac{\chi}{2} = \varepsilon\varphi\chi \Leftrightarrow \sigma\varphi \frac{\chi}{2} = \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \chi \Leftrightarrow \frac{3\chi}{2} = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

125. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi + 3\chi)$

Λύση :

$$\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi + 3\chi) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2\chi\right) = \sigma\upsilon\nu(\pi + 3\chi) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\chi = 2\lambda\pi + (\pi + 3\chi) \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{2} - 2\chi = 2\lambda\pi - (\pi + 3\chi) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\chi - 3\chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ -2\chi + 3\chi = 2\lambda\pi - \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{-2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}}{5} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

126. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ την εξίσωση : $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu\chi$

Λύση :

$$\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 - \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi - 1) + \sigma\upsilon\nu\chi(1 - \eta\mu\chi) = 0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi - 1)(1 - \sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = 1 \quad (1) \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = 1 \quad (2)$$

$$1) \eta\mu\chi = 1, \text{ είναι } \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 \text{ άρα } \eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή}$$

$$\chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{τελικά } \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}. \text{ Επειδή θέλουμε τις λύσεις στο}$$

$$\text{διάστημα } [0, 2\pi) \text{ πρέπει } 0 \leq 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\lambda + \frac{1}{2} < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 2\lambda < 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \lambda < \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ άρα } \chi = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}. \text{ Επειδή θέλουμε τις λύσεις στο διάστημα } [0, 2\pi) \text{ πρέπει } 0 \leq 2\lambda\pi < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \lambda < 1 \text{ άρα } \lambda = 0 \text{ άρα } \chi = 0$$

127. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi)$ την εξίσωση : $(2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(3\epsilon\varphi\chi - \sqrt{3})\sigma\upsilon\nu\chi = 0$

Λύση :

$$(2\eta\mu\chi - \sqrt{3})(3\epsilon\varphi\chi - \sqrt{3})\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ή} \quad 3\epsilon\varphi\chi - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \epsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \quad (3).$$

$$1) \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Επειδή θέλουμε τις λύσεις στο διάστημα } [0, 2\pi) \text{ θα είναι } \chi = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \chi = \frac{2\pi}{3}$$

$$2) \epsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Επειδή θέλουμε τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi)$ θα είναι

$$\chi = \frac{\pi}{6} \quad \text{και} \quad \chi = \frac{7\pi}{6}$$

$$3) \sin \chi = 0 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

Επειδή θέλουμε τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi)$ θα είναι

$$\chi = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \chi = \frac{3\pi}{2}$$

128. Να λύσετε την εξίσωση: $(2\sin \chi - 1)(\sqrt{3}\cos \chi - 1) = 0$

Λύση:

$$(2\sin \chi - 1)(\sqrt{3}\cos \chi - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\sin \chi - 1 = 0 \quad (1) \quad \text{ή} \quad \sqrt{3}\cos \chi - 1 = 0 \quad (2)$$

$$1) \sin \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

$$2) \sqrt{3}\cos \chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos \chi = 1 \Leftrightarrow \cos \chi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos \chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos \chi = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

129. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin^6 \chi = \sin^3 \chi$

Λύση:

$$\sin^6 \chi = \sin^3 \chi \Leftrightarrow \sin^6 \chi - \sin^3 \chi = 0 \Leftrightarrow \sin^3 \chi (\sin^3 \chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin^3 \chi = 0 \quad \text{ή} \quad \sin^3 \chi - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin \chi = 0 \quad (1) \quad \text{ή} \quad \sin^3 \chi = 1 \Leftrightarrow \sin \chi = 1 \quad (2)$$

$$1) \sin \chi = 0 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

$$2) \sin \chi = 1 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

130. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{\sin^2 \chi} = 4 + 2\cos \chi$

Λύση:

$$\frac{1}{\sin^2 \chi} = -2 + 2\sqrt{3}\cos \chi \Leftrightarrow 1 + \cos^2 \chi = -2 + 2\sqrt{3}\cos \chi \Leftrightarrow \cos^2 \chi - 2\sqrt{3}\cos \chi + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 \chi - 2\sqrt{3}\cos \chi + (\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow (\cos \chi - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \cos \chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos \chi = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$$

131. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1+\sin\chi}{\eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sin\chi} = 4$

Λύση :

$$\frac{1+\sin\chi}{\eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sin\chi} = 4 \Leftrightarrow \frac{(1+\sin\chi)^2 + \eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi(1+\sin\chi)} = 4 \Leftrightarrow (1+\sin\chi)^2 + \eta\mu^2\chi = 4\eta\mu\chi(1+\sin\chi)$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin\chi+\sin^2\chi+\eta\mu^2\chi-4\eta\mu\chi(1+\sin\chi)=0 \Leftrightarrow 2\sin\chi+2-4\eta\mu\chi(1+\sin\chi)=0 \Leftrightarrow 2(\sin\chi+1)-4\eta\mu\chi(1+\sin\chi)=0 \Leftrightarrow 2(\sin\chi+1)(1-2\eta\mu\chi)=0 \Leftrightarrow \sin\chi+1=0 \text{ ή } 1-2\eta\mu\chi=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\chi=-1 \quad (1) \text{ ή } \eta\mu\chi=\frac{1}{2} \quad (2)$$

1) $\sin\chi=-1 \Leftrightarrow \sin\chi=\sin\pi \Leftrightarrow \chi=2\lambda\pi+\pi, \lambda \in \mathbb{Z}.$

2) $\eta\mu\chi=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } \chi=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbb{Z}.$

132. Να λύσετε την εξίσωση : $\sigma\varphi\chi + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sin\chi} = 0$

Λύση :

$$\sigma\varphi\chi + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sin\chi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\chi(1+\sin\chi) + \eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi(1+\sin\chi)} = 0 \Leftrightarrow \sin\chi(1+\sin\chi) + \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin\chi + \sin^2\chi + \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\chi = -1 \Leftrightarrow \sin\chi = \sin\pi \Leftrightarrow$$

$$\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbb{Z}.$$

133. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(\sin\chi) = 0$

Λύση :

$$\eta\mu(\sin\chi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(\sin\chi) = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \sin\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$$

134. Να λύσετε την εξίσωση : $\sin(\eta\mu\chi) = \frac{1}{2}$

Λύση :

$$\sin(\eta\mu\chi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(\eta\mu\chi) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{\pi}{3} \quad \text{αδύνατη γιατί } \frac{\pi}{3} > 1$$

135. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} + \frac{1}{\sigma\varphi\chi} = 1 \quad (1).$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται όταν $\eta\mu\chi \neq 0$ και $\sin\chi \neq 0$. Επειδή είναι $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} = 1 + \sigma\varphi^2\chi$ και

$$\frac{1}{\sigma\varphi\chi} = \sigma\varphi\chi \text{ η (1) γίνεται } 1 + \sigma\varphi^2\chi + \sigma\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi^2\chi + \sigma\varphi\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi(\sigma\varphi\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\chi = 0 & \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \sigma\varphi\chi = -1 & \text{υ)} \end{cases}$$

$$\text{ι)} \sigma\varphi\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}. \text{ Απορρίπτεται, γιατί συν}\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{υ)} \sigma\varphi\chi = -1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z} \text{ (δεκτή)}$$

136. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$.

Λύση

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi + 1 - \eta\mu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi)(\eta\mu^3\chi + \eta\mu^2\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi = 0 \\ \text{ή} \\ \eta\mu^3\chi + \eta\mu^2\chi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^3\chi = \eta\mu^2\chi & \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \eta\mu^3\chi = -\eta\mu^2\chi & \text{υ)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{ι)} \eta\mu^3\chi = \eta\mu^2\chi \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + 2\chi \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi - 2\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi \\ \text{ή} \\ 5\chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi & \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\text{υ)} \eta\mu^3\chi = -\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi = \eta\mu(-2\chi) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi - 2\chi \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi + 2\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\chi = 2\lambda\pi \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{5} & \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases}$$

137. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + \eta\mu^2\chi \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$.

Λύση

$$\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + \eta\mu^2\chi \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi(\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} & \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 2\pi & \text{υ)} \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\pi & \text{ιι)}$$

$$\begin{aligned} \text{ι) } \sin \chi &= \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{ιι) } \sin \chi &= \sin 2\pi \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \\ \text{ιιι) } \sin \chi &= \sin \pi \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \pi \end{aligned}$$

138. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\chi + \sin\chi = 2$.

Λύση

Είναι $\eta\mu\chi \leq 1$ και $\sin\chi \leq 1$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα $\eta\mu\chi + \sin\chi \leq 2$, οπότε η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\eta\mu\chi = 1$ και $\sin\chi = 1$, άτοπο, γιατί, αν $\eta\mu\chi = 1$ και $\sin\chi = 1$, θα είχαμε $\eta\mu^2\chi = 1$ και $\sin^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sin^2\chi = 2 \cdot 1 = 2$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $\eta\mu\chi + \sin\chi = 2$ είναι αδύνατη.

139. Να λυθεί η εξίσωση $\sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{12} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \end{cases} \end{aligned}$$

Αυτές είναι όλες οι γενικές λύσεις, για να βρούμε τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα λύσουμε τις ανισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{ι) } 0 \leq 2\lambda\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \leq 2\pi &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\lambda}{3} + \frac{7}{36} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{36} \leq \frac{2\lambda}{3} \leq 2 - \frac{7}{36} \Leftrightarrow \\ -\frac{21}{72} \leq \lambda \leq \frac{185}{72} &\text{ και } \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα λύσεις } \chi = \frac{7\pi}{36}, \chi = \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \Leftrightarrow \chi = \frac{31\pi}{36}, \chi = \frac{4\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \Leftrightarrow \chi = \frac{55\pi}{36}$$

140. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin 2\chi + \sqrt{3} = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Λύση

$$\begin{aligned} 2\sin 2\chi + \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow 2\sin 2\chi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2\chi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \\ 2\chi &= 2\lambda\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi \pm \frac{5\pi}{12} \text{ οι γενικές λύσεις. Για να βρεις τις λύσεις που βρίσκονται} \\ \text{στο } [0, 2\pi] &\text{ κάνεις τα ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα δηλ.} \end{aligned}$$

$$\text{ι) } 0 \leq \lambda\pi + \frac{5\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ι) } 0 \leq \lambda + \frac{5}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ι) } -\frac{5}{12} \leq \lambda \leq 2 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \lambda \leq \frac{19}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ οπότε αν } \lambda = 0 \text{ τότε } \chi = \frac{5\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{17\pi}{12}$$

$$\text{ι) } 0 \leq \lambda\pi - \frac{5\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ι) } 0 \leq \lambda - \frac{5}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ι) } \frac{5}{12} \leq \lambda \leq 2 + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq \lambda \leq \frac{29}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ οπότε αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{7\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 2 \text{ τότε } \chi = \frac{19\pi}{12}$$

141. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu\chi + 1 = 0$ στο διάστημα $[5\pi, 7\pi]$

Λύση

$$2\eta\mu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = -\eta\mu \frac{\pi}{6} = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2\chi = 2\lambda\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{12} & (\text{ι}) \\ \text{ή} \\ \chi = \lambda\pi + \frac{7\pi}{12} & (\text{ιι}) \end{cases} \quad \text{οι γενικές λύσεις.}$$

Οι λύσεις που βρίσκονται στο $[5\pi, 7\pi]$ προκύπτουν ως εξής :

$$\text{ι) } 0 \leq \lambda\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ι) } 0 \leq \lambda - \frac{1}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ι) } \frac{1}{12} \leq \lambda \leq 2 + \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq \lambda \leq \frac{25}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ οπότε αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{11\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 2 \text{ τότε } \chi = \frac{23\pi}{12}$$

$$\text{ιι) } 0 \leq \lambda\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ιι) } 0 \leq \lambda + \frac{7}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ιι) } -\frac{7}{12} \leq \lambda \leq 2 - \frac{7}{12} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq \lambda \leq \frac{17}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ οπότε αν } \lambda = 0 \text{ τότε } \chi = \frac{7\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{19\pi}{12}$$

142. Να λύσετε την εξίσωση : $(2 - 4\eta\mu 3\chi)(1 - \epsilon\varphi^2\chi) = 0$

Λύση

$$(2 - 4\eta\mu 3\chi)(1 - \epsilon\varphi^2\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4\eta\mu 3\chi = 0 \\ \text{ή} \\ 1 - \epsilon\varphi^2\chi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu 3\chi = \frac{1}{2} & \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \epsilon\varphi^2\chi = 1 & \text{ιι)} \\ \text{ή} \\ \epsilon\varphi^2\chi = -1 & \text{ιιι)} \end{cases}$$

$$\text{ι) } \eta\mu 3\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3\chi = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$

και

$$\text{ιι) } \varepsilon\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \text{ και}$$

$$\text{ιιι) } \varepsilon\varphi\chi = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}$$

143. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \chi\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi\right) = 0$

Λύση

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \chi\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \chi\right) = 0 & (\text{ι}) \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi\right) = 0 & (\text{ιι}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{ι) } \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \chi\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} - \chi\right) = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3} - \chi = 2\lambda\pi + 0 \\ \text{ή} \\ \frac{2\pi}{3} - \chi = 2\lambda\pi + \pi + 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = -2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = -2\lambda\pi - \pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = -2\lambda\pi - \frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ και}$$

$$\text{ιι) } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi\right) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4\pi}{7} + 2\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \frac{4\pi}{7} + 2\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} \\ \text{ή} \\ 2\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{28} \\ \text{ή} \\ \chi = \lambda\pi - \frac{15\pi}{14} \end{cases}$$

144. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\chi = 0$

Λύση

$$\eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(2\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \chi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 2\chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \pi - \chi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \chi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 2\chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \pi - \chi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{11\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{11\pi}{18} \end{cases}$$

145. Να λύσετε την εξίσωση: $\epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi 3\chi = 0$

Λύση

$$\epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi 3\chi = 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\varphi 3\chi \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = \epsilon\varphi\left(3\chi - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \chi + \frac{\pi}{6} = \lambda\pi + 3\chi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\chi = -\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

146. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) - 3\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -2$ (1)

Λύση

Αρχικά για να διευκολυνθώ «βάζω» $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \omega$ οπότε η (1) γίνεται

$\eta\mu^2\omega - 3\eta\mu\omega + 2 = 0$ η οποία είναι 2^{ου} βαθμού η οποία όταν λυθεί (Διακρίνουσα κλπ) θα

δώσει (αλγεβρικές) λύσεις τις $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 2$ άρα πρέπει $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ δεκτή

και $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ απορρίπτεται (γιατί $|\eta\mu\theta| \leq 1$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$) έτσι λοιπόν είναι

$$\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$$

147. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 2\varepsilon\varphi\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 2\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi(1-2\eta\mu\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 & \text{(ι)} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ 1-2\eta\mu\chi = 0 & \text{(ιι)} \end{cases}$$

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ιι) } 1-2\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

148. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu^5\chi - 5\eta\mu^5\chi = 1$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu^5\chi - 5\eta\mu^5\chi = 1 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu^5\chi - 5\eta\mu^5\chi = 1 \Leftrightarrow 6\eta\mu^5\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^5\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^5\chi = \eta\mu^0 \Leftrightarrow 5\chi = \lambda\pi \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{5}$$

149. Να λύσετε την εξίσωση : $\sigma\phi 2\chi \epsilon\phi 5\chi = 1$

Λύση

$$\sigma\phi 2\chi \epsilon\phi 5\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi 2\chi = \frac{1}{\epsilon\phi 5\chi} \Leftrightarrow \sigma\phi 2\chi = \sigma\phi 5\chi \Leftrightarrow 2\chi = \lambda\pi + 5\chi \Leftrightarrow 3\chi = -\lambda\pi$$

$$\Leftrightarrow \chi = -\frac{\lambda\pi}{3} \text{ η οποία αν θέσω } \kappa = -\lambda \text{ γράφεται } \chi = \frac{\kappa\pi}{3}$$

150. Να λύσετε την εξίσωση : $\epsilon\phi 5\chi \epsilon\phi 6\chi = 1$

Λύση

$$\epsilon\phi 5\chi \epsilon\phi 6\chi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi 6\chi = \frac{1}{\epsilon\phi 5\chi} \Leftrightarrow \epsilon\phi 6\chi = \sigma\phi 5\chi \Leftrightarrow \epsilon\phi 6\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - 5\chi\right) \Leftrightarrow$$

$$6\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - 5\chi \Leftrightarrow 11\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{11} + \frac{\pi}{22} \Leftrightarrow \chi = \frac{2\lambda\pi + \pi}{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{2(\lambda+1)\pi}{22} \Leftrightarrow \chi = \frac{\kappa\pi}{22} \text{ αν θέσω } \kappa = \lambda + 1$$

151. Να λύσετε την εξίσωση : $\epsilon\phi^2 3\chi - \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0$

Λύση

$$\epsilon\phi^2 3\chi - \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\epsilon\phi 3\chi - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \right] \left[\epsilon\phi^2 3\chi + \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \epsilon\phi 3\chi - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0 \\ \text{ή} \\ \epsilon\phi 3\chi + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \quad (\text{ι}) \\ \text{ή} \\ \epsilon\phi 3\chi = -\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \quad (\text{ιι}) \end{cases}$$

ι) $\epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \Leftrightarrow 3\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3} - \chi \Leftrightarrow 4\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$

ιι) $\epsilon\phi 3\chi = -\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \Leftrightarrow \epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3\chi = \lambda\pi + \chi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

152. Να λύσετε την εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu^3 2\chi - 3\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu^3 2\chi - 3\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2\chi (\sigma\upsilon\nu^2 2\chi - 3\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 2\chi = 0 & (ι) \\ \text{ή} & \\ \sin^2 - 3\sin 2\chi + 2 = 0 & (ιι) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$ι) \sin \chi = 0 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$ιι) \sin^2 - 3\sin 2\chi + 2 = 0 \text{ «βάζω» } \sin \chi = \omega \text{ και έχω } \omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \text{ επειδή}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 \text{ άρα μια λύσει το } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1} \text{ άρα}$$

$$\text{άρα } \omega_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ απορρίπτεται γιατί πρέπει } |\sin \chi| \leq 1 \text{ και } \omega_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ δεκτή.}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν είναι } \sin \chi = 1 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi$$

153. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin 2\chi + 2\sin 2\chi = 1$

Λύση

$$\sin 2\chi + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2\chi}{\eta\mu 2\chi} + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2\chi}{\eta\mu 2\chi} + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2\chi + 2\sin 2\chi \eta\mu 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\chi(1 + 2\chi \eta\mu 2\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\chi = 0 & (ι) \\ \text{ή} & \\ 1 + 2\eta\mu 2\chi = 0 & (ιι) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$ι) \sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\chi = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow 2\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

154. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^4 \chi + \sin^4 \chi = \frac{1}{2}$

Λύση

Αν χρησιμοποιήσω την γνωστή από την (Α Λυκείου) ταυτότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta \text{ θα είναι:}$$

$$\eta\mu^4 \chi + \sin^4 \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\eta\mu^2 \chi + \sin^2 \chi)^2 - 2\eta\mu^2 \chi \cdot \sin^2 \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 \chi \cdot \sin^2 \chi = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 \chi \cdot \sin^2 \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 \chi) \cdot \sin^2 \chi = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2 \chi - 4\sin^4 \chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^4 \chi - 4\sin^2 \chi + 1 = 0. \text{ Θέτω } \sin^2 \chi = \omega \text{ και έχω } 4\omega^2 - 4\omega + 1 = 0 \text{ επειδή}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0 \text{ άρα μια λύση το } \omega = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \text{ άρα}$$

$$\sin^2 \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ οπότε:}$$

$$ι) \sin \chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ και}$$

$$\text{ii) } \sin \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

Ασκήσεις

155. Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Αν ισχύει: $1 - 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = 0$ να δείξετε ότι το $\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο

Λύση

156. Αν A, B γωνίες τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ ισχύει: $2\sin^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{B}{2}$ τότε $A = B$

Λύση

157. Αν $A = \sin \varphi \cdot \sin \omega - \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \omega$ και $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $A < 0$.

Λύση

158. Αν $A = \sin \varphi \cdot \sin \theta - \eta\mu \varphi \cdot \eta\mu \theta$ και $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να αποδείξετε ότι $A < 0$.

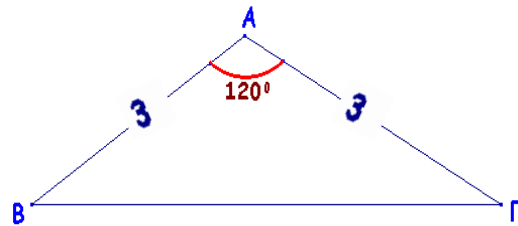
Λύση

159. Η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου του διπλανού σχήματος είναι

i) $\sqrt{3}$ ii) 6 iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $3\sqrt{3}$ v) τίποτε απ' όλα

Λύση



1^ο Κεφάλαιο

1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{P}$ ώστε να υπάρχει γωνία ω με $\sin \omega = 3\lambda + 4$.

Λύση

Επειδή για το $\sin \omega$ ισχύει $|\sin \omega| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sin \omega \leq 1$ αρκεί να ισχύει $-1 \leq 3\lambda + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 3\lambda \leq -3 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq \lambda \leq -1$ άρα όταν $\lambda \in \left[-\frac{5}{3}, -1\right]$ υπάρχει γωνία ω ώστε $\sin \omega = 3\lambda + 4$.

2. Να βρείτε τα $\chi, \psi, \beta, \gamma$ του σχήματος 1

Λύση

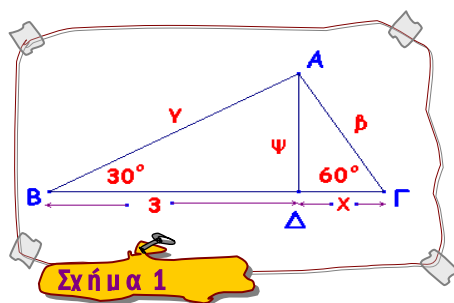
$$\text{Είναι } \sin 30^\circ = \frac{3}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\gamma} \Leftrightarrow \sqrt{3}\gamma = 6 \Leftrightarrow$$

$$\gamma = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \gamma = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Είναι } \eta\mu 30^\circ = \frac{\psi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\psi}{3} \Leftrightarrow 2\psi = 3 \Leftrightarrow \psi = 1,5$$

$$\text{Είναι } \eta\mu 60^\circ = \frac{\psi}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,5}{\beta} \Leftrightarrow \sqrt{3}\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{3}$$

$$\text{Είναι } \sin 60^\circ = \frac{\chi}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\chi}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



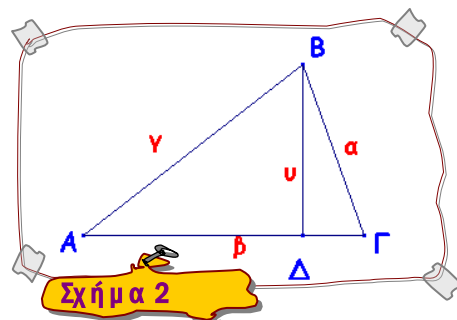
3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν κάθε τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$.

Λύση

Έστω το τρίγωνο του σχήματος 2.

$$\text{Είναι } E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v \text{ και } \eta\mu A = \frac{v}{\gamma} \Leftrightarrow v = \gamma \cdot \eta\mu A \text{ άρα}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$$



4. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$), δείξτε ότι: $\alpha \cdot \eta\mu A + \beta \cdot \eta\mu B + \gamma \cdot \eta\mu \Gamma = 2\alpha$

Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος 3

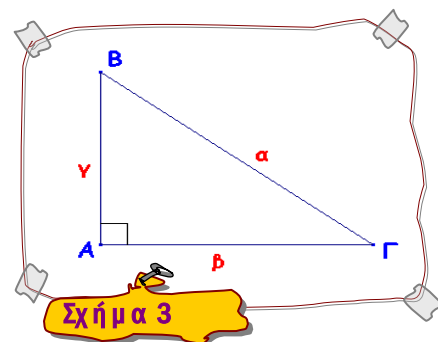
Είναι $\eta\mu A = \eta\mu 90^\circ = 1$ και

$$\beta \cdot \eta\mu B + \gamma \cdot \eta\mu \Gamma = \beta \frac{\beta}{\alpha} + \gamma \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$$

$$\text{άρα } \alpha \cdot \eta\mu A + \beta \cdot \eta\mu B + \gamma \cdot \eta\mu \Gamma = \alpha \cdot 1 + \alpha = 2\alpha$$

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$), δείξτε ότι:

$$\varepsilon\phi B + \varepsilon\phi \Gamma = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$$

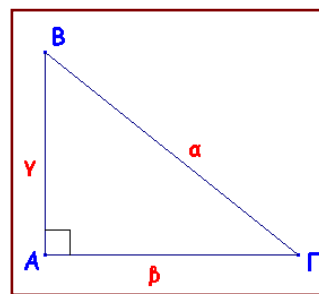


Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Είναι $\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$ και $\varepsilon\varphi \Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$ άρα

$$\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta\gamma} = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$$



6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$), δείξτε ότι : $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$

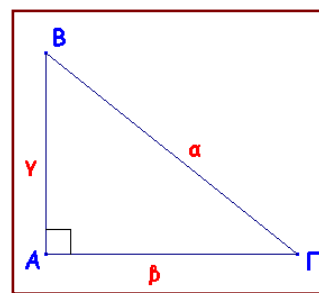
Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Είναι $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$ και $\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$ άρα

$$\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1 \text{ άρα}$$

$$\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$$



7. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$), δείξτε ότι : $\sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1$

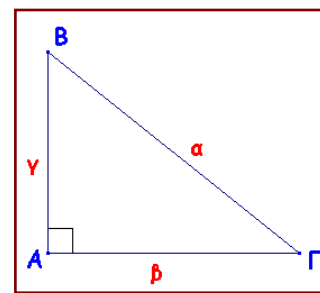
Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Είναι $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha}$ και $\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ άρα

$$\sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1 \text{ άρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1$$



8. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$), δείξτε ότι : $\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1$

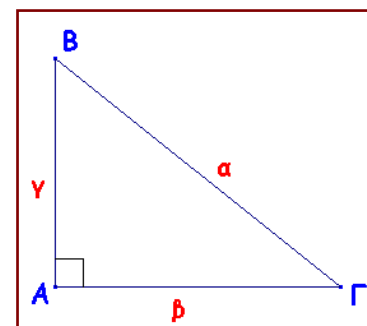
Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.

Είναι $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ άρα

$$\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1 \text{ άρα}$$

$$\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1$$



9. Αν $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$, δείξτε ότι : $\sigma\upsilon\nu^2 \chi \sigma\varphi \chi + 4\sigma\varphi \chi \sigma\upsilon\nu \chi + 4\sigma\varphi \chi + \eta\mu \chi < 0$.

Λύση

Στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$ είναι $\sigma\upsilon\nu \chi > 0$, $\sigma\varphi \chi < 0$, $\eta\mu \chi < 0$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu^2 \chi \sigma\varphi \chi + 4\sigma\varphi \chi \sigma\upsilon\nu \chi + 4\sigma\varphi \chi + \eta\mu \chi < 0$ ως άθροισμα αρνητικών αριθμών

10. Αν $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$, δείξτε ότι: $\sin\chi - \sigma\phi\chi - 5\epsilon\phi\chi + 4\sigma\phi\chi\eta\mu\chi > 0$.

Λύση

Στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ είναι $\sin\chi > 0$, $\epsilon\phi\chi < 0$, $\sigma\phi\chi < 0$, $\eta\mu\chi < 0$.

Άρα $\sin\chi - \sigma\phi\chi - 5\epsilon\phi\chi + 4\sigma\phi\chi\eta\mu\chi > 0$ ως άθροισμα θετικών αριθμών

11. Αν $\sin\chi \neq 0$, ναδειχθεί ότι: $\left(3\sin\chi + \frac{1}{\sin\chi}\right)^2 \geq 12$

Λύση

$$\left(3\sin\chi + \frac{1}{\sin\chi}\right)^2 \geq 12 \Leftrightarrow \left(\frac{3\sin^2\chi + 1}{\sin\chi}\right)^2 \geq 12 \Leftrightarrow (3\sin^2\chi + 1)^2 \geq 12\sin^2\chi \Leftrightarrow$$

$$9\sin^4\chi + 6\sin^2\chi + 1 \geq 12\sin^2\chi \Leftrightarrow 9\sin^4\chi - 6\sin^2\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3\sin^2\chi - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } \chi \in \mathbb{R}$$

12. Να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Gamma = -4\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\upsilon\psi$.

Λύση

$$\text{Είναι } -1 \leq \eta\mu\chi \leq 1 \Leftrightarrow -1(-4) \leq (-4)\eta\mu\chi \leq 1(-4) \Leftrightarrow 4 \geq -4\eta\mu\chi \geq -4 \Leftrightarrow -4 \leq -4\eta\mu\chi \leq 4 \quad (1).$$

$$\text{Και } -1 \leq \sigma\upsilon\upsilon\psi \leq 1 \Leftrightarrow -1(-3) \leq (-3)\sigma\upsilon\upsilon\psi \leq 1(-3) \Leftrightarrow 3 \geq -3\sigma\upsilon\upsilon\psi \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sigma\upsilon\upsilon\psi \leq 3 \quad (2).$$

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $-7 \leq -4\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\upsilon\psi \leq 7$. Οπότε προφανώς ελάχιστη τιμή για την $\Gamma = -4\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\upsilon\psi$ είναι το -7 και μέγιστη το 7

13. Να εξετασθεί αν υπάρχει πραγματικός αριθμός ώστε: $\sin^2\chi + \sin\chi + 1 < 0$.

Λύση

Η παράσταση $\sin^2\chi + \sin\chi + 1$ είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς το $\sin\chi$, η διακρίνουσά του είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ άρα το $\sin^2\chi + \sin\chi + 1 > 0$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ επομένως δεν υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sin^2\chi + \sin\chi + 1 < 0$.

14. Να εξετάσετε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός χ ώστε: $\sin\chi \geq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Λύση

$$\text{Αρκεί } |\sin\chi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 1 \text{ προφανής ανισότητα άρα}$$

υπάρχει πραγματικός αριθμός χ ώστε: $\sin\chi \geq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

15. Να εξετάσετε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός χ ώστε : $\eta\mu\chi \geq \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

Λύση

$$\text{Αρκεί } |\eta\mu\chi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{7-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{7}-\sqrt{3} \leq 4 . \text{ Επειδή } \sqrt{7} \approx 2,65 \text{ και } \sqrt{3} \approx 1,7 \text{ άρα}$$

$$\sqrt{7}-\sqrt{3} \approx 2,65 - 1,7 \approx 0,95 \leq 4 \text{ προφανής ανισότητα άρα}$$

υπάρχει πραγματικός αριθμός χ ώστε : $\eta\mu\chi \geq \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

16. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ώστε : $\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 2 < 0$

Λύση

Η παράσταση $\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 2$ είναι τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\eta\mu\chi$, η διακρίνουσά του είναι

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0 \text{ άρα η } \eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi + 1 = 0 \text{ έχει ρίζες}$$

τις $\eta\mu\chi = 1$ και $\eta\mu\chi = 2$. Άρα πίνακας πρόσημου επειδή $\alpha = 1$ είναι ο

$\eta\mu\chi$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi + 1$	+	-	+	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 2 < 0$ όταν $1 < \eta\mu\chi < 2$ ανισότητα η οποία δεν ισχύει για κανένα $\chi \in \mathbb{R}$ άρα δεν υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 2 < 0$.

17. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός ώστε : $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu\chi + 12 < 0$

Λύση

Η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu\chi + 12$ είναι τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\sigma\upsilon\nu\chi$, η διακρίνουσά του είναι

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0 \text{ άρα η } \sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu\chi + 12 = 0 \text{ έχει ρίζες}$$

τις $\sigma\upsilon\nu\chi = 3$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = 4$. Άρα πίνακας πρόσημου επειδή $\alpha = 1$ είναι ο

$\sigma\upsilon\nu\chi$	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu\chi + 12$	+	-	+	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\sigma\upsilon\nu\chi + 12 < 0$ όταν $3 < \sigma\upsilon\nu\chi < 4$ η ανισότητα δεν ισχύει για κανένα $\chi \in \mathbb{R}$

Άρα δεν υπάρχει $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 7\eta\mu\chi + 12 < 0$.

18. Να βρεθούν το μ ώστε να υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \mu^2 - 3\mu + 1$.

Λύση

Για να υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \mu^2 - 3\mu + 1$ αρκεί να υπάρχει μ : $-1 \leq \mu^2 - 3\mu + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \mu^2 - 3\mu + 1 \leq 1 & (1) \\ \text{και} & \\ \mu^2 - 3\mu + 1 \geq -1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 - 3\mu \leq 0 & (1) \\ \text{και} & \\ \mu^2 - 3\mu + 2 \geq 0 & (2) \end{cases} . \text{Οι (1) και (2) είναι ανισώσεις 2ου βαθμού άρα}$$

$\mu^2 - 3\mu \leq 0$, ρίζες το 0 και 3 άρα πίνακας πρόσημου επειδή $\alpha = 1$ είναι ο

χ	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$\mu^2 - 3\mu$		+	-	+

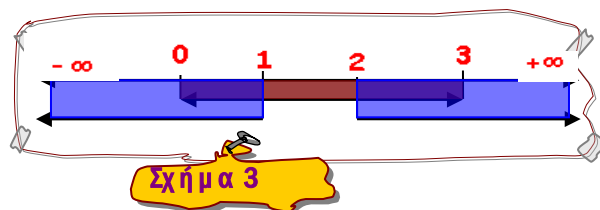
άρα $\mu^2 - 3\mu \leq 0$ όταν $\chi \in (0, 3)$ (3)

$\mu^2 - 3\mu + 2 \geq 0$, ρίζες το 1 και 2 άρα πίνακας πρόσημου επειδή $\alpha = 1$ είναι ο

χ	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$\mu^2 - 3\mu + 2$		+	-	+

άρα $\mu^2 - 3\mu + 2 \geq 0$ όταν $\chi \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ (4)

Οι ανισώσεις (3) και (4) συναληθεύουν στο $(0, 1) \cup (2, 3)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα ****

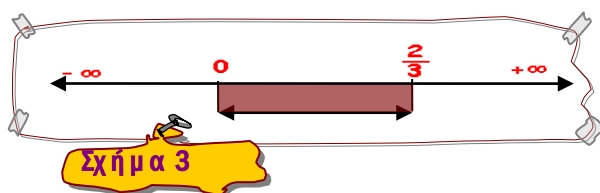


19. Να βρεθεί το λ ώστε να υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = -3\lambda + 1$.

Λύση

Για να υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = -3\lambda + 1$ αρκεί να υπάρχει λ : $-1 \leq -3\lambda + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$

(στο $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ όπως φαίνεται και στο σχήμα ****



Ερωτήσεις

πολλαπλής επιλογής ***

20. Η μοίρα των τόξων είναι :

ι) Το $\frac{1}{90}$ του κύκλου

ιι) Το $\frac{1}{340}$ του κύκλου

ιιι) Το $\frac{1}{360}$ του κύκλου

Λύση

ι) Το $\frac{1}{90}$ του κύκλου

ιι) Το $\frac{1}{340}$ του κύκλου

ιιι) Το $\frac{1}{360}$ του κύκλου

21. Το ακτίνιο ή rad είναι το τόξο με μήκος ίσο με :

ι) μισή ακτίνα ιι) δυο ακτίνες ιιι) τη διάμετρο ιν) την ακτίνα ν) μισό κύκλο

Λύση

ι) μισή ακτίνα ιι) δυο ακτίνες ιιι) τη διάμετρο **ιν) την ακτίνα** ν) μισό κύκλο

22. Η γωνία 45° είναι σε ακτίνια ή rad :

ι) $\frac{\pi}{2}$ ιι) $\frac{\pi}{4}$ ιιι) $\frac{\pi}{3}$ ιν) $\frac{\pi}{6}$

Λύση

ι) $\frac{\pi}{2}$ **ιι) $\frac{\pi}{4}$** ιιι) $\frac{\pi}{3}$ ιν) $\frac{\pi}{6}$

23. Η γωνία $\frac{\pi}{45}$ ακτίνια είναι σε μοίρες:

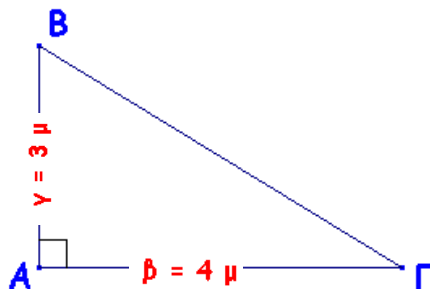
ι) 45° ιι) 30° ιιι) 4 ιν) 90°

Λύση

ι) 45° ιι) 30° **ιιι) 4** ιν) 90°

24. Στο διπλανό σχήμα ισχύει:

ι) $\text{συν}\Gamma = \frac{3}{4}$ ιι) $\text{ημ}\Gamma = \frac{3}{4}$
ιιι) $\text{εφ}\Gamma = \frac{3}{4}$ ιν) $\text{σφ}\Gamma = \frac{3}{4}$



Λύση

ι) $\text{συν}\Gamma = \frac{3}{4}$ ιι) $\text{ημ}\Gamma = \frac{3}{4}$
ιιι) $\text{εφ}\Gamma = \frac{3}{4}$ ιν) $\text{σφ}\Gamma = \frac{3}{4}$

25. Ο τριγωνομετρικός κύκλος έχει ακτίνα R ίση με :

ι) 1 μονάδα ιι) 3 μονάδες ιιι) 2 μονάδες ιν) μισή μονάδα

Λύση

ι) 1 μονάδα ιι) 3 μονάδες ιιι) 2 μονάδες ιν) μισή μονάδα

26. Το συνημίτονο είναι θετικό στα τεταρτημόρια :

- ι) 1° και 3° ιι) 2° και 4° ιιι) 1° και 2° ιν) 1° και 4°

Λύση

- ι) 1° και 3° ιι) 2° και 4° ιιι) 1° και 2° **ιν) 1° και 4°**

27. Η $\varepsilon\varphi 2004^\circ$ ισούται με :

- ι) $\varepsilon\varphi 240^\circ$ ιι) $\varepsilon\varphi 224^\circ$ ιιι) $\varepsilon\varphi 204^\circ$ ιν) $\varepsilon\varphi 24^\circ$

Λύση

- ι) $\varepsilon\varphi 240^\circ$ ιι) $\varepsilon\varphi 224^\circ$ ιιι) $\varepsilon\varphi 204^\circ$ **ιν) $\varepsilon\varphi 24^\circ$**

28. Η ισότητα $\eta\mu^2\chi + 2 \sigma\upsilon\nu^3\chi = 1$ ισχύει όταν :

- ι) $\chi = \frac{\pi}{2}$ ιι) $\chi = \frac{\pi}{4}$ ιιι) $\chi = \frac{\pi}{3}$ ιν) $\chi = \frac{\pi}{6}$

Λύση

- ι) $\chi = \frac{\pi}{2}$ ιι) $\chi = \frac{\pi}{4}$ **ιιι) $\chi = \frac{\pi}{3}$** ιν) $\chi = \frac{\pi}{6}$

29. Αν $A = 5\sigma\upsilon\nu\chi + 3\eta\mu\chi + 1$, τότε ισχύει:

- ι) $-2 \leq A \leq 2$ ιι) $-7 \leq A \leq 9$ ιιι) $-10 \leq A \leq 9$ ιν) $-9 \leq A \leq 9$

Λύση

- ι) $-2 \leq A \leq 2$ **ιι) $-7 \leq A \leq 9$** ιιι) $-10 \leq A \leq 9$ ιν) $-9 \leq A \leq 9$

Ερωτήσεις σωστού λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  το Σωστό ή στο Λάθος)

30. Οι 360° αντιστοιχούν σε π ακτίνια .

Σ	Λ
☐	☐

Λύση

Οι 360° αντιστοιχούν σε π ακτίνια .

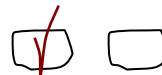
☐	☒
--------------------------	-------------------------------------

31. Τα $\frac{\pi}{4}$ ακτίνια αντιστοιχούν σε 45° .

☐	☐
--------------------------	--------------------------

Λύση

Τα $\frac{\pi}{4}$ ακτίνια αντιστοιχούν σε 45° .

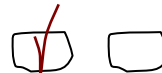


32. Το πεδίο τιμών των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο είναι το $[-1, 1]$.



Λύση

Το πεδίο τιμών των συναρτήσεων ημίτονο και συνημίτονο είναι το $[-1, 1]$.



33. Είναι $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$.



Λύση

Είναι $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$.



34. Είναι $\eta\mu \theta^\circ = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$.

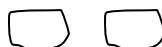


Λύση

Είναι $\eta\mu \theta^\circ = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$.



35. Είναι $\epsilon\phi \theta^\circ = \sigma\upsilon\nu \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$.



Λύση

Είναι $\epsilon\phi \theta^\circ = \sigma\upsilon\nu \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$.



36. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) είναι $\frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma} = 1$



Λύση

Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) είναι $\frac{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma} = 1$



Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

37. Η γωνία _____ αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο.

Λύση

Η γωνία 360° αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο.

38. Η γωνία 36° είναι _____ ακτίνια.

Λύση

Η γωνία 36° είναι $\frac{\pi}{5}$ ακτίνια.

39. Η παράσταση $2\sin 60^\circ \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \eta\mu 90^\circ =$ _____

Λύση

Η παράσταση $2\sin 60^\circ \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \eta\mu 90^\circ = 1$

40. Η παράσταση $2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \sigma\varphi \frac{\pi}{4} =$ _____

Λύση

Η παράσταση $2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

41. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α Τμήμα κύκλου	Στήλη Β Αντίστοιχες μοίρες
1. μισό του κύκλου	α) 405°
2. $\frac{3}{4}$ του κύκλου	β) 90°
3. $\frac{1}{4}$ του κύκλου	γ) 270°
4. $\frac{5}{4}$ του κύκλου	δ) 180°

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α Τμήμα κύκλου	Στήλη Β Αντίστοιχες μοίρες
1. μισό του κύκλου	α) 405°
2. $\frac{3}{4}$ του κύκλου	β) 90°
3. $\frac{1}{4}$ του κύκλου	γ) 270°
4. $\frac{5}{4}$ του κύκλου	δ) 180°

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	δ
2.	γ
3.	β
4.	α

42. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α Τμήμα κύκλου	Στήλη Β Αντίστοιχες μοίρες
1. $\eta\mu 45^\circ$	α) 1
2. $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$	β) $\frac{1}{2}$
3. $\epsilon\varphi \frac{\pi}{4}$	γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sigma\varphi 210^\circ$	δ) $\sqrt{3}$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α Τμήμα κύκλου	Στήλη Β Αντίστοιχες μοίρες
1. $\eta\mu 45^\circ$	α) 1
2. $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$	β) $\frac{1}{2}$
3. $\epsilon\varphi \frac{\pi}{4}$	γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sigma\varphi 210^\circ$	δ) $\sqrt{3}$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	γ
2.	β
3.	α
4.	δ

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

43. Δείξτε ότι: $\eta\mu^2\chi \cdot \epsilon\varphi\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \sigma\varphi\chi = \epsilon\varphi\chi - \sigma\varphi\chi$.

Λύση

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\chi \epsilon\varphi\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi \sigma\varphi\chi &= \eta\mu^2\chi \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu} - \sigma\upsilon\nu^2\chi \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\eta\mu^3\chi}{\sigma\upsilon\nu} - \frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\eta\mu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu} = \\ \frac{(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu} &= \frac{\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu} = \frac{\eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu} = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu} - \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \\ \epsilon\varphi\chi - \sigma\varphi\chi \end{aligned}$$

44. Αν $\epsilon\varphi\omega = 4$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω

45. Αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi\chi = \frac{1}{4}$, να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = 17(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) + 14.$$

46. Αν $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{12}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2004 + 12\varepsilon\varphi\chi - 13\eta\mu\chi}{13\sigma\upsilon\nu\chi + 5\varepsilon\varphi\chi - 12}$$

47. Αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ και $3\eta\mu\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi = 5$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων χ .

48. Να αποδειχθεί ότι : $\eta\mu^8\theta + \sigma\upsilon\nu^8\theta - 2(1 - \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta)^2 = -1$.

49. Να δειχθεί η ταυτότητα : $\sigma\varphi^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \sigma\varphi^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta$

Λύση

$$\sigma\varphi^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(1 - \eta\mu^2\theta)}{\eta\mu^2\theta} = \sigma\varphi^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$50. \sigma\varphi^2\theta + \varepsilon\varphi^2\theta + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \sigma\varphi^2\theta + \varepsilon\varphi^2\theta + 2 &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + 2 = \frac{\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^4\theta + 2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)^2}{\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} \\ &= \frac{1}{\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} \end{aligned}$$

51. Να αποδειχθεί η ισότητα $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 - (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

52. Να αποδειχθεί η ισότητα $(4\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (5\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 41$.

53. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$

54. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\varepsilon\varphi\theta - \eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta} = \varepsilon\varphi\theta$

55. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\sigma\varphi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} = \sigma\varphi\theta$

56. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\varepsilon\varphi\omega + 1}{1 - \varepsilon\varphi\omega} = \frac{\sigma\varphi\omega + 1}{\sigma\varphi\omega - 1}$.

57. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi\theta}{\sigma\varphi\omega - \sigma\varphi\theta} = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$.

58. Να αποδειχθεί η ισότητα $(1 + \varepsilon\phi\theta) \cdot (1 + \sigma\phi\theta) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$.

59. Να αποδειχθεί η ισότητα $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1} = \frac{\eta\mu\omega}{1 + \eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}$.

60. Να βρείτε αν υπάρχει τον $\kappa \in \Re$ έτσι ώστε να είναι $\eta\mu\theta = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}$ και ταυτόχρονα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\kappa^2 + 1}$

61. Να βρείτε αν υπάρχει τον $\lambda \in \Re$ έτσι ώστε να είναι $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$ και ταυτόχρονα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{4}$

62. Να βρείτε αν υπάρχει τον $\kappa \in \Re$ έτσι ώστε να είναι $\eta\mu\theta = \kappa + 1$ και ταυτόχρονα $\sigma\upsilon\nu\theta = \kappa - 1$

63. Να βρείτε αν υπάρχει τον $\kappa \in \Re$ έτσι ώστε να είναι $\eta\mu\theta = \frac{\kappa}{\kappa^2 + 1}$ και ταυτόχρονα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\kappa^2 + 1}$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

64. Αν $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ και $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$, τότε η παράσταση $A = \frac{3\eta\mu\omega + 4\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + 2 - 3\sigma\upsilon\nu\omega}$ ισούται με

ι) $\frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}$ ιι) $-\frac{3}{8}$ ιιι) -7 ιν) $\frac{1}{2}$ ν) τίποτε απ' όλα

Λύση

ι) $\frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}$ ιι) $-\frac{3}{8}$ **ιιι) -7** ιν) $\frac{1}{2}$ ν) τίποτε απ' όλα

65. Για κάθε γωνία ω με $\eta\mu\omega = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \beta$ είναι

ι) $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ ιι) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 1$ ιιι) $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

ι) $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ ιι) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 1$ **ιιι) $\alpha^2 + \beta^2 = 1$** ιν) τίποτε απ' όλα

66. Αν $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu^2\chi = 3\eta\mu^2\chi$, τότε η $\sigma\phi\chi$ ισούται με:

- ι) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ιι) 1 ιιι) $\sqrt{3}$ ιιιι) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ιι) 1 **ιιι) $\sqrt{3}$** ιιιι) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ιν) τίποτε απ' όλα

67. Αν $\eta\mu\omega = \lambda + 1$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 3\lambda$, τότε το λ ισούται με:

- ι) $\frac{1}{3}$ ιι) 1 ιιι) $\sqrt{3}$ ιιιι) $-\frac{1}{5}$ ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $\frac{1}{3}$ ιι) 1 ιιι) $\sqrt{3}$ **ιιιι) $-\frac{1}{5}$** ιν) τίποτε απ' όλα

68. Αν $\eta\mu\omega = \lambda - 1$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 4\lambda$, τότε το λ ισούται με:

- ι) $\frac{2}{5}$ ιι) 1 ιιι) $\sqrt{3}$ ιιιι) -1 ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) 1 **ιι) $\frac{2}{5}$** ιιι) $\sqrt{3}$ ιιιι) -1 ιν) τίποτε απ' όλα

69. Αν $A = 2\eta\mu\chi + 5\sigma\upsilon\nu\chi$, και $\chi \in \Re$ τότε για την η A ισχύει :

- ι) $-7 < A < 7$ ιι) $-1 \leq A \leq 1$ ιιι) $-7 \leq A \leq 7$ ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $-7 < A < 7$ ιι) $-1 \leq A \leq 1$ **ιιι) $-7 \leq A \leq 7$** ιν) τίποτε απ' όλα

70. Η παράσταση $A = (2\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi)^2 + (3\eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi)^2$, ισούται με:

- ι) $\frac{2}{5}$ ιι) 1 ιιι) 13 ιιιι) -13 ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) $\frac{2}{5}$ ιι) 1 ιιι) 13 **ιιιι) -13** ιν) τίποτε απ' όλα

Ερωτήσεις σωστού λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  στο Σωστό ή στο Λάθος)

71. Για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$.

Σ	Λ
☐	☐

72. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ Είναι $\sigma\phi\theta \cdot \epsilon\phi\theta = 1$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

73. Για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$ Είναι $\sigma\phi\theta - \epsilon\phi\theta = 0$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

74. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ Είναι $(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 1$.

☐	☐
--------------------------	--------------------------

75. Αν $\chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐	☐
--------------------------	--------------------------

76. Αν $\epsilon\phi\omega = \frac{\kappa}{\kappa+1}$ και $\sigma\phi\omega = \frac{3\kappa}{1-\kappa}$, τότε $\kappa = \pm \frac{1}{2}$

☐	☐
--------------------------	--------------------------

Να συμπληρώσεις τα κενά στις παρακάτω προτάσεις

77. Αν $\chi \in \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$ τότε το $\eta\mu\chi$ έχει πρόσημο και το $\sigma\upsilon\nu\chi$

78. Για κάθε γωνία θ είναι $\sigma\upsilon\nu^2\left(- + \right) + \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{7} + \theta\right) = \dots\dots$

79. Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν:

i) $\eta\mu(A + \Gamma) = \eta\mu B$ ii) $\sigma\phi \frac{A}{2} = \epsilon\phi \frac{B + \Gamma}{2}$ iii) $\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma) = - \sigma\upsilon\nu B$

Λύση

i) Σε κάθε τρίγωνο είναι $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + \Gamma = \pi - B \Leftrightarrow \eta\mu(A + \Gamma) = \eta\mu(\pi - B) \Leftrightarrow \eta\mu(A + \Gamma) = \eta\mu B$

ii) Σε κάθε τρίγωνο είναι $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2} \Leftrightarrow \sigma\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B + \Gamma}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\phi \frac{A}{2} = \epsilon\phi\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right)$

iii) Σε κάθε τρίγωνο είναι $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + \Gamma = \pi - B \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(\pi - B) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(A + \Gamma) = - \sigma\upsilon\nu B$

80. Να δειχθεί η ισότητα : $\eta\mu^2 68^\circ + \eta\mu^2 22^\circ - 2\eta\mu^2 112^\circ + \sigma\upsilon\nu^3 112^\circ + \sigma\upsilon\nu^3 68^\circ - 2\sigma\upsilon\nu^2 68^\circ = -1$

Λύση

Επειδή οι γωνίες 68° και 22° είναι συμπληρωματικές θα έχουμε : $\eta\mu 22^\circ = \sigma\upsilon\nu 68^\circ$, οπότε:
 $\eta\mu^2 68^\circ + \eta\mu^2 22^\circ = \eta\mu^2 68^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 68^\circ = 1$ (1)

Επειδή οι γωνίες 68° και 112° είναι παραπληρωματικές, θα έχουμε : $\sin 112^\circ = -\sin 68^\circ$ άρα $\sin^3 112^\circ = -\sin^3 68^\circ$ άρα $\sin^3 112^\circ + \sin^3 68^\circ = 0$ (2)

Επίσης: $\eta\mu 112^\circ = \eta\mu 68^\circ$, οπότε $\eta\mu^2 112^\circ + \sin^2 68^\circ = \eta\mu^2 68^\circ + \sin^2 68^\circ = 1$ (3)

Από (1), (2), (3) θα ισχύει $\eta\mu^2 68^\circ + \eta\mu^2 22^\circ - 2\eta\mu^2 112^\circ + \sin^3 112^\circ + \sin^3 68^\circ - 2\sin^2 68^\circ = (\eta\mu^2 68^\circ + \eta\mu^2 22^\circ) + (\sin^3 112^\circ + \sin^3 68^\circ) - 2(\eta\mu^2 112^\circ + \sin^2 68^\circ) = 1 + 0 - 2 = -1$

81. Αν $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$, τότε να αποδειχθεί η ισότητα : $\varepsilon\varphi(19\pi - \chi) + \varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \chi\right) \geq 2$

Λύση

Ισχύει : $\varepsilon\varphi(19\pi - \chi) = \varepsilon\varphi(18\pi + \pi - \chi) = \varepsilon\varphi(\pi - \chi) = -\varepsilon\varphi\chi$ και

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \chi\right) = \varepsilon\varphi\left(4\pi + \frac{3\pi}{2} + \chi\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right) = \varepsilon\varphi\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \chi\right) = \varepsilon\varphi\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = -\sigma\varphi\chi$$

Άρα $\varepsilon\varphi(19\pi - \chi) + \varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \chi\right) \geq 2 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi\chi - \sigma\varphi\chi \geq 2$ άρα

$$-\frac{\eta\mu\chi}{\sin\chi} - \frac{\sin\chi}{\eta\mu\chi} \geq 2 \Leftrightarrow -\left(\frac{\eta\mu^2\chi}{\sin\chi} + \frac{\sin^2\chi}{\eta\mu\chi}\right) \geq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\eta\mu\chi\sin\chi} \geq 2 \quad (1)$$

και επειδή στο $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ είναι $\eta\mu\chi < 0$, $\sin\chi > 0$ άρα $\eta\mu\chi\sin\chi < 0$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $-1 \leq 2\eta\mu\chi\sin\chi \Leftrightarrow 2\sin\chi \cdot \eta\mu\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi + \sin^2\chi + 2\eta\mu\chi\sin\chi \geq 1 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + \sin\chi)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

82. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $\frac{\varepsilon\varphi(\chi - 180^\circ)\sin(720^\circ + \chi)\sin(450^\circ + \chi)}{\eta\mu(180^\circ + \chi)\sin(360^\circ - \chi)\sigma\varphi(\chi - 90^\circ)}$

83. Δείξτε ότι: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = 1$

84. Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει : $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$.

85. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu^2 71^\circ + \eta\mu^2 19^\circ - 2\eta\mu^2 109^\circ + \sin^3 109^\circ + \sin^3 71^\circ - 2\sin^2 71^\circ.$$

86. Δείξτε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) ισχύει : $\frac{\eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\sin B + \sin \Gamma} = \eta\mu A$

87. Δείξτε ότι : $\sigma\varphi 43^\circ \cdot \sigma\varphi 44^\circ \cdot \sigma\varphi 45^\circ \cdot \sigma\varphi 46^\circ \cdot \sigma\varphi 47^\circ = 1$

88. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{Z}$ να βρείτε τις τιμές του $\eta\mu \frac{\lambda\pi}{4}$ και του $\sin \frac{\lambda\pi}{3}$

89. Δείξτε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi 1^\circ \varepsilon\varphi 2^\circ \varepsilon\varphi 3^\circ}{\varepsilon\varphi 87^\circ \varepsilon\varphi 88^\circ \varepsilon\varphi 89^\circ} = 1$

90. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90° δείξτε ότι: $\frac{\text{συν}(2\Gamma + \text{Β})}{\text{συν}(2\text{Β} + \Gamma)} = \sigma\varphi \text{Β}$

91. Η παράσταση $A = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \varepsilon\varphi(\pi + \chi)$ ισούται με:

- ι) εφχ ιι) ημχ ιιι) συνχ ιν) σφχ ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) εφχ **ιι) ημχ** ιιι) συνχ ιν) σφχ ιν) τίποτε απ' όλα

92. Αν $\eta\mu \text{Β} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ και $\eta\mu \Gamma = \frac{\sqrt{11}}{4}$ και Β, Γ < 90°, τότε η γωνία Α ισούται με

- ι) 60° ιι) 45° ιιι) 30° ιν) 90° ιν) τίποτε απ' όλα

Λύση

- ι) 60° ιι) 45° ιιι) 30° **ιν) 90°** ιν) τίποτε απ' όλα

Ερωτήσεις σωστού λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  στο Σωστό ή στο Λάθος)

93. Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο.

Σ ☐ Λ ☐

94. Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.

☐ Σ ☐ Λ

95. Τα αντίθετα τόξα έχουν το ίδιο συνημίτονο.

☐ Σ ☐ Λ

96. Παραπληρωματικά τόξα λέγονται εκείνα τα οποία έχουν άθροισμα $\frac{\pi}{2}$

☐ Σ ☐ Λ

97. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\frac{\varepsilon\varphi \text{Β}}{\varepsilon\varphi \Gamma} = \frac{\eta\mu^2 \text{Β}}{\eta\mu^2 \Gamma}$ τότε:
το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές

☐ Σ ☐ Λ

98. Είναι $\eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2}$.

☐ Σ ☐ Λ

99. Αν $A = \varepsilon\varphi(260^\circ + \chi) + \sigma\varphi(530^\circ + \chi) + \sigma\varphi(260^\circ + \chi) + \sigma\varphi(280^\circ - \chi)$
τότε $A = 0$.



100. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\sin(-\theta)$	α) $-\sin\theta$
2. $\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$	β) $-\varepsilon\varphi\theta$
3. $\varepsilon\varphi(\pi - \theta)$	γ) $\varepsilon\varphi\theta$
4. $\sin(3\pi - \theta)$	δ) $\sin\theta$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β	
1.		101.
2.		102.
3.		103.
4.		104.
		105.
		106.

102. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right)$	α) $-\sin 2\chi$
2) $\sin(3\pi + 2\chi)$	β) $\sin 2\chi$
3) $\sin\left(2\chi + \frac{15\pi}{2}\right)$	γ) $\eta\mu 2\chi$
4) $\sin(-2\chi)$	δ) $-\eta\mu 2\chi$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	
2)	
3)	
4)	

Κεφάλαιο 2

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

103. Για κάθε τιμή της γωνίας θ δείξτε ότι ισχύει: $|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1$.

Λύση

Επειδή είναι και τα δύο μέλη θετικά, αν υψώσουμε στο τετράγωνο θα έχουμε:

$$|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1 \Leftrightarrow (|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta|)^2 \geq 1^2 \Leftrightarrow |\eta\mu\theta|^2 + 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta|^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\theta + 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| + \sigma\upsilon\nu^2\theta \geq 1 \Leftrightarrow 1 + 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2|\eta\mu\theta| \cdot |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε γωνία θ .

104. Να υπολογισθεί το κ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \kappa \eta\mu(2004\pi + x) \text{ «περνάει» από το σημείο } A\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$$

Λύση

$$\text{Είναι: } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \eta\mu\left(2004\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \Leftrightarrow \kappa \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow \kappa = 6$$

105. Για κάθε τιμή της γωνίας θ δείξτε ότι ισχύει: $|\eta\mu\theta| + |\sigma\upsilon\nu\theta| \geq 1$.

Λύση

Επειδή είναι και τα δύο μέλη θετικά, αν υψώσουμε στο τετράγωνο θα έχουμε:

*** Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής ***

106. Ποια από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι περιοδική :

$$\text{ι) } f(x) = 8x + \eta\mu 8x \quad \text{ιι) } f(x) = \sigma\upsilon\nu 8x \quad \text{ιιι) } f(x) = \eta\mu(3x^4 + 3x^3) \quad \text{ι\textbf{v}) } f(x) = 2x^2 + 6\eta\mu x$$

Λύση

$$\text{ι) } f(x) = 8x + \eta\mu 8x \quad \text{ι\textbf{ι) } } f(x) = \sigma\upsilon\nu 8x \quad \text{ιιι) } f(x) = \eta\mu(3x^4 + 3x^3) \quad \text{ι\textbf{v) } } f(x) = 2x^2 + 6\eta\mu x$$

107. Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \frac{3}{13} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13x}{3}\right)$

$$\text{ι) } 2\pi \quad \text{ιι) } 3\pi \quad \text{ιιι) } \frac{3\pi}{13} \quad \text{ι\textbf{v) } } \frac{6\pi}{13} \quad \text{v) } \frac{13\pi}{3}$$

Λύση

- ι) 2π ιι) 3π ιιι) $\frac{3\pi}{13}$ **ιιιι) $\frac{6\pi}{13}$** ιν) $\frac{13\pi}{3}$

108. Η συνάρτηση συνημίτονο είναι:

- ι) άρτια ιι) περιττή ιιι) ούτε άρτια ούτε περιττή ιν) άρτια και περιττή

Λύση

- ι) άρτια** ιι) περιττή ιιι) ούτε άρτια ούτε περιττή ιν) άρτια και περιττή

109. Το ελάχιστο της συνάρτησης $\varphi(\chi) = -2\sin(\chi + 12\pi) + 3$ είναι:

- ι) 2 ιι) 1 ιιι) $\frac{1}{2}$ ιν) 4 ιν) -1

Λύση

- ι) 2 **ιι) 1** ιιι) $\frac{1}{2}$ ιν) 4 ιν) -1

110. Το μέγιστο της συνάρτησης $\varphi(\chi) = -5\eta\mu\left(\frac{2004\pi}{29} + 3\chi\right) + 2$ είναι :

- ι) 2 ιι) -3 ιιι) $\frac{2004}{29}$ ιν) 7 ιν) -7

Λύση

- ι) 2 ιι) -3 ιιι) $\frac{2004}{29}$ **ιν) 7** ιν) -7

111. Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ είναι :

- ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
ιν) $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi - \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ **ιιι) $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$**
ιν) $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi - \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιν) τίποτε απ' όλα αυτά

112. Οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\varphi\chi = \sqrt{3}$ είναι :

- ι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{R}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Λύση

- ι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}, 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

113. Οι λύσεις της εξίσωσης $\sin \chi = -1$ είναι :

- ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά
 Λύση
 ι) $\chi = \lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιι) $\chi = 2\lambda\pi + \pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ιιι) $\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbf{Z}$
 ιν) $\chi = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbf{Z}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

114. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi + \theta$ ή $2\lambda\pi + \pi - \theta, \lambda \in \mathbf{Z}$;

- ι) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\theta$ ιι) $\sin\chi = \sin\theta$ ιιι) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$
 ιν) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi(\pi - \theta)$ ν) καμιά απ' όλες

Λύση

- ι) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\theta$ ιι) $\sin\chi = \sin\theta$ ιιι) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$
 ιν) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi(\pi - \theta)$ ν) καμιά απ' όλες

Ερωτήσεις σωστού λάθους

(Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  στο Σωστό ή στο Λάθος)

Σ Λ

115. Η συνάρτηση $f(\chi) = 5\sin\left(\frac{3\chi - 15\pi}{5} + 22\pi\right)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει ελάχιστο το -5 όταν $\chi = \frac{20\pi}{3}$.

☐ ☐

Λύση

Η συνάρτηση $f(\chi) = 5\sin\left(\frac{3\chi - 15\pi}{5} + 22\pi\right)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει ελάχιστο το -5 όταν $\chi = \frac{20\pi}{3}$.

☒ ☐

116. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 3\chi\right)$ είναι το 9.

☐ ☐

Λύση

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + 3\chi\right)$ είναι το 9.

☐ ☒

117. Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$ «περνάει»

Από το $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Λύση

Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3 - 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$ «περνάει»

από το $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.



118. Μια συνάρτηση $\varphi(x)$ λέγεται περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν $\varphi(x + T) = \varphi(x)$.

Λύση

Μια συνάρτηση $\varphi(x)$ λέγεται περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν $\varphi(x + T) = \varphi(x)$.



119. Η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = \sin 5x$ είναι $T = \frac{2\pi}{5}$.

Λύση

Η περίοδος της συνάρτησης $\varphi(x) = \sin 5x$ είναι $T = \frac{2\pi}{5}$.

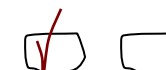


120. Αν το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης

της $\varphi(x) = \lambda \sin(2003\pi - x) + \eta \mu\left(2004 + \frac{x}{2}\right)$ τότε $\lambda = 3$.

Λύση

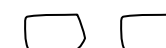
της $\varphi(x) = \lambda \sin(2003\pi - x) + \eta \mu\left(2004 + \frac{x}{2}\right)$ τότε $\lambda = 3$.



121. Η εξίσωση $\eta \mu x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

Η εξίσωση $\eta \mu x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\pi}{4}$.



122. Η εξίσωση $\eta \mu^2 x + \eta \mu x + 1 = 0$ είναι αδύνατη.

Λύση

Η εξίσωση $\eta \mu^2 x + \eta \mu x + 1 = 0$ είναι αδύνατη.



123. Η εξίσωση $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$ είναι αδύνατη.

Λύση

Η εξίσωση $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$ είναι αδύνατη.



124. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi^2\chi - 5\varepsilon\varphi\chi + 6 = 0$ είναι αδύνατη.

Λύση

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi^2\chi - 5\varepsilon\varphi\chi + 6 = 0$ είναι αδύνατη.

☐☒

125. Η εξίσωση $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\omega$ έχει μοναδική λύση την $\chi = 2\lambda\pi + \omega$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Λύση

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\omega$ έχει μοναδική λύση την $\chi = 2\lambda\pi + \omega$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐☒

126. Η εξίσωση $\text{syn}\chi = \text{syn}\theta$ έχει λύσεις τις $\chi = 2\lambda\pi \pm \theta$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Λύση

Η εξίσωση $\text{syn}\chi = \text{syn}\theta$ έχει λύσεις τις $\chi = 2\lambda\pi \pm \theta$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

☐☒

127. Η $\omega = -\frac{3\pi}{2}$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\frac{1+2\text{syn}^2\omega}{3\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{3}$.

Λύση

Η $\omega = -\frac{3\pi}{2}$ είναι μία λύση της εξίσωσης $\frac{1+2\text{syn}^2\omega}{3\eta\mu^2\omega} = \frac{1}{3}$.

☐☒

128. Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = 0$ και $\text{syn}\chi = 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Λύση

Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = 0$ και $\text{syn}\chi = 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐☒

129. Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = 1$ και $\text{syn}\chi = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Λύση

Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = 1$ και $\text{syn}\chi = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐☒

130. Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{syn}\chi = \frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Λύση

Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{syn}\chi = \frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐☒

131. Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$ και $\text{syn}\chi = -\frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Λύση

Οι εξισώσεις $\eta\mu\chi = -\frac{1}{2}$ και $\text{syn}\chi = -\frac{1}{2}$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐☒

132. Οι εξισώσεις $|\eta\mu\chi| = 1$ και $\text{syn}\chi = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Λύση

Οι εξισώσεις $|\eta\mu\chi| = 1$ και $\text{syn}\chi = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

☐☒

133. Η εξίσωση $5 + \eta\mu\chi = -1$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Λύση

☐☒

Η εξίσωση $5 + \eta\mu\chi = -1$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

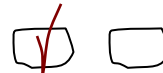


134. Η εξίσωση $1 - 2\sqrt{3}\eta\mu\chi = -2$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$.

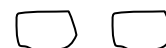


Λύση

Η εξίσωση $1 - 2\sqrt{3}\eta\mu\chi = -2$ έχει λύσεις $\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbf{Z}$



135. Η εξίσωση $|3 + 2\epsilon\phi\chi| = 5$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει λύση την $\chi = \frac{\pi}{4}$.



Λύση

Η εξίσωση $|3 + 2\epsilon\phi\chi| = 5$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει λύση την $\chi = \frac{\pi}{4}$.

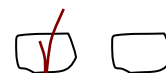


136. Η εξίσωση $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu^2(\pi - \chi) - 1 = 0$ ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbf{R}$.



Λύση

Η εξίσωση $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu^2(\pi - \chi) - 1 = 0$ ισχύει για κάθε $\theta \in \mathbf{R}$.



Ασκήσεις συμπλήρωσης κενού

137. Οι συναρτήσεις _____ και _____ είναι περιοδικές με βασική περίοδο 2π .

Λύση

Οι συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο είναι περιοδικές με βασική περίοδο 2π .

138. Αν $\chi \in [0, \pi]$ τότε η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\epsilon\phi(\chi + \pi) + 2$ «περνάει» από τα σημεία $A(\pi, \underline{\quad})$ και $B(\underline{\quad}, -1)$

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 3\epsilon\phi(\chi + \pi) + 2$ «περνάει» από τα σημεία $A(\pi, 2)$ και $B(-\frac{3\pi}{4}, -1)$

139. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu 2\chi - 2$ έχει μέγιστη τιμή την _____ και ελάχιστη την _____

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu 2\chi - 2$ έχει μέγιστη τιμή την 3 και ελάχιστη την -7.

140. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = (2003^\nu + 2004^\nu)\sigma\upsilon\nu 3\chi$ έχει περίοδο $T = \underline{\hspace{2cm}}$

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = (2003^\nu + 2004^\nu)\sigma\upsilon\nu 3\chi$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$

141. Η εξίσωση $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
142. Η εξίσωση $\sqrt{3}\varepsilon\varphi\omega = 1$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
143. Η εξίσωση $\sqrt{3}\eta\mu\chi = \frac{3}{2}$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
144. Η εξίσωση $\sin^2\chi - 4\sin\chi + 4 = 0$ έχει λύσεις _____ με $\lambda \in \mathbf{Z}$.
145. Η $\chi = \frac{\pi}{6}$ είναι λύση της $5\eta\mu(\chi + \text{---}) = 5$.
146. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1 Έχει δοθεί σαν Άσκηση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Περίοδος συνάρτησης
5. $\varphi(\theta) = 2\sin 18\theta$	α) $\frac{2\pi}{3}$
6. $\varphi(\chi) = \eta\mu 3\chi$	β) 2π
7. $\varphi(\theta) = \varepsilon\varphi\theta$	γ) $\frac{\pi}{9}$
8. $\varphi(\theta) = \sin(3\pi + \theta)$	δ) π

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση
η

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Περίοδος συνάρτησης
1. $\varphi(\theta) = 2\sin 18\theta$	α) $\frac{2\pi}{3}$
2. $\varphi(\chi) = \eta\mu 3\chi$	β) 2π
3. $\varphi(\theta) = \varepsilon\varphi\theta$	γ) $\frac{\pi}{9}$
4. $\varphi(\theta) = \sin(3\pi + \theta)$	δ) π

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	γ
2.	α
3.	δ
4.	β

147. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1 Έχει δοθεί σαν Άσκηση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β μέγιστο
1) $\varphi(\theta) = 3\sin(18\pi + \theta)$	α) -6
2) $\varphi(\chi) = 3\sin 3\chi + 1$	β) 3
3) $\varphi(\chi) = 5\sin(2\chi + \frac{15\pi}{2}) - 3$	γ) 4
4) $\varphi(\chi) = \sin(-2\chi + \pi) - 7$	δ) 2

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	
2)	
3)	
4)	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β μέγιστο
1) $\varphi(\theta) = 3\sigma\upsilon\nu(18\pi + \theta)$	α) -6
2) $\varphi(\chi) = 3\sigma\upsilon\nu 3\chi + 1$	β) 3
3) $\varphi(\chi) = 5\sigma\upsilon\nu(2\chi + \frac{15\pi}{2}) - 3$	γ) 4
4) $\varphi(\chi) = \sigma\upsilon\nu(-2\chi + \pi) - 7$	δ) 2

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	β
2)	γ
3)	δ
4)	α

148. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Έχει δοθεί σαν Άσκηση

Πίνακας 2

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Σημείο που «περνάει»
1. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1$	α) $A\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
2. $\varphi(\chi) = \eta\mu 2\chi - 3$	β) $B\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
3. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta - 2$	γ) $\Gamma\left(\pi + \frac{\pi}{4}, -3\right)$
4. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) $\Delta\left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	
2.	
3.	
4.	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β Σημείο που «περνάει»
5. $\varphi(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1$	α) $A\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
6. $\varphi(\chi) = \eta\mu 2\chi - 3$	β) $B\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
7. $\varphi(\theta) = \epsilon\varphi\theta - 4$	γ) $\Gamma\left(\pi + \frac{\pi}{4}, -3\right)$
8. $\varphi(\theta) = \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)$	δ) $\Delta\left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1.	β
2.	δ
3.	γ
4.	α

149. Να συμπληρώσετε τα κενά του Πίνακα 2 βρίσκοντας την απάντηση από τον Πίνακα 1

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β ελάχιστο
1) $\varphi(\theta) = -3\sin(\pi + \theta)$	α) -52
2) $\varphi(\chi) = 45\sin 3\chi - 7$	β) -3
3) $\varphi(\chi) = \sin(\chi + \frac{5\pi}{3}) - 3$	γ) -4
4) $\varphi(\chi) = \sin(-3\chi + \pi) - 7$	δ) -8

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	
2)	
3)	
4)	

Λύση

Πίνακας 1

Στήλη Α συνάρτηση	Στήλη Β ελάχιστο
1) $\varphi(\theta) = -3\sin(\pi + \theta)$	α) -52
2) $\varphi(\chi) = 45\sin 3\chi - 7$	β) -3
3) $\varphi(\chi) = \sin(\chi + \frac{5\pi}{3}) - 3$	γ) -4
4) $\varphi(\chi) = \sin(-3\chi + \pi) - 7$	δ) -8

Πίνακας 2

Στήλη Α	Στήλη Β
1)	β
2)	α
3)	γ
4)	δ

150. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} + \frac{1}{\epsilon\varphi\chi} = 1$ (1) .

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται όταν $\eta\mu\chi \neq 0$ και $\sin\chi \neq 0$. Επειδή είναι $\frac{1}{\eta\mu^2\chi} = 1 + \sigma\varphi^2\chi$ και

$$\frac{1}{\epsilon\varphi\chi} = \sigma\varphi\chi \text{ η (1) γίνεται } 1 + \sigma\varphi^2\chi + \sigma\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi^2\chi + \sigma\varphi\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi(\sigma\varphi\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\chi = 0 & \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \sigma\varphi\chi = -1 & \text{υ)} \end{cases}$$

$$\text{ι) } \sigma\varphi\chi = 0 \Rightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}, \lambda \in \mathbb{Z}. \text{ Απορρίπτεται, γιατί } \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{υ) } \sigma\varphi\chi = -1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z} \text{ (δεκτή)}$$

151. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$.

Λύση

$$\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi + 1 - \eta\mu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi)(\eta\mu^3\chi + \eta\mu^2\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^3\chi - \eta\mu^2\chi = 0 \\ \eta\mu^3\chi + \eta\mu^2\chi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^3\chi = \eta\mu^2\chi & \text{ι)} \\ \eta\mu^3\chi = -\eta\mu^2\chi & \text{υ)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{ι) } \eta\mu^3\chi = \eta\mu^2\chi \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + 2\chi \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi - 2\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi \\ 5\chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi & \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\frac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\text{υ) } \eta\mu^3\chi = -\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow \eta\mu^3\chi = \eta\mu(-2\chi) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi - 2\chi \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi + 2\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\chi = 2\lambda\pi \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\lambda\frac{\pi}{5} & \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi \end{cases}$$

152. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$.

Λύση

$$\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + \eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi(\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0 \\ \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} & \text{ι)} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 2\pi & \text{υ)} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\pi & \text{ιι)}$$

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{υ) } \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 2\pi \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi$$

$$\text{ιι) } \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \pi$$

153. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 2$.

Λύση

Είναι $\eta\mu\chi \leq 1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi \leq 1$, για κάθε $\chi \in \Re$ άρα $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi \leq 2$, οπότε

η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\eta\mu\chi = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$, άτοπο, γιατί, αν

$\eta\mu\chi = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$, θα είχαμε $\eta\mu^2\chi = 1$ και $\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 2 \cdot 1 = 2$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 2$ είναι αδύνατη.

154. Να λυθεί η εξίσωση $\sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(3\chi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3\chi - \frac{\pi}{4} = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{12} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \end{cases} \end{aligned}$$

Αυτές είναι όλες οι γενικές λύσεις, για να βρούμε τις λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$ θα λύσουμε τις ανισώσεις :

$$\text{ι) } 0 \leq 2\lambda\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2\lambda}{3} + \frac{7}{36} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{36} \leq \frac{2\lambda}{3} \leq 2 - \frac{7}{36} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{21}{72} \leq \lambda \leq \frac{185}{72} \text{ και } \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda = 0, 1, 2.$$

Άρα λύσεις $\chi = \frac{7\pi}{36}, \chi = \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \Leftrightarrow \chi = \frac{31\pi}{36}, \chi = \frac{4\pi}{3} + \frac{7\pi}{36} \Leftrightarrow \chi = \frac{55\pi}{36}$

155. Να λυθεί η εξίσωση $2\sin 2\chi + \sqrt{3} = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

Λύση

$$2\sin 2\chi + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2\chi = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2\chi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2\chi$$

$= 2\lambda\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi \pm \frac{5\pi}{12}$ οι γενικές λύσεις. Για να βρεις τις λύσεις που βρίσκονται στο $[0, 2\pi]$ κάνεις τα ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα δηλ.

$$\text{ι) } 0 \leq \lambda\pi + \frac{5\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ι) } 0 \leq \lambda + \frac{5}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ι) } -\frac{5}{12} \leq \lambda \leq 2 - \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \lambda \leq \frac{19}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ οπότε αν } \lambda = 0 \text{ τότε } \chi = \frac{5\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{17\pi}{12}$$

$$\text{ιι) } 0 \leq \lambda\pi - \frac{5\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ιι) } 0 \leq \lambda - \frac{5}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ιι) } \frac{5}{12} \leq \lambda \leq 2 + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leq \lambda \leq \frac{29}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ οπότε αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{7\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 2 \text{ τότε } \chi = \frac{19\pi}{12}$$

156. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu\chi + 1 = 0$ στο διάστημα $[5\pi, 7\pi]$

Λύση

$$2\eta\mu\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2\chi = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2\chi = 2\lambda\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) = 2\lambda\pi + \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{12} \quad (\text{ι}) \\ \text{ή} \\ \chi = \lambda\pi + \frac{7\pi}{12} \quad (\text{ιι}) \end{array} \right. \quad \text{οι γενικές λύσεις.}$$

Οι λύσεις που βρίσκονται στο $[5\pi, 7\pi]$ προκύπτουν ως εξής :

$$\text{ι) } 0 \leq \lambda\pi - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ι) } 0 \leq \lambda - \frac{1}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ι) } \frac{1}{12} \leq \lambda \leq 2 + \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq \lambda \leq \frac{25}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ οπότε αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{11\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 2 \text{ τότε } \chi = \frac{23\pi}{12}$$

$$\text{ιι) } 0 \leq \lambda\pi + \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi \Leftrightarrow \text{ιι) } 0 \leq \lambda + \frac{7}{12} \leq 2 \Leftrightarrow \text{ιι) } -\frac{7}{12} \leq \lambda \leq 2 - \frac{7}{12} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq \lambda \leq \frac{17}{12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ οπότε αν } \lambda = 0 \text{ τότε } \chi = \frac{7\pi}{12} \text{ και αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \chi = \frac{19\pi}{12}$$

157. Να λύσετε την εξίσωση : $(2 - 4\eta\mu 3\chi)(1 - \epsilon\varphi^2\chi) = 0$

Λύση

$$(2 - 4\eta\mu 3\chi)(1 - \epsilon\varphi^2\chi) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 - 4\eta\mu 3\chi = 0 \\ \text{ή} \\ 1 - \epsilon\varphi^2\chi = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu 3\chi = \frac{1}{2} \quad \text{ι)} \\ \text{ή} \\ \epsilon\varphi^2\chi = 1 \quad \text{ιι)} \\ \text{ή} \\ \epsilon\varphi^2\chi = -1 \quad \text{ιιι)} \end{array} \right.$$

$$\text{ι) } \eta\mu 3\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3\chi = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{array} \right.$$

και

$$\text{ιι) } \epsilon\varphi\chi = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4} \text{ και}$$

$$\text{ιιι) } \epsilon\varphi\chi = -1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{4}$$

Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu \left(\frac{2\pi}{3} - \chi \right) \sigma\upsilon\nu \left(\frac{4\pi}{7} + 2\chi \right) = 0$

Λύση

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-\chi\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7}+2\chi\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-\chi\right)=0 & (\iota) \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7}+2\chi\right)=0 & (\upsilon) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\iota) \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-\chi\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-\chi\right)=\eta\mu 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3}-\chi=2\lambda\pi+0 \\ \text{ή} \\ \frac{2\pi}{3}-\chi=2\lambda\pi+\pi+0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi=-2\lambda\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi=-2\lambda\pi-\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=-2\lambda\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi=-2\lambda\pi-\frac{5\pi}{3} \end{cases} \text{ και}$$

$$\upsilon) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7}+2\chi\right)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{7}+2\chi\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4\pi}{7}+2\chi=2\lambda\pi+\frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \frac{4\pi}{7}+2\chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi=2\lambda\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{7} \\ \text{ή} \\ 2\chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=\lambda\pi-\frac{\pi}{28} \\ \text{ή} \\ \chi=\lambda\pi-\frac{15\pi}{14} \end{cases}$$

158. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\chi=0$

Λύση

$$\eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\chi=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi-\frac{\pi}{3}=2\lambda\pi+\chi-\frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 2\chi-\frac{\pi}{3}=2\lambda\pi+\pi-\chi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\chi-\frac{\pi}{3}=2\lambda\pi+\chi-\frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 2\chi-\frac{\pi}{3}=2\lambda\pi+\pi-\chi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3\chi=2\lambda\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=2\lambda\pi-\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 3\chi=2\lambda\pi+\frac{11\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} + \frac{11\pi}{18} \end{array} \right.$$

159. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi 3\chi = 0$

Λύση

$$\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\varphi 3\chi = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\varphi 3\chi \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(3\chi - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \chi + \frac{\pi}{6} = \lambda\pi + 3\chi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\chi = -\lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = -\frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

160. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) - 3\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -2$ (1)

Λύση

Αρχικά για να διευκολυνθώ «βάζω» $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \omega$ οπότε η (1) γίνεται

$\eta\mu^2\omega - 3\eta\mu\omega + 2 = 0$ η οποία είναι 2^{ου} βαθμού η οποία όταν λυθεί (Διακρίνουσα κλπ) θα

δώσει (αλγεβρικές) λύσεις τις $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 2$ άρα πρέπει $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ δεκτή

και $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ απορρίπτεται (γιατί $|\eta\mu\theta| \leq 1$ για κάθε $\theta \in \Re$) έτσι λοιπόν είναι

$$\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ \chi - \frac{\pi}{3} = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$$

161. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}$

Λύση

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 2\varepsilon\varphi\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 2\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi(1-2\eta\mu\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\chi = 0 & (\iota) \\ \text{ή} \\ 1-2\eta\mu\chi = 0 & (\upsilon) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ι) } \sin \chi &= 0 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{υ) } 1 - 2\eta\mu\chi &= 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \chi = 2\lambda\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{3} \\ \chi = 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

162. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin^5 5\chi - 5\eta\mu^5 5\chi = 1$

Λύση

$$\sin^5 5\chi - 5\eta\mu^5 5\chi = 1 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu^5 5\chi - 5\eta\mu^5 5\chi = 1 \Leftrightarrow 6\eta\mu^5 5\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu 5\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 5\chi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow 5\chi = \lambda\pi \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{5}$$

163. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\varphi 2\chi \varepsilon\varphi 5\chi = 1$

Λύση

$$\sigma\varphi 2\chi \varepsilon\varphi 5\chi = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi 2\chi = \frac{1}{\varepsilon\varphi 5\chi} \Leftrightarrow \sigma\varphi 2\chi = \sigma\varphi 5\chi \Leftrightarrow 2\chi = \lambda\pi + 5\chi \Leftrightarrow 3\chi = -\lambda\pi$$

$$\Leftrightarrow \chi = -\frac{\lambda\pi}{3} \text{ η οποία αν θέσω } \kappa = -\lambda \text{ γράφεται } \chi = \frac{\kappa\pi}{3}$$

164. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi 5\chi \varepsilon\varphi 6\chi = 1$

Λύση

$$\varepsilon\varphi 5\chi \varepsilon\varphi 6\chi = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 6\chi = \frac{1}{\varepsilon\varphi 5\chi} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 6\chi = \sigma\varphi 5\chi \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 6\chi = \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{2} - 5\chi \right) \Leftrightarrow$$

$$6\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - 5\chi \Leftrightarrow 11\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{11} + \frac{\pi}{22} \Leftrightarrow \chi = \frac{2\lambda\pi + \pi}{22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{2(\lambda+1)\pi}{22} \Leftrightarrow \chi = \frac{\kappa\pi}{22} \text{ αν θέσω } \kappa = \lambda + 1$$

165. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi^2 3\chi - \varepsilon\varphi^2 \left(\frac{\pi}{3} - \chi \right) = 0$

Λύση

$$\varepsilon\varphi^2 3\chi - \varepsilon\varphi^2 \left(\frac{\pi}{3} - \chi \right) = 0 \Leftrightarrow \left[\varepsilon\varphi 3\chi - \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{3} - \chi \right) \right] \left[\varepsilon\varphi^2 3\chi + \varepsilon\varphi^2 \left(\frac{\pi}{3} - \chi \right) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi 3\chi - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0 \\ \text{ή} \\ \varepsilon\varphi 3\chi + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon\varphi 3\chi = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \quad (\iota) \\ \text{ή} \\ \varepsilon\varphi 3\chi = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \quad (\text{ii}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \iota) \varepsilon\varphi 3\chi &= \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \Leftrightarrow 3\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3} - \chi \Leftrightarrow 4\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \\ \text{ii) } \varepsilon\varphi 3\chi &= -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3\chi = \varepsilon\varphi\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) \quad 3\chi = \lambda\pi + \chi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2\chi = \lambda\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

166. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin^3 2\chi - 3\sin^2 2\chi + 2\sin 2\chi = 0$

Λύση

$$\sin^3 2\chi - 3\sin^2 2\chi + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\chi(\sin^2 2\chi - 3\sin 2\chi + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 2\chi = 0 & (\iota) \\ \text{ή} & \Leftrightarrow \\ \sin^2 2\chi - 3\sin 2\chi + 2 = 0 & (\text{ii}) \end{cases}$$

$$\iota) \sin \chi = 0 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ii) } \sin^2 2\chi - 3\sin 2\chi + 2 = 0 \text{ «βάζω» } \sin \chi = \omega \text{ και έχω } \omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \text{ επειδή}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 \text{ άρα μια λύσει το } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1} \text{ άρα}$$

$$\text{άρα } \omega_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ απορρίπτεται γιατί πρέπει } |\sin \chi| \leq 1 \text{ και } \omega_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ δεκτή.}$$

$$\text{Έτσι λοιπόν είναι } \sin \chi = 1 \Leftrightarrow \sin \chi = \sin 0 \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi$$

167. Να λύσετε την εξίσωση: $\sin 2\chi + 2\sin 2\chi = 1$

Λύση

$$\sin 2\chi + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2\chi}{\eta\mu 2\chi} + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2\chi}{\eta\mu 2\chi} + 2\sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2\chi + 2\sin 2\chi \eta\mu 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\chi(1 + 2\eta\mu 2\chi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\chi = 0 & (\iota) \\ \text{ή} & \Leftrightarrow \\ 1 + 2\eta\mu 2\chi = 0 & (\text{ii}) \end{cases}$$

$$\iota) \sin 2\chi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\chi = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

168. Να λύσετε την εξίσωση : $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = \frac{1}{2}$

Λύση

Αν χρησιμοποιήσω την γνωστή από την (Α Λυκείου) ταυτότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha \cdot \beta \text{ θα είναι :}$$

$$\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^2 - 2\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^4\chi - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi + 1 = 0 . \text{ Θέτω } \sigma\upsilon\nu^2\chi = \omega \text{ και έχω } 4\omega^2 - 4\omega + 1 = 0 \text{ επειδή}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0 \text{ άρα μια λύση το } \omega = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \text{ άρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ οπότε :}$$

$$\text{ι) } \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ και}$$

$$\text{ιι) } \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = 2\lambda\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

169. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$3 \eta\mu\chi - 5 = 0$	ταυτότητα
$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3\chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$
$2\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = 2$	$\chi = \frac{\lambda\pi}{8}$
	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$
	αδύνατη

Λύση :

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$3 \eta\mu\chi - 5 = 0$	ταυτότητα

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 3\chi = 1 \rightarrow \chi = \frac{2\lambda\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$$

$$2\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \rightarrow \chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{8}$$

$$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$$

αδύνατη

170. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Έξισωση	Στήλη Β Λύση
$2 \sin \chi = 1$	ταυτότητα
$\varepsilon \varphi^2 \chi = \frac{1}{3}$	$\chi = \lambda \pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\sqrt{2} \eta \mu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda \pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ή $\frac{2\lambda \pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
	$\chi = 2\lambda \pi \pm \frac{\pi}{3}$
	αδύνατη

Λύση :

Στήλη Α Έξισωση	Στήλη Β Λύση
$2 \sin \chi = 1$	ταυτότητα
$\varepsilon \varphi^2 \chi = \frac{1}{3}$	$\chi = \lambda \pi \pm \frac{\pi}{6}$
$\sqrt{2} \eta \mu 3 \chi = 1$	$\chi = \frac{2\lambda \pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ ή $\frac{2\lambda \pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
	$\chi = 2\lambda \pi \pm \frac{\pi}{3}$
	αδύνατη

171. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με τη σωστή της τιμή στη στήλη Β.

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$\sin \chi = 0$	$\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\chi = -1$	ταυτότητα
$2\eta\mu\chi = 1$	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$
$\sin 3\chi = -1$	$\chi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$
	αδύνατη

Λύση:

Στήλη Α Εξίσωση	Στήλη Β Λύση
$\sin \chi = 0$	$\chi = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\chi = -1$	ταυτότητα
$2\eta\mu\chi = 1$	$\chi = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\lambda\pi + \frac{5\pi}{6}$
$\sin 3\chi = -1$	$\chi = \frac{(2\lambda+1)\pi}{3}$
	$\chi = 2\lambda\pi \pm \frac{\pi}{2}$
	αδύνατη

Βιβλιογραφία

- 1.**Τριγωνομετρία Σ. Κανέλλου
- 2.**Ευθύγραμμη Τριγωνομετρία Π. Τόγκα
- 3.**Τριγωνομετρία Κ. Παπαδόπουλου
- 4.**Τριγωνομετρία Α. Κοντού
- 5.**Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β! Λυκείου Α. Λεβέτα
- 6.**Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Γ. Βιδάλης , Β. Γκιμίσης
- 7.**Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Κ. Γκατζούλη , Κ. Στράνη
- 8.**Τριγωνομετρία Δ. Κεφάλας , Α. Σπέρτος
- 9.**Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β! Λυκείου Ιορδ. Μουταφίδης, Γ. Χαλίδης
- 10.**Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β! Λυκείου Εκδόσεις Ορόσημο
- 11.**Κριτήρια Αξιολόγησης «Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β! Λυκείου»
Α. Σκύφας, Ν. Αντωνόπουλος , Δ. Ανδριώτης
- 12.**Σχολικό Βιβλίο «Άλγεβρα Β! Ενιαίου Λυκείου»
- 13.**Οδηγίες Κ. Ε. Ε.
- 14.**Οδηγίες Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π. Ι.)
- 15.**Φυλλάδια «Μαθηματικής Εταιρείας»

Δαμιανός Μυραΐτης

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Τόμος 1^{ος}



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Τόμος 2ος

Παράγωγο

ακρότατα

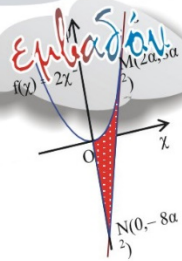
αδύναμτες

ολοκλήρωμα

μελέτη ευκάρτησης

οριζόμενο

De L'Hospital



Περιέχει θεωρία
με παρατηρήσεις,
υποδείξεις και
ελάχιστα μεθοδολογία.

Περιέχει κυρίως
παραδείγματα,
ασκήσεις για λύση

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

1^{ος} Τόμος



Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

2^{ος} Τόμος



Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέμα

εις βυναρτήβεν
βτη βταββική
και εις ινδανότητες

ωράζωροι
ακρόπαπα
μέβη τμή
Πανόπτητα



Περιέχει όλα τα θέματα
όλων των τόμων των
Πανελληνίων εξετάσεων
από το 2000 μέχρι
σήμερα, αυξανόμενα με
αναλυτικό και
υποδειγματικό τρόπο

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαριανός Μωραΐτης

Τα Θέματα
Αρχές Οργάνωσης
και
Διοίκησης Επιχειρήσεων

Η Επιχειρήσιμη

Κοινωνική Ευθύνη

Η οικονομική λειτουργία



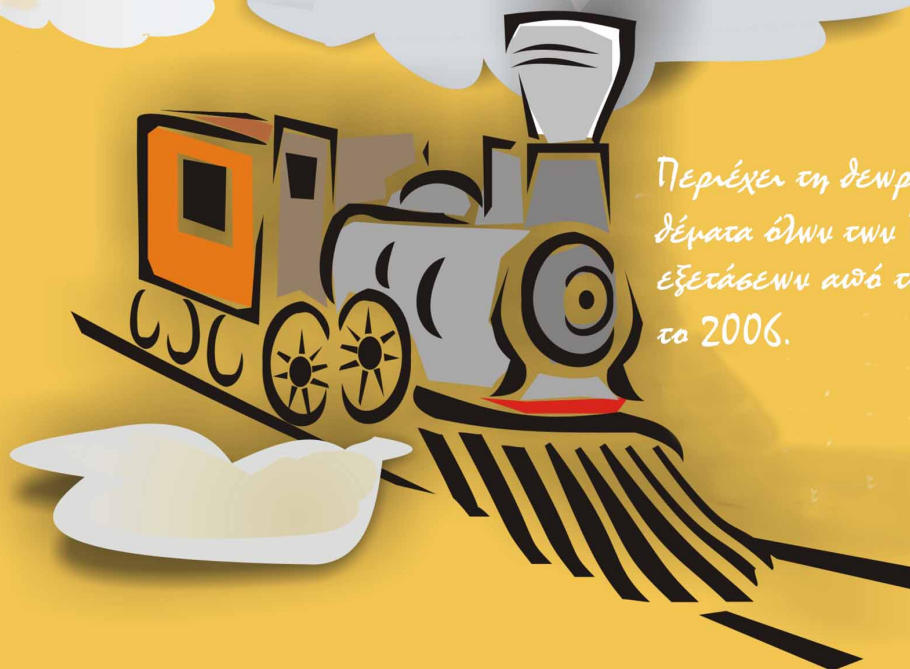
Περιέχει τη θεωρία και όλα τα
θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 2004 μέχρι
σήμερα, αδειοδοτημένα με
αναλυτικό και τρόπο
υποδειγματικό

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέματα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

αζαδά
ωληδωρισμός
μέθο συνολικό κόστος
ελαστική ζήτηση

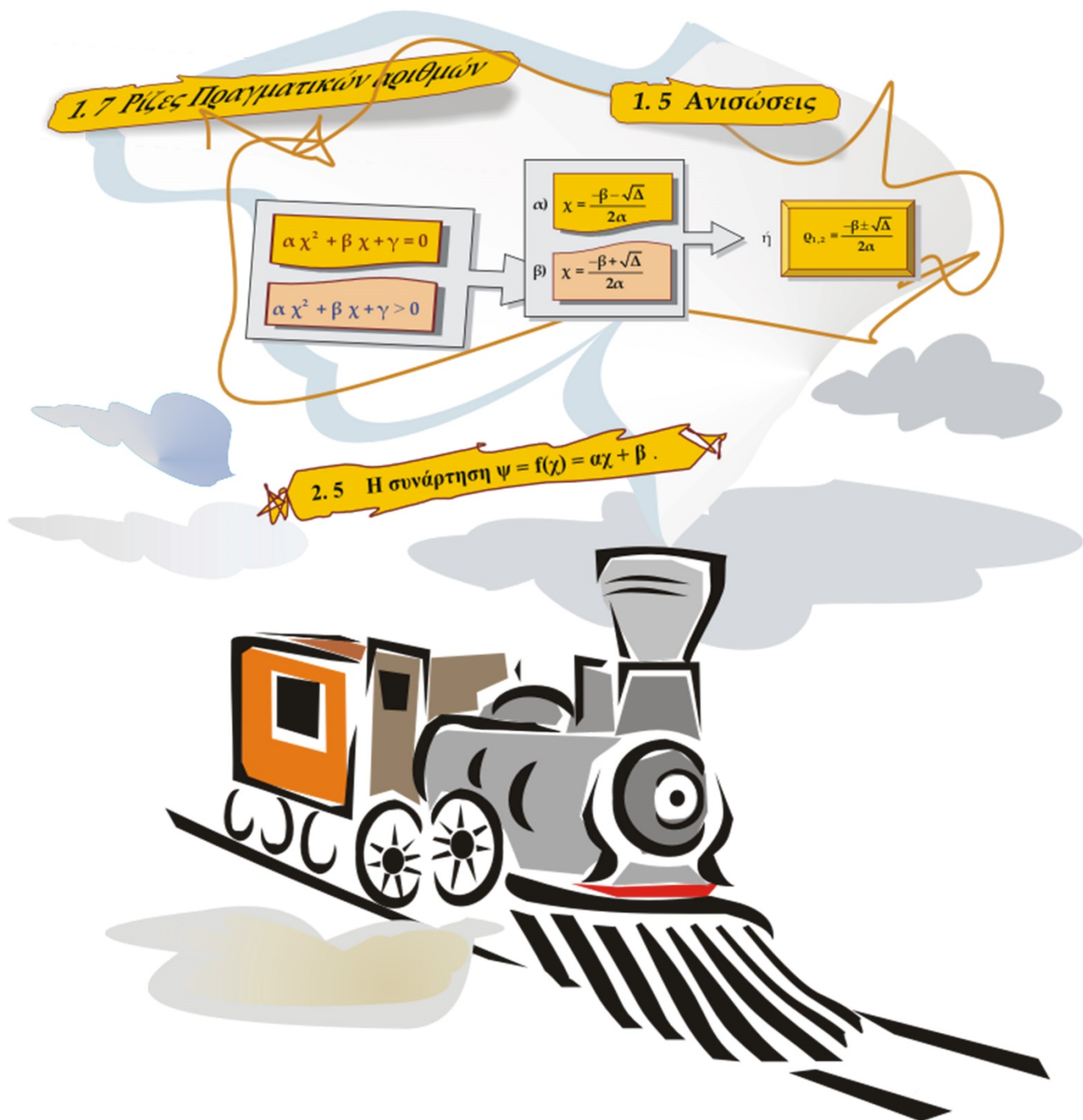


Περιέχει τη θεωρία και όλα τα
δέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1994 μέχρι
το 2006.

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Άλγεβρα Α Λυκείου



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας