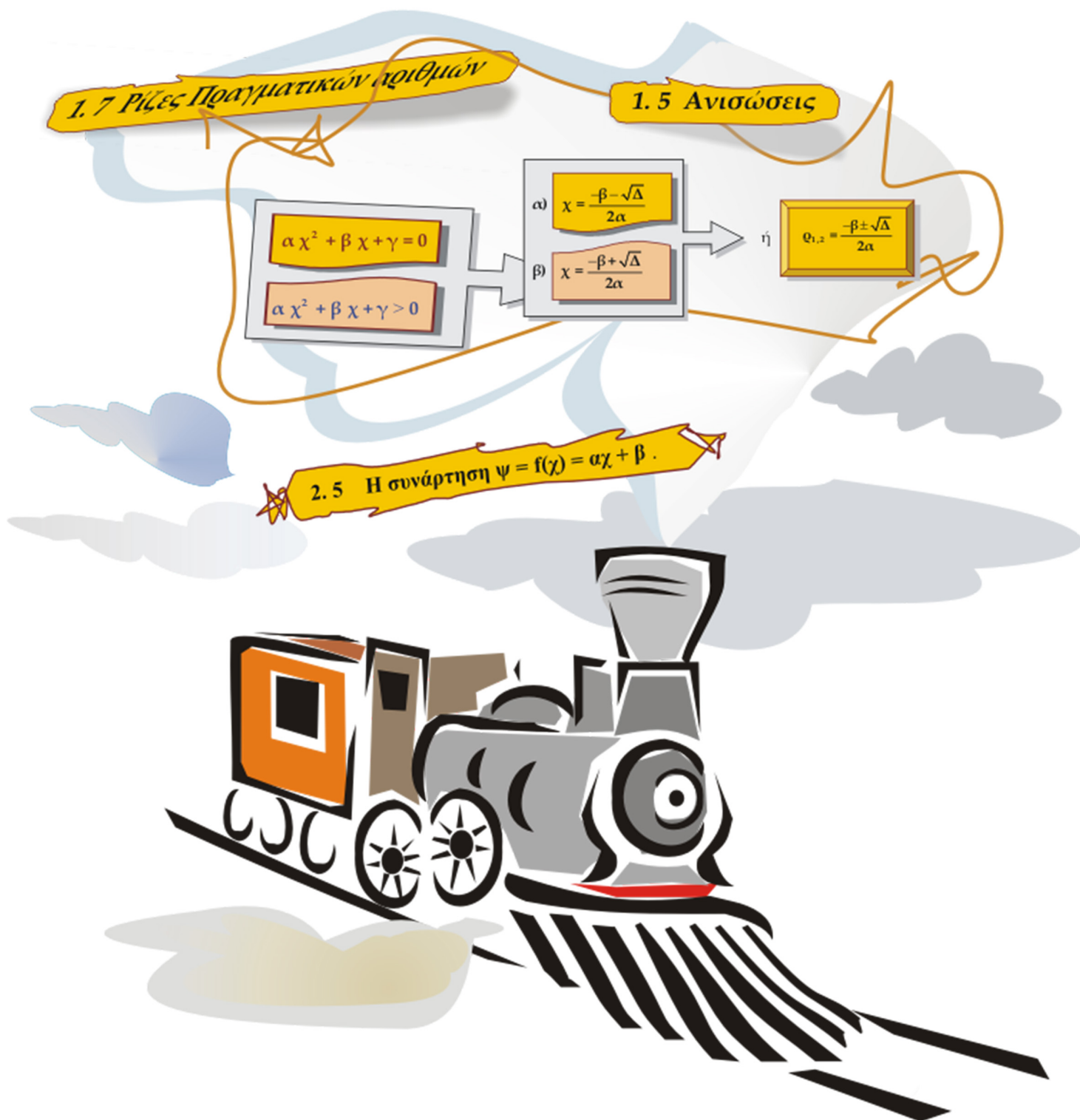


Δαμιανός Μωραΐτης

Άλγεβρα Α Λυκείου



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Αφιερωμένο
σε όλους εκείνους που θέλουν
να προσπαθήσουν

Δαμιανός Μωραΐτης
Άλγεβρα Α Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς

© copyright κειμένου και εικονογράφησης: **Δαμιανός Μωραΐτης**

© copyright για την παρούσα έκδοση:

Σύλλογος «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

Λιβαδειά Φεβρουάριος 2022

Εκδότης: «**Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λιβαδειάς**»

ISBN: 9786188597334

Προλεγόμενα

Το βιβλίο αυτό δεν «φιλοδοξεί να αντικαταστήσει» τα υπάρχοντα που περιέχουν την αντίστοιχη ύλη. Πολύ περισσότερο «δεν φιλοδοξεί να υποκαταστήσει» το σχολικό βιβλίο . Πιστεύω ότι κάθε βιβλίο είναι χρήσιμο και οπωσδήποτε προσφέρει στην προσπάθεια για περισσότερες και καλύτερες γνώσεις . Είναι επίσης γεγονός ότι ο μαθητής πρέπει να έχει τη δυνατότητα να επιλέγει μέσα από μια πλούσια «γκάμα» τα βιβλία που ταιριάζουν καλύτερα στο δικό του «στυλ». Έτσι λοιπόν φιλοδοξία της κυκλοφορίας αυτού του βιβλίου είναι να βοηθήσει τους μαθητές στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την ύλη αποκτώντας ταυτόχρονα σταθερή υποδομή στα μαθηματικά, πράγμα σημαντικό για την απόδοσή τους μελλοντικά.

Είναι γεγονός ότι η ύλη της Α' Λυκείου, στο σχολικό βιβλίο, παρουσιάζεται με τρόπο και με σειρά η οποία δημιουργεί πρόσθετες δυσκολίες. Οι ασκήσεις έχουν μικρή σχέση με τις εφαρμογές και με τα παραδείγματα και οι αποδείξεις, όπου υπάρχουν, τις πιο πολλές φορές γίνονται με τρόπο που δείχνει τουλάχιστον αποκομμένος από τη λογική .

Παρ' όλο που φανερά δεν συμφωνώ με αυτά, υποχρεωτικά ακολούθησα αυστηρά τη σειρά στην παρουσίαση της ύλης.

Όμως δύο από τους βασικούς στόχους του βιβλίου είναι :

1^{ον} Σε κάθε περίπτωση να υπάρχουν περισσότερα από ένα παραδείγματα και ταυτόχρονα οι ασκήσεις να έχουν οπωσδήποτε αντίστοιχο παράδειγμα .

2^{ον} Οι αποδείξεις, που υπάρχουν για όλα τα θέματα, να γίνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αναδεικνύουν τη λογική τους, προάγοντας τη δική σου λογική.

Για τους λόγους αυτούς τα μεν παραδείγματα θα τα «δουλεύεις» με «χαρτί και μολύβι» και δεν θα τα «διαβάζεις» απλώς, στις δε ασκήσεις θα αναζητάς τα αντίστοιχα παραδείγματα για να εφαρμόσεις τη λογική τους.

Από τις αποδείξεις που υπάρχουν θα βοηθηθείς πολύ αν παρακολουθείς τη λογική τους. Ανάφερα πολλές φορές τη λέξη «λογική», αυτό δεν είναι τυχαίο. Πιστεύω ότι η «λογική» είναι μια τέχνη που μαθαίνεται, τα δε μαθηματικά είναι το καλύτερο εργαλείο για να ασκηθεί κανείς στην τέχνη της λογικής .

Αν όλα αυτά συμβούν πιστεύω ότι, από τις πρώτες σελίδες κιόλας θα συμφωνήσεις μαζί μου, «πιο εύκολα μαθαίνεις μαθηματικά παρά ποδήλατο» . Στο «κάτω – κάτω της γραφής» με τα μαθηματικά δεν κινδυνεύεις να χτυπήσεις, άρα γιατί να μην προσπαθήσεις.

Το βιβλίο αυτό είναι κυριολεκτικά το «απόσταγμα» μιας πολύχρονης παρουσίας στις αίθουσες διδασκαλίας .

Είναι επίσης μια από τις λίγες «απόπειρες» καθηγητών της Δημόσιας Εκπαίδευσης.

Η προσπάθεια αυτή έχει την συνέχειά της με και ολοκληρώνεται με τους 5 τόμους των Μαθηματικών της Γ! Λυκείου και άλλα δεξ στο τέλος του βιβλίου

Ευχαριστίες σε όσους με οποιονδήποτε τρόπο με βοήθησαν να ολοκληρώσω αυτή την προσπάθεια .

Λιβαδειά 2008

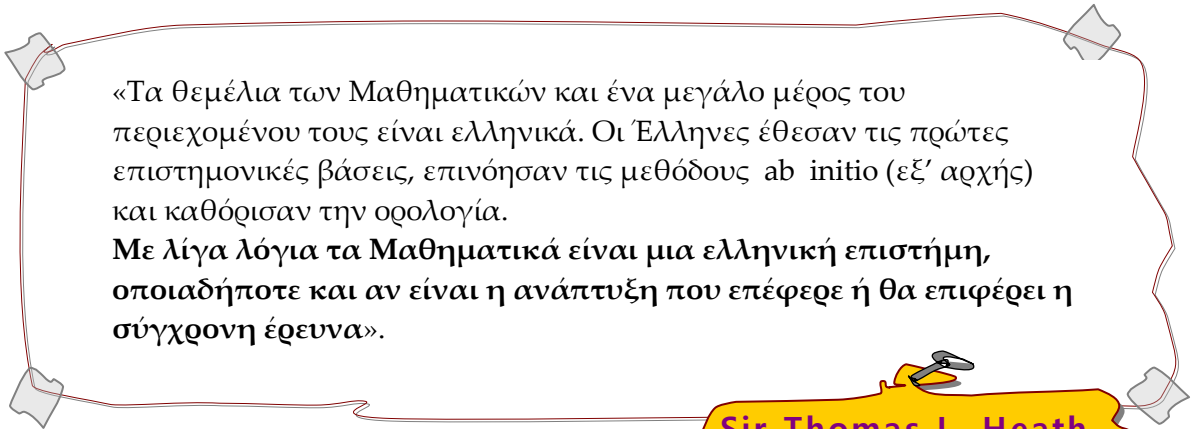
Το βιβλίο αυτό διανέμεται δωρεάν για διδακτικούς σκοπούς

Ο πρόλογος αυτός γράφτηκε το 2008 αλλά μέχρι σήμερα που γίνεται η πρώτη, ψηφιακή, έκδοση δεν έχουν αλλάξει και πολλά.

Λιβαδειά 2022



Αγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω



«Τα θεμέλια των Μαθηματικών και ένα μεγάλο μέρος του περιεχομένου τους είναι ελληνικά. Οι Έλληνες έθεσαν τις πρώτες επιστημονικές βάσεις, επινόησαν τις μεθόδους *ab initio* (εξ' αρχής) και καθόρισαν την ορολογία.

Με λίγα λόγια τα Μαθηματικά είναι μια ελληνική επιστήμη, οποιαδήποτε και αν είναι η ανάπτυξη που επέφερε ή θα επιφέρει η σύγχρονη έρευνα».



Sir Thomas L. Heath

Σχόλιο: Δείτε τι κάνουν οι σημερινοί κάτοικοι αυτής της χώρας:

Παράδειγμα 1^ο

Στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία ο γνωστός αριθμός 3,14 (κατά προσέγγιση) αναφέρεται (συμβολικά) με το Ελληνικό γράμμα π (Greek letter «π») αναφέροντας ταυτόχρονα ότι οι αρχαίοι «υμών» πρόγονοι είχαν βρει πολλές και διαφορετικές γεωμετρικές προσεγγίσεις του..

Παράδειγμα 2^ο

Στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία αναφέρεται συχνά πυκνά ένας από τους μεγαλύτερους «μαθηματικούς» και φιλοσόφους εκ των αρχαίων «υμών» προγόνων ο **Διόφαντος** .

Αυτά στην Παγκόσμια Μαθηματική βιβλιογραφία γιατί στην σύγχρονη **σχολική μαθηματική** βιβλιογραφία δεν αναφέρεται τίποτα σχετικό .

Όλοι λοιπόν πλην «νεοελλήνων» δείχνουν τον οφειλόμενο σεβασμό

Δ. Μ.

Πίνακας Περιεχομένων

1 ^ο Κεφάλαιο	13
-------------------------	----

Οι Πραγματικοί Αριθμοί – Αλγεβρικός λογισμός

1.1	Πράξεις – Ιδιότητες
1.2	Δυνάμεις – ταυτότητες – παραγοντοποίηση
1.3	Εξισώσεις 1 ^{ου} βαθμού
1.4	Διάταξη – Ανισότητες
1.5	Ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού
1.6	Απόλυτες τιμές
1.7	Ρίζες

2 ^ο Κεφάλαιο	83
-------------------------	----

Συναρτήσεις

2.1	Σύνολα	66
2.2	Συναρτήσεις – Ορισμοί	73
2.3	Γραφική παράσταση	80
2.4	Συνάρτηση $\psi = \alpha \cdot \chi$, $\psi = \alpha \cdot \chi + \beta$ κλπ	88
2.5	Μελέτη συναρτήσεων.....	97

3 ^ο Κεφάλαιο	133
-------------------------	-----

Συστήματα

3.1	Συστήματα δύο εξισώσεων.....	120
3.2	Λύση και διερεύνηση συστήματος.....	129
3.3	Συστήματα με περισσότερους από δύο αγνώστους	136
3.4	Συστήματα ειδικής μορφής.....	138
3.5	Επίλυση προβλημάτων με σύστημα.....	144

4 ^ο Κεφάλαιο	163
-------------------------	-----

Συνάρτηση 2^{ου} βαθμού – Τριώνυμο – Εξίσωση – Ανίσωση

4.1	Εξίσωση $\alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$	148
4.2	Άθροισμα – γινόμενο ριζών	152
4.3	Εξισώσεις συστήματα που ανάγονται σε 2 ^{ου} βαθμού	156
4.4	Η συνάρτηση $\psi = \alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$	157
4.5	Μεταβολές του πρόσημου της $\psi = \alpha \cdot \chi^2 + \beta \cdot \chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ Ανισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	166

1.1 Σύνολα N, Z, Q, R . Πράξεις – Ιδιότητες Πράξεων.

- **Φυσικοί αριθμοί :** σύνολο $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$
- **Ακέραιοι αριθμοί :** σύνολο $Z = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots \}$
- **Ρητοί αριθμοί** σύνολο $Q = \{ \frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \text{ ακέραιοι, } \beta \neq 0 \}$

Ρητός αριθμός είναι κάθε αριθμός ο οποίος είναι ή μπορεί να γραφεί ως κλάσμα (ανάγωγο) με όρους ακέραιους αριθμούς.

Δηλαδή ρητοί είναι οι ακέραιοι αριθμοί ($3=3/1$), οι απλοί δεκαδικοί, οι περιοδικοί δεκαδικοί και φυσικά τα ανάγωγα σχετικά κλάσματα.

➤ **Πραγματικοί αριθμοί (σύνολο R).**

Από τον ορισμό των ρητών είναι φανερό ότι υπάρχουν και αριθμοί οι οποίοι δεν είναι και δεν μπορούν να γραφούν ως ανάγωγα σχετικά κλάσματα.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων αριθμών είναι οι ρίζες των αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα (τετράγωνα άλλων αριθμών) π.χ. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{123}$ κ.λ.π. όπως επίσης και όλοι οι **απειροσμήφιοι μη περιοδικοί** δεκαδικοί αριθμοί. **Ο πιο γνωστός όλων :** ο αριθμός π ($\approx 3,14$).

Αξίζει να αναφέρουμε τα εξής : Ο αριθμός π ήταν «γνωστός» στην αρχαιότητα, πολλοί και γνωστοί πρόγονοί μας είχαν ασχοληθεί με το πρόβλημα υπολογισμού του. Ένας εξ' αυτών ήταν και ο Αρχιμήδης ο οποίος, όπως λέει ο μύθος, φονεύθηκε από τους Ρωμαίους κατακτητές των Συρακουσών, την ώρα που προσπαθούσε μέσω των κανονικών πολυγώνων να βρει μια καλύτερη προσέγγιση του π .

Ήταν δε τόσο απορροφημένος που δεν κατάλαβε ότι κινδύνευε και το μόνο που τον «ενόχλησε» ήταν ότι του χάλαγαν τα σχήματα (κύκλους) που είχε πάνω στην άμμο, έτσι το μόνο που πρόλαβε να πει ήταν το γνωστό «μή μου τούς κύκλους τάραττε» (μη μου χαλάτε τους κύκλους).

Υπάρχει μάλιστα μια χαρακτηριστική φράση, στην οποίας ο αριθμός των γραμμάτων κάθε λέξης αντιστοιχεί σε μια καλύτερη προσέγγιση του π , η εξής :

«**αεί ό θεός ό μέγας γεωμετρεί**»
3, 1 4 1 5 9

Για όλους αυτούς τους λόγους στην παγκόσμια βιβλιογραφία ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με το Ελληνικό γράμμα π .

Έτσι λοιπόν κάθε ρητός αριθμός είναι ή μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.

Ισχύει, όπως έχουμε δει στο Γυμνάσιο και το εξής :

Κάθε ρητός μπορεί να γραφεί ως τερματιζόμενος ή απειροσμήφιος περιοδικός δεκαδικός και αντίστροφα κάθε τερματιζόμενος ή απειροσμήφιος περιοδικός μπορεί να γραφεί ως κλάσμα.

Διαπιστώθηκε όπως ανέφερα πιο πριν ότι οι ρίζες και οι απειροσμήφιοι δεκαδικοί δεν είναι ρητοί και τους ονόμασαν **άρρητους**. Να σημειώσεις όμως ότι οι ρίζες γράφονται ως απειροσμήφιοι δεκαδικοί, μη περιοδικοί. Υπέθεσαν λοιπόν ότι αν συμπεριλάβουν τους ρητούς και τους άρρητους σε ένα σύνολο τότε αυτό θα περιέχει **όλους τους αριθμούς που υπάρχουν στην πραγματικότητα**, έτσι ονόμασαν το σύνολο που περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους σύνολο των Πραγματικών. Βέβαια έτσι θεώρησαν ότι κάθε άλλος αριθμός θα είναι στην φαντασία κάποιων.

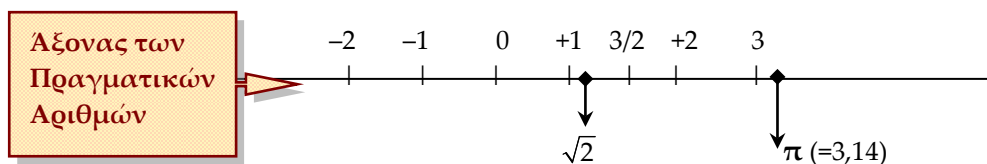
Όταν αργότερα διαπιστώθηκε ότι υπάρχει και τρίτη κατηγορία αριθμών οι οποίοι δεν είναι ρητοί ούτε άρρητοι τους ονόμασαν **Φανταστικούς** και **Μιγαδικούς** (μισός πραγματικός – μισός φανταστικός).

Περισσότερα όμως γι' αυτούς όταν μεγαλώσεις και πάς στην Γ! Λυκείου φίλε μαθητή.

Το σύνολο των πραγματικών λοιπόν περιλαμβάνει τους ρητούς και τους άρρητους.

Αξιοματικά δεχόμαστε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ χωρίζεται σε τρία υποσύνολα : το σύνολο των αρνητικών, το σύνολο των θετικών και το σύνολο που περιλαμβάνει μόνο το μηδέν [δηλ. ένας πραγματικός μπορεί να είναι α) αρνητικός β) μηδέν γ) θετικός].

Άξονας των Πραγματικών Αριθμών είναι μια ευθεία στην οποία αυθαίρετα έχουμε αντιστοιχίσει σε ένα σημείο της το 0 και σε ένα σημείο της το +1. Με αυτό τον αυθαίρετο τρόπο δημιουργούμε μια «άψογη» σχέση ανάμεσα στους πραγματικούς και στα σημεία της ευθείας, έτσι που σε κάθε πραγματικός να αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο και σε κάθε σημείο ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός.



➤ Πράξεις

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζονται οι 4 γνωστές πράξεις : πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση.

Στην πραγματικότητα μια είναι η πράξη: η πρόσθεση.

Η αφαίρεση **ορίζεται** ως η πρόσθεση του αντιθέτου δηλ. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Επίσης είναι $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$ και γενικά $\alpha \cdot \beta = \beta + \beta + \dots + \beta$.

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός είναι ειδική πρόσθεση

Η διαίρεση **ορίζεται** ως πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο δηλ. αν $\alpha \neq 0$ τότε

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad \text{Το } 0 \text{ δεν έχει αντίστροφο}$$

• Ιδιότητες των Πράξεων

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν ορισμένες ιδιότητες. Να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες αυτές «ανήκουν» στις συγκεκριμένες πράξεις με την έννοια ότι: ισχύουν για τις συγκεκριμένες πράξεις και όχι για όλες τις πράξεις, π χ όπως θα δούμε πιο κάτω η αντιμεταθετική ιδιότητα ισχύει για την πρόσθεση και όχι για την αφαίρεση δηλ. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ ενώ $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$.

Επίσης όταν σε μια πράξη ισχύει μια ιδιότητα, τότε ισχύει για όλους τους αριθμούς.

Συνοπτικός πίνακας ιδιοτήτων πρόσθεσης

Ονομασία	Συμβολισμός
1. Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
3. Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$
4. Αντίθετο στοιχείο : για κάθε αριθμό α υπάρχει ο αντίθετός του, $0 - \alpha$, τέτοιος ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$	

Συνοπτικός πίνακας ιδιοτήτων πολλαπλασιασμού

<u>Ονομασία</u>	<u>Συμβολισμός</u>
1. Αντιμεταθετική	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
2. Προσεταιριστική	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
3. Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
4. Αντίστροφο στοιχείο : για κάθε αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει ο αντ/φος του ο $\frac{1}{\alpha}$ ώστε $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$	
5. Απορροφητικό στοιχείο	$\alpha \cdot 0 = 0$
6. Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού	$\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$

- Επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, (στις ιδιότητες 3, 4, 5) θα ισχύουν και :
 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$, $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ κ.λ.π.
- Η 6^η ιδιότητα (επιμεριστική) είναι ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση.
- Απορροφητικό στοιχείο:** το 0 «φαίνεται» να απορροφά κάθε αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζεται [$\alpha \cdot 0 = 0$].

Ισχύουν επίσης οι εξής σημαντικές ιδιότητες :

1. $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$	2. $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$
3. $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$	4. $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : \delta$
5. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$	6. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ (ιδιότητα της διαγραφής στην πρόσθεση)
7. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$	8. $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ (ιδιότητα της διαγραφής στον πολ/σμό)

- Παρατήρηση 1** → Όταν βλέπεις $\Leftrightarrow$ τότε θα αποδεικνύεις και το αντίστροφο της πρότασης εκτός από το ευθύ.
- Παρατήρηση 2** → Όταν μια πρόταση είναι της μορφής **A** ή **B** τότε αρκεί να αληθεύει το ένα από τα **A**, **B** [φυσικά ακόμη καλύτερα αν αληθεύουν και τα 2]
Π. χ. Ισχύει η ισοδυναμία $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\alpha = \beta = 0$

Απόδειξη ($\Leftarrow$) Έστω $\alpha = 0$ τότε $0 \cdot \beta = 0$ (ιδιότητα απορροφητικού στοιχείου), όμοια αν $\beta = 0$ τότε $\alpha \cdot 0 = 0$

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Έστω $\alpha \cdot \beta = 0$, επειδή το 0 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που έχει την ιδιότητα $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ τότε θα είναι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\alpha = \beta = 0$

Το 0 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που έχει την ιδιότητα $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$

Απόδειξη

Έστω ότι υπήρχε και κάποιος άλλος αριθμός χ , με την ιδιότητα του απορροφητικού στοιχείου δηλαδή

$\alpha \cdot \chi = \chi \cdot \alpha = \chi$. Τότε θα ίσχυε: $\chi \cdot 0 = 0$ γιατί το 0 είναι απορροφητικό στοιχείο και $\chi \cdot 0 = \chi$ γιατί το χ είναι επίσης απορροφητικό στοιχείο άρα $\chi = 0$

● **Παρατήρηση 3** → Όταν μια πρόταση είναι της μορφής **A και B** τότε πρέπει να αληθεύουν το A και το B ταυτόχρονα Π. χ. Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ **και** $\beta \neq 0$

Ισχύουν επίσης:

$$(-1) \cdot \alpha = -\alpha, (-\alpha) \cdot \beta = -\alpha \cdot \beta, (-\alpha)(-\beta) = \alpha \cdot \beta, -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$$

καθώς και οι πράξεις για τα κλάσματα, έτσι όπως ορίστηκαν στο Γυμνάσιο.

Προσοχή

Έστω ότι θες να διαιρέσεις και τα δύο μέλη μιας σχέσης με έναν αριθμό α . Τότε πρέπει να εξασφαλίσεις ότι ο αριθμός με τον οποίο διαιρείς είναι διάφορος του 0. Αλλιώς θα πρέπει να εξετάσεις τι γίνεται η αρχική σχέση στην περίπτωση που ο $\alpha = 0$ (Να κάνεις διερεύνηση δηλαδή)

Αποτελεί **κλασικό λάθος η διαίρεση με παράγοντα ο οποίος μπορεί να είναι 0**.

Παραδείγματα:

1. Αν $\chi = 1$ τότε $\chi - 1 = 0$ τότε $5 \cdot (\chi - 1) = 5 \cdot 0 = 0 = 7 \cdot 0 = 7 \cdot (\chi - 1)$ άρα $5(\chi - 1) = 7(\chi - 1)$ άρα

$$\frac{5(\chi - 1)}{(\chi - 1)} = \frac{7(\chi - 1)}{(\chi - 1)} \quad \text{άρα } 5 = 7 !!$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $3\chi(\chi - 2)(\chi - 1) = 5\chi(\chi + 3)(\chi - 1)$

$$\text{Απάντηση } 3\chi(\chi - 2)(\chi - 1) = 5\chi(\chi + 3)(\chi - 1) \Leftrightarrow \frac{3\chi(\chi - 2)(\chi - 1)}{\chi(\chi - 1)} = \frac{5\chi(\chi + 3)(\chi - 1)}{\chi(\chi - 1)} \Leftrightarrow 3(\chi - 2) = 5(\chi + 3)$$

$$\Leftrightarrow 3\chi - 6 = 5\chi + 15 \Leftrightarrow 3\chi - 5\chi = 15 + 6 \Leftrightarrow -2\chi = 21 \Leftrightarrow$$

$$\chi = -\frac{21}{2} \quad \text{άρα μοναδική ρίζα το } -\frac{21}{2} \quad \text{Σωστά ; } \mathbf{\text{ΛΑΘΟΣ}}$$

Διότι όπως εύκολα διαπιστώνουμε με αντικατάσταση λύσεις είναι και το 0 και το 1.

Το λάθος έγινε διότι διαιρέσαμε με $\chi(\chi - 1)$ το οποίο δεν εξετάσαμε αν είναι $\neq 0$ και τι γίνεται αν το $\chi(\chi - 1) = 0$ οπότε $\chi = 0$ ή $\chi = -1$. Η εξίσωση θα λυθεί σωστά με παραγοντοποίηση.

Παρατήρηση

στο $\mathbb{R}$ δύο πράξεις (μόνο) δεν είναι δυνατόν να κάνεις

α) Να διαιρέσεις με το 0 και β) Να βρεις την ρίζα αρνητικού αριθμού.

➤ Τι κάνω λοιπόν όταν δω παράσταση με μεταβλητή στον παρονομαστή π. χ. κλάσματα της μορφής $\frac{A(\chi)}{B(\chi)}$; «Βάζω» τον παρονομαστή $B(\chi) = 0$, λύνω την εξίσωση που δημιουργείται,

βρίσκοντας έτσι τις τιμές α, β, γ που μηδενίζουν τον παρονομαστή και στη συνέχεια απαιτώ $\chi \neq \alpha, \beta, \gamma$. Επίσης σε κλάσματα της μορφής

$$\frac{\frac{A(\chi)}{B(\chi)}}{\frac{\Gamma(\chi)}{\Delta(\chi)}} \quad \text{Απαιτώ: } B(\chi) \neq 0, \Delta(\chi) \neq 0 \text{ αλλά και } \frac{\Gamma(\chi)}{\Delta(\chi)} \neq 0 \Leftrightarrow \Gamma(\chi) \neq 0$$

➤ Τι κάνω λοιπόν όταν δω παράσταση με μεταβλητή σε ρίζα π.χ. $\sqrt{3\chi+5}$, $\sqrt[5]{\chi-1}$; «βάζω» την υπορίζη ποσότητα ≥ 0 και λύνω την ανίσωση βρίσκοντας έτσι τους περιορισμούς για την μεταβλητή δηλ $3\chi+5 \geq 0 \Leftrightarrow 3\chi \geq -5 \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{5}{3}$ ή $\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$. Περισσότερα στο κεφάλαιο για τις ρίζες.

➤ Αναλογίες

Αναλογία είναι μια ισότητα κλασμάτων. Π.χ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda}$.

Όπου πιο κάτω εμφανίζονται κλάσματα εννοείται ότι έχουν νόημα δηλ. υποχρεωτικά πρέπει οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του 0. Αν πρόκειται για εξίσωση ή συνάρτηση θα βρίσκεις τους αντίστοιχους περιορισμούς απαιτώντας οι παρονομαστές να είναι $\neq 0$. Δηλαδή σε κλάσματα της μορφής $\frac{A(\chi)}{B(\chi)}$ θα απαιτείς $B(\chi) \neq 0$ κλπ.

• Ιδιότητες αναλογιών :

- i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$
- ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$
- iii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$
- iv) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$
- v) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$
- vi) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma}$ και $\frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$
- vii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \varepsilon + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \zeta + \dots + \lambda}$
- viii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mu\alpha + \kappa\gamma}{\mu\beta + \kappa\delta}$
- ix) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\kappa\alpha - \lambda\beta} = \frac{\kappa\gamma + \lambda\delta}{\kappa\gamma - \lambda\delta}$

Παράδειγμα Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$ να βρεθεί η τιμή της i) $\frac{2\alpha + 3\beta}{3\beta}$ ii) $\frac{\alpha}{\alpha - 4\beta}$

Απάντηση: i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3\beta} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{2\alpha + 3\beta}{3\beta} = \frac{4+9}{9} \Leftrightarrow \frac{2\alpha + 3\beta}{3\beta} = \frac{13}{9}$

ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4\beta} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{-4\beta} = \frac{2}{-12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha - 4\beta} = \frac{2}{-10} = -\frac{2}{10}$

Με βάση την ιδιότητα vii) λύνονται τα γνωστά προβλήματα μερισμού.

Τι είναι μερισμός; , μέρισμα; , διαμέρισμα :

Μερισμός είναι ο χωρισμός σε μέρη ανάλογα (όχι κατ' ανάγκη ίσα).

Μέρισμα είναι το αποτέλεσμα του μερισμού του κέρδους ανάλογα με τις μετοχές που έχουν οι μέτοχοι.

Διαμέρισμα είναι ο χώρος μιας «οικίας» που προκύπτει δια του μερισμού και επειδή η «οικία» χωρίζεται σε πολλά διαμερίσματα – «οικίες» λέγεται και πολύ - κατοικία.



Πρόβλημα : Να χωρίσεις το ποσόν 3.000 € σε μέρη ανάλογα των αριθμών 3, 5, 7.

Απάντηση: έστω χ, ψ, ω τα αντίστοιχα ποσά τότε

$$\frac{\chi}{3} = \frac{\psi}{5} = \frac{\omega}{7} = \frac{\chi + \psi + \omega}{3 + 5 + 7} = \frac{3.000}{15} = 200 \text{ [ιδιοτ. νι]} \text{ όμως } \frac{\chi}{3} = \frac{\psi}{5} = \frac{\omega}{7} = 200 \text{ τότε } \chi = 3 \cdot 200 = 600 \text{ €}$$

$$, \psi = 5 \cdot 200 = 1000 \text{ € } \omega = 7 \cdot 200 = 1400 \text{ €}.$$

Άσκησης

1. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{5}$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

ι) $\frac{2\alpha}{3\beta}$ ιι) $\frac{2\alpha + 3\beta}{3\beta}$ ιιι) $\frac{\alpha}{\alpha - 4\beta}$ ιν) $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ ν) $\frac{3\alpha + 5\beta}{3\alpha - 5\beta}$

2. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{3}$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

ι) $\frac{-3\alpha}{2\beta}$ ιι) $\frac{\alpha - 4\beta}{3\beta}$ ιιι) $\frac{2\alpha}{\alpha + 3\beta}$ ιν) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ ν) $\frac{\alpha + 5\beta}{\beta - 5\beta}$

3. Ένας πατέρας που είχε 3 παιδιά παρατήρησε ότι η δική του ηλικία είναι το άθροισμα των ηλικιών των τριών παιδιών του, και οι ηλικίες των 3 παιδιών, βαλμένες με τη σειρά γέννησής τους, είναι ανάλογες των αριθμών 3, 2, 1.

Αν ο πατέρας είναι 42 ετών πόσο είναι το κάθε παιδί του και σε ποια ηλικία έγινε πατέρας.

4. Μια οικογένεια έχει 3 παιδιά (1°, 2°, 3°). Αν προσθέσω στις ηλικίες τους την σειρά γέννησής τους τότε όλες μαζί μας δίνουν (ως άθροισμα) την ηλικία της μητέρας τους. Αν οι ηλικίες τους, βαλμένες με τη σειρά γέννησής τους, είναι ανάλογες των αριθμών 3, 2, 1 και η μητέρα είναι 42 ετών πόσο είναι το κάθε παιδί και σε τι ηλικία (της μητέρας) γεννήθηκε ο «μεσαίος».

5. Να βρείτε τους περιορισμούς για να έχουν νόημα οι παραστάσεις

ι) $\frac{\chi^2 + 5}{2\chi + 3}$ ιι) $\frac{2(\chi - 1)}{3\chi(2\chi + 5)(\chi - 7)}$ ιιι) $\frac{\frac{3}{\chi + 2}}{5 + \frac{3}{7\chi^2}}$ ιν) $\frac{2\chi^4 + 5\chi + 2}{12}$

6. Να βρείτε τους περιορισμούς για να έχουν νόημα οι παραστάσεις

ι) $\sqrt{3\chi + 13}$ ιι) $\sqrt{-5\chi - 7}$ ιιι) $\sqrt{-2\chi^2 - 7}$ ιν) $\sqrt{\chi + 3}$
 ν) $\sqrt{123\chi^2 + 2\chi - 1}$ νι) $\frac{2\chi + 11}{\sqrt{3\chi - 1}}.$

7. Να βρείτε τους περιορισμούς για να έχουν νόημα οι παραστάσεις

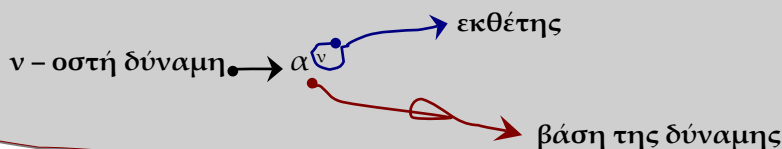
ι) $\frac{2}{\chi - 1}$ ιι) $\frac{2\chi + 1}{3\chi}$ ιιι) $\frac{2\chi + 1}{\frac{2\chi - 1}{\chi - 7}}.$
 $\frac{\chi - 1}{3\chi - 2}$ $\frac{\chi + 2}{\chi + 2}$ $\frac{\chi + 1}{\chi + 1}$

1.2 Δυνάμεις

Ορισμός 1

Δύναμη με βάση ρητό αριθμό α και εκθέτη φυσικό $n > 1$ λέγεται το γινόμενο που αποτελείται από n παράγοντες ίσους με τον α

$$\text{συμβολικά: } \alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ παράγοντες}}$$



Ιδιότητες των δυνάμεων

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$$

Γινόμενο δυνάμεων με ίδια βάση

$$\alpha^n : \alpha^m = \alpha^{n-m} \quad \alpha \neq 0, n-m > 1$$

Πηλίκο δυνάμεων με ίδια βάση

$$\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$$

Γινόμενο δυνάμεων με ίδιο εκθέτη

$$\alpha^n : \beta^n = (\alpha : \beta)^n, \beta \neq 0$$

Πηλίκο δυνάμεων με ίδια εκθέτη

$$(\alpha^n)^m = \alpha^{n \cdot m}$$

Δύναμη με βάση άλλη δύναμη

Για τις ανάγκες του λογισμού (δηλ των πράξεων με τις δυνάμεις)

Ορίζουμε $\alpha^1 = \alpha$ και αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$

Προσοχή στο 0^0 και στο 0^{-n} που δεν ορίζονται και στα α^1 , α^0 , α^{-n} που μοιάζουν με δυνάμεις αλλά δεν είναι γιατί δεν νοούνται γινόμενα με 1 ή 0 ή με -5 π.χ. παράγοντες.

Οι ιδιότητες των δυνάμεων καθώς και οι πιο πάνω ορισμοί ισχύουν και με έκθετες ακεραίες, με την προϋπόθεση όμως ότι έχουν νόημα ως παραστάσεις.

Παρατήρηση Είναι $1^n = 1$, $0^n = 0$ για κάθε n .

Παράδειγμα: Είναι $2^{-3} 2^9 2^{-2} = 2^{-3+9-2} = 2^4$, είναι $(-15)^1 = -15$,

$$(-123987876)^0 = 1, \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{1}{23456}\right)^0 = 1, \quad (0,0000000000325)^0 = 1$$

Στο γυμνάσιο επίσης μάθαμε και τα εξής: Θετικός αριθμός όταν υψωθεί σε οποιονδήποτε εκθέτη δίνει θετικό αποτέλεσμα ενώ όταν η βάση της δύναμης είναι αρνητική τότε σε άρτιο $(2k)$ εκθέτη δίνει θετικό αποτέλεσμα αλλά σε περιττό $(2k+1)$ εκθέτη δίνει αρνητικό αποτέλεσμα.

Παραδείγματα:

$$1. \quad (+3)^4 = 81, \quad 2^4 = 16, \quad 2^3 = 8, \quad (-3)^4 = +81, \quad (-4)^2 = 16, \quad (-5)^3 = -125, \quad (-2)^5 = -32.$$

Όμως $-3^4 = -81$, $-5^2 = -25$ διότι η βάση της δύναμης είναι το 3 ή το 5 και το $-$ που υπάρχει δηλώνει τον αντίθετο του 3^4 ή του 5^2 αντίστοιχα. Για τον ίδιο λόγο είναι $-11^1 = -11$, $-2^0 = -1$.

Δεν έχει σχέση το πρόσημο της βάσης με το πρόσημο του εκθέτη δηλ. $(-2)^{-3} \neq 2^3$ διότι

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8} \quad \text{ενώ } 2^3 = 8.$$

Ισχύει $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ π. χ. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, όμοια $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις και να γραφούν ως μια δύναμη με βάση ρητό

ι) $[(2^3 2^4)^5 2^{-5}]^2 : [2^{-1} 2^{-2} (2^0 2^3 2^{-11})^{-2} (-2)^4]^2$

ιι) $[8^3 \cdot 3^4 2^{-5}]^{11} : (6^5)^7$

Απάντηση: ι) Είναι $[(2^3 2^4)^5 2^{-5}]^2 = [(2^7)^5 2^{-5}]^2 = (2^{35} 2^{-5})^2 = (2^{30})^2 = 2^{60}$ και

$$[2^{-1} 2^{-2} (2^0 2^3 2^{-11})^{-2} (-2)^4]^2 = [2^{-3} (2^{-8})^{-2} 2^4]^2 = (2^{-3} 2^{16} 2^4)^2 = (2^{17})^2 = 2^{34} \text{ άρα}$$

$$[(2^3 2^4)^5 2^{-5}]^2 : [2^{-1} 2^{-2} (2^0 2^3 2^{-11})^{-2} (-2)^4]^2 = 2^{60} : 2^{34} = 2^{26}.$$

ιι) Είναι $[8^3 \cdot 3^4 2^{-5}]^{11} = [(2^3)^3 \cdot 3^4 2^{-5}]^{11} = [2^9 \cdot 3^4 2^{-5}]^{11} = [2^4 \cdot 3^4]^{11} = [(2 \cdot 3)^4]^{11} = [6^4]^{11} = 6^{44}$ και $(6^5)^7 = 6^{35}$ άρα

$$[8^3 \cdot 3^4 2^{-5}]^{11} : (6^5)^7 = 6^{44} : 6^{35} = 6^9.$$

3. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot 9 \cdot 2^{-2}$

Απάντηση: $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot 9 \cdot 2^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{27} \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

Άσκησης

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις και να καταλήξεις σε μια δύναμη με βάση ρητό

ι) $\left[(5^3 5^2)^2 5^{-5}\right]^4 : \left[(5^{-4} 5^{-3})^2 (5^{10} 5^3 5^{-13})^{2001} (-5)^4\right]^2$

ιι) $\left[(2^3 2^4)^5 2^{-5}\right]^2 : \left[(2^{-2} 2^4)^5 2^3\right]^3$

✓ Ταυτότητες

Τι είναι ταυτότητα στα μαθηματικά ; .

Ταυτότητα λέμε κάθε σχέση (ισότητας ή ανισότητας) ανάμεσα σε δύο παραστάσεις η οποία (σχέση) ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών που εμφανίζονται.

Παραδείγματα :

1) Η $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ είναι μια σχέση, που περιέχει δύο μεταβλητές, α , β και αληθεύει

για κάθε τιμή των α, β άρα είναι μια ταυτότητα .

2) Η $4\chi^2 + 9 = (2\chi - 3)^2 + 12\chi$ αποδεικνύεται ότι αληθεύει για κάθε τιμή του χ άρα είναι μια ταυτότητα .

3) Η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ θα αποδειχθεί αργότερα ότι είναι ταυτότητα

Δεν είναι ταυτότητα η ισότητα $2\chi + 3 = \chi + 2$ διότι αληθεύει μόνο όταν $\chi = -1$ γι αυτό λέγεται εξίσωση [«εκ της ισότητος» η τιμή - 1].

Δεν είναι λοιπόν όλες οι σχέσεις ταυτότητες, άρα αυτές που είναι χρειάζονται απόδειξη.

Απόδειξη είναι μια λογική διαδικασία, άρα δεν είναι μοναδική. Παρ' όλα αυτά στην πορεία του χρόνου έχουν **καθιερωθεί** μερικές τέτοιες διαδικασίες. Όλες έχουν ένα κοινό παρονομαστή : στηρίζονται σε πράξεις, σε διαδοχικές αντικαταστάσεις και σε χρήση άλλων ταυτοτήτων, «γνωστών» ήδη (δηλ. έχουν αποδειχθεί σε προηγούμενα κομμάτια ύλης) και σε τίποτε άλλο. Δεν υπάρχουν «εμπνεύσεις» σε καμία λογική διαδικασία . Διαφορετικά δεν θα ήταν λογική μια διαδικασία.

Οι πιο γνωστές «αποδείξεις» είναι οι εξής :

1. Ευθεία απόδειξη : Ξεκινάς από το 1^ο ή το 2^ο μέλος της σχέσης και με μικρά λογικά «βήματα» δηλ. μια αντικατάσταση του $(\alpha + \beta)^2$ με το $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή μια διαγραφεί δύο αντίθετων παραστάσεων π.χ. του -2χ και 2χ και γενικά με απλές πράξεις προσπαθείς να καταλήξεις στο άλλο μέλος.

Π.χ. **Να δείξεις ότι :** ι) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 ιι) $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$

Απόδειξη : ι) $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 ιι) $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

2. Έμμεση απόδειξη : Ξεκινάς με το ένα μέλος και προχωράς μέχρι ένα σημείο και κατόπιν κάνεις το ίδιο και με το άλλο μέλος «ελπίζοντας» να φτάσεις και στις δύο περιπτώσεις στο ίδιο σημείο

Π.χ. **Να δείξεις ότι :** ι) $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$
 ιι) $(\alpha^3 + \beta^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3 = (\alpha^3 - \beta^3)^2$

Απόδειξη : ι) $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ και
 $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ επειδή καταλήξαμε στο ίδιο είναι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$
 ιι) $(\alpha^3 + \beta^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3 = \alpha^6 + 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6 - 4\alpha^3\beta^3 = \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6$
 $(\alpha^3 - \beta^3)^2 = \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6$ άρα $(\alpha^3 + \beta^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3 = (\alpha^3 - \beta^3)^2$

3. Παραλλαγή της 1^{ης} : Δέχεσαι ότι η σχέση που σου ζητούν να αποδείξεις ισχύει και προσπαθείς να την μετασχηματίσεις σε μια πιο απλή η οποία ολοφάνερα ισχύει

Π.χ. **Να δείξεις ότι :** $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha \cdot \beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

Απόδειξη Έστω ότι ισχύει τότε $(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha \cdot \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0$ άρα
 $\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) = 0$ άρα $\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 - \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 - \beta^4 = 0$
 άρα $0 = 0$

4. Απαγωγή σε άτοπο : **Απάγω** = από + άγω, άγω = οδηγώ (κατευθύνω)
 κάποιον ή κάτι κάπου, πηγαίνοντας παράλληλα, **άτοπο** = α (στερητικό) + τόπος (στη λογική) δηλ κάτι που δεν «στέκει» λογικά. Πιο συγκεκριμένα η διαδικασία έχει ως εξής : πολλές φορές είναι

δύσκολο να αποδειχθεί κάτι με ευθεία απόδειξη ή δεν επαρκούν τα στοιχεία για μια τέτοια απόδειξη ενώ είναι πιο εύκολο να αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να ισχύει οτιδήποτε άλλο.

Λεχόμεστε λοιπόν (για τις ανάγκες του προβλήματος) προς στιγμήν ότι ισχύει το αντίθετο και κάνοντας λογικούς συλλογισμούς καταλήγουμε σε κάποιο συμπέρασμα που ολοφάνερα δεν «στέκει» και επειδή οι συλλογισμοί είναι σωστοί άρα το «λάθος» βρίσκεται στην παραδοχή που κάναμε, επομένως το σωστό είναι αυτό που δεν δεχτήκαμε.

Όλη η διαδικασία είναι σχετικά απλή το λεπτό σημείο βρίσκεται στο πιο είναι το αντίθετο μιας αλήθειας, μιας σχέσης κλπ Π. χ. Οι πιο πολλοί πιστεύουν ότι : το αντίθετο του άσπρου είναι το μαύρο κόντρα στην ίδια τη φύση που μας περιβάλλει με τα χιλιάδες χρώματα, πέρα από το γεγονός ότι ανάμεσα στο άσπρο και στο μαύρο υπάρχουν αρκετές διαβαθμίσεις του γκρι.

Τελικά πιο είναι το αντίθετο του άσπρου; το όχι άσπρο, το αντίθετο του «τώρα είναι μέρα» είναι το «τώρα είναι νύχτα» ; ΟΧΙ το αντίθετο είναι το «τώρα δεν είναι μέρα» δηλαδή μπορεί να είναι νύχτα ή μπορεί να είναι ξημέρωμα ή μπορεί να είναι σούρουπο .

Παραδείγματα :

1. Αν το τετράγωνο ενός αριθμού α είναι περιττός αριθμός τότε και ο αριθμός α είναι επίσης περιττός αριθμός (ενώ αν το α^2 είναι άρτιος τότε και α είναι άρτιος).

Απόδειξη Έστω ένας αριθμός α τέτοιος ώστε το α^2 να είναι περιττός, τότε $\alpha^2 = 2\lambda + 1$ (όλοι οι άρτιοι συμβολίζονται με 2λ και όλοι οι περιττοί με $2\lambda + 1$). Ας υποθέσουμε ότι ο α δεν είναι περιττός (για τις ανάγκες της απόδειξης υποθέτουμε το αντίθετο από αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε).

Έστω ότι ο α δεν είναι περιττός τότε θα είναι άρτιος άρα $\alpha = 2\lambda$ τότε $\alpha^2 = (2\lambda)^2$ άρα $\alpha^2 = 4\lambda^2$ άρα $\alpha^2 = 2(2\lambda^2) = 2\kappa$ άρα α^2 άρτιος. Αυτό είναι άτοπο. Κατέληξα σε άτοπο γιατί υπέθεσα λανθασμένα ότι ο α είναι άρτιος. Αφού το α είναι άρτιος είναι λάθος τότε το σωστό είναι ότι ο α είναι περιττός.

Η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι ένα καλό παράδειγμα εφαρμογής της απαγωγής σε άτοπο όπως και η επόμενη.

2. Να δειχθεί ότι οποιαδήποτε από τις 4 γνωστές πράξεις μεταξύ ενός ρητού και ενός άρρητου δίνει άρρητο αποτέλεσμα (δηλ. ο $q + \alpha$, και οι $q - \alpha$, $q \cdot \alpha$, $q : \alpha$, $\alpha : q$ είναι άρρητοι αριθμοί με την προϋπόθεση ότι $\alpha, q \neq 0$)

Απόδειξη Έστω οι αριθμοί q ρητός και α άρρητος θα δείξω ότι $q + \alpha =$ άρρητος.

Έστω ότι $q + \alpha = r_1$. Για τις ανάγκες της απόδειξης υποθέτω ότι r_1 ρητός, τότε από $\alpha + q = r_1 \Leftrightarrow \alpha = r_1 - q$. Όμως ο q είναι δεδομένο ότι είναι ρητός, αν είναι και ο r_1 ρητός τότε $r_1 - q$ ρητός άρα ο α είναι ρητός. Άτοπο διότι α άρρητος. Άρα ο $q + \alpha$ είναι άρρητος. Ομοια αποδεικνύονται και τα άλλα

3. Αν α, β άρρητοι τότε θα είναι και $\alpha \cdot \beta$ άρρητος για κάθε α, β ;

Οχι διότι π. χ. όταν $\alpha = \sqrt{3}$ άρρητος και $\beta = \sqrt{3}$ άρρητος και $\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ ρητός.

Όμοια αν $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = -\sqrt{3}$ τότε $\alpha + \beta = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ που είναι ρητός άρα δεν ισχύει πάντα το : άρρητος $\cdot$ άρρητος = άρρητος ή το άρρητος + άρρητος = άρρητος.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Όταν μια πρόταση όπως πιο πάνω περιέχει τη φράση «για κάθε» και εγώ θελώ να δείξω ότι δεν αληθεύει αρκεί να βρω ένα παράδειγμα στο οποίο να μην αληθεύει.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
4. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
5. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
6. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
8. $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$

Σημείωση : Για περισσότερες λεπτομέρειες, για παραδείγματα και για ασκήσεις στις ταυτότητες και στην παραγοντοποίηση δες το παράρτημα στο τέλος του βιβλίου

1.3 Εξίσωση $\alpha \cdot \chi = \beta$ (1^{ου} βαθμού)

➤ **Επίλυση εξίσωσης** είναι η διαδικασία για να βρεθεί η λύση ή οι λύσεις της, δηλαδή οι αριθμοί που επαληθεύουν την εξίσωση.

• Για την επίλυση μιας εξίσωσης 1^{ου} βαθμού ακολουθούμε 5 βήματα όπως στο παράδειγμα

Παράδειγμα

Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{2\chi-1}{3} + 3\chi - \frac{\chi}{4} = \frac{2-\chi}{6} - (\chi+1) + 3$ (1)

➤ **Βήμα 1^ο Απαλοιφή παρονομαστών :**

Βρίσκω το Ε. Κ. Π. όλων των παρονομαστών και πολ/ζω με αυτό όλους τους όρους της εξίσωσης κάνοντας στη συνέχεια της απλοποιήσεις δηλ οι παρονομαστές της (1) έχουν Ε. Κ. Π. το 12 άρα

$$(1) \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{2\chi-1}{3} + 12 \cdot 3\chi - 12 \cdot \frac{\chi}{4} = 12 \cdot \frac{2-\chi}{6} - 12(\chi+1) + 12 \cdot 3 \Leftrightarrow 4(2\chi-1) + 36\chi - 3\chi = 2(2-\chi) - 12(\chi+1) + 36$$

➤ **Βήμα 2^ο Απαλοιφή παρενθέσεων :**

$$4(2\chi-1) + 36\chi - 3\chi = 2(2-\chi) - 12(\chi+1) + 36 \Leftrightarrow 8\chi - 4 + 36\chi - 3\chi = 4 - 2\chi - 12\chi - 12 + 36$$

➤ **Βήμα 3^ο Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους :**

$$8\chi - 4 + 36\chi - 3\chi = 4 - 2\chi - 12\chi - 12 + 36 \Leftrightarrow 8\chi + 36\chi - 3\chi + 2\chi + 12\chi = 4 - 12 + 36 + 4$$

➤ **Βήμα 4^ο Αναγωγή όμοιων όρων :**

$$8\chi + 36\chi - 3\chi + 2\chi + 12\chi = 4 - 12 + 36 + 4 \Leftrightarrow 55 \cdot \chi = +32$$

➤ **Βήμα 5^ο Διαιρώ και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου :**

$$55 \cdot \chi = +32 \Leftrightarrow \frac{55\chi}{55} = \frac{+32}{55} \Leftrightarrow \chi = +\frac{32}{55} \text{ άρα λύση ο αριθμός } +\frac{32}{55}$$

● **Παρατήρηση 1** ➔ Δεν χρειάζονται και τα 5 βήματα σε κάθε εξίσωση, ανάλογα με την εξίσωση αρχίζω και από το κατάλληλο βήμα.

● **Παρατήρηση 2** ➔ Πάντα μετά το 4^ο βήμα η εξίσωση «έρχεται» στη μορφή $\alpha \cdot \chi = \beta$ αυτό είναι χρήσιμο να το θυμάσαι για τα επόμενα.

➤ Διερεύνηση εξίσωσης

Εκτός από τις εξισώσεις με συγκεκριμένους συντελεστές υπάρχουν και εξισώσεις των οποίων οι συντελεστές εξαρτώνται από παράμετρο (μεταβλητή) π. χ.

$$(\lambda - 2)\chi + 3\lambda = -3\lambda\chi + 7 \quad \text{ή} \quad 3(\lambda + 1)\chi = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \quad \text{ή} \quad \lambda^2\chi - \lambda\chi + 4 = \lambda^2 + 6\chi$$

Σ' αυτές τις περιπτώσεις όταν φτάσουμε στο 5^ο βήμα και πριν διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου, πρέπει να διερευνήσουμε τι συμβαίνει όταν αυτός ο συντελεστής (του αγνώστου) είναι διαφορετικός από το 0 και τι συμβαίνει όταν αυτός ο συντελεστής είναι 0.

Έστω λοιπόν η γενικής μορφής εξίσωση $\alpha \cdot \chi = \beta$ με α, β παραστάσεις παραμετρικές δηλαδή παραστάσεις που εξαρτώνται από κάποιο γράμμα – παράμετρο (διαφορετικό προφανώς από το γράμμα που παριστάνει τον άγνωστο).

Για να επιλύσουμε μια τέτοια (παραμετρική) εξίσωση πρέπει υποχρεωτικά να «δουλέψουμε» όπως στον **πίνακα 1** διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις :

1. $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha \cdot \chi = \beta \Leftrightarrow \chi = \frac{\beta}{\alpha}$ δηλαδή υπάρχει ακριβώς μια λύση η $\frac{\beta}{\alpha}$.

Η έκφραση «λύση είναι η $\chi = \frac{\beta}{\alpha}$ » είναι λάθος διότι η παράσταση $\chi = \frac{\beta}{\alpha}$ είναι εξίσωση.

2. $\alpha = 0$ τότε η $\alpha \cdot \chi = \beta$ γίνεται $0 \cdot \chi = \beta$ και διακρίνω δύο περιπτώσεις :

2.1 αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση $0 \cdot \chi = \beta \neq 0$ είναι **αδύνατη** [επειδή $0 \cdot \chi = 0$ πάντα]

2.2 αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $0 \cdot \chi = 0$ που είναι **ταυτότητα** (κάθε αριθμός χ είναι λύση της $0 \cdot \chi = 0$)

Πίνακας 1

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Παραδείγματα Εξισώσεων (μη παραμετρικών)

Να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$\text{ι)} \quad 3(2\chi - 3) - \chi = 5(3 + \chi) \quad \text{ιι)} \quad 4\chi - 9 + 3(\chi - 1) = 5\chi - 8 \quad \text{ιιι)} \quad \frac{3(\chi + 2) + 6}{3} = \chi + 4$$

Λύση

$$\text{ι)} \quad 3(2\chi - 3) - \chi = 5(3 + \chi) \Leftrightarrow 6\chi - 9 - \chi = 15 + 5\chi \Leftrightarrow 6\chi - \chi - 5\chi = 15 + 9 \Leftrightarrow 0 \cdot \chi = 24 \quad \text{αδύνατη}$$

$$\text{ii)} \quad 4x - 9 + 3(x-1) = 5x - 8 \Leftrightarrow 4x - 9 + 3x - 3 = 5x - 8 \Leftrightarrow 4x + 3x - 5x = -8 + 9 + 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ άρα } \text{μία λύση το } 2$$

$$\text{ii)} \quad \frac{3(x+2)+6}{3} = x+4 \Leftrightarrow 3 \frac{3(x+2)+6}{3} = 3x+3 \cdot 4 \Leftrightarrow 3(x+2)+6 = 3x+12 \Leftrightarrow 3x+6+6 = 3x+12 \Leftrightarrow \\ 3x-3x = 12-6-6 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ ταυτότητα}$$

@ Με βάση τέτοιες ταυτότητες όπως η εξίσωση (3) φτιάχνονται πολλά «παιχνίδια»:

Παράδειγμα : έχεις κατά νου την εξίσωση (3) $\frac{3(x+2)+6}{3} = x+4$ οπότε βάζεις τον συννομητή

σου να «φτιάξει» το 1° μέλος της εξίσωσης (στην πράξη) δηλ του λες : σκέψου έναν αριθμό (π χ την ηλικία σου, τον αριθμό του σπιτιού σου κλπ ή έναν αριθμό στην τύχη) , πρόσθεσε 2, ότι βρεις επί 3, πρόσθεσε και 6, διάβρεσε με το 3. Εκεί ολοκληρώθηκε το 1° μέλος . Ο αριθμός που θα σου πει ότι βρήκε μετά από αυτά θα είναι πάντα ο αριθμός που έβαλε (δηλ ο χ) αυξημένος κατά 4 άρα αν εσύ αφαιρέσεις το 4 έχεις βρει τον αριθμό που έβαλε (επειδή το 1° μέλος αποτελεί ταυτότητα με το 2°).

Άσκησης

1. Να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \quad \frac{3x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{3x-5}{2} - 3(x+1) + 1 \quad \text{ii)} \quad -2(x+1) + \frac{2}{3} - \frac{x}{4} = \frac{2-x}{6}$$

$$\text{iii)} \quad 3x + 7 - (9 - 7x) = -3x + 2 \quad \text{iv)} \quad 3x + 2 = -10 + 27x$$

2. Όμοια να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \quad 2,5\tau + 2,1 = (5\tau - 7) \quad \text{ii)} \quad \frac{3x-1}{2} - 2x - 1 = 3x + \frac{x}{2} + 2$$

$$\text{iii)} \quad \frac{5\psi}{3} + 2 \frac{\psi-1}{6} - 1 = \frac{\psi}{2} \quad \text{iv)} \quad \frac{2\tau+1}{3} - \tau = 3(\tau-2) + 1$$

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού παραμετρικές

Παραδείγματα

Εξισώσεων (παραμετρικών)

Να επιλυθούν οι εξισώσεις

$$\underline{1.} \quad -\lambda^2 + 5\lambda + 4x = -\lambda^2 x + 4\lambda x + 6$$

$$\underline{2.} \quad (\lambda - 1)x = 3\lambda + 2$$

$$\underline{3.} \quad (\lambda^2 + 4\lambda + 4)x = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$\underline{4.} \quad (\lambda^2 - 4)x = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$$\underline{5.} \quad \lambda^2 x - \lambda x + 4 = \lambda^2 + 6x$$

Απαντήσεις :

$$1. -\lambda^2 + 5\lambda + 4\chi = -\lambda^2 \chi + 4\lambda\chi + 6$$

Γενικά για την επίλυση μιας παραμετρικής εξίσωσης ακολουθώ τα εξής βήματα :

Βήμα 1° Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους $-\lambda^2 + 5\lambda + 4\chi = -\lambda^2 \chi + 4\lambda\chi + 6 \Leftrightarrow \lambda^2 \chi - 4\lambda\chi + 4\chi = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4\lambda + 4)\chi = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ (την φέρνω δηλ στην μορφή $\alpha\chi = \beta$)

Βήμα 2° Παραγοντοποιώ τα 2 μέλη και έχω $(\lambda - 2)^2 \chi = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$ (1) φέρνοντας την εξίσωση στη μορφή $\alpha \cdot \chi = \beta$

Βήμα 3° Στο πρόχειρό μου λύνω την $\alpha = 0$ δηλ εδώ την $(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Βήμα 4° Κάνω διερεύνηση ως εξής :

α) αν $\lambda \neq 2$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται $\chi = \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}{(\lambda - 2)^2} = \frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$ και έχει ως μοναδική λύση την

παράσταση $\frac{\lambda - 3}{\lambda - 2}$

β) αν $\lambda = 2$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = 0$ **ταυτότητα**

$$2. (\lambda - 1)\chi = 3\lambda + 2 \quad (1)$$

α) αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ τότε $(\lambda - 1)\chi = 3\lambda + 2 \Leftrightarrow \chi = \frac{3\lambda + 2}{\lambda - 1}$ άρα λύση η παράσταση $\frac{3\lambda + 2}{\lambda - 1}$

β) αν $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται $(1 - 1)\chi = 3 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow 0\chi = 5$ **αδύνατη**

$$3. (\lambda^2 + 4\lambda + 4)\chi = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \quad (1)$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 4)\chi = \lambda^2 + 5\lambda + 6 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 \chi = (\lambda + 2)(\lambda + 3) \quad (1)$$

[στο πρόχειρο λύνω την $(\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$]

α) αν $\lambda \neq -2$ τότε η (1) γίνεται $\chi = \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 3)}{(\lambda + 2)^2} = \frac{(\lambda + 3)}{(\lambda + 2)}$ **μοναδική λύση**

β) αν $\lambda = -2$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = 0$ **ταυτότητα**

$$4. (\lambda^2 - 4)\chi = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)\chi = (\lambda + 2)^2 \quad [\text{στο πρόχειρο λύνω την } (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2]$$

α) Αν $\lambda^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$

τότε η (1) γίνεται $\chi = \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{(\lambda + 2)}{(\lambda - 2)}$ και έχει τη μοναδική λύση $\frac{\lambda + 2}{\lambda - 2}$

β) αν $\lambda = 2$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = 16$ **αδύνατη**

γ) αν $\lambda = -2$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = 0$ **ταυτότητα**

$$5. \lambda^2 \chi - \lambda \chi + 4 = \lambda^2 + 6\chi \quad (1)$$

$$\lambda^2 \chi - \lambda \chi + 4 = \lambda^2 + 6\chi \Leftrightarrow \lambda^2 \chi - \lambda \chi - 6\chi = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - \lambda - 6)\chi = \lambda^2 - 4 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 3)\chi = (\lambda - 2)(\lambda + 2) \quad (1)$$

[πρόχειρο $(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ή $\lambda = 3$]

α) αν $\lambda \neq -2$ και $\lambda \neq 3$ τότε η (1) γίνεται $\chi = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}{(\lambda + 2)(\lambda - 3)} = \frac{(\lambda - 2)}{(\lambda - 3)}$ μοναδική λύση

β) αν $\lambda = -2$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = 0$ **ταυτότητα**

γ) αν $\lambda = 3$ τότε η (1) γίνεται $0\chi = (3 + 2)(3 - 2) = 5$ **αδύνατη**

Ασκήσεις

Να επιλυθούν οι παραμετρικές εξισώσεις

1. $(2\lambda + 5)\chi = 3 - 7\lambda - 1$
2. $(4\lambda^2 - 4\lambda + 1)\chi = 2\lambda^2 + \lambda - 1$
3. $(\lambda^2 - 9)\chi = \lambda^2 + 6\lambda + 9$
4. $\lambda^2 - 5\lambda + 4\chi = -\lambda^2\chi + 4\lambda\chi - 6$
5. $\lambda^2\chi + 8\lambda\chi - 6\lambda = \lambda^2 + 9 - 15\chi$
6. $\lambda^2\chi + 2\lambda\chi - 6\lambda = \lambda^2 + 9 + 15\chi$
7. $\mu^2(\chi - 1) - 2 = 3\mu + \chi$
8. $2(\lambda^2\chi - 1) = \lambda + 8\chi$
9. $(-3\lambda - 9)\chi = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$
10. $2(\mu - 1)(\chi - 1) - \mu(\chi - 2) = 2\mu + 3$
11. Δίνονται οι εξισώσεις : $(\kappa - 1)\chi + 3 = 3\kappa$ (1) και $\kappa(\chi + 2) = \chi + 1$ (2) .
να δείξετε ότι η (1) είναι ταυτότητα αν και μόνο εάν η (2) είναι αδύνατη
(δηλαδή για τις τιμές του κ για τις οποίες η (1) είναι ταυτότητα η (2) είναι
αδύνατη και αντίστροφα)
12. $\mu\chi - (\mu - 2)^2 = 2(\chi - 1) + \mu$
13. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες η κάθε εξίσωση από τις παρακάτω
είναι αδύνατη
i) $(2\lambda - 1)(\chi - 2) - 5 = (\lambda + 1)(\chi - 2) - 2\lambda$ ii) $4(\lambda + 1)^2\chi + 1 - 4\lambda^2 = (2\lambda + 1)^2 + 4\chi$
14. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η κάθε εξίσωση από τις παρακάτω
είναι ταυτότητα (αληθεύει για κάθε τιμή του χ)
i) $(2\lambda - 1)(\chi - 2) - 5 = (\lambda + 1)(\chi - 2) - 2\lambda$ ii) $4(\lambda + 1)^2\chi + 1 - 4\lambda^2 = (2\lambda + 1)^2 + 4\chi$

Εξισώσεις ειδικής μορφής

Υπάρχουν εξισώσεις οι οποίες έχουν μορφή η οποία δεν «ταιριάζει» με την μορφή της εξίσωσης 1^{ου} βαθμού.

Πολλές από αυτές, στο τέλος μετά από πράξεις οδηγούνται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού άλλες πάλι όχι.

Γενικά λοιπόν θα πρέπει να «μετασχηματίζουμε» μια εξίσωση (κάνοντας πράξεις) μέχρι του σημείου να μην γίνονται άλλες πράξεις. Τότε πια η εξίσωση θα έχει «πάρει» την τελική της μορφή.

Στο σημείο αυτό ανάλογα με την μορφή θα λύσεις την εξίσωση.

Πάντως να ξέρεις ότι οι περιπτώσεις που θα συναντήσεις **θα είναι γνωστές και λίγες.**

Δηλαδή ή θα καταλήγεις σε εξίσωση 1^{ου} βαθμού ή σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού ή θα χρειάζεται παραγοντοποίηση, άλλες περιπτώσεις δεν θα συναντήσεις.

Παραδείγματα :

Να επιλυθούν οι εξισώσεις (ειδικής μορφής)

- $2x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 5$
- $(x+1)(3x-1)(2x^2+4) = (x+1)(3x-1)(x^2+13)$
- $x^2 - 16 = 0$
- $4x^4 + 12x^3 + 9x^2 = 0$
- $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x-3)} = \frac{2}{x^2-9}$

Λύση

1. $2x^2 + 3x - 1 = x^2 - x - 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 - x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ (το $x^2 + 4x + 4$ είναι ανάπτυγμα) $\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

2. $(x+1)(3x-1)(2x^2+4) = (x+1)(3x-1)(x^2+13) \Leftrightarrow (x+1)(3x-1)(2x^2+4) - (x+1)(3x-1)(x^2+13) = 0$
 $(x+1)(3x-1)[(2x^2+4) - (x^2+13)] = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x-1)(2x^2+4-x^2-13) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x-1)(x^2-9) = 0$
 $\Leftrightarrow x+1=0$ ή $3x-1=0$ ή $x^2-9=0$ οπότε οι

λύσεις είναι ι) $x=1$ ιι) $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ και

ιιι) $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=3, x=-3$. Άρα λύσεις οι αριθμοί $1, \frac{1}{3}, 3, -3$

Παρατήρηση Εξισώσεις της μορφής $P(x) \cdot K(x) \cdot \dots \cdot \Pi(x) = 0$ επιλύονται με βάση την ιδιότητα $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ δηλαδή :

$P(x) \cdot K(x) \cdot \dots \cdot \Pi(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ ή $K(x) = 0 \dots$ ή $\Pi(x) = 0$.

Οπότε λύνω τις $P(x) = 0, K(x) = 0, \dots, \Pi(x) = 0$ προκειμένου να βρω τις λύσεις της $P(x) \cdot K(x) \cdot \dots \cdot \Pi(x) = 0$

3. $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \alpha) x-4=0$ ή $x+4=0$ τότε

$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ Άρα λύσεις οι αριθμοί -4 και 4

4. $4x^4 + 12x^3 + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^2 + 12x + 9) = 0 \Leftrightarrow$ ι) $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ή

ιι) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ είναι $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{12}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{2}$

Άρα λύσεις το 0 και το $-\frac{3}{2}$

5. $\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x-3)} = \frac{2}{x^2-9}$

Σε τέτοιες περιπτώσεις πολλαπλασιάζω με το Ε. Κ. Π. των παρονομαστών αφού όμως εξασφαλίσω ότι έχει νόημα η παράσταση δηλαδή $E. K. \Pi. \neq 0 \dots$ Δηλαδή

$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x-3)} = \frac{2}{x^2-9}$ επειδή $x^2-9 = (x-3)(x+3) \Leftrightarrow$ τότε Ε. Κ. Π. =

$2(x-3)(x+3)$ πρέπει $(x-3)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -3$ τότε έχω

$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x-3)} = \frac{2}{x^2-9} \Leftrightarrow 2(x-3)(x+3) \cdot \frac{5}{x+3} + 2(x-3)(x+3) \cdot \frac{3}{2(x-3)} = 2(x-3)(x+3) \cdot \frac{2}{x^2-9} \Leftrightarrow$

$2(x-3)5 + (x+3)3 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 10x - 30 + 3x + 9 - 4 = 0 \Leftrightarrow 13x - 25 = 0 \Leftrightarrow 13x = 25 \Leftrightarrow \frac{13x}{13} = \frac{25}{13} \Leftrightarrow x = \frac{25}{13}$.

Ασκήσεις

Να επιλυθούν οι εξισώσεις

1. $3x^2 + 4x - 1 = 2x^2 - 2x$
2. $(x + 3)(2x - 3)(2x^2 + 4) = (x + 3)(2x - 3)(x^2 + 13)$
3. $4x^2 - 36 = 0$
4. $9x^4 + 12x^3 + 4x^2 = 0$
5. $\frac{3}{x+2} - \frac{7}{4(x-2)} = \frac{-3}{x^2-9}$
6. $x^2(x-5) - 6x(x-5) + 9(x-5) = 0$
7. $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1}$
8. $\frac{x^2}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$
9. $\frac{2}{4-x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3x-6}{x^2-5x+4} = 0$
10. $(x+2)^2(x-2) - 2(x+2)(2-x) = 2-x$
11. $(x^2-16)(3x-1) = (x+4)(3x-1)^2$

Προβλήματα που επιλύονται με εξισώσεις

Υπάρχουν πολλά προβλήματα που η επίλυσή τους με βάση την πρακτική αριθμητική είναι δύσκολη έως ακατόρθωτη.

Τέτοια προβλήματα συναντάμε καθημερινά στην Φυσική, στη Χημεία, στα Μαθηματικά αλλά και στην καθημερινή ζωή.

Καλό είναι λοιπόν να ασχοληθείς προσεκτικά με τα παραδείγματα και τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Υπάρχει ένας συγκεκριμένος «βηματισμός» τον οποίο πρέπει γενικά να ακολουθείς.

Θυμήσου ότι θα ασχοληθούμε ξανά (και εκτενέστερα) όταν θα φθάσουμε στα συστήματα.



ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να «λύσεις» ένα πρόβλημα πρέπει να το κατανοήσεις καλά, για το λόγο αυτό πρέπει να το διαβάσεις 1 – 2 φορές σωστά έτσι ώστε να έχεις κατά νου την σειρά των «γεγονότων».

Κατόπιν αποφασίζεις και «ονομάζεις» τον άγνωστο [αποδίδοντάς του μια μεταβλητή όπως x , ψ , t , v (αν πρόκειται για άσκηση φυσικής, χημείας βάζεις το κατάλληλο γράμμα π χ αν πρόκειται για ταχύτητα το v , αν για έργο το W κ λ π)].

Στη συνέχεια μεταφράζεις (στη κυριολεξία) τα λόγια με σύμβολα προσπαθώντας να κατασκευάσεις την εξίσωση

Υπ' όψιν τα εξής :

Όταν διαβάζεις	θα βάζεις
Τουλάχιστον	$\geq$
Το πολύ	$\leq$
Περισσότερο από	$>$
Λιγότερο από	$<$
Αυξημένο	$+$
Ελαττωμένο	$-$

Παραδείγματα :

1. Κάποιοι σ' ένα bar παράγγειλαν 1 ποτό και 3 coca kola και πλήρωσαν 10 €. Αν το ποτό στοιχίζει όσο 2 coca kola να βρεις πόσο στοιχίζει το κάθε ένα.

Απάντηση

Έστω x € στοιχίζει η coca kola, τότε $2 \cdot x$ στοιχίζει το ποτό.

Άρα $2x + 3x = 10$ €. Από εδώ και πέρα όλα είναι θέμα επίλυσης της εξίσωσης δηλ $2x + 3x = 10$

$\Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{5} = 2$ €. Άρα 2 € η coca kola και $2 \cdot 2 = 4$ € το ποτό.

2. Σε ένα διαγώνισμα 10 ερωτήσεων κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 7 μονάδες, ενώ για τις λάθος απαντήσεις όπως και για αυτές που λείπουν αφαιρείται 1 βαθμός. Αν ένας μαθητής «μάζεψε» 46 βαθμούς σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λάθος ή δεν απάντησε καθόλου ;

Απάντηση

Έστω ότι ο μαθητής απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε ή απάντησε λάθος σε $10 - x$. Άρα $7 \cdot x$ βαθμούς για τις σωστές και $1 \cdot (10 - x)$ οι βαθμοί που

πρέπει να αφαιρεθούν. Άρα ισχύει η εξίσωση $7x - 1 \cdot (10 - x) = 46 \Leftrightarrow 7x - 10 + x = 46$

$\Leftrightarrow 8x = 46 + 10 = 56 \Leftrightarrow 8x = 56 \Leftrightarrow x = \frac{56}{8} = 7$. Άρα απάντησε σωστά σε 7 ερωτήσεις και κατ'

επέκταση δεν απάντησε καθόλου ή απάντησε λάθος σε 3.

Από τα πιο γνωστά προβλήματα Χημείας που «λύνονται» με απλές εξισώσεις (ή με σύστημα) είναι τα προβλήματα με μίγματα – διαλύματα – κράματα και τις περιεκτικότητές τους.

Οι περιεκτικότητες μπορεί να είναι κατά βάρος ή κατ' όγκο, αυτό δεν έχει σημασία.

Να σημειωθεί ότι σε τέτοιες περιπτώσεις η εξίσωση είναι δεδομένη π x αν $p_1\%$, $p_2\%$, και $p\%$ οι περιεκτικότητες των διαλυμάτων **A**, **B**, και του τελικού διαλύματος αντίστοιχα και **V**₁, **V**₂, **V** οι

όγκοι τους τότε ισχύει η εξίσωση $\frac{p_1}{100} V_1 + \frac{p_2}{100} V_2 = \frac{p}{100} V \Leftrightarrow 100 \frac{p_1}{100} V_1 + 100 \frac{p_2}{100} V_2 = 100 \frac{p}{100} V \Leftrightarrow$

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = pV \quad (1)$$

● **Παρατήρηση 1** → Στην (1) υπάρχουν 6 μεταβλητές, σ' ένα πρόβλημα δίνονται συνήθως οι 5 και ζητείτε να βρεθεί η 6^η (πολλές φορές δίνονται 4 αντί για 5, εννοείται ότι ο **V** δηλ. ο όγκος του τελικού διαλύματος είναι **V = V₁ + V₂**)

● **Παρατήρηση 2** → Τα ίδια κατ' αναλογία ισχύουν και για μίγματα, κράματα, όπως επίσης όταν οι περιεκτικότητες είναι κατά βάρος.

● **Παρατήρηση 3** ➔ Για να «φτιάξει» κανείς ένα πρόβλημα αρκεί να δώσει τιμές στα p_1, V_1, p_2, V_2 και να υπολογίσει το $V = V_1 + V_2$ και το p από την $p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 = p \cdot V$ στη συνέχεια κρύβεις όποιο θες από τα p_1, V_1, p_2, V_2, p, V και έφτιαξε το πρόβλημα

Παράδειγμα : $p_1 = 35 \%$, $V_1 = 300 \text{ ml}$, $p_2 = 45 \%$, $V_2 = 700 \text{ ml}$, τότε $V = 300 + 700 = 1.000 \text{ ml}$ και $35 \cdot 300 + 45 \cdot 700 = p \cdot 1.000 \Leftrightarrow 1.000 \cdot p = 10500 + 31.500 \Leftrightarrow 1.000 \cdot p = 42.000 \Leftrightarrow p = 42 \%$ (περιεκτικότητα το τελικό διάλυμα) κρύβω το p_2 και ιδού το :

3. Πρόβλημα : Τι περιεκτικότητα πρέπει να έχει ένα διάλυμα 700 ml ώστε αν ανακατευτεί με διάλυμα 300 ml περιεκτικότητας 35 % να δώσει διάλυμα περιεκτικότητας 42 %

Απάντηση : έστω p η περιεκτικότητα τότε $V = 300 + 700 \text{ ml} = 1.000 \text{ ml}$ και $35 \cdot 300 + p \cdot 700 = 42 \cdot 1.000 \Leftrightarrow 700 \cdot p = 31.500 - 10500 \Leftrightarrow 700 \cdot p = 21.500 \Leftrightarrow p = 45 \%$

4. Πρόβλημα : Αγόρασε κάποιος ένα προϊόν αξίας 300 € με έκπτωση 35 % . Τι έκπτωση πρέπει να πετύχει για ένα άλλο αξίας 700 € ώστε να έχει στο σύνολο έκπτωση 42 %

Απάντηση : Ακριβώς η ίδια λύση με το προηγούμενο (άρα 45 %).

Δηλαδή αν x η έκπτωση για το 2^ο προϊόν τότε πρέπει $300 \cdot 35 + 700 \cdot x = 1000 \cdot 42$ (1) αφού θα πλήρωνε και για τα δύο 1000 € χωρίς έκπτωση. Η (1) όταν λυθεί δίνει $x = 45\%$

Όπως βλέπεις δεν είναι τυχαίο ότι δεν αναφέρεται το είδος του διαλύματος (κράματος ή μίγματος) ή του προϊόντος γιατί ακριβώς δεν «παίζει» κανένα ρόλο. Οπότε μπορείς να φτιάξεις εκατομμύρια (στην κυριολεξία) τέτοια προβλήματα αλλάζοντας το διάλυμα το μίγμα ή το προϊόν η αλλάζοντας απλώς τα νούμερα !!!!

5. Πρόβλημα : Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 6 ώρες, μία άλλη σε 8 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν «τρέχουν» και οι δύο μαζί αλλά η πρώτη αρχίσει 1 ώρα αργότερα ;

Απάντηση : Έστω ότι η πρώτη βρύση λειτουργεί x ώρες τότε η δεύτερη θα λειτουργήσει $x + 1$ ώρες.

Η 1^η σε 1 ώρα γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής άρα σε x ώρες γεμίζει τα $\frac{x}{6}$ και η 2^η σε 1 ώρα γεμίζει το $\frac{1}{8}$ της δεξαμενής άρα σε $x + 1$ ώρες γεμίζει τα $\frac{x+1}{8}$.

Τότε $\frac{x}{6} + \frac{x+1}{8} = 1 \Leftrightarrow 24 \frac{x}{6} + 24 \frac{x+1}{8} = 24 \cdot 1 \Leftrightarrow 4x + 3(x+1) = 24 \Leftrightarrow 4x + 3x + 3 = 24 \Leftrightarrow 7x = 24 - 3 \Leftrightarrow 7x = 21 \Leftrightarrow x = 3$

Δηλαδή η 1^η βρύση θα «τρέχει» 3 ώρες οπότε η 2^η θα «τρέχει» $3 + 1 = 4$ ώρες άρα και οι δύο μαζί θα **χρειαστούν** 4 ώρες .

6. Πρόβλημα : Δύο «μηχανόβιοι» ξεκινούν από τις πόλεις Α, Β με σκοπό να συναντηθούν κάπου ενδιάμεσα. Ο πρώτος για την διαδρομή Α Β «θέλει» 6 ώρες ενώ ο δεύτερος «θέλει» 8 ώρες (προφανώς ο 2^{ος} έχει λιγότερα «γκάζια»). Σε πόσες ώρες θα συναντηθούν αν ο πρώτος ξεκίνησε στις 8 π.μ. και ο δεύτερος στις 7 π. μ. και τι ώρα θα είναι ;

Απάντηση : Η εξίσωση είναι ακριβώς ίδια με την προηγούμενη δηλαδή : Αν ο 1^{ος} κινείται x ώρες ο 2^{ος} θα κινείται $x + 1$ ώρες (γιατί ξεκίνησε 1 ώρα νωρίτερα). Αφού ο 1^{ος} καλύπτει τη διαδρομή σε 6 ώρες τότε σε 1 ώρα διανύει το $\frac{1}{6}$ της διαδρομής άρα σε x ώρες καλύπτει τα $\frac{x}{6}$ της διαδρομής και

αντίστοιχα ο 2^{ος} καλύπτει τη διαδρομή σε 8 ώρες τότε σε 1 ώρα διανύει το $\frac{1}{8}$ της διαδρομής άρα σε

$x+1$ ώρες καλύπτει τα $\frac{x+1}{8}$ της διαδρομής .

Τότε $\frac{x}{6} + \frac{x+1}{8} = 1 \Leftrightarrow 24 \frac{x}{6} + 24 \frac{x+1}{8} = 24 \cdot 1 \Leftrightarrow 4x + 3(x+1) = 24 \Leftrightarrow 4x + 3x + 3 = 24$ άρα $7x = 24 - 3$

$\Leftrightarrow 7x = 21 \Leftrightarrow x = 3$ ώρες και επειδή x είναι οι ώρες που κινείται ο πρώτος άρα ο 2^{ος} θα κινείται για $3 + 1 = 4$ ώρες

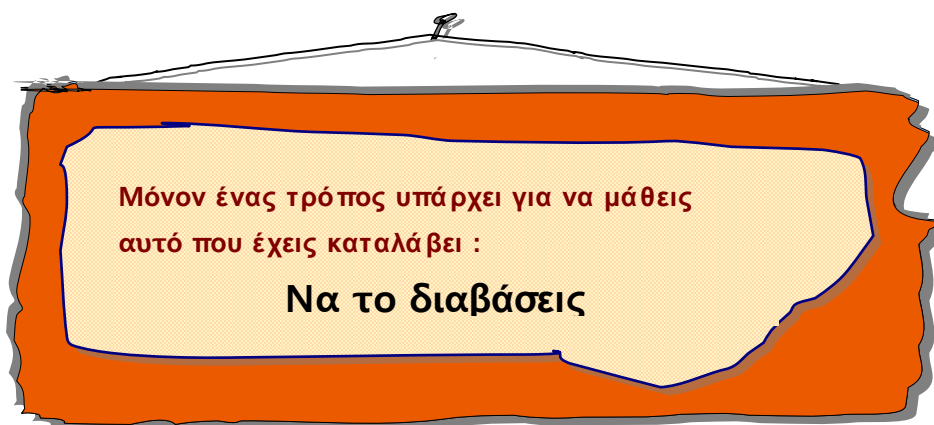
Δηλαδή θα συναντηθούν σε 3 ώρες από την εκκίνηση του 1^{ου} και σε 4 ώρες από την εκκίνηση του 2^{ου} δηλαδή στις 11 π. μ. ($8 + 3 = 11 = 7 + 4$)

[όπως βλέπεις και εδώ ταιριάζουν πολλά προβλήματα ειδικά «κίνησης»].

Ασκήσεις

1. Αν τα 2 λίτρα coca – cola στοιχίζει όσο 4 «τενεκεδάκια», να βρείτε πόσο στοιχίζει το καθένα ξέροντας ότι κάποιος που αγόρασε 2 λίτρα και 5 «τενεκεδάκια» πλήρωσε 7,65 €
2. Σε μια εκδήλωση βρίσκονται γονείς και παιδιά και οι γονείς είναι κατά πέντε λιγότεροι από τα παιδιά. Το εισιτήριο των παιδιών είναι τα δύο τρίτα από αυτό των γονιών και το σύνολο που πλήρωσαν είναι 175 €. Να βρείτε πόσα παιδιά και πόσοι γονείς ήταν στην εκδήλωση αν το εισιτήριο των παιδιών είναι 10 €.
3. Να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός που έχει άθροισμα ψηφίων 9 και αν αλλάξω την σειρά στα ψηφία του προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 45
4. Ένας διψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 8 και αν αλλάξω την σειρά στα ψηφία προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 18 . Να βρεθεί ο αριθμός
5. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 4 h και μια άλλη που βρίσκεται στον πυθμένα της την αδειάζει σε 12 h. Αν ανοίξω ταυτόχρονα και τις δύο, σε πόση ώρα θα γεμίσει η δεξαμενή.
6. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 15 h και μια άλλη που βρίσκεται στον πυθμένα της την αδειάζει σε 17 h. Αν ανοίξω ταυτόχρονα και τις δύο, σε πόση ώρα θα γεμίσει η δεξαμενή.
7. Μια εταιρεία προσέλαβε κάποιον ως οικονομικό διευθυντή με την συμφωνία ότι σε ένα χρόνο θα εισπράξει 18.000 € και ένα αυτοκίνητο. Μετά από δέκα μήνες ο διευθυντής απολύθηκε και εισέπραξε για το διάστημα των δέκα μηνών 15.000€ και το αυτοκίνητο. Να βρείτε την αξία του αυτοκινήτου.
8. Ανέμειξα ένα διάλυμα 500 ml περιεκτικότητας 45 % με ένα διάλυμα 700 ml περιεκτικότητας 31 %. Τι διάλυμα έφτιαξα (δηλ ποιας περιεκτικότητας, όγκου).
9. Αν αναμείξω 600 ml διαλύματος με περιεκτικότητα 32 % με 700 ml διαλύματος άγνωστης περιεκτικότητας, προκύπτει διάλυμα περιεκτικότητας 36 % . Να βρεθεί η περιεκτικότητα του 2^{ου} διαλύματος.
10. Αγόρασε κάποιος ένα ζευγάρι παπούτσια με έκπτωση 25 % και πλήρωσε 45 € να βρεις πόσο στοιχίζουν τα παπούτσια χωρίς την έκπτωση .
11. Πλήρωσε κάποιος ένα εξάρτημα αυτοκινήτου 413 € . Αν ο Φ Π Α είναι 18 % να βρεις πόσο στοιχίζει χωρίς το Φ Π Α .

12. Να βρεις τρεις διαδοχικούς ακεραίους όταν ξέρεις ότι ο μεσαίους ισούται με το άθροισμα των ακραίων . [Υπόδειξη οι διαδοχικοί ακέραιοι συμβολίζονται συνήθως με $k, k+1, k+2$]
13. Να αποδείξετε ότι για τρεις οποιουδήποτε διαδοχικούς ακεραίους ισχύει πάντα ότι : το διπλάσιο του μεσαίου ισούται με το άθροισμα των ακραίων .
[υπόδειξη οι διαδοχικοί ακέραιοι συμβολίζονται συνήθως με $k, k+1, k+2$]
14. Κάποιος κάποτε μου ζήτησε να του λύσω ένα πρόβλημα που όμως το ξέχασα. Το πρόβλημα ήταν να βρω πέντε διαδοχικούς ακεραίους με άθροισμα 458 ή 485 ή 548 ή 584 ή 854 ή 845 δεν θυμάμαι ακριβώς πάντως ο ένας ήταν τέλειο τετράγωνο, μήπως μπορείτε να λύσετε εσείς το πρόβλημα για μένα ;
[υπόδειξη οι διαδοχικοί ακέραιοι συμβολίζονται συνήθως με $k, k+1, k+2$ κλπ]



1.4 Διάταξη πραγματικών αριθμών – ανισότητες

Πως συγκρίνουμε δύο αριθμούς

Συγκρίνουμε 2 αριθμούς α, β «μελετώντας» το πρόσημο της διαφοράς τους .

Παρατήρηση : Η διαφορά δύο αριθμών είναι ένας αριθμός και επομένως για αυτόν μπορεί να συμβαίνουν 3 πράγματα : θετικός αριθμός , αρνητικός αριθμός ή 0 .

Ορισμός : Θα λέμε ότι :

1. $\alpha > \beta$ όταν και μόνον όταν $\alpha - \beta$ είναι Θετικός
2. $\alpha < \beta$ όταν και μόνον όταν $\alpha - \beta$ είναι Αρνητικός
3. $\alpha = \beta$ όταν και μόνον όταν $\alpha - \beta$ είναι Μηδέν

Άμεση συνέπεια είναι «κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από το 0»

Συμβολικά α θετικός τότε $\alpha > 0$. Πράγματι έστω α θετικός τότε $\alpha - 0 = \alpha$, αφού α θετικός άρα είναι και ο $\alpha - 0$ θετικός οπότε σύμφωνα με τον ορισμό (αν $\alpha - \beta$ θετικός άρα $\alpha > \beta$) θα είναι $\alpha > 0$. Όμοια αν α είναι αρνητικός τότε $\alpha - 0 = \alpha$ άρα ο $\alpha - 0$ είναι αρνητικός άρα $\alpha < 0$.

Ισχύουν οι εξής (σημαντικές) ιδιότητες :

1. $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ άρα $\alpha + \beta > 0$
2. $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ άρα $\alpha + \beta < 0$
3. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0, \frac{\alpha}{\beta} > 0$
4. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$
5. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό
6. $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ άρα $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
7. $\alpha > \beta$ άρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Μπορώ να προσθέτω ή να αφαιρώ και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό

8. $\alpha > \beta$
 - $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
 - $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Προσοχή όταν πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με ένα θετικό αριθμό η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν πολλαπλασιάζω με αρνητικό αλλάζει η φορά

9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{P}$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

10. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί και

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

Προσοχή μπορώ να προσθέτω ανισότητες κατά μέλη μόνο όταν είναι ομοιόστροφες ανισότητες και δεν αλλάζει η φορά

Προσοχή μπορώ να πολλαπλασιάζω ανισότητες κατά μέλη μόνο όταν είναι ομοιόστροφες ανισότητες θετικών αριθμών χωρίς να αλλάζει η φορά της ανισότητας

11. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αρνητικοί και

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$$

Προσοχή όταν πολλαπλασιάζω κατά μέλη ομοιόστροφες ανισότητες αρνητικών αριθμών ή παραστάσεων αλλάζει η φορά της ανισότητας

12. ι) α, β θετικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$

$$\text{ιι) } \alpha, \beta \text{ θετικοί αριθμοί τότε } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$$

Απόδειξη: ι) Έστω $\alpha = \beta$ τότε $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \cdot \alpha}_{n \text{ παράγοντες}} = \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \dots \cdot \beta}_{n \text{ παράγοντες}} = \beta^n \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$
αντικαθιστώ το α με β

ιι) Έστω $\alpha > \beta > 0$ τότε οι ανισότητες $\alpha > \beta, \alpha > \beta, \dots, \alpha > \beta$ είναι n ίδιες ανισότητες θετικών τις οποίες αν πολλαπλασιάσω κατά μέλη έχω $\alpha^n > \beta^n$

ι) **Αντίστροφο:** Έστω ότι είναι $\alpha^n = \beta^n$ τότε θα είναι και $\alpha = \beta$ διότι αν υποθέσουμε ότι είναι

$\alpha \neq \beta$ τότε θα είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha < \beta$. Όμως αν είναι π.χ. $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^n < \beta^n$ (από το ευθύ) που είναι **άτοπο** διότι είναι $\alpha^n = \beta^n$ (όμοια $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^n > \beta^n$, **άτοπο**)

ii) Αντίστροφο: Έστω $\alpha^n > \beta^n$ τότε θα είναι $\alpha > \beta$ διότι αν ήταν $\alpha = \beta$ τότε από το ευθύ της 1 θα έπρεπε να είναι και $\alpha^n = \beta^n$ **άτοπο**, όμοια αν είναι $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^n < \beta^n$

Πως αποδεικνύουμε μια ανισότητα

Μια ανισότητα της μορφής **$A > B$** (ή **$A < B$**) την αποδεικνύω κυρίως με τους εξής τρόπους :

1ος τρόπος: Δέχομαι ότι ισχύει αυτό που θέλω να αποδείξω και κάνω πράξεις. Δηλαδή ξεκινάω από το **$A - B > 0$** (αντίστοιχα από το **$A - B < 0$**) και κάνω πράξεις ελπίζοντας ότι θα καταλήξω σε μια προφανή ανισότητα. Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται κυρίως στις ταυτότητες με ανισότητα.

Παράδειγμα: Αν $0 < \alpha \leq \beta < 1$ τότε να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq \beta + \frac{1}{\beta}$. (1)

Λύση: Έστω ότι ισχύει η σχέση $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq \beta + \frac{1}{\beta}$ (1). (Κάνω απαλοιφή παρονομαστών και έχω)

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq \beta + \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \geq \alpha \cdot \beta \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \quad (2) \quad (\text{επειδή } \alpha \cdot \beta \text{ θετικός αφού } 0 < \alpha \leq \beta < 1) \text{ άρα } (2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 \cdot \beta + \beta \geq \alpha \cdot \beta^2 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 \cdot \beta + \beta - \alpha \cdot \beta^2 - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha \cdot \beta - 1) \geq 0.$$

$$\text{Όμως } 0 < \alpha \leq \beta < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta \leq 0 \text{ και} \\ (\alpha < 1, \beta < 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta \leq 0 \text{ και} \\ \alpha \cdot \beta < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta \leq 0 \text{ και} \\ \alpha \cdot \beta - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \cdot (\alpha \cdot \beta - 1) \geq 0$$

2ος τρόπος: Για να αποδείξω μια ανισότητα της μορφής **$A > B$** (ή **$A < B$**) σχηματίζω την διαφορά **$A - B$** (ή **$A - B$** αντίστοιχα) και προσπαθώ στη συνέχεια να παραγοντοποιήσω την παράσταση για να μπορέσω στη συνέχεια να εξετάσω το πρόσημο της (της $A - B$). Τότε ανάλογα με το πρόσημο και χρησιμοποιώντας τον ορισμό βγάζω τα συμπεράσματά μου για την ανισότητα.

Παράδειγμα: Αν $\alpha > \beta$ και α, β θετικοί τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Λύση: Έστω $\alpha > \beta$, και α, β θετικοί θα δείξω ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Δημιουργώ την διαφορά $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} =$

$$\frac{\beta}{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}. \text{ Από } \alpha > \beta \text{ έχω } \beta - \alpha < 0 \text{ (1)}. \text{ Επειδή } \alpha, \beta \text{ θετικοί έχω } \alpha \cdot \beta > 0 \text{ (2)}. \text{ Από (1) και (2)}$$

$$\text{έχω } \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} < 0 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

3ος τρόπος: (εφαρμόζεται κυρίως σε ασκήσεις της μορφής ναδειχθεί η σχέση ...) Ξεκινάω από την ή τις βασικές ανισότητες (που μου δίνει) και με ευθεία κίνηση (προσθέτοντας, αφαιρώντας και γενικά κάνοντας πράξεις με όποιον τρόπο επιτρέπεται) προσπαθώ να σχηματίσω τις παραστάσεις που χρειάζομαι και στα δύο μέλη.

Παράδειγμα : Αν $-3 \leq \chi \leq -1$ και $0 \leq \psi \leq 1$ τότε να δείξετε ότι $-11 \leq 3\chi - 2\psi \leq -3$

$$\text{Λύση: } \begin{cases} -3 \leq \chi \leq -1 \\ 0 \leq \psi \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq 3\chi \leq -3 \\ 0 \geq -2\psi \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq 3\chi \leq -3 \\ -2 \leq -2\psi \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 - 2 \leq 3\chi - 2\psi \leq -3 + 0 \Leftrightarrow -11 \leq 3\chi - 2\psi \leq -3$$

Παραδείγματα :

Να γίνουν οι αποδείξεις των πιο κάτω των ανισοτήτων

1. $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ άρα $\alpha + \beta > 0$
2. $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ άρα $\alpha + \beta < 0$
3. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0, \frac{\alpha}{\beta} > 0$
4. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$

Απόδειξη : Από τον ορισμό των πράξεων, π χ για να προσθέσω ομόσημους βάζω στο αποτέλεσμα το κοινό τους πρόσημο (άρα ισχύουν οι 1 και 2). Όμοια οι 3 και 4 ισχύουν από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού.

5. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{P}$

Λύση : Ο α και α είναι ομόσημοι άρα $\alpha \cdot \alpha > 0$ άρα $\alpha^2 > 0$, αν $\alpha = 0$ τότε $\alpha^2 = 0$ γενικά λοιπόν $\alpha^2 \geq 0$

6. $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ άρα $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

Λύση : $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\beta - \gamma > 0$ (ιδιότητα 1) $\Leftrightarrow \alpha - \beta + \beta - \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha - \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha > \gamma$

7. $\alpha > \beta$ άρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Λύση : Αρκεί να δείξω με βάση τον ορισμό ότι η διαφορά τους είναι θετική έχω $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta > 0$ που ισχύει αφού $\alpha > \beta$.

8. $\alpha > \beta$ $\begin{cases} \gamma > 0 & \text{τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma \\ \gamma < 0 & \text{τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \end{cases}$

Λύση : ι) Έστω $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta) > 0$ επειδή $\alpha - \beta > 0$ (αφού $\alpha > \beta$), $\gamma > 0$.

Τελικά $\alpha\gamma - \beta\gamma > 0$ άρα $\alpha\gamma > \beta\gamma$

ιι) Έστω $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta) < 0$ επειδή $\alpha - \beta > 0$, $\gamma < 0$

Τελικά $\alpha\gamma - \beta\gamma < 0$ άρα $\alpha\gamma < \beta\gamma$

9. $\left. \begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

Λύση : Από $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$ (1) και $\gamma > \delta \Leftrightarrow \beta + \gamma > \beta + \delta$ (2) οπότε από (1) και (2) λόγω μεταβατικής ιδιότητας έχω $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

10. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί και $\left. \begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Λύση : $\alpha > \beta, \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ (1) και $\gamma > \delta, \beta > 0 \Leftrightarrow \beta\gamma > \beta\delta$ (2) οπότε από (1) και (2) λόγω μεταβατικής ιδιότητας έχω $\alpha\gamma > \beta\delta$.

$$11. \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ αρνητικοί και } \left. \begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$$

Λύση : Ανάλογη με την προηγούμενη

$$12. \text{ Αν } \alpha > \beta \text{ και } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

1^{ος} τρόπος

Απόδειξη: (Ευθύ) Έστω $\alpha > \beta$, και α, β ομόσημοι θα δείξω ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Δημιουργώ την διαφορά

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}. \text{ Από } \alpha > \beta \text{ έχω } \beta - \alpha < 0 \text{ (1)}. \text{ Επειδή } \alpha, \beta \text{ ομόσημοι έχω } \alpha \cdot \beta > 0 \text{ (2)}.$$

$$\text{Από (1) και (2) έχω } \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} < 0 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$$

Αντίστροφο Έστω $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ και α, β ομόσημοι θα δείξω ότι $\alpha > \beta$. Δημιουργώ την διαφορά $\alpha - \beta$.

$$\text{Τότε } \alpha - \beta = \alpha\beta \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha\beta} \right) = \alpha\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) > 0.$$

Επειδή α, β ομόσημοι οπότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} > 0$ γιατί $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Άρα $\alpha - \beta > 0$ άρα $\alpha > \beta$

2^{ος} τρόπος

Απόδειξη: (Ευθύ) Έστω $\alpha > \beta$, και α, β ομόσημοι θα δείξω ότι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

Είναι α, β ομόσημοι άρα $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε από $\alpha > \beta$ έχω $\frac{\alpha}{\alpha\beta} > \frac{\beta}{\alpha\beta}$, τότε $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

Αντίστροφο Έστω $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ και α, β ομόσημοι θα δείξω ότι $\alpha > \beta$. Είναι α, β ομόσημοι οπότε

$$\alpha \cdot \beta > 0. \text{ Από } \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} \text{ έχω } \alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha} < \alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta} \text{ άρα } \beta < \alpha \text{ δηλαδή } \alpha > \beta$$

$$13. \text{ Αν } \alpha > \beta \text{ και } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι } \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

1^{ος} τρόπος

Απόδειξη: (Ευθύ) Έστω $\alpha > \beta$, και α, β ετερόσημοι θα δείξω ότι $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$. Δημιουργώ την διαφορά

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha\beta} - \frac{\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}. \text{ Από } \alpha > \beta \text{ έχω } \beta - \alpha < 0 \text{ (1)}. \text{ Επειδή } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι έχω } \alpha \cdot \beta < 0 \text{ (2) Από}$$

$$(1) \text{ και (2) έχω } \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} > 0 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

Αντίστροφο Έστω $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ και α, β ετερόσημοι θα δείξω ότι $\alpha > \beta$. Δημιουργώ την διαφορά $\alpha - \beta$

$$\text{. Τότε } \alpha - \beta = \alpha\beta \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} = \alpha\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha\beta} \right) = \alpha\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) > 0. \text{ Επειδή } \alpha, \beta \text{ ετερόσημοι οπότε } \alpha \cdot \beta < 0 \text{ και}$$

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} < 0 \text{ γιατί } \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}. \text{ Άρα } \alpha - \beta > 0 \text{ άρα } \alpha > \beta.$$

2ος τρόπος

Απόδειξη: (Ευθύ) Έστω $\alpha > \beta$, και α, β ετερόσημοι θα δείξω ότι $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$. Είναι α, β ετερόσημοι

άρα $\alpha \cdot \beta < 0$, τότε από $\alpha > \beta$ έχω $\frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta}$, τότε $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

Αντίστροφο: Έστω $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ και α, β ετερόσημοι θα δείξω ότι $\alpha > \beta$. Είναι α, β ετερόσημοι

οπότε $\alpha \cdot \beta < 0$. Από $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ έχω $\alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha} < \alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{\beta}$ άρα $\beta < \alpha$ δηλαδή $\alpha > \beta$

3ος τρόπος **Απόδειξη:** Έστω $\alpha > \beta$, και α, β ετερόσημοι τότε α θετικός και β αρνητικός άρα

$\frac{1}{\alpha}$ θετικός και $\frac{1}{\beta}$ αρνητικός οπότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

14. Να δειχθεί ότι $\alpha^2 + (1 + \alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha$.

Λύση: $\alpha^2 + (1 + \alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 \geq 0$ που ισχύει άρα ισχύει και $\alpha^2 + (1 + \alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha$.

15. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ είναι :

ι) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha \cdot \beta$ ιι) $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha \cdot \beta$ ιιι) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$

Απόδειξη:

ι) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει άρα ισχύει και η αρχική.

ιι) $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει άρα ισχύει και η αρχική.

ιιι) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta - \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει άρα ισχύει και η αρχική.

16. Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}$ είναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ τότε να δείξεις ότι θα είναι και $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Απόδειξη: Έστω ότι ένας από τους α, β, γ είναι $\neq 0$. Έστω ο $\beta \neq 0$ τότε θα είναι :

$\alpha^2 \geq 0, \gamma^2 \geq 0$ και $\beta^2 > 0$ άρα (με πρόσθεση κατά μέλη) θα είναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$ Άτοπο άρα θα είναι $\alpha = \beta = \gamma = 0$

17. Αν $\chi < -2$ να δείξεις ότι $3 - 5\chi > 13$

Απόδειξη: $\chi < -2 \Leftrightarrow -5\chi > 10 \Leftrightarrow 3 - 5\chi > 13$

18. Αν $\chi < 2$ και $\psi > -5$ τότε $3\chi - 2\psi < 16$

Απόδειξη: $\chi < 2$ και $\psi > -5 \Leftrightarrow 3\chi < 6$ και $-2\psi < 10 \Leftrightarrow 3\chi - 2\psi < 16$

19. Να δείξεις ότι αν $-3 < \chi < 5$ και $2 < \psi < 7$ τότε $-5 < 3\chi + 2\psi < 29$.

Λύση: $\begin{cases} -3 < \chi < 5 \\ 2 < \psi < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < 3\chi < 15 \\ 4 < 2\psi < 14 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < 3\chi + 2\psi < 29$

20. Αν $-2 < \chi < -1$ και $3 < \psi < 8$ τότε να βρεις μεταξύ ποιόν τιμών περιέχεται η παράσταση $3\chi - 2\psi - 1$.

$$\text{Απόδειξη: } \left. \begin{array}{l} -2 < \chi < -1 \\ 3 < \psi < 8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -6 < 3\chi < -3 \\ -6 > -2\psi > -16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -6 < 3\chi < -3 \\ -16 < -2\psi < -6 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow -22 < 3\chi - 2\psi < -9 \Leftrightarrow -1 - 22 < 3\chi - 2\psi - 1 < -1 - 9 \Leftrightarrow -23 < 3\chi - 2\psi - 1 < -10$$

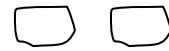
Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

	Σ	Λ
1. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$ για κάθε α, β	☐	☐
2. Αν $\alpha > \beta$ τότε υπάρχει $\chi > 0$ τέτοιο ώστε $\alpha + \chi = \beta$	☐	☐
3. Αν $\alpha \geq \beta$ τότε είναι και $\alpha > \beta$	☐	☐
4. Αν $\alpha < \beta$ τότε είναι και $\alpha \leq \beta$	☐	☐
5. Αν $\beta \cdot \delta \neq 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta > \beta\gamma$	☐	☐
6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε είναι και $\alpha + \beta \geq 0$	☐	☐
7. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ τότε είναι και $\alpha \cdot \beta \geq 0$	☐	☐
8. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$ τότε α, β ομόσημοι ή ένας από τους δυο είναι 0	☐	☐
9. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\gamma - \alpha > \gamma - \beta$	☐	☐
10. Αν $\gamma \geq \delta$ και $\alpha \geq \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \delta + \beta$	☐	☐
11. Αν $\gamma \geq \delta$ και $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \delta + \beta$	☐	☐
12. Αν $\beta \neq 0$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$	☐	☐
13. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$	☐	☐
14. Αν $\alpha > \beta > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$	☐	☐
15. Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^v = \beta^v$	☐	☐
16. Αν $\chi - 11 = \kappa \Rightarrow (\chi - 11)^2 = \kappa^2$	☐	☐
17. Αν $\chi > 5$ τότε $\frac{1}{\chi^2} > \frac{1}{\chi}$	☐	☐
	☐	☐

18. Αν $\chi \geq 0,3 \Rightarrow \chi > 0$

19. Αν $\chi > 1 \Rightarrow (\chi - 1)^2 \geq 0$



20. $\chi \neq 0$ και $\frac{2}{\chi} < 3 \Leftrightarrow 2 < 3\chi$



21. $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ τότε $\alpha > \beta$ ($\beta \neq 0$)



22. $\frac{1}{\chi} > 2 \Leftrightarrow 1 < 2\chi$



Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1. Αν $\alpha - 1 > \beta - 1$ και $\beta - 1 > \gamma - 2$, τότε θα είναι :

- ι) $\alpha = \gamma$ ιι) $\alpha > \gamma$ ιιι) $\alpha + 1 > \gamma$ ιν) $\alpha < \gamma$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

2. Αν $\alpha - \beta > 0$ και $\beta - \gamma > 0$, τότε θα είναι :

- ι) $\alpha = \gamma$ ιι) $\alpha > \gamma$ ιιι) $\alpha > -\gamma$ ιν) $\alpha < \gamma$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

3. Η ανισότητα $(\chi - 1)^2 \leq 0$ ισχύει όταν:

- ι) $\chi = 1$ ιι) $\chi \geq 1$ ιιι) $\chi \leq 1$ ιν) για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

4. Η ανισότητα $(\alpha + \beta)^2 < \alpha^2 + \beta^2$ ισχύει όταν:

- ι) $\alpha = \beta$ ιι) $\alpha \geq \beta$ ιιι) $\alpha \leq \beta$ ιν) $\alpha \cdot \beta < 0$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

5. Αν $\chi \geq 5$ τότε

- ι) $\frac{1}{\chi} \geq \frac{1}{5}$ ιι) $\frac{1}{\chi} > \frac{1}{5}$ ιιι) $\frac{1}{\chi} < \frac{1}{5}$ ιν) $\frac{1}{\chi} \leq \frac{1}{5}$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

6. Αν ισχύει $(\chi - 2)(\chi + 1) \leq 0$ τότε η μεγαλύτερη τιμή για το χ είναι:

- ι) $\chi = 1$ ιι) $\chi = -1$ ιιι) $\chi = 2$ ιν) $\chi = 3$ ν) Το χ δεν έχει μέγιστη τιμή

7. Αν ισχύει $\chi^2 + \psi^2 = 0$ τότε θα ισχύει και :

- ι) $\chi = \psi$ ιι) $\chi = -\psi$ ιιι) $\chi = \psi = 0$ ιν) $\chi + \psi = 0$ ν) τίποτε απ' όλα αυτά

Άσκησης

1. Αν $\chi \geq -3$ τότε $3(\chi - 1) \geq -12$
2. Αν $\omega < 3$ και $\theta < -7$ τότε $-5\omega - 2\theta > -1$
3. Αν $\lambda > 1$ και $\kappa < -7$ τότε $3\lambda - 4\kappa > 31$
4. Αν $\alpha < \beta$ τότε να δείξεις ότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$.

Παρατήρηση : Η άσκηση 4 μας δείχνει ότι μεταξύ 2 αριθμών α, β πάντα υπάρχει ένας τρίτος ο $\frac{\alpha + \beta}{2}$, ο οποίος μάλιστα βρίσκεται στο μέσο της απόστασης τους.

5. Αν $\alpha < \beta < \gamma$ τότε να δείξεις ότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \gamma$
6. Αν $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_n$ τότε να δείξεις ότι $\alpha_1 < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}{n} < \alpha_n$
(υπόδειξη : $\alpha_1 = \alpha_1, \alpha_1 < \alpha_2 \dots \alpha_1 < \alpha_n$ και $\alpha_1 < \alpha_n, \alpha_2 < \alpha_n, \alpha_3 < \alpha_n \dots \alpha_n = \alpha_n$).

Παρατήρηση : Ο συνδυασμός των 3 προηγούμενων ασκήσεων με τη σειρά που δίνονται είναι ακριβώς η απόδειξη ότι μεταξύ 2 αριθμών α, β υπάρχουν άπειροι άλλοι.

7. Αν για τους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P}$ είναι $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2 = 0$ τότε να δείξεις ότι θα είναι και $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ [υποδ. Απαγωγή σε άτοπο : Αν ένας από αυτούς $\neq 0$ τότε ...]
8. Αν α, β, γ έχουν την σχέση $\alpha < \beta + \gamma$ και $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$ τότε οι $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (και οι τρεις) (υπόδειξη πρόσθεσε κατά μέλη ανά δύο τις ανισότητες ...)

Παρατήρηση : Στη γεωμετρία αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου τότε ισχύει η «τριγωνική ανισότητα» δηλ $\alpha < \beta + \gamma, \beta < \alpha + \gamma, \gamma < \alpha + \beta$ και αντίστροφα για να κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν μήκη α, β, γ πρέπει να ισχύει $\alpha < \beta + \gamma, \beta < \alpha + \gamma, \gamma < \alpha + \beta$. Διότι όπως μας δείχνει η άσκηση οι τρεις αριθμοί α, β, γ αν έχουν την πιο πάνω σχέση τότε είναι θετικοί άρα μπορεί να είναι πλευρές τριγώνου.

9. Να δειχθεί ότι αν α, β ομόσημοι (δηλ $\alpha \cdot \beta > 0$) τότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$
(υπόδειξη : κάνε τις πράξεις δηλ απαλοιφή παρονομαστών κλπ)
10. Να δειχθεί ότι αν α, β ετερόσημοι (δηλ $\alpha \cdot \beta < 0$) τότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$
(υπόδειξη : κάνε τις πράξεις δηλ απαλοιφή παρονομαστών κλπ)
11. Να δειχθεί ότι $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \alpha \cdot \beta$
12. Να δειχθεί ότι $\frac{\alpha^2}{2} > \alpha - 1$
13. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε να δειχθεί ότι $\frac{\alpha - \gamma}{\alpha} < \frac{\beta - \gamma}{\beta}$

14. Αν $\alpha + \beta = 2$ να αποδειχθεί ότι : $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2$
15. Να δειχθεί ότι για κάθε α, β, γ ισχύει : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha$
[υπ $(\alpha - \beta)^2 \geq 0 \dots$]
16. Να δειχθεί ότι για κάθε α, β ισχύει : $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$.
17. Να δειχθεί ότι για κάθε α, β ισχύει : $25\alpha^2 + 16\beta^2 \geq 40\alpha\beta$.
18. Να δειχθεί ότι για κάθε α, β, γ ισχύει : $4\alpha^2 + 9\beta^2 + 4\gamma^2 \geq 12\alpha \cdot \beta - 12\beta \cdot \gamma - 8\gamma \cdot \alpha$
19. Αν α, β θετικοί τότε $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} \geq 4$
20. Αν α, β θετικοί τότε $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} - \frac{\alpha - \beta}{\beta} \leq 4$



ΠΡΟΣΟΧΗ

**Όποιος διαβάζει κινδυνεύει να χαλάσει ...
την «καλή» φήμη του «κακού ...»
γι αυτό να είσαι προσεκτικός στο τι κάνεις**

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή)

1.5 Ανισώσεις

Πρόσεξε τα εξής οι παραστάσεις $2 + 3 > 1$, $-5 \leq 12$, $1 + 2 > 11111$ είναι **ανισότητες**, αληθείς οι 2 πρώτες και ψευδείς η τρίτη ενώ οι παραστάσεις $x + 3 > 2$, $3x - 5 \geq -6$, $-5(7 - 8x) \leq 2$ λέγονται **ανισώσεις**.

Ανίσωση λέγεται κάθε σχέση ανισότητας η οποία περιέχει μια τουλάχιστον μεταβλητή

Η διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης είναι σχεδόν ίδια με αυτή της εξίσωσης δηλ.

✓ Επίλυση ανίσωσης :

Για την επίλυση μιας ανίσωσης 1^{ου} βαθμού ακολουθούμε τα εξής 5 βήματα :

Βήμα 1° Απαλοιφή παρονομαστών

Βήμα 2° : Απαλοιφή παρενθέσεων

Βήμα 3° : Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους

Βήμα 4° Αναγωγή όμοιων όρων

Βήμα 5° Διαιρώ και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου.

Προσοχή όταν διαιρούμε ανίσωση με αριθμό τότε αν μεν ο αριθμός είναι θετικός η ανίσωση δεν αλλάζει ενώ αν ο αριθμός είναι αρνητικός τότε η ανίσωση αλλάζει φορά. (εφαρμογή της 8^{ης} ιδιότητας)

$$\text{Π. χ. } 3x > 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$$

$$11x < -15 \Leftrightarrow \frac{11x}{11} < \frac{-15}{11} \Leftrightarrow x < \frac{-15}{11} = -\frac{15}{11}$$

$$\text{ενώ } -3x \geq 15 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3} \Leftrightarrow x \leq -5 \text{ και } -7x \leq 18 \Leftrightarrow \frac{-7x}{-7} \geq \frac{15}{-7} \Leftrightarrow x \geq -\frac{15}{7}$$

Παράδειγμα : Να επιλυθεί η ανίσωση : $\frac{2x-1}{3} + 3x - \frac{x}{4} > \frac{2-x}{6} - (x+1) + 3$

Βρίσκω το Ε. Κ. Π. όλων των παρονομαστών και πολλαπλασιάζω με αυτό όλους τους όρους της ανίσωσης κάνοντας στη συνέχεια της απλοποιήσεις .

$$\text{Δηλαδή } \frac{2x-1}{3} + 3x - \frac{x}{4} > \frac{2-x}{6} - (x+1) + 3, \text{ Ε. Κ. Π. } = 12 \Leftrightarrow$$

$$12 \frac{2x-1}{3} + 12 \cdot 3x - 12 \frac{x}{4} > 12 \frac{2-x}{6} - 12(x+1) + 12 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

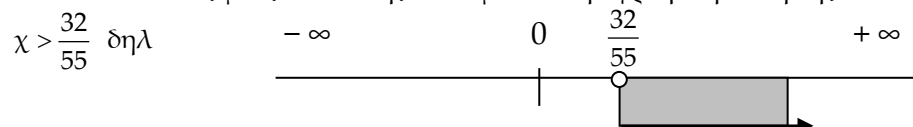
$$4(2x-1) + 36x - 3x > 2(2-x) - 12(x+1) + 36 \Leftrightarrow$$

$$8x - 4 + 36x - 3x > 4 - 2x - 12x - 12 + 36 \Leftrightarrow$$

$$8x + 36x - 3x + 2x + 12x > 4 - 12 + 36 + 4 \Leftrightarrow$$

$$55x > 32 \Leftrightarrow \frac{55x}{55} > \frac{32}{55} \Leftrightarrow x > \frac{32}{55}$$

Πάντα στο τέλος μιας ανίσωσης δίνουμε και την γραφική λύση της .



✓ Διερεύνηση ανίσωσης

Σε μια επίλυση ανίσωσης αν πραγματοποιήσω τα 4 πρώτα βήματα καταλήγω σε μια μορφή ανίσωσης $\alpha \chi > \beta$ ή $\alpha \chi < \beta$ ή $\alpha \chi \geq \beta$ ή $\alpha \chi \leq \beta$. Τότε υπάρχουν 3 περιπτώσεις

1. $\alpha > 0$ Σε αυτή την περίπτωση προχωρώ όπως στα παραδείγματα πιο πάνω και όταν φτάσω στην τελική ανίσωση δηλαδή σε μια από της μορφές :
 $\alpha \chi > \beta$ ή $\alpha \chi < \beta$ ή $\alpha \chi \geq \beta$ ή $\alpha \chi \leq \beta$ διαιρώ με το α και τα δύο μέλη και δεν αλλάζω την φορά της ανισότητας όπως π.χ. στην $3\chi < -27 \Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} < \frac{-27}{3} \Leftrightarrow \chi < -9$
2. $\alpha < 0$ Σε αυτή την περίπτωση επίσης προχωρώ όπως στα παραδείγματα πιο πάνω και όταν φτάσω στην τελική ανίσωση δηλαδή σε μια από της μορφές :
 $\alpha \chi > \beta$ ή $\alpha \chi < \beta$ ή $\alpha \chi \geq \beta$ ή $\alpha \chi \leq \beta$ διαιρώ με το α και τα δύο μέλη και αλλάζω την φορά της ανισότητας όπως π.χ. στην $-11\chi \geq 30$ τότε $\frac{-11\chi}{-11} \leq \frac{30}{-11} \Leftrightarrow \chi \leq -\frac{30}{11}$ δηλαδή

Ανάλογα με το πρόσημο του α αλλάζω ή δεν αλλάζω την φορά της ανίσωσης. Αν το $\alpha > 0$ δεν αλλάζω την φορά ενώ αν $\alpha < 0$ τότε αλλάζω την φορά. (τη στιγμή ακριβώς που διαιρώ)

3. $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση παίρνει π. χ. τη μορφή $0\chi > \beta \Leftrightarrow 0 > \beta$ η οποία ανάλογα με το πρόσημο του β είναι ταυτότητα ή αδύνατη δηλ η $0\chi > 3$ είναι αδύνατη ενώ η $0\chi > -3$ είναι ταυτότητα συνολικά υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις :

1. $0 \cdot \chi > \beta$ με $\beta > 0$	αδύνατη	$\pi \chi \ 0 \chi > 11$
2. $0 \cdot \chi < \beta$ με $\beta > 0$	ταυτότητα	$\pi \chi \ 0 \chi < 3$
3. $0 \cdot \chi > \beta$ με $\beta < 0$	ταυτότητα	$\pi \chi \ 0 \chi > -3,25$
4. $0 \cdot \chi < \beta$ με $\beta < 0$	αδύνατη	$\pi \chi \ 0 \chi < -5$
5. $0 \cdot \chi > 0$	αδύνατη	
6. $0 \cdot \chi < 0$	αδύνατη	
7. $0 \cdot \chi \geq \beta$ με $\beta > 0$	αδύνατη	$\pi \chi \ 0 \chi \geq 8$
8. $0 \cdot \chi \leq \beta$ με $\beta > 0$	ταυτότητα	$\pi \chi \ 0 \chi \leq 23$
9. $0 \cdot \chi \geq \beta$ με $\beta < 0$	ταυτότητα	$\pi \chi \ 0 \chi \geq -3$
10. $0 \cdot \chi \leq \beta$ με $\beta < 0$	αδύνατη	$\pi \chi \ 0 \cdot \chi \leq -3$
11. $0 \cdot \chi \geq 0$	ταυτότητα	
12. $0 \cdot \chi \leq 0$	ταυτότητα	



Παράδειγμα Να «λυθούν» οι ανισώσεις :

1. $\lambda\chi - 3 < 2\lambda + \chi$
2. $\lambda(\chi - 3) \geq 2\lambda + 2\chi$

Απάντηση :

1. $\lambda\chi - 3 < 2\lambda + \chi \Leftrightarrow \lambda\chi - \chi < 2\lambda + 3 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\chi < 2\lambda + 3$ (1) άρα
 - ι) Αν $\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ τότε (1) $\Leftrightarrow \chi < \frac{2\lambda + 3}{\lambda - 1}$
 - ιι) Αν $\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ τότε (1) $\Leftrightarrow \chi > \frac{2\lambda + 3}{\lambda - 1}$
 - ιιι) Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \chi < 3$ που είναι **ταυτότητα**



Παρατήρηση : Στις ανισώσεις με παράμετρο «δουλεύω» όπως και στις εξισώσεις με παράμετρο (έλυσε παραδείγματα και ασκήσεις σε προηγούμενη παράγραφο), μόνο που όταν φτάσεις στο 5° βήμα, εκεί που πρόκειται να διαιρέσεις με το συντελεστή του αγνώστου, τότε εξετάζεις για τον συντελεστή του αγνώστου 3 περιπτώσεις : ι) να είναι > 0 ιι) να είναι < 0 και ιιι) να είναι $= 0$, όπως είδες στο προηγούμενο και όπως θα δεις και στο επόμενο παράδειγμα.

2. $\lambda(\chi - 3) \geq 2\lambda - 2\chi \Leftrightarrow \lambda\chi - 3\lambda \geq 2\lambda - 2\chi \Leftrightarrow \lambda\chi + 2\chi \geq 2\lambda + 3\lambda \Leftrightarrow (\lambda + 2)\chi \geq 5\lambda$ (1) άρα
 - ι) Αν $\lambda + 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2$ τότε (1) $\Leftrightarrow \chi \geq \frac{5\lambda}{\lambda + 2}$
 - ιι) Αν $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$ τότε (1) $\Leftrightarrow \chi \leq \frac{5\lambda}{\lambda + 2}$
 - ιιι) Αν $\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ τότε (1) $\Leftrightarrow 0 \cdot \chi \geq -10$ που είναι **ταυτότητα**

✓ **Διαστήματα :**

Ορισμοί

1. Ονομάζουμε **κλειστό διάστημα** από το α ως το β (συμβολικά $[\alpha, \beta]$) το σύνολο των πραγματικών αριθμών χ για του οποίους ισχύει $\alpha \leq \chi \leq \beta$.

Συμβολικά είναι : $[\alpha, \beta] = \{ \chi \in \mathbb{P}, \alpha \leq \chi \leq \beta \}$ και ισχύει η ισοδυναμία $\chi \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha \leq \chi \leq \beta$

2. Ονομάζουμε **ανοικτό διάστημα** από το α ως το β (συμβολικά (α, β)) το σύνολο των πραγματικών αριθμών χ για του οποίους ισχύει $\alpha < \chi < \beta$.

Συμβολικά είναι : $(\alpha, \beta) = \{ \chi \in \mathbb{P}, \alpha < \chi < \beta \}$ και ισχύει η ισοδυναμία $\chi \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < \chi < \beta$

Ορίζονται διαστήματα ημιανοικτά ή ημικλειστά δηλαδή

Το σύμβολο $[\alpha, \beta)$ διαβάζεται διάστημα κλειστό α ανοικτό β και είναι $[\alpha, \beta) = \{ \chi \in \mathbb{P}, \alpha \leq \chi < \beta \}$

Το σύμβολο $(\alpha, \beta]$ διαβάζεται διάστημα ανοικτό α κλειστό β και είναι $(\alpha, \beta] = \{ \chi \in \mathbb{P}, \alpha < \chi \leq \beta \}$

Με αυτή την έννοια ορίζονται επίσης

α) $[\alpha, +\infty) = \{ \chi \in \mathbb{P}, \chi \geq \alpha \}$, διαβάζεται : διάστημα α ως συν άπειρο.

β) $(-\infty, \alpha] = \{ \chi \in \mathbb{P}, \chi \leq \alpha \}$, διαβάζεται : διάστημα μείον άπειρο ως α , αλλά και

γ) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{P}$ διαβάζεται : διάστημα από μείον άπειρο ως συν άπειρο και συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη μορφή διαστήματος.

✓ **Συναλήθευση ανισώσεων :**

Όταν μας ζητούν να συναληθεύσουμε ανισώσεις εννοούν να βρούμε τις κοινές λύσεις τους. Γι αυτό επιλύουμε τις ανισώσεις ξεχωριστά και στο τέλος παρουσιάζουμε γραφικά τις λύσεις τους σε κοινό άξονα, οπότε κοινές λύσεις είναι οι αριθμοί του «κοινού» μέρους του άξονα.



Παράδειγμα : Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$(1) \ 2x + 1 > 3 \text{ και } (2) \ 3(1 - x) > -15$$

Απάντηση :

$$(1) \ 2x + 1 > 3 \Leftrightarrow 2x > 3 - 1 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{2}{2} \Leftrightarrow x > 1$$

$$(2) \ 3(1 - x) > -15 \Leftrightarrow 3 - 3x > -15 \Leftrightarrow -3x > -15 - 3 \Leftrightarrow -3x > -18 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} < \frac{-18}{-3} \Leftrightarrow x < \frac{18}{3} \Leftrightarrow x < 6$$

Γραφικά οι λύσεις στον ίδιο άξονα είναι:



Άρα κοινές λύσεις τα x : $1 < x < 6$ και με την μορφή διαστήματος $(1, 6)$



Παράδειγμα : Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$(1) \ x + 3 \leq 5 \text{ και } (2) \ 2x + 5 \geq -15$$

Απάντηση :

$$(1) \ x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$(2) \ 2x + 5 \geq -15 \Leftrightarrow 2x \geq -20 \Leftrightarrow x \geq -10$$

Γραφικά οι λύσεις στον ίδιο άξονα είναι:



Άρα κοινές λύσεις τα x : $-10 \leq x \leq 2$ και με την μορφή διαστήματος $[-10, 2]$

Άσκησης

A. Να επιλυθούν οι ανισώσεις

1. $\frac{2\chi}{4} - \frac{\chi}{5} > \frac{3\chi-5}{2} - 3(\chi+1) + 1$ $\left(\text{απ. } \chi > \frac{5}{2} \right)$
2. $-2(\chi+1) - \frac{\chi}{4} \geq \frac{2-\chi}{6}$ $(\text{απ. } \chi \leq \frac{28}{25})$
3. $3\chi + 7 - (9 - 7\chi) < -3\chi - 2$ $(\text{απ. } \chi < 0)$
4. $11\chi + 2 \geq 14 + 27\chi$ $(\text{απ. } \chi \leq -\frac{3}{4})$
5. $2\chi + 1 - (9\chi - 3) < 2 - 3\chi$ $(\text{απ. } \chi \geq \frac{1}{2})$
6. $-3\chi - 2(3 - \chi) < 3(2 - \frac{\chi}{3}) - 12$ $(\text{απ. } 0\chi < 0 \text{ αδύνατη})$
7. $3\chi - 2(3 + \frac{\chi}{2}) \geq 5(2 + \frac{\chi}{3}) - 18$ $(\text{απ. } 0\chi \geq -2 \text{ ταυτότητα})$
8. $\frac{2\chi}{3} + \chi - (2\chi + 1) \leq -5 + \chi$ $(\text{απ. } 0\chi \geq 2 \text{ αδύνατη})$
9. $-5\chi + 7(1 - \chi) < 3(4\chi + 2)$ $(\text{απ. } 0\chi < 8 \text{ ταυτότητα})$
10. $3(2\chi - 1) + \frac{2\chi}{4} > \frac{3\chi-5}{2} - 3(\chi+1)$ $(\text{απ. } \chi > -\frac{5}{72})$
11. $\frac{\chi}{\chi-4} < 1$ $(\text{απ } \chi < 4.)$
12. $\frac{6\chi}{2\chi+1} \geq 3$ $(\text{απ } \chi \leq -\frac{1}{2}.)$

B. Να επιλυθούν οι παραμετρικές ανισώσεις

1. $3\chi + \lambda - 2 \leq 5 - 7\lambda\chi$
2. $5\chi - 2 < 2\lambda\chi + 3\lambda - 1$
3. $2\chi - \lambda^2\chi \geq 2\chi + \lambda^2 - 4$
4. $11\chi + 2\lambda > 14\chi + \lambda\chi$
5. $\frac{\lambda\chi-2}{3} - \frac{\chi-3}{4} \leq \frac{\lambda-2\chi}{6}$
6. $9\lambda^2 + \chi < 1 + 3\lambda\chi$
7. $\lambda(\chi - \lambda) \geq 3(\chi - 3)$

Γ. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

1. $\frac{3\chi-1}{2}-2\chi+3(2\chi+1)\leq\chi-\frac{1}{3}$ και $2(\chi+1)+7>\chi-3$
2. $2\chi-(3-\chi)<-\chi+5$ και $2\chi+4<25-\chi$
3. $\chi+\frac{\chi-3}{2}>2(3-\chi)+\frac{\chi+1}{6}$ και $\frac{\chi}{3}-2(\chi-1)>\chi+10$
4. $\frac{2\chi-1}{3}+3\chi-\frac{\chi}{4}>\frac{2-\chi}{6}-(\chi+1)+3$ και $\frac{2\chi}{4}-\frac{\chi}{5}>\frac{3\chi-5}{2}-3(\chi+1)+1$
5. $-2(\chi+1)-\frac{\chi}{4}\geq\frac{2-\chi}{6}$ και $3\chi+7-(9-7\chi)<-3\chi-2$
6. $11\chi+2\geq 14+27\chi$ και $3(1-\chi)>-15$
7. $\frac{\chi+2}{3}-\frac{1-\chi}{2}\leq 4$ και $3\chi-2(1-\chi)\geq 3$



ΠΡΟΣΟΧΗ

**Ποτέ μην «κάνεις» σήμερα αυτό που μπορείς
να «κάνεις» αύριο ή και του χρόνου ...
(μέχρι την Γ! Λυκείου έχουμε καιρό.)**

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή)

1.6 Απόλυτες τιμές - ιδιότητες - εξισώσεις - ανισώσεις

✓ Ορισμός:

Το σύμβολο $| \alpha |$ ονομάζεται απόλυτη τιμή του α και είναι $| \alpha | = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha > 0 \\ 0 & \text{αν } \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

π.χ. $|+3| = 3, \quad |-3| = 3, \quad |-4| = 4, \quad |0| = 0$

ή πιο συνοπτικά $| \alpha | = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$

ο συμβολισμός (1) (με $\alpha \geq 0$ και $\alpha < 0$) βολεύει περισσότερο στις ασκήσεις.



Ιδιότητες:

1. $| \alpha | \geq 0$
2. $| \alpha | \geq -\alpha$
3. $| \alpha | \geq \alpha$
4. $| \alpha |^2 = \alpha^2$ γενικότερα $| \alpha |^{2k} = \alpha^{2k}$
5. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $| \chi | < \theta \Leftrightarrow -\theta < \chi < \theta$
6. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $| \chi | > \theta \Leftrightarrow \chi < -\theta$ ή $\chi > \theta$
7. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $| \chi | \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \chi \leq \theta$
8. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $| \chi | \geq \theta \Leftrightarrow \chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$
9. $| \alpha \cdot \beta | = | \alpha | \cdot | \beta |$

Η απόλυτη τιμή του γινομένου 2 αριθμών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών
Γενικότερα $| \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n | = | \alpha_1 | \cdot | \alpha_2 | \cdot | \alpha_3 | \cdots | \alpha_n |$

$$10. \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{| \alpha |}{| \beta |} \quad \text{με } \beta \neq 0$$

Η απόλυτη τιμή του πηλίκου 2 αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών.

Γενικότερα $\left| \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \frac{\alpha_3}{\beta_3} \cdots \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right| = \frac{| \alpha_1 |}{| \beta_1 |} \cdot \frac{| \alpha_2 |}{| \beta_2 |} \cdot \frac{| \alpha_3 |}{| \beta_3 |} \cdots \frac{| \alpha_n |}{| \beta_n |}$ με $\beta_i \neq 0$ όταν

$$11. \quad | \alpha + \beta | \leq | \alpha | + | \beta |$$

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος 2 αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών

$$12. \quad || \alpha | - | \beta || \leq | \alpha + \beta |$$

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος 2 αριθμών είναι μεγαλύτερη ή ίση από το απόλυτο της διαφοράς των απολύτων τιμών

Δηλαδή συνολικά $|| \alpha | - | \beta || \leq | \alpha + \beta | \leq | \alpha | + | \beta |$

Αποδείξεις:1. $|α| ≥ 0$

ι) $α ≥ 0$ τότε $|α| = α ≥ 0$ ιι) $α < 0$ τότε $-α > 0$ και $|α| = -α > 0$ άρα γενικά $|α| ≥ 0$

2. $|α| ≥ -α$

ι) Αν $α ≥ 0 ⇔ |α| = α$ και $-α ≤ 0$ άρα $|α| = α ≥ 0 ≥ -α ⇔ |α| ≥ -α$

ιι) Αν $α < 0$ τότε $|α| = -α ⇔ |α| ≤ -α$

άρα σε κάθε περίπτωση $|α| ≥ -α$

3. $|α| ≥ α$

ι) Αν $α ≥ 0 ⇔ |α| = α ⇔ |α| ≥ α$

ιι) Αν $α < 0$ τότε $|α| = -α$. Όμως $α < 0$ τότε $-α > 0$ άρα $|α| = -α > 0 > α ⇔ |α| > α$ δηλαδή $|α| ≥ α$. Άρα σε κάθε περίπτωση $|α| ≥ α$

4. $|α|^2 = α^2$ 1^{ος} τρόπος

ι) $α ≥ 0 ⇔ |α| = α$ και $|α| = α$ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχω $|α|^2 = α^2$

ιι) $α < 0 ⇔ |α| = -α$ και $|α| = -α$ με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχω $|α|^2 = (-α)(-α) = α^2$ και $|α|^{2κ} = (|α|^2)^κ = (α^2)^κ = α^{2κ}$

2^{ος} τρόπος

ι) $α ≥ 0$ τότε είναι και $|α| ≥ 0$ από $|α| = α ⇔ |α|^2 = α^2$ (ιδιότητα ανισοτήτων)

ιι) $α < 0$ τότε $-α ≥ 0$ και $|α| ≥ 0$ από $|α| = -α ⇔ |α|^2 = (-α)^2 = α^2$ και $|α|^{2κ} = (|α|^2)^κ = (α^2)^κ = α^{2κ}$

Παρατήρηση: Μέχρι το σημείο αυτό ο μόνος τρόπος για να αποδείξω τις πιο πάνω ιδιότητες ήταν να στηριχτώ στον ορισμό και να κάνω υποθέσεις για το α. Μετά την απόδειξη της 4^{ης} ιδιότητας μπορούμε να αποδεικνύουμε ταυτότητες υψώνοντας και τα 2 μέλη τους στο τετράγωνο αποκλειστικά και μόνο όμως με χρήση της ιδιότητας:

$$\text{Αν } \underline{α, β ≥ 0} \text{ τότε } α = β ⇔ α^ν = β^ν \text{ και } α > β ⇔ α^ν > β^ν$$

5. Αν $θ > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $|χ| < θ ⇔ -θ < χ < θ$

Η απόδειξη θα γίνει παραδειγματικά και με τους 2 τρόπους:

1^{ος} τρόπος:

ι) $χ ≥ 0 ⇔ |χ| = χ ≥ 0$ οπότε από $|χ| < θ ⇔ χ < θ$ και $χ ≥ 0 > -θ$
(αφού $θ > 0$ τότε $-θ < 0$) άρα $-θ < 0 ≤ χ = |χ| < θ$ άρα $-θ < χ < θ$.

ιι) $χ < 0$ τότε $|χ| = -χ$ τότε $|χ| < θ ⇔ -χ < θ ⇔ χ > -θ$ και $χ < 0 < θ$ άρα $χ < θ$ τελικά $-θ < χ < θ$.

2^{ος} τρόπος

ι) επειδή $|χ|$ και $θ > 0$, από $|χ| < θ ⇔ |χ|^2 < θ^2 ⇔ χ^2 < θ^2 ⇔ χ^2 - θ^2 < 0 ⇔ (χ + θ)(χ - θ) < 0$ που σημαίνει ότι ο ένας παράγοντας είναι θετικός και άλλος αρνητικός δηλ

$$\left. \begin{array}{l} χ + θ > 0 \text{ και } χ - θ < 0 \text{ ή} \\ χ + θ < 0 \text{ και } χ - θ > 0 \end{array} \right\} ⇔ \left. \begin{array}{l} χ > -θ \text{ και } χ < θ \text{ ή} \\ χ < -θ \text{ και } χ > θ \end{array} \right\} ⇔ χ > -θ \text{ και } χ < θ ⇔ -θ < χ < θ$$

Η περίπτωση $χ < -θ$ και ταυτόχρονα $χ > θ$ επειδή $θ > 0$ αποκλείεται.

6. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \text{ ή } x > \theta$

ι) $x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x \geq 0$ οπότε η $|x| > \theta$ γίνεται $x > \theta$ (1).

ιι) $x < 0$ τότε $|x| = -x$ τότε η $|x| > \theta$ γίνεται $-x > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ (2).

Από (1) και (2) (σε κάθε περίπτωση δηλαδή) $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta \text{ ή } x < -\theta$.

7. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$

8. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$

Αποδεικνύονται με ίδιο ακριβώς τρόπο που αποδεικνύονται οι 5 και 6

9. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \Leftrightarrow |a \cdot b|^2 = (|a| \cdot |b|)^2 \Leftrightarrow (a \cdot b)^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \Leftrightarrow a^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2$$

Η τελευταία σχέση είναι προφανές ότι ισχύει άρα ισχύει και η αρχική

10. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ με $b \neq 0$

$$\text{Έστω } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ τότε } \left| \frac{a}{b} \right|^2 = \left(\frac{|a|}{|b|} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{|a|^2}{|b|^2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ Επειδή είναι προφανής}$$

ισότητα άρα ισχύει η υπόθεση δηλαδή $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

11. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Είναι $|a + b| \geq 0$ και $|a| + |b| \geq 0$ έτσι αν υποθέσω ότι $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow$

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \Leftrightarrow ab \leq |a||b| \text{ προφανής ισότητα. Άρα ισχύει η}$$

υπόθεση δηλαδή $|a + b| \leq |a| + |b|$

12. $||a| - |b|| \leq |a + b|$

Είναι $||a| - |b|| \geq 0$ και $|a + b| \geq 0$. Έτσι αν υποθέσω $||a| - |b|| \leq |a + b| \Leftrightarrow$

$$||a| - |b||^2 \leq |a + b|^2 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \leq (a + b)^2 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2|a||b| + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow$$

$$-2|a||b| \leq 2ab \Leftrightarrow |a||b| \geq ab \text{ που ισχύει. Άρα ισχύει και η } ||a| - |b|| \leq |a + b|$$

Τα μαθηματικά δεν είναι για τους λίγους, τους «έξυπνους».
Είναι για τους εργατικούς!

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε  στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Για κάθε $x \in \mathbb{P}$ ισχύει $ 2x-3 = 3-2x $ | ☐ | ☐ |
| 2. Για κάθε $x \in \mathbb{P}$ ισχύει $ -3x+2 = 3x+2 $ | ☐ | ☐ |
| 3. Για κάθε $\alpha, \in \mathbb{P}$ ισχύει $ \alpha +7 = \alpha +7$ | ☐ | ☐ |
| 4. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ ισχύει $ \alpha +\beta = \alpha +\beta$ | ☐ | ☐ |
| 5. Αν $\alpha = -\beta$ τότε ισχύει $ \alpha+\beta =\alpha+\beta$ | ☐ | ☐ |
| 6. Υπάρχει x τέτοιο ώστε $ x-1 + x^2-1 =0$ | ☐ | ☐ |
| 7. Για κάθε $x \in \mathbb{P}$ ισχύει $\frac{x}{ x }=1$ | ☐ | ☐ |
| 8. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $ x \leq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta$ ή $x \geq \theta$ | ☐ | ☐ |

Άσκησης

- Να δείξεις ότι $\frac{|x|}{x}$ όπως και $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ -1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
- Αν $\alpha < \beta + \gamma$ και $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$ να δείξεις ότι $|\beta - \alpha| < \gamma$, $|\alpha - \beta| < \gamma$ και $|\beta - \gamma| < \alpha$
- Αν $x = \frac{\alpha}{|\alpha|+|\beta|}$ και $\psi = \frac{\beta}{|\alpha|+|\beta|}$ τότε $|x| + |\psi| = 1$
- Να δείξεις ότι $\left| \frac{x^2+1}{x} \right| \geq 2$
- Να δείξεις ότι $\left| \frac{x}{\psi} + \frac{\psi}{x} \right| = \left| \frac{x}{\psi} \right| + \left| \frac{\psi}{x} \right|$
- Να δείξεις ότι $|x| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
- Να δείξεις ότι $|x| + |\beta| > 0 \Leftrightarrow \eta \alpha \neq 0 \ \eta \ \beta \neq 0 \ \eta \ (\alpha \neq 0 \ \text{και} \ \beta \neq 0)$
- Για ποιες τιμές του x η παράσταση $|\alpha - x| + |\beta - x|$ με $\alpha < \beta$ είναι ανεξάρτητη του x .
[υπόδ. κάνε υποθέσεις για το x : $x < \alpha$, $\alpha < x < \beta$ κλπ]

9. Αν $x < 1$ να δείξεις ότι $x - |x| < 2$ και $x + |x| < 2$
10. Εάν $|a \cdot b| < 1$ τότε ένας τουλάχιστον από τους $|a|$, $|b|$ είναι μικρότερος του 1
11. Να δείξεις ότι δεν υπάρχει x έτσι ώστε $|x| = \left| x + \frac{|ax^2 + b|}{x} \right|$
12. Να «ερμηνεύσετε» τις πιο κάτω σχέσεις:
 ι) $|a| + |b| + |c| = 0$ ιι) $|a| + |b| > 0$ ιιι) $|a| + |b| \neq 0$
13. Εάν $|a| \leq 2$ και $|b| \leq 3$ τότε ι) $|2 \cdot a + 3 \cdot b| \leq 13$ και ιι) $|2 \cdot a + 3 \cdot b + 4| \leq 17$

Θα σας δείξω τώρα μερικές πρακτικές εφαρμογές των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών.

1. Πως απαλλάσσουμε μια παράσταση από τα απόλυτα

Παράδειγμα: Έστω $A = |x|$ να απαλλάξετε την παράσταση A από το απόλυτο.

Απάντηση: έστω $x > 0$ τότε $|x| = x$ άρα ισχύει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A	$-x$	0	x

Δηλαδή εξετάζω την παράσταση που περιέχεται στο απόλυτο ως προς το πρόσημό της και όταν βρω για ποιες τιμές της μεταβλητής γίνεται θετική αυτομάτως ξέρω και που γίνεται 0 ή αρνητική. Γι' αυτό βάζω την παράσταση που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο > 0 και λύνω την απλή ανισότητα που προκύπτει.

Γενικά δουλεύω όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1: Έστω $A = |3x + 5|$ να απαλλάξετε την παράσταση A από το απόλυτο.

Απάντηση: Αν $3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -5 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{-5}{3} \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3}$. Όταν είναι $x \geq -\frac{5}{3}$ τότε είναι και

$3x + 5 \geq 0$ οπότε $|3x + 5| = 3x + 5$ και όταν $x < -\frac{5}{3}$ τότε $3x + 5 < 0$ άρα $|3x + 5| = -(3x + 5) = -3x - 5$.

Δηλ ισχύει ο πιο κάτω πίνακας

x	$-\infty$	$-5/3$	$+\infty$
A	$-3x - 5$	0	$3x + 5$

Παράδειγμα 2: Έστω $A = |7 - 3x|$. Να απαλλάξετε την παράσταση A από το απόλυτο.

Απάντηση: Αν $7 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -7 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{-7}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$. Όταν είναι

$x \leq \frac{7}{3}$ τότε $7 - 3x \geq 0$ οπότε $|7 - 3x| = 7 - 3x$ και όταν $x > \frac{7}{3}$ τότε $7 - 3x < 0$ άρα

$|7 - 3x| = -(7 - 3x) = 3x - 7$. Δηλ ισχύει ο πιο κάτω πίνακας

x	$-\infty$	$7/3$	$+\infty$
A	$7 - 3x$	0	$3x - 7$

Όταν η παράσταση έχει περισσότερα από ένα απόλυτα τότε κάνω την διαδικασία για κάθε απόλυτο ξεχωριστά και φτιάχνω έναν κοινό πίνακα με μία γραμμή επί πλέον για την παράσταση Α την οποία υπολογίζω σωστά στο πρόχειρο όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 3 : Έστω $A = |3\chi + 5| + |7 - 2\chi| - 2|\chi + 1|$. Να απαλλάξετε την παράσταση Α από τα απόλυτα.

Απάντηση :

ι) Έστω $3\chi + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3\chi \geq -5 \Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} \geq \frac{-5}{3} \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{5}{3}$. Όταν είναι

$\chi \geq -\frac{5}{3}$ τότε $3\chi + 5 \geq 0$ άρα $|3\chi + 5| = 3\chi + 5$ και όταν $\chi \leq -\frac{5}{3}$ τότε

$$|3\chi + 5| = -(3\chi + 5) = -3\chi - 5.$$

ιι) έστω $7 - 2\chi \geq 0 \Leftrightarrow -2\chi \geq -7 \Leftrightarrow \frac{-2\chi}{-2} \leq \frac{-7}{-2} \Leftrightarrow \chi \leq \frac{7}{2}$. Όταν είναι

$\chi \leq \frac{7}{2}$ τότε $7 - 2\chi \geq 0$ άρα $|7 - 2\chi| = 7 - 2\chi$ και όταν $\chi \geq \frac{7}{2}$

$$\text{τότε } |7 - 2\chi| = -(7 - 2\chi) = 2\chi - 7$$

ιιι) έστω $\chi + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -1$. Άρα όταν $\chi \geq -1$ τότε $\chi + 1 \geq 0$ άρα $|\chi + 1| = \chi + 1$ και όταν $\chi \leq -1$ τότε $\chi + 1 \leq 0$ άρα $|\chi + 1| = -(\chi + 1) = -\chi - 1$

Όπότε ισχύει ο πίνακας

χ	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$ 3\chi + 5 $	$-3\chi - 5$	$3\chi + 5$	$3\chi + 5$	$3\chi + 5$	
$ 7 - 2\chi $	$7 - 2\chi$	$7 - 2\chi$	$7 - 2\chi$	$2\chi - 7$	
$ \chi + 1 $	$-\chi - 1$	$-\chi - 1$	$\chi + 1$	$\chi + 1$	
A	$-3\chi + 4$	$3\chi + 14$	$-\chi + 10$	$3\chi - 4$	

Η παράσταση Α προκύπτει στο πρόχειρο ως ακολούθως :

α) όταν $\chi \leq -\frac{5}{3}$ τότε $A = (-3\chi - 5) + (7 - 2\chi) - 2(-\chi - 1) = -3\chi - 5 + 7 - 2\chi + 2\chi + 2 = -3\chi + 4$

β) όταν $-\frac{5}{3} \leq \chi \leq -1$ τότε $A = (3\chi + 5) + (7 - 2\chi) - 2(-\chi - 1) = 3\chi + 5 + 7 - 2\chi + 2\chi + 2 = 3\chi + 14$

γ) όταν $-1 \leq \chi \leq \frac{7}{2}$ τότε $A = (3\chi + 5) + (7 - 2\chi) - 2(\chi + 1) = 3\chi + 5 + 7 - 2\chi - 2\chi - 2 = -\chi + 10$

δ) όταν $\chi \geq \frac{7}{2}$ τότε $A = (3\chi + 5) + (2\chi - 7) - 2(\chi + 1) = 3\chi + 5 + 2\chi - 7 - 2\chi - 2 = 3\chi - 4$

2. Πως λύνουμε εξισώσεις με απόλυτες τιμές

α) Μορφή $|P(x)| = \alpha$ όπου $P(x)$ πολώνυμο του x και α αριθμός.

Απάντηση :

ι) $\alpha < 0$ τότε η $|P(x)| = \alpha$ δεν έχει λύση διότι $|P(x)| \geq 0$ για κάθε x

ιι) $\alpha > 0$ τότε $|P(x)| = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \alpha \\ P(x) = -\alpha \end{cases}$ οπότε οι λύσεις προκύπτουν από τις 2 εξισώσεις

Σημείωση προς το παρόν το $P(x)$ θα είναι 1^{ου} βαθμού, αργότερα στα επόμενα κεφάλαια θα βρούμε και περιπτώσεις όπου το $P(x)$ θα είναι πολώνυμο ανωτέρου βαθμού (2^{ου}, 3^{ου} κλπ).

Παραδείγματα

1. Να επιλυθεί η εξίσωση $|x| = \frac{3}{5}$

Απάντηση: $|x| = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ ή $x = -\frac{3}{5}$. Οι λύσεις το $\frac{3}{5}$ και το $-\frac{3}{5}$

2. Να επιλυθεί η εξίσωση $|x| = -3$

Απάντηση: $|x| = -3$ Αδύνατη (διότι $|x| \geq 0$ και $-3 < 0$)

3. Να λυθεί η εξίσωση $|3x+2| = 7$

Απάντηση: $|3x+2| = 7 \Leftrightarrow 3x+2 = 7$ ή $3x+2 = -7$ άρα

ι) $3x+2 = 7 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

ιι) $3x+2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{3} = -3$. Οι λύσεις είναι το $\frac{5}{3}$ και το -3

β) Μορφή $|P(x)| + \lambda = 0$

Εξισώσεις αυτής της μορφής τις λύνουμε ως εξισώσεις με άγνωστο το $|P(x)|$ και αφού καταλήξουμε στη μορφή $|P(x)| = \alpha$ συνεχίζουμε αναλόγως όπως στα πιο πάνω παραδείγματα.. Διευκολύνει ή αλλαγή μεταβλητής. Δηλ να θέσω $\omega = |P(x)|$ με τον περιορισμό $\omega \geq 0$, οπότε η μορφή γίνεται $\kappa \cdot \omega + \lambda = 0$. Δες παρατήρηση στο τέλος των παραδειγμάτων.

Παραδείγματα :

1. Να λυθεί η εξίσωση $3 \cdot |x| - 5(2 - 3 \cdot |x|) = 14 \cdot |x| + 8$

Απάντηση $3 \cdot |x| - 5(2 - 3 \cdot |x|) = 14 \cdot |x| + 8 \Leftrightarrow 3 \cdot |x| - 10 + 15 \cdot |x| = 14 \cdot |x| + 8$
 $\Leftrightarrow 3 \cdot |x| + 15 \cdot |x| - 14 \cdot |x| = 10 + 8 \Leftrightarrow 4 \cdot |x| = 16 \Leftrightarrow |x| = 4$ άρα $x = 4$ ή $x = -4$.

Οπότε λύσεις είναι αριθμοί οι 4 και -4

2. Να λυθεί η εξίσωση $5|2x-1| + 3(-3|2x-1| + 2) = 12 - 7|2x-1|$ (1)

Απάντηση $5|2x-1| + 3(-3|2x-1| + 2) = 12 - 7|2x-1| \Leftrightarrow 5|2x-1| - 9|2x-1| + 6 =$

$$12 - 7|2x - 1| \Leftrightarrow 5|2x - 1| - 9|2x - 1| + 7|2x - 1| = 12 - 6 \Leftrightarrow 3|2x - 1| = 6 \Leftrightarrow$$

$$|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ι) } 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{ιι) } 2x - 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

Οπότε λύσεις είναι οι αριθμοί -1 και 2

Παρατήρηση Σε ασκήσεις όπως αυτή μπορούμε να θέσουμε $|2x - 1| = \omega$ οπότε η (1) γίνεται $5\omega + 3(-3\omega + 2) = 12 - 7\omega \Leftrightarrow 5\omega - 9\omega + 6 = 12 - 7\omega \Leftrightarrow 5\omega - 9\omega + 7\omega = 12 - 6 \Leftrightarrow 3\omega = 6 \Leftrightarrow \omega = 3$ οπότε $|2x - 1| = 3$ και μετά συνεχίζω όπως πιο πάνω και έχω $x = 2$ ή $x = -1$

γ) Μορφή $|P(x)| = |\Phi(x)|$

Απάντηση: $|P(x)| = |\Phi(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \Phi(x) \\ \text{ή} \\ P(x) = -\Phi(x) \end{cases}$

Οπότε οι λύσεις της αρχικής προκύπτουν από την «λύση» των δύο αυτών απλών εξισώσεων



Παράδειγμα Να λυθεί η εξίσωση $|3x + 2| = |5x + 6|$

$$|3x + 2| = |5x + 6| \Leftrightarrow 3x + 2 = 5x + 6 \text{ ή } 3x + 2 = -(5x + 6) \text{ τότε}$$

$$\text{ι) } 3x + 2 = 5x + 6 \Leftrightarrow 3x - 5x = 6 - 2 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -2/3$$

$$\text{ιι) } 3x + 2 = -(5x + 6) \Leftrightarrow 3x + 2 = -5x - 6 \Leftrightarrow 3x + 5x = -6 - 2 \Leftrightarrow 8x = -8 \Leftrightarrow x = -1$$

Λύσεις είναι οι αριθμοί -1 και $-2/3$.

δ) Μορφή $|P(x)| = \Phi(x)$

Προσοχή η εξίσωση έχει λύσεις με την προϋπόθεση ότι $\Phi(x) \geq 0$ αλλιώς είναι αδύνατη. Άρα λύνω πρώτα την ανίσωση $\Phi(x) \geq 0$ βρίσκοντας περιορισμούς για το x και στο τέλος απαιτώ οι λύσεις που θα βρω από τις 2 εξισώσεις να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Απάντηση: Αν $\Phi(x) \geq 0$

Τότε η $|P(x)| = \Phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \Phi(x) \\ \text{ή} \\ P(x) = -\Phi(x) \end{cases}$

Οπότε οι λύσεις της αρχικής προκύπτουν από την «λύση» των δύο αυτών απλών εξισώσεων



Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $|3x + 2| = 2x + 3$

Απάντηση

Πρέπει $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -3/2$ τότε από την $|3x + 2| = 2x + 3$ έχουμε

$$\text{ι) } 3x + 2 = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2x = 3 - 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή διότι } 1 > -3/2$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad 3\chi + 2 &= -(2\chi + 3) \Leftrightarrow 3\chi + 2 = -2\chi - 3 \Leftrightarrow 3\chi + 2\chi = -3 - 2 \Leftrightarrow 5\chi = -5 \\ &\Leftrightarrow \chi = -1 \text{ δεκτή διότι } -1 > -3/2 \end{aligned}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $|7 - 3\chi| = -5\chi + 15$

Απάντηση

$$\text{Πρέπει } -5\chi + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -5\chi \geq -15 \Leftrightarrow \chi \leq \frac{-15}{-5} = 3 \text{ άρα } \chi \leq 3.$$

Τότε από την $|7 - 3\chi| = -5\chi + 15$ προκύπτουν οι :

$$\text{i)} \quad 7 - 3\chi = -5\chi + 15 \Leftrightarrow -3\chi + 5\chi = -7 + 15 \Leftrightarrow 2\chi = 8 \Leftrightarrow \chi = 4 \text{ απορρίπτεται διότι } 4 > 3$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad 7 - 3\chi &= -(-5\chi + 15) \Leftrightarrow 7 - 3\chi = 5\chi - 15 \Leftrightarrow -3\chi - 5\chi = -15 - 7 \Leftrightarrow \\ -8\chi &= -22 \Leftrightarrow \chi = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4} \text{ δεκτή διότι } \frac{11}{4} < 3 \end{aligned}$$

Σημείωση Οι εξισώσεις $|P(\chi)| = |\Phi(\chi)|$ και $|P(\chi)| = \Phi(\chi)$ Μπορούν να λυθούν και με τον εξής τρόπο $|P(\chi)| = |\Phi(\chi)| \Leftrightarrow |P(\chi)|^2 = |\Phi(\chi)|^2 \Leftrightarrow [P(\chi)]^2 = [\Phi(\chi)]^2$ κ λ π αρκεί να τηρηθούν οι περιορισμοί .

ε) Μορφή α | P(x) | + β | Φ(χ) | = 0 με α, β ≥ 0



$\alpha | P(\chi) | + \beta | \Phi(\chi) | = 0 \Leftrightarrow P(\chi) = 0 \text{ και } \Phi(\chi) = 0$ (ταυτόχρονα)

Παράδειγμα : Να λυθούν οι εξισώσεις

1. $3|\chi + 3| + 5|2\chi + 1| = 0$
2. $|\chi - 1| = -2|3\chi - 7|$
3. $|\chi^2 - 4| + |\chi + 2| = 0$

Απάντηση

$$1. \quad 3|\chi + 3| + 5|2\chi + 1| = 0$$

πρέπει $\chi + 3 = 0$ και $2\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow (\chi = -3 \text{ και } \chi = -1/2)$ αδύνατη

$$2. \quad |\chi - 1| = -2|3\chi - 7| \Leftrightarrow |\chi - 1| + 2|3\chi - 7| = 0 \text{ άρα}$$

πρέπει $\chi - 1 = 0$ και $3\chi - 7 = 0 \Leftrightarrow (\chi = 1 \text{ και } \chi = 7/3)$ αδύνατη

$$3. \quad |\chi^2 - 4| + |\chi + 2| = 0$$

πρέπει $\chi^2 - 4 = 0$ και $\chi + 2 = 0 \Leftrightarrow (\chi = \pm 2 \text{ και } \chi = -2)$ άρα λύση το -2

ζ) Μορφή α | P(x) | + β | Φ(χ) | + ... + γ | Π(χ) | = 0

(δηλ εξισώσεις οι οποίες περιέχουν διάφορα απόλυτα)

Σε τέτοιες εξισώσεις πρέπει πρώτα να απαλλάξεις το 1° μέλος από τα απόλυτα, να λύσεις στη συνέχεια την εξίσωση όπως προκύπτει στα διάφορα διαστήματα και να ελέγξεις στο τέλος αν γίνονται δεκτές οι λύσεις όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση $|3\chi + 5| + |7 - 2\chi| = 2|\chi + 1|$ (1)

Απάντηση :

$$|3\chi + 5| + |7 - 2\chi| = 2|\chi + 1| \Leftrightarrow |3\chi + 5| + |7 - 2\chi| - 2|\chi + 1| = 0$$

ονομάζω $A = |3\chi + 5| + |7 - 2\chi| - 2|\chi + 1|$ και απαλλάσσω την Α από τα απόλυτα όπως σε προηγούμενα παραδείγματα :

$$\text{i)} \quad \text{έστω } 3\chi + 5 > 0 \Leftrightarrow 3\chi > -5 \Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} > \frac{-5}{3} \Leftrightarrow \chi > -\frac{5}{3} . \text{ Όταν}$$

$\chi > -\frac{5}{3}$ τότε $3\chi + 5 > 0$ άρα $|3\chi + 5| = 3\chi + 5$ και όταν $\chi < -\frac{5}{3}$ τότε $|3\chi + 5| = -(3\chi + 5) = -3\chi - 5$.

ii) έστω $7 - 2\chi > 0 \Leftrightarrow -2\chi > -7 \Leftrightarrow \frac{-2\chi}{-2} < \frac{-7}{-2} \Leftrightarrow \chi < \frac{7}{2}$. Άρα όταν $\chi < \frac{7}{2}$ τότε $7 - 2\chi > 0$ άρα $|7 - 2\chi| = 7 - 2\chi$ και όταν $\chi > \frac{7}{2}$ τότε $|7 - 2\chi| = -(7 - 2\chi) = 2\chi - 7$

iii) έστω $\chi + 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > -1$. Άρα όταν $\chi > -1$ τότε $\chi + 1 > 0$ άρα $|\chi + 1| = \chi + 1$ και όταν $\chi < -1$ τότε $\chi + 1 < 0$ άρα $|\chi + 1| = -(\chi + 1) = -\chi - 1$

Όπότε ισχύει ο πιο κάτω πίνακας

χ	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$ 3\chi + 5 $	$-3\chi - 5$		$3\chi + 5$	$3\chi + 5$	$3\chi + 5$
$ 7 - 2\chi $	$7 - 2\chi$		$7 - 2\chi$	$7 - 2\chi$	$2\chi - 7$
$ \chi + 1 $	$-\chi - 1$		$-\chi - 1$	$\chi + 1$	$\chi + 1$
A	$-3\chi + 4$		$3\chi + 14$	$-\chi + 10$	$3\chi - 4$

Λύνω τώρα στην ουσία 4 απλές εξισώσεις, απαιτώντας πάντα οι λύσεις να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

α) όταν $\chi < -\frac{5}{3}$ τότε η (1) γίνεται $-3\chi + 4 = 0 \Leftrightarrow -3\chi = -4 \Leftrightarrow \chi = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ και επειδή πρέπει $\chi < -\frac{5}{3}$

ενώ είναι $\frac{4}{3} > -\frac{5}{3}$ η λύση $\frac{4}{3}$ απορρίπτεται.

β) όταν $-\frac{5}{3} < \chi < -1$ τότε η (1) γίνεται $3\chi + 14 = 0 \Leftrightarrow 3\chi = -14 \Leftrightarrow$

$\chi = -\frac{14}{3} \cong -3,5$ και επειδή πρέπει $-\frac{5}{3} < \chi < -1$ η λύση απορρίπτεται.

γ) όταν $-1 < \chi < \frac{7}{2}$ τότε η (1) γίνεται $-\chi + 10 = 0 \Leftrightarrow \chi = 10$ και επειδή πρέπει

$-1 < \chi < \frac{7}{2}$ η λύση αυτή απορρίπτεται.

δ) όταν $\chi > \frac{7}{2}$ τότε η (1) γίνεται $3\chi - 4 = 0 \Leftrightarrow 3\chi = 4 \Leftrightarrow \chi = \frac{4}{3}$ και επειδή πρέπει $\chi > \frac{7}{2}$ η

λύση αυτή απορρίπτεται.

Άρα τελικά η (1) είναι **αδύνατη**

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση $2| \chi + 5 | - | 1 - \chi | - | \chi + 1 | = 0$ (1)

Απάντηση :

Ονομάζω $A = 2| \chi + 5 | - | 1 - \chi | - | \chi + 1 |$. Απαλλάσσω την A από τα απόλυτα όπως πιο πριν :

ι) έστω $\chi + 5 > 0 \Leftrightarrow \chi > -5$. Άρα όταν $\chi > -5$ τότε $\chi + 5 > 0$ άρα $|\chi + 5| = \chi + 5$ και όταν $\chi < -5$ τότε $|\chi + 5| = -(\chi + 5) = -\chi - 5$.

ιι) έστω $1 - \chi > 0 \Leftrightarrow -\chi > -1 \Leftrightarrow \chi < 1$. Άρα όταν $\chi < 1$ τότε $1 - \chi > 0$ άρα $|1 - \chi| = 1 - \chi$ και όταν $\chi > 1$ τότε $|1 - \chi| = -(1 - \chi) = \chi - 1$

ιιι) έστω $\chi + 1 > 0 \Leftrightarrow \chi > -1$. Άρα όταν $\chi > -1$ τότε $\chi + 1 > 0$ άρα $|\chi + 1| = \chi + 1$ και όταν $\chi < -1$ τότε $\chi + 1 < 0$ άρα $|\chi + 1| = -(\chi + 1) = -\chi - 1$

Όπότε ισχύει ο πιο κάτω πίνακας

χ	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
$ \chi + 5 $	$-\chi - 5$	0	$\chi + 5$	$\chi + 5$	$\chi + 5$
$ 1 - \chi $	$1 - \chi$	$1 - \chi$	0	$1 - \chi$	$\chi - 1$
$ \chi + 1 $	$-\chi - 1$	$-\chi - 1$	$\chi + 1$	0	$\chi + 1$
A	-10	$4\chi + 10$	$2\chi + 8$	10	

Λύνω τώρα στην ουσία 4 απλές εξισώσεις, απαιτώντας πάντα οι λύσεις να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

α) όταν $\chi < -5$ τότε η (1) γίνεται $-10 = 0$ **αδύνατη**

β) όταν $-5 < \chi < -1$ τότε η (1) γίνεται $4\chi + 10 = 0 \Leftrightarrow 4\chi = -10 \Leftrightarrow \chi = -\frac{10}{4} = -2,5$

που είναι **δεκτή**

γ) όταν $-1 < \chi < 1$ τότε η (1) γίνεται $2\chi + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\chi = -8 \Leftrightarrow \chi = -\frac{18}{2} = -2$

που **απορρίπτεται**.

δ) όταν $\chi > 1$ τότε η (1) γίνεται $10 = 0$ **αδύνατη**

Άρα μοναδική λύση το **-2,5**

Λίγο πριν από τις ασκήσεις

Υπάρχουν πολλά ακόμη πράγματα που θα μπορούσε να πει κανείς για τα απόλυτα, όπως άλλωστε και για τα υπόλοιπα θέματα αυτού του βιβλίου, περιορίζομαι σ' αυτά που είναι χρήσιμα για τα υπόλοιπα χρόνια με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τις απαιτήσεις των εξετάσεων.

Άσκησης

Να λυθούν οι εξισώσεις :

1. ι) $|x| = \frac{7}{8}$ ιι) $|3x+2| = 5$ ιιι) $|-7x-15| = -\frac{15}{7}$

2. ι) $\left|\frac{3x}{7}+5\right| = 2$ ιι) $\left|\frac{2x}{3}+3x-\frac{x-1}{2}+3\right| = 2$ ιιι) $\left|2(x-1)+\frac{x}{3}\right| = 6$

3. ι) $|x^2+5x+1| = 5$ ιι) $|x^2-3| = 1$ ιιι) $|2x^2+9| = 2$

4. $\frac{3|x|+2}{4}-15 = 2(|x|-2)-\frac{77}{4}$ ιι) $2|x-1| = \frac{3|x-1|+2}{3} + \frac{|x-1|}{2}$

5. $5|3+2x|+2|7x-5| = 0$ (υπόδ. πρέπει $|3+2x| = 0$ και $|7x-5| = 0$)

6. $3|4x^2-16| = -9|x^2+4x+4|$

7. $|-11-x| = |3x+7|$

8. $|3+2x| = |7x-5|$

9. $|x^3+2x-5| = |6x+3+x^3|$

10. $|3+2x| = 3x-2$

11. $\left|\frac{5x}{2}+3x\right| = x+1$

12. $2|3x-1| + |x+1| - |x+5| = 0$

13. $|x+2| - 2|x-1| = |x-3| = 0$

14. $|1-x| = -|3x-5| + |2x-7| = 0$

3. Πως λύνουμε ανισώσεις με απόλυτες τιμές ;

Τις εξισώσεις με απόλυτα της κατατάσσουμε σε ορισμένες κατηγορίες – «μορφές» και ανάλογα με την «μορφή» προκύπτει και ο «τρόπος» λύσης, δες μερικές από τις πιο χτυπητές περιπτώσεις σαν και αυτές που μπορεί να σου «πέσουν» σ' ολόκληρη τη μαθητική σου «καριέρα».

✓ α) Μορφή $|P(x)| < \alpha$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και α αριθμός.

Απάντηση :

$$|P(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < P(x) < \alpha \begin{cases} P(x) < \alpha \\ \text{και} \\ P(x) > -\alpha \end{cases}$$

Οι λύσεις προκύπτουν από τη συναλήθευση των ανισώσεων

Προσοχή Η $|P(x)| < \alpha$, με $\alpha < 0$ (π.χ. $|P(x)| < -3$) είναι αδύνατη

Σημείωση προς το παρόν το $P(x)$ θα είναι 1^{ου} βαθμού, αργότερα, στα επόμενα κεφάλαια θα βρούμε και περιπτώσεις όπου το $P(x)$ θα είναι πολυώνυμο ανωτέρου βαθμού (2^{ου}, 3^{ου} κλπ).

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $|x| < \frac{3}{5}$

Απάντηση: $|x| < \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}$

Πάντα δίνουμε και γραφικά τις λύσεις



2. Να λυθεί η ανίσωση $|x| < -3$

Απάντηση: $|x| < -3$ Αδύνατη (διότι $|x| \geq 0$ και $-3 < 0$)

3. Να λυθεί η εξίσωση $|3x+2| < 7$

Απάντηση: $|3x+2| < 7 \Leftrightarrow -7 < 3x+2 < 7 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{ι) } 3x+2 < 7 \Leftrightarrow 3x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3} \text{ και} \\ \text{ιι) } 3x+2 > -7 \Leftrightarrow 3x > -9 \Leftrightarrow x > -\frac{9}{3} = -3 \Leftrightarrow x > -3 \end{cases}$$

Γραφικά οι λύσεις είναι



✓ **β) Μορφή $|P(x)| > \alpha$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και α αριθμός.**

Απάντηση:

$$|P(x)| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) > \alpha \\ \text{ή} \\ P(x) < -\alpha \end{cases}$$

Λύσεις της ανίσωσης είναι όλες οι λύσεις και των δύο ανισώσεων (όχι μόνο οι κοινές αλλά όλες)

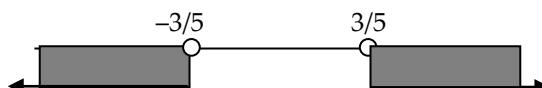
Προσοχή Η $|P(x)| > \alpha$ με $\alpha < 0$ (π.χ. $|P(x)| > -3$) είναι ταυτότητα

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $|x| > \frac{3}{5}$

Απάντηση: $|x| > \frac{3}{5} \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5} \text{ ή } x > \frac{3}{5}$

Γραφικά οι λύσεις είναι



2. Να λυθεί η ανίσωση $|x| > -3$

Απάντηση: $|x| > -3$ ταυτότητα (διότι $|x| \geq 0 > -3$ για κάθε x)

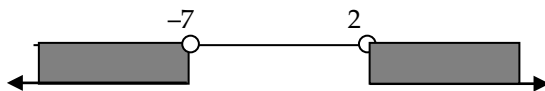
3. Να λυθεί η εξίσωση $|2x+5| > 9$

Απάντηση: $|2x+5| > 9 \Leftrightarrow$

$$\text{ι) } 2x+5 > 9 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{ιι) } 2x+5 < -9 \Leftrightarrow 2x < -14 \Leftrightarrow x < -7$$

Γραφικά οι λύσεις είναι



Οδηγίες προς «κολυμβητές» Νο 1:

Διπλές ανισώσεις της μορφής $\beta < |P(x)| < \alpha$ οδηγούν ουσιαστικά σε σύστημα

$$\beta < |P(x)| < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |P(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < P(x) < \alpha \\ |P(x)| > \beta \Leftrightarrow P(x) < -\beta \text{ ή } P(x) > \beta \end{cases}$$

μορφές α και β προηγούμενως

Δες το σχετικό το παράδειγμα

4. Να λυθεί η εξίσωση $3 < |3x+2| < 7$

Απάντηση:

$$3 < |3x+2| < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} |3x+2| < 7 & (1) \\ |3x+2| > 3 & (2) \end{cases}$$

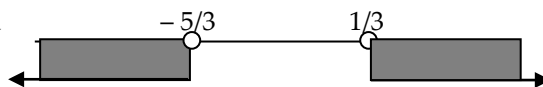
$$(1) \Leftrightarrow -7 < 3x+2 < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 < 7 \\ \text{και} \\ 3x+2 > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 5 \\ \text{και} \\ 3x > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{3} \\ \text{και} \\ x > -3 \end{cases}$$

Γραφικά οι λύσεις της $|3x+2| < 7$ (1) είναι

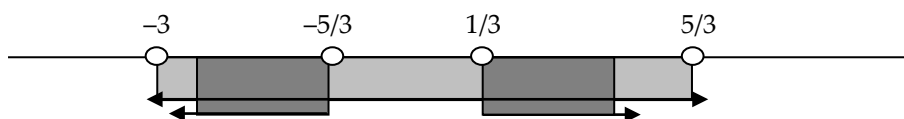


$$(2) \quad |3x+2| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 < -3 \\ \text{ή} \\ 3x+2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -5 \\ \text{ή} \\ 3x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{3} \\ \text{ή} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Γραφικά οι λύσεις τις $|3x+2| > 3$ είναι



Οι λύσεις της $3 < |3x+2| < 7$ συνολικά προκύπτουν από την γραφική λύση όλων των πιο πάνω ανισώσεων



Άρα τελικά λύσεις της $3 < |3x+2| < 7$ είναι τα $x \in \mathbb{P} : -3 < x < -\frac{5}{3} \text{ ή } \frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$.

Παρατήρηση: Όταν έχεις ανίσωση της μορφής $-3 < |P(x)| < -5$ είναι αδύνατη.

Ενώ η ανίσωση της μορφής $-3 < |P(x)| < 5 \Leftrightarrow 0 < |P(x)| < 5$

Οδηγίες προς «κολυμβητές» Νο 2 :

Ανισώσεις της μορφής $\kappa P(x) + \lambda < 0$, $\kappa P(x) + \lambda > 0$ τις επιλύουμε κατ' αρχήν ως ανισώσεις με «κατ' αρχήν» άγνωστο το $P(x)$ και στο τέλος καταλήγουμε στην μορφή $|P(x)| < \alpha$ ή στη μορφή $|P(x)| > \alpha$ οπότε δουλεύεις ανάλογα (όπως στα προηγούμενα παραδείγματα δηλαδή).

Δες και αυτό το παράδειγμα

Παράδειγμα

5. Να λυθεί η ανίσωση $2|2x+5| + \frac{|2x+5|-1}{3} > \frac{2x+5}{2} + \frac{97}{6}$ (1)

Σ' αυτές τις περιπτώσεις βοηθάει σημαντικά να χρησιμοποιείς «βοηθητικό» άγνωστο δηλαδή να βάζεις το $|2x+5| = \omega$ οπότε απλοποιείται σημαντικά η παράσταση όπως θα δεις και στη απάντηση του παραδείγματος στην επόμενη σελίδα.

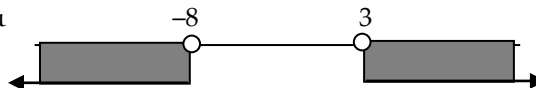
Απάντηση :

$$\text{Βάζω το } |2x+5| = \omega \text{ οπότε η (1) γίνεται } 2\omega + \frac{\omega-1}{3} > \frac{\omega}{2} + \frac{97}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot 2\omega + 6 \cdot \frac{\omega-1}{3} > 6 \cdot \frac{\omega}{2} + 6 \cdot \frac{97}{6} \Leftrightarrow$$

$$12\omega + 2(\omega-1) > 3\omega + 97 \Leftrightarrow 12\omega + 2\omega - 2 > 3\omega + 97 \Leftrightarrow 12\omega + 2\omega - 3\omega > 97 + 2 \Leftrightarrow 11\omega > 99 \Leftrightarrow \omega > 9$$

$$\text{Άρα } |2x+5| > 9 \Leftrightarrow \text{ι) } 2x+5 > 9 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ή } \text{ιι) } 2x+5 < -9 \Leftrightarrow 2x < -14 \Leftrightarrow x < -7$$

Γραφικά οι λύσεις της (1) είναι



✓ γ) Μορφή $|P(x)| < \Phi(x)$

Απάντηση : Προϋπόθεση για να έχει λύση η ανίσωση είναι ή $\Phi(x) > 0$. Οπότε λύνω πρώτα αυτή την ανίσωση και βρίσκω περιορισμούς (με τη μορφή ανίσωσης) για το x και ακολούθως :

$$|P(x)| < \Phi(x) \Leftrightarrow -\Phi(x) < P(x) < \Phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) > -\Phi(x) \\ \text{ή} \\ P(x) < \Phi(x) \end{cases}$$

οπότε λύνεις απλώς αυτές τις 2 εξισώσεις και δίνεις τις κοινές τους λύσεις πάνω στον ίδιο άξονα αναφέροντας και τους περιορισμούς για το x . Δες και το επόμενο παράδειγμα και θα καταλάβεις.

Παράδειγμα

6. Να λυθεί η ανίσωση $|5x-3| < 2x+1$ (1)

Για να έχει λύσεις η (1) πρέπει $2x+1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ τότε θα είναι :

$$|5x-3| < 2x+1 \Leftrightarrow -(2x+1) < 5x-3 < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ι) } 5x-3 > -(2x+1) \\ \text{ή} \\ \text{ιι) } 5x-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$$\text{ι) } 5x-3 > -(2x+1) \Leftrightarrow 5x-3 > -2x-1 \Leftrightarrow 5x+2x > -1+3 \Leftrightarrow 7x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{7}$$

$$\text{ii) } 5x - 3 < 2x + 1 \Leftrightarrow 5x - 2x < 1 + 3 \Leftrightarrow 3x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$$

Οπότε οι λύσεις προκύπτουν από το συνδυασμό: $x > -\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{7} < x < \frac{4}{3}$ και τελικά είναι

$\frac{2}{7} < x < \frac{4}{3}$ όπως φαίνεται και από το σχήμα



✓ δ) Μορφή $|P(x)| > \Phi(x)$ (1)

Απάντηση: Αρχικά θα κάνεις την εξής μικρή διερεύνηση:

Αν $\Phi(x) < 0$ (λύνεις και βρίσκεις τι «κάνει» το x) τότε η (1) είναι ταυτότητα.

Αν $\Phi(x) > 0$ (δε χρειάζεται να λύσεις την ανίσωση γιατί από πριν ξέρεις τι «κάνει» το x) τότε :

$$H(1): |P(x)| > \Phi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } P(x) < -\Phi(x) \\ \text{ή} \\ \text{ii) } P(x) > \Phi(x) \end{cases}$$

οπότε επιλύω απλώς αυτές τις 2 εξισώσεις και δίνω τις κοινές τους λύσεις πάνω στον ίδιο άξονα στον οποίο έχω και τους περιορισμούς για το x όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Προσοχή: όταν δύο ανισώσεις συνδέονται με το **και** τότε βρίσκουμε τις κοινές τους λύσεις ενώ όταν συνδέονται με το **ή** τότε λύσεις είναι οι λύσεις και των 2 ανισώσεων (όλες μαζί)

ε) Μορφή $|P(x)| > |\Phi(x)|$

ζ) Μορφή $|P(x)| < |\Phi(x)|$

Απάντηση:

Πρακτικά τέτοιες ασκήσεις αντιμετωπίζονται με βάση την ιδιότητα :

$$\alpha, \beta > 0 \text{ και } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^n < \beta^n \text{ και συγκεκριμένα } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$$

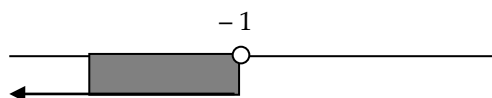
Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $|x+3| < |x-1|$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } |x+3|, |x-1| \geq 0 \text{ (προσοχή απαραίτητη προϋπόθεση) τότε } |x+3| < |x-1| &\Leftrightarrow \\ |x+3|^2 < |x-1|^2 &\Leftrightarrow (x+3)^2 < (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow 8x + 8 < 0 &\Leftrightarrow 8x < -8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{8} \Leftrightarrow x < -1 \end{aligned}$$

Γραφικά οι λύσεις της $|x+3| < |x-1|$ είναι



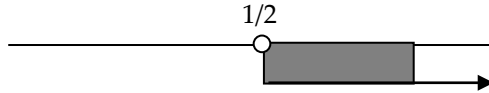
2. Να λυθεί η ανίσωση $|2 + 3\chi| > |3\chi - 5|$

Απάντηση :

Επειδή $|2 + 3\chi|, |3\chi - 5| \geq 0$ τότε $|2 + 3\chi| > |3\chi - 5| \Leftrightarrow |2 + 3\chi|^2 > |3\chi - 5|^2 \Leftrightarrow$
 $(2 + 3\chi)^2 > (3\chi - 5)^2 \Leftrightarrow 4 + 12\chi + 9\chi^2 > 9\chi^2 - 30\chi + 25 \Leftrightarrow$

$$9\chi^2 + 12\chi + 4 - 9\chi^2 + 30\chi - 25 > 0 \Leftrightarrow 42\chi - 21 > 0 \Leftrightarrow 42\chi > 21 \Leftrightarrow \chi > \frac{21}{42} \Leftrightarrow \chi > \frac{1}{2}$$

Γραφικά οι λύσεις της $|2 + 3\chi| < |3\chi - 5|$ είναι



Άσκησης

Να επιλυθούν οι ανισώσεις :

1. $|3\chi - 7| < 3$

2. $|5 - 2\chi| \leq 11$

3. $\left| 3 - \frac{\chi - 1}{2} + 5\chi - \frac{\chi}{3} \right| < 2$

4. $|7\chi + 2| < -3$

5. $5 < -2| \chi - 7|$

6. $\left| \frac{2\chi - 3}{5} + \frac{\chi}{2} - 3\chi + 2 \right| \geq 1$

7. $\left| 3 - \frac{\chi}{2} \right| > 7$

8. $|2(\chi + 3) - 3\chi + 7| > 4$

9. $\left| \frac{3\chi - 1}{2} \right| > -3$

10. $|3 - 2\chi| > 0$

11. ι) $5 < |3\chi + 5| < 11$ υ) $-3 < |3\chi + 2| < 5$ ιι) $-3 < |\chi + 1| < -2$

12. $3|\chi + 1| - \frac{|x + 1|}{2} < 3 + \frac{|x + 1|}{5}$

$$13. |2\chi - 3| + 2 < -3(|2\chi - 3| + 5)$$

$$14. 4|2\chi + 1| - \frac{|2\chi + 1|}{3} > 3 + \frac{|2\chi + 1|}{2}$$

$$15. \frac{|1 - \chi|}{3} + 2 \geq -2|1 - \chi| + 1$$

$$16. \text{ ι) } |3\chi + 7| < 2\chi - 3 \quad \text{ ιι) } 3|5\chi - 4| < -2(\chi + 3)$$

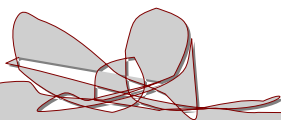
$$17. 3|\chi + 2| - 3\chi < 2(|\chi + 2| + \chi - 5)$$

$$18. \frac{|1 - \chi|}{2} - 3\chi \geq -|1 - \chi| + \frac{|1 - \chi|}{6} + 2\chi - 9$$

$$19. \left| 3 - \frac{\chi}{2} \right| > 7\chi + 1$$

$$20. \text{ ι) } |2\chi + 1| < |1 - 2\chi| \quad \text{ ιι) } \left| \frac{\chi}{3} - 1 \right| \leq |3\chi + 5| \quad \text{ ιιι) } |\chi + 1| < |\chi - 1|$$

$$21. \text{ ι) } \left| \frac{\chi}{5} + 2 \right| \geq |\chi + 5| \quad \text{ ιι) } |\chi - 1| > 2|\chi + 1| \quad \text{ ιιι) } |2 - 3\chi| > -|2001\chi - 1999|$$



Είναι πιο εύκολο να μάθεις μαθηματικά παρά ποδήλατο.
Με το ποδήλατο μαθαίνοντας θα πέσεις οπωσδήποτε και αρκετές φορές ,
με τα μαθηματικά τουλάχιστον δεν κινδυνεύεις.

1.7 Ρίζες Πραγματικών αριθμών

Εστω η εξίσωση $x^2 = 9$. Αυτή όπως ξέρεις έχει 2 λύσεις, τους αριθμούς $+3$ και -3 .

Την θετική ρίζα της $x^2 = 9$ (δηλ τον $+3$) ορίζουμε ως τετραγωνική ρίζα του 9 και την συμβολίζουμε με $\sqrt{9}$. Δηλαδή είναι $\sqrt{9} = +3$ διότι $+3 > 0$ και $(+3)^2 = 9$

Γενικότερα δίνουμε τον πιο κάτω ορισμό.

Ορισμός 1

Αν $\alpha \geq 0$ (μη αρνητικός) τότε n -οστή ρίζα του α (συμβολικά $\sqrt[n]{\alpha}$) θα ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό β ($\beta \geq 0$) για τον οποίο ισχύει $\beta^n = \alpha$

Δηλαδή, στις περιπτώσεις που υπάρχουν δύο αριθμοί β και $-\beta$ (αντίθετοι) που ικανοποιούν την εξίσωση $x^n = \alpha$, εμείς «κρατάμε» ως n -οστή ρίζα τον θετικό αριθμό.

Έτσι για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει $\sqrt[n]{\alpha} \geq 0$ (από τον ορισμό)

Είναι επίσης από τον ορισμό $\sqrt{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha}$ και $\alpha = \sqrt[1]{\alpha}$

(Στις ασκήσεις βοηθούν αυτές οι αντικαταστάσεις)

Προσοχή δεν ορίζεται η $\sqrt[n]{\alpha}$ και βέβαια δεν ορίζονται ρίζες αρνητικών αριθμών π χ τα σύμβολα $\sqrt{-5}$, $\sqrt[4]{-1256}$ δεν έχουν νόημα

✓ Ιδιότητες των ριζών

1. $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ αν $\alpha \geq 0$
2. $\sqrt[2k]{\alpha^{2k}} = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$
4. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$
5. $\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$ αν $\alpha \geq 0$
6. $\sqrt[n]{\alpha^v} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$
7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[m \cdot n]{\alpha}$ αν $\alpha \geq 0$
8. $\sqrt[k \cdot v]{\alpha^{k \cdot m}} = \sqrt[k]{\alpha^m}$ αν $\alpha \geq 0$
9. Αν $\alpha \geq \beta > 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} \geq \sqrt[n]{\beta}$

Αποδείξεις

$$2. (\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha \text{ αν } \alpha \geq 0$$

Αν είναι $\alpha \geq 0$ τότε έχει νόημα η $\sqrt[n]{\alpha}$, έστω $\sqrt[n]{\alpha} = \beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^n = \alpha$ τότε $\alpha = \beta^n = (\sqrt[n]{\alpha})^n$

$$3. \sqrt[2k]{\alpha^{2k}} = |\alpha| \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\sqrt[2k]{\alpha^{2k}}, |\alpha| > 0$ τότε $\sqrt[2k]{\alpha^{2k}} = |\alpha| \Leftrightarrow (\sqrt[2k]{\alpha^{2k}})^{2k} = |\alpha|^{2k} \Leftrightarrow \alpha^{2k} = |\alpha|^{2k}$ που ισχύει άρα ισχύει και η $\sqrt[2k]{\alpha^{2k}} = |\alpha|$

Παραδείγματα: $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$ αλλά $\sqrt{\chi^2} = |\chi|$ και $\sqrt[8]{(2\chi-1)^8} = |2\chi-1|$, $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$ και $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$

Με τις ρίζες θα είσαι προσεκτικός όσον αφορά το γεγονός ότι πρέπει $a \geq 0$. Αν αυτό δεν το έχεις σίγουρο (αν π.χ. στη ρίζα υπάρχει μεταβλητή χ , ψ κλπ όπως στη ρίζα $\sqrt[8]{(2\chi-1)^8}$) τότε ή θα βάζεις απόλυτο ($\sqrt[8]{(2\chi-1)^8} = |2\chi-1|$) ή θα απαιτείς η υπόριζη ποσότητα να είναι ≥ 0 όπως π.χ. στην $(\sqrt{3\chi-2})^2$, στην οποία πριν κάνω οτιδήποτε απαιτώ $3\chi-2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{2}{3}$ και κατόπιν γράφω $(\sqrt{3\chi-2})^2 = 3\chi-2$.

Όταν κάτω από την ρίζα έχει δύναμη άρτιας τάξης τότε βάζεις απόλυτο και κατόπιν αν χρειάζεται το βγάζεις όπως στο παράδειγμα

$$\sqrt{(\chi-2)^2} = |\chi-2| = \begin{cases} \chi-2 & \text{αν } \chi > 2 \\ \text{ή} \\ -\chi+2 & \text{αν } \chi < 2 \end{cases}$$

4. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$

Είναι $(\sqrt[n]{\alpha} \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha})^n (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha \cdot \beta$ (ιδιότητες δυνάμεων)

και $(\sqrt[n]{\alpha \beta})^n = \alpha \beta$ (λόγω της 1) άρα $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή αυτής της ιδιότητας είναι η $\sqrt[n]{\alpha^k} \cdot \sqrt[n]{\alpha^l} = \sqrt[n]{\alpha^k \cdot \alpha^l} = \sqrt[n]{\alpha^{k+l}}$

Παράδειγμα: $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}$ και $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ όμως προσοχή αν δεν ξέρεις ότι $\alpha, \beta \geq 0$ τότε βάζεις απόλυτα π.χ. η ισότητα $\sqrt{(-16)(-3)} = \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-3}$ είναι λάθος γιατί δεν υπάρχουν τα $\sqrt{-16}$ και $\sqrt{-3}$

ενώ είναι σωστό να γράψεις $\sqrt{(-16) \cdot (-3)} = \sqrt{|-16|} \cdot \sqrt{|-3|} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

5. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$

Απόδειξη όμοια με την 3

Παράδειγμα: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ και $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ προσοχή επίσης στο $\sqrt{\frac{-9}{-25}} = \frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-25}}$ που είναι λάθος ενώ πρέπει $\sqrt{\frac{-9}{-25}} = \frac{\sqrt{|-9|}}{\sqrt{|-25|}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$.

Να παρατηρήσεις ότι το $\sqrt{\frac{-9}{-25}}$ έχει νόημα διότι το πηλίκο ομοσήμων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός

6. $\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$ αν $\alpha \geq 0$

Είναι $(\sqrt[n]{\alpha^m})^n = \alpha^m$ και $[(\sqrt[n]{\alpha})^m]^n = (\sqrt[n]{\alpha})^{m \cdot n} = [(\sqrt[n]{\alpha})^n]^m = (\alpha)^m = \alpha^m \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha^m})^n = [(\sqrt[n]{\alpha})^m]^n$
 $\Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$

$$\sqrt[v]{\alpha^v \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[v]{\beta} \quad \text{όταν } \alpha, \beta \geq 0$$

Είναι $(\sqrt[v]{\alpha^v \beta})^v = \alpha^v \beta$ (ιδιότητα 1) και $(\alpha \cdot \sqrt[v]{\beta})^v = \alpha^v \cdot (\sqrt[v]{\beta})^v = \alpha^v \cdot \beta$ άρα ισχύει και ή $\sqrt[v]{\alpha^v \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[v]{\beta}$.

★ **Παράδειγμα :** $\sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2 \sqrt[4]{3}$

7. $\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot v]{\alpha} \quad \alpha \geq 0$

Είναι $(\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}})^\mu = \left((\sqrt[v]{\alpha})^\mu \right)^v = (\sqrt[v]{\alpha})^{\mu \cdot v} = \alpha$ και $(\sqrt[\mu \cdot v]{\alpha})^{\mu \cdot v} = \alpha$ άρα

$$(\sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}})^\mu = (\sqrt[\mu \cdot v]{\alpha})^{\mu \cdot v} \Leftrightarrow \sqrt[\mu]{\sqrt[v]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot v]{\alpha}$$

8. $\sqrt[\kappa \cdot v]{\alpha^{\kappa \cdot \mu}} = \sqrt[v]{\alpha^\mu} \quad \alpha \geq 0$

$$\sqrt[\kappa \cdot v]{\alpha^{\kappa \cdot \mu}} = \sqrt[v]{\sqrt[\kappa]{\alpha^{\kappa \cdot \mu}}} = \sqrt[v]{(\sqrt[\kappa]{\alpha^\mu})^\kappa} = \sqrt[v]{\alpha^\mu}$$

➡ **Προσοχή σημαντική ιδιότητα** για τις πράξεις : Αν πολλαπλασιάσουμε τον εκθέτη της ρίζας και τον εκθέτη της υπόριζης ποσότητας με τον ίδιο αριθμό προκύπτει ισοδύναμη (ίση) ρίζα.

★ **Παραδείγματα :** $\sqrt[3]{\sqrt[5]{235}} = \sqrt[3 \cdot 5]{235} = \sqrt[15]{235}$ και $\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}} = \sqrt[3 \cdot 4]{12} = \sqrt[12]{12}$ επίσης $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{4 \cdot 3} = \sqrt[3]{12}$
(βοηθάει στην απλοποίηση της μορφής των ριζών)

9. Αν $\alpha \geq \beta > 0 \Leftrightarrow \sqrt[v]{\alpha} \geq \sqrt[v]{\beta}$

$$\text{Επειδή } \sqrt[v]{\alpha}, \sqrt[v]{\beta} \geq 0 \text{ τότε } \sqrt[v]{\alpha} > \sqrt[v]{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt[v]{\alpha})^v > (\sqrt[v]{\beta})^v \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

[γνωστή ιδιότητα των δυνάμεων και 1^η ιδιότητα ριζών]

Εφαρμογή ι) $9 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{9} > \sqrt{4} \Leftrightarrow 3 > 2$

ιι) $(2x-1)^2 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2} > \sqrt{9} \Leftrightarrow |2x-1| > 3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

@ **Πως κάνουμε πράξεις με ρίζες ; – Πως συγκρίνουμε ρίζες ;**

✱ Όταν στη συνέχεια θα κάνουμε πράξεις με ρίζες θα έχουμε υπ' όψιν τα εξής :

Οι ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί και άρα (και γι' αυτές) ισχύει ότι και για τους υπόλοιπους αριθμούς δηλ όλες οι ιδιότητες των πράξεων, των δυνάμεων κλπ .

Οι ρίζες όμως (όταν είναι άρρητοι αριθμοί) έχουν και «ιδιαιτερότητες» σε σχέση με τους ρητούς, με τους οποίους εξασκηθήκαμε αρκετά στις πράξεις. Για το λόγο αυτό οι πράξεις με ρίζες παρουσιάζουν «ιδιαιτερότητες».

Να θυμάσαι επίσης ότι **όλα γίνονται στα μαθηματικά αλλά το καθένα με το δικό του τρόπο .**

Διάβασε προσεκτικά τις παρατηρήσεις της επόμενης σελίδας

- ✓ Οι ρίζες λειτουργούν όπως οι δυνάμεις. Στην πρόσθεση - αφαίρεση αν είναι όμοιες τότε το αποτέλεσμα είναι μία ρίζα αλλιώς μένει με τη μορφή αθροίσματος ριζών.

Πχ $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$, $3\sqrt{11} - 15\sqrt{11} = -12\sqrt{11}$ ενώ $6\sqrt{15} - 4\sqrt{13}$ μένει $6\sqrt{15} - 4\sqrt{13}$ και $7\sqrt{8} + 4\sqrt{29}$ μένει επίσης $7\sqrt{8} + 4\sqrt{29}$ δηλαδή το $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ λειτουργεί όπως το $2x^3 + 7x^3 = 9x^3$ ή το $2x^5 - 5x^5 = -3x^5$

- ✓ Στον πολλαπλασιασμό - διαίρεση πρέπει οι ρίζες να έχουν τον ίδιο εκθέτη ριζικού.

Πχ $\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{36}$ ή $\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{9}{2}}$ Αν οι ρίζες δεν έχουν τον ίδιο εκθέτη τότε μπορούμε να μετατρέψουμε τα ριζικά σε ισοδύναμα με τον ίδιο εκθέτη ρίζας, με βάση την 8η ιδιότητα και να κάνουμε ορισμένες πράξεις. Να πώς μπορούμε να το πετύχουμε αυτό:

Έστω η $\sqrt[3]{2}$ τότε $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$ και $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5}$ αλλά και $\sqrt[3]{2} = \sqrt[30]{2^9}$ κλπ.

Δες και το παράδειγμα. Έστω ότι θέλω να κάνω τον εξής πολλαπλασιασμό

$\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt{3}$ τότε βρίσκω το Ε. Κ. Π. των εκθετών των ριζών που είναι το 12 και πολλαπλασιάζω τους εκθέτες, ριζών και υπορίζω με τον κατάλληλο αριθμό έτσι ώστε οι ρίζες να έχουν τον ίδιο εκθέτη δηλ $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{5^2} \cdot \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{2^9 5^2 3^6}$

Είναι **κρίμα** που δεν χρησιμοποιείται από φέτος ο συμβολισμός $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ διότι τότε όλα θα ήταν πιο απλά με τις ρίζες. Σε κάθε περίπτωση όμως μπορείς εσύ να το κάνεις στο πρόχειρο δηλ στο προηγούμενο παράδειγμα μπορείς να δουλέψεις στο πρόχειρο ως εξής :

$$\sqrt[4]{2^3} \sqrt[5]{5} \sqrt{3} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \text{οπότε}$$

$$\text{κάνεις ομώνυμα τα κλάσματα (τους εκθέτες)} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{3}} \cdot \overset{2}{\cancel{1}} \cdot \overset{1}{\cancel{1}}}{\underset{12}{\cancel{4}} \cdot \underset{6}{\cancel{6}} \cdot \underset{2}{\cancel{2}}} = \frac{9}{12} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{12} \text{ και}$$

$$\text{τότε στο καθαρό γράφεις } \sqrt[4]{2^3} \sqrt[5]{5} \sqrt{3} = \sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{5^2} \cdot \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{2^9 5^2 3^6}$$

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα σαν και αυτά που πιθανόν θα αντιμετωπίσεις.



Παραδείγματα: Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

1. $(\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+5})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+5})$

Απάντηση

$$(\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+5})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+5}) = (\sqrt{2x+1})^2 - (\sqrt{3x+5})^2 =$$

$$(2x+1) - (3x+5) = 2x+1-3x-5 = -x-4 \text{ Εννοείται ότι έχουν νόημα οι ρίζες. Πράγμα που}$$

$$\text{σημαίνει } 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \text{ και } 3x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \text{ ή τελικά}$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \text{ [θα βρεις αν κάνεις τη συναλήθευση (γραφικά)]}$$

2. $\sqrt{16a} + 3\sqrt{4a} - 5\sqrt{25a} = 4\sqrt{a} + 3 \cdot 2\sqrt{a} - 5 \cdot 5\sqrt{a} = 4\sqrt{a} + 6\sqrt{a} - 25\sqrt{a} = -15\sqrt{a}$

3. Να βρεθούν τα αναπτύγματα: $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ και $(a \pm \sqrt{b})^2$

Απάντηση: $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{a \cdot b} + b = (a+b) \pm 2\sqrt{a \cdot b}$

Και $(a \pm \sqrt{b})^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot \sqrt{b} + b = (a^2+b) \pm 2 \cdot a \cdot \sqrt{b}$



Μερικά ακόμη **Παραδείγματα:** Να βρείτε τα αναπτύγματα

ι) $(2 + \sqrt{3})^2$ ιι) $(7 - 3\sqrt{2})^2$ ιιι) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ ιν) $(\sqrt{7} - 5\sqrt{11})^2$

Απάντηση

ι) $(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

ιι) $(7 - 3\sqrt{2})^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 49 - 42\sqrt{2} + 9 \cdot 2 = 49 + 18 - 42\sqrt{2} = 67 - 42\sqrt{2}$

ιιι) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5 = 8 + 2\sqrt{15}$

ιν) $(\sqrt{7} - 5\sqrt{11})^2 = (\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{7})(5\sqrt{11}) + (5\sqrt{11})^2 = 7 - 10\sqrt{77} + 25 \cdot 11 = 282 - 10\sqrt{77}$

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{67 - 42\sqrt{2}}$

Απάντηση $\sqrt{67 - 42\sqrt{2}} = \sqrt{49 + 18 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{7^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2}} = \sqrt{(7 - 3\sqrt{2})^2} = |7 - 3\sqrt{2}| = 7 - 3\sqrt{2}$ διότι $7 > 3\sqrt{2}$ πράγματι $7 > 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 7^2 > (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 49 > 9 \cdot 2 \Leftrightarrow 49 > 18$ που ισχύει.

Εδώ φαίνεται να χρειάζεται έμπνευση για να κάνεις αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Στην πραγματικότητα έστω ότι θέλεις να απλοποιήσεις την παράσταση :

$\sqrt{\alpha - \beta\sqrt{\kappa}}$ ή την παράσταση $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{\kappa}}$ τότε «σκέφτεσαι» ότι η

$\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{\kappa}}$ έχει προκύψει από την $\sqrt{\chi^2 + \psi^2 + 2\chi\psi} = \sqrt{(\chi + \psi)^2} = |\chi + \psi|$

και πρέπει $\chi^2 + \psi^2 = \alpha$ (1) και $2\chi\psi = \beta\sqrt{\kappa}$ (2) οπότε λύνεις το σύστημα των (1) και (2). (Θα δούμε αργότερα πως λύνουμε τέτοια συστήματα)

5. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} \sqrt{5 + \sqrt{5}}$

Απάντηση : $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} \sqrt{5 + \sqrt{5}} = \sqrt{5} \sqrt{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} =$

$$\sqrt{5} \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{5} \sqrt{25 - 5} = \sqrt{5} \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$$

6. Αν $\alpha \neq \beta$ και $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} &= \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} + \\ &\frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})} = \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} + \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} = \\ &\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

7. Να γίνουν οι πράξεις $\sqrt[k]{\alpha^x} \cdot \sqrt[l]{\alpha^y}$, $\sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha^2}$ και να δώσεις το αποτέλεσμα ως μία ρίζα. [είναι $\alpha, \beta \geq 0$]

Απάντηση $\sqrt[k]{\alpha^x} \cdot \sqrt[l]{\alpha^y} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^{x \cdot l}} \cdot \sqrt[k \cdot l]{\alpha^{y \cdot k}} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^{x \cdot l + y \cdot k}} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^{x \cdot l + y \cdot k}}$

Άρα

$$\sqrt[k]{\alpha^x} \cdot \sqrt[l]{\alpha^y} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^{x \cdot l + y \cdot k}}$$

π.χ. $\sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[5]{\alpha^2} = \sqrt[20]{\alpha^{15}} \cdot \sqrt[20]{\alpha^8} = \sqrt[20]{\alpha^{15+8}} = \sqrt[20]{\alpha^{23}}$

8. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[k]{\alpha}$ και $\sqrt[l]{\alpha}$ όταν $k > l > 1$

επίσης τους $\sqrt[k]{\alpha^k}$ και $\sqrt[l]{\alpha^l}$ όταν είναι k, l, μ, ν φυσικοί και $\frac{k}{\nu} > \frac{l}{\mu}$, $\alpha > 1$

Απάντηση: Για να συγκρίνω τις $\sqrt[k]{\alpha}$ και $\sqrt[l]{\alpha}$ τις κάνω ρίζες με ίδιους εκθέτες οπότε $\sqrt[k]{\alpha} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^l}$ και $\sqrt[l]{\alpha} = \sqrt[k \cdot l]{\alpha^k}$, αρκεί λοιπόν να συγκρίνω τις νέες υπορίζες ποσότητες.

Όμως $k > l \Leftrightarrow k^k > l^k$ είναι και $k^k > l^l$ (αφού $k > l > 1$) άρα $k^k > l^k > l^l$ άρα $k^k > l^l \Leftrightarrow \sqrt[k \cdot l]{\alpha^k} > \sqrt[k \cdot l]{\alpha^l} \Leftrightarrow \sqrt[k]{\alpha} > \sqrt[l]{\alpha}$

Όμοια για τους αριθμούς $\sqrt[k]{\alpha^k}$ και $\sqrt[l]{\alpha^l}$ έχω $\sqrt[k]{\alpha^k} = \sqrt[k \cdot \mu]{\alpha^{k \cdot \mu}}$ και $\sqrt[l]{\alpha^l} = \sqrt[k \cdot \nu]{\alpha^{l \cdot \nu}}$.

Αρκεί λοιπόν να συγκρίνω τους $\alpha^{k \cdot \mu}$ και $\alpha^{l \cdot \nu}$ και επειδή είναι δυνάμεις με βάση $\alpha > 1$ αρκεί να συγκρίνω τους εκθέτες οπότε έχω: $\frac{k}{\nu} > \frac{l}{\mu} \Leftrightarrow k \cdot \mu > l \cdot \nu$ (επειδή $k, l, \mu, \nu > 0$) τότε

$$k \cdot \mu > l \cdot \nu \Leftrightarrow \alpha^{k \cdot \mu} > \alpha^{l \cdot \nu} \text{ άρα } \sqrt[k \cdot \mu]{\alpha^{k \cdot \mu}} > \sqrt[l \cdot \nu]{\alpha^{l \cdot \nu}} \Leftrightarrow \sqrt[k]{\alpha^k} > \sqrt[l]{\alpha^l}$$

9. Να συγκρίνετε τους αριθμούς ι) $\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}$ ii) $\sqrt{3}$ και $\sqrt[3]{2}$ iii) $\sqrt[3]{7}$ και $\sqrt[4]{9}$

Απάντηση $\sqrt{3} > \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 > (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 3 > 2$ που ισχύει άρα ισχύει και η $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ επίσης $\sqrt{3} > \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \sqrt[6]{3^3} > \sqrt[6]{2^2} \Leftrightarrow 3^3 > 2^2 \Leftrightarrow 27 > 4$ προφανώς άρα ισχύει και η αρχική.

Και για τους $\sqrt[3]{7}$ και $\sqrt[4]{9}$ έχω $\sqrt[3]{7} = \sqrt[63]{7^7}$ και $\sqrt[4]{9} = \sqrt[63]{9^9}$ οπότε $7 < 9 \Leftrightarrow 7^7 < 9^7 < 9^9$ άρα $7^7 < 9^9$ άρα $\sqrt[63]{7^7} < \sqrt[63]{9^9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} < \sqrt[4]{9}$.

Ένα άλλο σπουδαίο επίσης θέμα είναι:

@ Πως απαλλάσσουμε τους παρονομαστές από τα ριζικά.

Αν ο παρονομαστής ενός κλάσματος έχει ένα ή περισσότερα ριζικά τι κάνουμε για να βρούμε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή; Απλά πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή. Πριν δούμε παραδείγματα ας μιλήσουμε για συζυγείς παραστάσεις.

Οι παραστάσεις $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ για τις οποίες ισχύει $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ λέγονται **συζυγείς**.

Οι παραστάσεις $\pi \chi$ $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ είναι **συζυγείς** διότι:

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 = \alpha - \beta.$$

Οι πιο γνωστές συζυγείς παραστάσεις που θα μας χρειαστούν δίνονται μέσα από παραδείγματα και αριθμητικές εφαρμογές

1.

Η $\sqrt{a}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{a}$

**Παράδειγμα:**

Να μετατρέψεις σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή $\sqrt{a}$

$$\frac{\kappa}{\sqrt{a}} = \frac{\kappa\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{\kappa\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\kappa\sqrt{a}}{a}, \text{ εφαρμογή } \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

και $\frac{3x^2}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x^2\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}\sqrt{2x+1}} = \frac{3x^2\sqrt{2x+1}}{2x+1}$ **πρέπει $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ για να έχει νόημα η ρίζα.**

2.

Η $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ είναι συζυγής με την $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

**Παράδειγμα:**

Να μετατρέψεις σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

$$\alpha) \frac{\kappa}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\kappa(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\kappa(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\kappa(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

Εφαρμογή $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$

Και $\frac{5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = \frac{5(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} = \frac{5(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})}{(x+2) - (x-1)} =$

$$\frac{5(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})}{x+2-x-1} = \frac{5(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})}{3} \text{ με τον περιορισμό ότι } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \text{ και } x-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x \geq -1$ οι οποίες συναληθεύουν όταν $x \geq -1$

$$\beta) \frac{\kappa}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\kappa(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\kappa(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\kappa(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

Εφαρμογή ι) $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{11}} = \frac{12(\sqrt{7} + \sqrt{11})}{(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{7} + \sqrt{11})} = \frac{12(\sqrt{7} + \sqrt{11})}{7 - 11} = \frac{12(\sqrt{7} + \sqrt{11})}{-4} = -3(\sqrt{7} + \sqrt{11})$

ιι) $\frac{3x^2}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x^2+5}} = \frac{3x^2(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5})}{(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x^2+5})(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5})} = \frac{3x^2(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5})}{(2x+5) - (x^2+5)} =$

$$\frac{3x^2(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5})}{2x+5-x^2-5} = -\frac{3x^2(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x^2+5})}{x(x-2)}$$

γ) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$ τότε $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} = 2$

Απάντηση: $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} - \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} =$

$$\frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} - \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-2\sqrt{\beta}\sqrt{\beta}}{\alpha - \beta} + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = 2$$

3. $\boxed{\text{Η } \alpha \pm \sqrt{\beta} \text{ είναι συζυγής με την } \alpha \mp \sqrt{\beta}}$

και

$\boxed{\text{Η } \sqrt{\alpha} \pm \beta \text{ είναι συζυγής με την } \sqrt{\alpha} \mp \beta}$



Παράδειγμα: Να μετατρέψεις σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha} \mp \beta$

$$\frac{\kappa}{\alpha - \sqrt{\beta}} = \frac{\kappa(\alpha + \sqrt{\beta})}{(\alpha - \sqrt{\beta})(\alpha + \sqrt{\beta})} = \frac{\kappa(\alpha + \sqrt{\beta})}{(\alpha^2 - \beta)} \quad \text{όμοια και οι υπόλοιπες περιπτώσεις πχ } \frac{\kappa}{\sqrt{\alpha} + \beta} \text{ κλπ}$$

4. $\boxed{\text{Η } \sqrt[n]{\alpha^m} \text{ είναι συζυγής με την } \sqrt[n]{\alpha^{n-m}}}$



Παράδειγμα: Να μετατρέψεις σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή $\sqrt[n]{\alpha^m}$

$$\frac{\kappa}{\sqrt[n]{\alpha^m}} = \frac{\kappa \sqrt[n]{\alpha^{n-m}}}{\sqrt[n]{\alpha^m} \sqrt[n]{\alpha^{n-m}}} = \frac{\kappa \sqrt[n]{\alpha^{n-m}}}{\sqrt[n]{\alpha^n}} = \frac{\kappa \sqrt[n]{\alpha^{n-m}}}{\alpha}$$

$$\text{Εφαρμογή } \frac{10}{\sqrt[5]{15^3}} = \frac{10 \sqrt[5]{15^{5-3}}}{\sqrt[5]{15^3} \sqrt[5]{15^{5-3}}} = \frac{10 \sqrt[5]{15^2}}{\sqrt[5]{15^5}} = \frac{10 \sqrt[5]{15^2}}{15} = \frac{2 \sqrt[5]{225}}{3}$$

5. $\boxed{\text{Η } \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta} \text{ είναι συζυγής με την } \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}}$

Και

$\boxed{\text{Η } \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} \text{ είναι συζυγής με την } \sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}}$



Παράδειγμα: Να μετατρέψεις σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή το κλάσμα που έχει παρονομαστή $\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$

$$\frac{\kappa}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\kappa(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2})}{(\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2})} = \frac{\kappa(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2})}{\alpha - \beta}$$

με ίδιο ακριβώς τρόπο και όταν έχει παρονομαστή $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$

Αυτές είναι μερικές (οι πιο γνωστές) από τις πολλές περιπτώσεις που υπάρχουν.

Όλες οι πιο πάνω παραστάσεις είναι συζυγείς διότι έχουν γινόμενο απαλλαγμένο από ρίζες όπως είδαμε στην αρχή για τις $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

@ Πως λύνουμε εξισώσεις που έχουν ρίζες ;

1. Γενική μορφή εξίσωσης $\sqrt[n]{A(x)} = \kappa$ (1)

όπου $A(x)$ πολυώνυμο του x και κ αριθμός.

Πριν απ' όλα πρέπει να βρούμε πότε έχει νόημα η εξίσωση, οπότε λύνουμε την $A(x) \geq 0$. Έτσι προκύπτουν οι περιορισμοί για το x . Στη συνέχεια έχουμε

α) Αν $\kappa < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη

β) Αν $\kappa \geq 0$ τότε υψώνουμε και τα 2 μέλη της (1) στην n και έχουμε $A(x) = \kappa^n$ οπότε λύνουμε την $A(x) = \kappa^n$.

Δεκτές είναι οι λύσεις που θα ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2. Γενική μορφή εξίσωσης $\sqrt[n]{A(x)} = \kappa \cdot \sqrt[n]{B(x)}$ (1)

όπου $A(x), B(x)$ πολυώνυμα του x και κ αριθμός.

Πριν απ' όλα πρέπει να βρούμε πότε έχει νόημα η εξίσωση, οπότε λύνουμε τις $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$. Έτσι προκύπτουν οι περιορισμοί για το x . Στη συνέχεια έχουμε

α) Αν $\kappa < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη

β) Αν $\kappa \geq 0$ τότε υψώνουμε και τα 2 μέλη στην n και έχουμε $A(x) = \kappa^n B(x)$ οπότε λύνουμε την $A(x) = \kappa^n B(x)$.

Δεκτές είναι οι λύσεις που θα ικανοποιούν τους περιορισμούς.

3. Γενική μορφή εξίσωσης $\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$ (1)

όπου $A(x), B(x)$ πολυώνυμα του x .

Πριν απ' όλα πρέπει να βρούμε πότε έχει νόημα η εξίσωση, οπότε πρέπει να συναληθεύσουμε τις $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$. Έτσι προκύπτουν οι περιορισμοί για το x .

Στη συνέχεια υψώνουμε και τα 2 μέλη στην n και έχουμε $A(x) = (B(x))^n$ οπότε λύνουμε την $A(x) = (B(x))^n$.

Δεκτές είναι οι λύσεις που θα ικανοποιούν τους περιορισμούς.

4. Γενική μορφή εξίσωσης $\alpha\sqrt[n]{A(x)} + \beta\sqrt[n]{B(x)} = \gamma\sqrt[n]{\Gamma(x)}$

όπου $A(x), B(x), \Gamma(x)$ πολυώνυμα του x και κ αριθμός.

Όταν υπάρχουν περισσότερα από 2 ριζικά και $n > 2$ τότε η επίλυση γίνεται αρκετά περίπλοκη και ξεφεύγει από τις δυνατότητες της Α! Λυκείου, γι' αυτό το λόγο θα περιοριστούμε για $n = 2$ δηλαδή στην $\alpha\sqrt{A(x)} + \beta\sqrt{B(x)} = \gamma\sqrt{\Gamma(x)}$

Πριν απ' όλα πρέπει να βρούμε πότε έχει νόημα η εξίσωση, οπότε συναληθεύουμε τις $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ και $\Gamma(x) \geq 0$. Έτσι προκύπτουν οι περιορισμοί για το x .

Στη συνέχεια υψώνουμε και τα 2 μέλη στο τετράγωνο και έχουμε

$\alpha^2 A(x) + 2\alpha\beta\sqrt{A(x)}\sqrt{B(x)} + \beta^2 B(x) = \gamma^2 \Gamma(x) \Leftrightarrow 2\alpha\beta\sqrt{A(x)B(x)} = \gamma^2 \Gamma(x) - \alpha A(x) - \beta B(x)$ οπότε την λύνουμε όπως στην μορφή 2.

Δεκτές είναι οι λύσεις που θα ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Δες Παραδείγματα στην επόμενη σελίδα:

Να λυθούν οι εξισώσεις

1. ι) $\sqrt{2\chi-1}=5$ ιι) $\sqrt{3-5\chi}=-5$ ιιι) $\sqrt[3]{\frac{2(3\chi-1)}{3}}=2$

2. ι) $\sqrt{\chi-1}=\sqrt{3\chi+2}$ ιι) $\sqrt{2-5\chi}=\sqrt{\chi+2}$ ιιι) $\sqrt{2\chi-1}=-\sqrt{7\chi+5}$ ιν) $\sqrt{\chi-1}=\sqrt{2-3\chi}$

3. ι) $\sqrt{\chi^2+8}=\sqrt{2-5\chi}$ ιι) $\sqrt[3]{\chi^2+4}=\sqrt[3]{5\chi-10}$

4. $2\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi+1}=3\sqrt{\chi-1}$

Απάντηση:

1. ι) $\sqrt{2\chi-1}=5$ πρέπει $2\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{2}$ τότε $\sqrt{2\chi-1}=5 \Leftrightarrow (\sqrt{2\chi-1})^2=5^2$

$\Leftrightarrow 2\chi-1=25 \Leftrightarrow 2\chi=24 \Leftrightarrow \chi=12$ δεκτή γιατί $12 > \frac{1}{2}$

ιι) $\sqrt{3-5\chi}=-5$ αδύνατη διότι $\sqrt{3-5\chi} \geq 0$ (εννοείται ότι $3-5\chi \geq 0$)

ιιι) $\sqrt[3]{\frac{2(3\chi-1)}{3}}=2$ πρέπει $\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ τότε $\sqrt[3]{\frac{2(\chi-1)}{3}}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2(\chi-1)}{3}}\right)^3=2^3$

$\Leftrightarrow \frac{2(\chi-1)}{3}=4 \Leftrightarrow 2(\chi-1)=12 \Leftrightarrow 2\chi-2=12 \Leftrightarrow 2\chi=14 \Leftrightarrow \chi=7$ δεκτή αφού $7 > 1$

2. ι) $\sqrt{\chi-1}=\sqrt{3\chi+2}$ πρέπει $\chi-1 \geq 0$ και $3\chi+2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ και $3\chi \geq -2 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ και $\chi \geq -2/3 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ (για να έχει νόημα η παράσταση) τότε είναι:

$\sqrt{\chi-1}=\sqrt{3\chi+2} \Leftrightarrow (\sqrt{\chi-1})^2=(\sqrt{3\chi+2})^2 \Leftrightarrow \chi-1=3\chi+2 \Leftrightarrow -2\chi=3 \Leftrightarrow \chi=-\frac{3}{2}$

Απορρίπτεται διότι πρέπει $\chi \geq 1$

ιι) $\sqrt{2-5\chi}=\sqrt{\chi+2}$ πρέπει $2-5\chi \geq 0$ και $\chi+2 \geq 0 \Leftrightarrow -5\chi \geq -2$ και $\chi \geq -2 \Leftrightarrow$

$\chi \leq \frac{2}{5}$ και $\chi \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq \chi \leq \frac{2}{5}$ (για να έχει νόημα η παράσταση) τότε είναι

$\sqrt{2-5\chi}=\sqrt{\chi+2} \Leftrightarrow (\sqrt{2-5\chi})^2=(\sqrt{\chi+2})^2 \Leftrightarrow 2-5\chi=\chi+2 \Leftrightarrow -6\chi=0 \Leftrightarrow \chi=0$

δεκτή διότι $-2 \leq 0 \leq \frac{2}{5}$

ιιι) $\sqrt{2\chi-1}=-\sqrt{7\chi+5}$ Αδύνατη διότι $\sqrt{2\chi-1} \geq 0$ και $-\sqrt{7\chi+5} \leq 0$

ιν) $\sqrt{\chi-1}=\sqrt{2-3\chi}$ πρέπει $\chi-1 \geq 0$ και $2-3\chi \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 1$ και $-3\chi \geq -2 \Leftrightarrow$

$\chi \geq 1$ και $\chi \leq \frac{2}{3}$ οι οποίες όμως δεν συναληθεύουν άρα δεν έχει νόημα η εξίσωση.

3. ι) $\sqrt{\chi^2+8}=\sqrt{2-5\chi}$ Για να έχει νόημα η παράσταση πρέπει $\chi^2+8 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε

$\chi \in \mathbb{R}$ και $2-5\chi \geq 0 \Leftrightarrow -5\chi \geq -2 \Leftrightarrow \chi \leq \frac{2}{5}$

Τότε είναι $\sqrt{\chi^2+8}=\sqrt{2-5\chi} \Leftrightarrow (\sqrt{\chi^2+8})^2=(\sqrt{2-5\chi})^2 \Leftrightarrow \chi^2+8=2-5\chi \Leftrightarrow \chi^2+8-2+5\chi=0 \Leftrightarrow$

$\chi^2+5\chi+6=0 \Leftrightarrow \chi=-2$ ή $\chi=-3$ (δεκτές και οι δύο γιατί ικανοποιούν τον περιορισμό $\chi \leq \frac{2}{5}$.)

ii) $\sqrt[3]{\chi^2+4} = \sqrt[3]{5\chi-10}$ πρέπει $\chi^2+4 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ και $5\chi-10 \geq 0 \Leftrightarrow 5\chi \geq 10 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

Τότε είναι $\sqrt[3]{\chi^2+4} = \sqrt[3]{5\chi-10} \Leftrightarrow \chi^2+4 = 5\chi-10 \Leftrightarrow \chi^2+4-5\chi+10=0 \Leftrightarrow \chi^2-5\chi+14=0$ Αδύνατη διότι η διακρίνουσά της $\Delta = -31 < 0$

4. $2\sqrt{\chi} + \sqrt{\chi+1} = 3\sqrt{\chi-1}$ πρέπει $\chi \geq 0$ και $\chi+1 \geq 0$ και $\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 0$ και $\chi \geq -1$ και $\chi \geq 1 \Leftrightarrow \chi \geq 1$

Τότε $2\sqrt{\chi} + \sqrt{\chi+1} = 3\sqrt{\chi-1} \Leftrightarrow (2\sqrt{\chi} + \sqrt{\chi+1})^2 = (3\sqrt{\chi-1})^2 \Leftrightarrow$

$$(2\sqrt{\chi})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{\chi} \cdot \sqrt{\chi+1} + (\sqrt{\chi+1})^2 = (3\sqrt{\chi-1})^2 \Leftrightarrow 4\chi + \chi + 1 + 4\sqrt{\chi(\chi+1)} = 9(\chi-1) \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{\chi(\chi+1)} = -5\chi - 1 + 9\chi - 9 \Leftrightarrow (4\sqrt{\chi(\chi+1)})^2 = (4\chi - 10)^2 \Leftrightarrow 16(\chi^2 + \chi) = 16\chi^2 - 80\chi + 100 \Leftrightarrow$$

$$16\chi^2 + 16\chi - 16\chi^2 + 80\chi - 100 = 0 \Leftrightarrow 96\chi = 100 \Leftrightarrow \chi = \frac{100}{96} = \frac{25}{24} . \text{ Απορρίπτεται γιατί } \frac{25}{24} > 1$$

@ Η εξίσωση $\chi^v = \alpha$

Οι φυσικοί αριθμοί καθώς και οι ακέραιοι χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τους άρτιους και τους περιττούς. **Άρτιοι** είναι οι αριθμοί (φυσικοί – ακέραιοι) οι οποίοι διαιρούνται με το 2, **περιττοί αυτοί που δεν είναι άρτιοι** (οι υπόλοιποι) δηλ αυτοί που δεν διαιρούνται με το 2.

Να παρατηρήσουμε δύο πράγματα

1^{ον} Κάθε φυσικός ή ακέραιος θα είναι οπωσδήποτε **άρτιος ή περιττός**

2^{ον} Αυτοί οι ορισμοί ισχύουν μόνο για τους φυσικούς και τους ακεραίους και δεν ισχύουν για τους πραγματικούς ή για τους ρητούς που δεν είναι ταυτόχρονα ακέραιοι.

3^{ον} Θεωρείται γνωστός ο συμβολισμός $v = \begin{cases} 2 \cdot \kappa \text{ αν } v \text{ άρτιος} \\ 2 \cdot \kappa + 1 \text{ ή } 2 \cdot \kappa - 1 \text{ αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$

Εστω η **εξίσωση $\chi^v = \alpha$** τότε αν για τον v διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (άρτιος – περιττός) θα έχουμε :

1^{ον} Αν v **άρτιος** δηλ $v = 2\kappa$ η εξίσωση $\chi^v = \alpha$ παίρνει την μορφή $\chi^{2\kappa} = \alpha$ (1) οπότε

i) Αν $\alpha \geq 0$ τότε η (1) έχει κατ' αρχήν την λύση $\sqrt[2\kappa]{\alpha}$ [γιατί $(\sqrt[2\kappa]{\alpha})^{2\kappa} = \alpha$]. Όμως και

$$(-\sqrt[2\kappa]{\alpha})^{2\kappa} = \left((- \sqrt[2\kappa]{\alpha})^2\right)^\kappa = \left((\sqrt[2\kappa]{\alpha})^2\right)^\kappa = (\sqrt[2\kappa]{\alpha})^{2\kappa} = \alpha \text{ άρα υπάρχει και δεύτερη λύση η } -\sqrt[2\kappa]{\alpha} .$$

Συμπέρασμα :

Αν v **άρτιος** και $\alpha \geq 0$ τότε η $\chi^v = \alpha$ έχει 2 λύσεις τις $\sqrt[2\kappa]{\alpha}$ και $-\sqrt[2\kappa]{\alpha}$

ii) Αν $\alpha < 0$ η εξίσωση $\chi^v = \alpha$ είναι αδύνατη διότι κάθε πραγματικός αριθμός όταν υψωθεί σε άρτια δύναμη δίνει θετικό αποτέλεσμα και ποτέ αρνητικό.

Συμπέρασμα :

Αν v **άρτιος** και $\alpha < 0$ τότε δεν υπάρχουν λύσεις για τη $\chi^v = \alpha$

2ον Αν n περιττός δηλ $n = 2κ + 1$ η εξίσωση $x^n = α$ παίρνει την μορφή $x^{2κ+1} = α$ (2) οπότε

ι) Αν $α ≥ 0$ τότε η (2) έχει λύση την $\sqrt[2κ+1]{α}$ [γιατί $(\sqrt[2κ+1]{α})^{2κ+1} = α$]

ιι) Αν $α < 0$ τότε η (2) έχει την λύση $-\sqrt[2κ+1]{|α|}$ [γιατί $(-\sqrt[2κ+1]{|α|})^{2κ+1} = -|α| = α$ αφού $α < 0$]

Συμπέρασμα:

Αν n περιττός η $x^n = α$ έχει λύση για κάθε $α ∈ ℝ$ (θετικό ή αρνητικό).

Πρόσεξε λίγο τον συμβολισμό όταν $α < 0$ και n περιττός τότε η λύση είναι $-\sqrt[2κ+1]{|α|}$ δηλαδή μέσα στην ρίζα έχει απόλυτο $α$

Παρατήρηση: όπου συναντάμε $\sqrt[n]{α}$ να απαιτούμε $α ≥ 0$ ανεξάρτητα αν n άρτιος ή περιττός.

Παραδείγματα: Να επιλυθούν οι εξισώσεις

- ι) $x^2 = 5$ ιι) $x^3 = 8$ ιιι) $x^4 = -256$ ιιιι) $x^4 = 256$ ν) $x^7 = -5$
 νι) $x^3 = -x$ νιι) $x^5 + 5x^4 + 6x^3 = 0$ νιιι) $\sqrt[4]{(3x-2)^4} = 7$

Απαντήσεις:

ι) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

ιι) $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

ιιι) $x^4 = -256$ αδύνατη

ιιιι) $x^4 = 256 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 16$

ν) $x^7 = -5 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{5}$

νι) $x^3 = -x \Leftrightarrow x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ άρα μοναδική λύση το 0 διότι η $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ είναι αδύνατη.

νιι) $x^5 + 5x^4 + 6x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0$ (1) ή $x^2 + 5x + 6 = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow x = 0$ και (2) $\Leftrightarrow x = -2$ ή $x = -3$. Άρα **λύσεις οι αριθμοί 0, -2, -3**

νιιι) Είναι $\sqrt[4]{(3x-2)^4} = |3x-2|$. Οπότε $\sqrt[4]{(3x-2)^4} = 7 \Leftrightarrow |3x-2| = 7 \Leftrightarrow 3x-2 = 7$ ή $3x-2 = -7$ τότε

$3x-2 = 7 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ και $3x-2 = -7 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$.

Άρα **λύσεις οι αριθμοί 3 και $-\frac{5}{3}$**

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

1. Για κάθε $x ∈ ℝ$ ισχύει $\sqrt{x^2} = |x|$ και γενικότερα $\sqrt[2κ]{x^{2κ}} = |x|$ Σ Λ

2. Για κάθε $x ∈ ℝ^+$ ($x ≥ 0$) ισχύει $(\sqrt{x})^2 = x$ και γενικότερα $(\sqrt[2κ]{x})^{2κ} = x$ Σ Λ

3. Για κάθε $\chi \in \mathbb{P}$ ισχύει $\sqrt[3]{\chi^3} = \chi$ και γενικότερα $\sqrt[2\kappa+1]{\chi^{2\kappa+1}} = \chi$
4. Για κάθε $\chi, \psi \in \mathbb{P}^+$ ($\chi, \psi \geq 0$) ισχύει $\sqrt[3]{\chi} \cdot \sqrt[3]{\psi} = \sqrt[3]{\chi \cdot \psi}$
5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ και είναι ομόσημοι τότε ισχύει $\frac{\sqrt{|\alpha|}}{\sqrt{|\beta|}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
6. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ και είναι ομόσημοι τότε ισχύει $\sqrt{|\alpha|} \cdot \sqrt{|\beta|} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
7. Για κάθε $\chi \in \mathbb{P}^+$ ($\chi \geq 0$) ισχύει $\frac{\sqrt{\chi}}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{\chi}}$
8. Η παράσταση $\sqrt{2} + \sqrt{102}$ έχει συζυγή την $\sqrt{102} - \sqrt{2}$
9. Η παράσταση $5 + \sqrt{3}$ έχει συζυγή την $5 - \sqrt{3}$
10. Η παράσταση $\sqrt[3]{2^5}$ έχει συζυγή την $\sqrt[3]{2^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$



1. Να γίνουν οι πράξεις

- ι) $3\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 2\sqrt{128}$ ιι) $\sqrt{8\alpha} - 7\sqrt{18\alpha} + 2\sqrt{128\alpha}$
- iii) $2\sqrt{8\alpha^3} + 3\alpha\sqrt{18\alpha^2} - 6\alpha^2\sqrt{128}$ iv) $\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{32}$

2. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

- ι) $(\sqrt{-5x+1} - \sqrt{2x+5}) \cdot (\sqrt{-5x+1} + \sqrt{2x+5})$
- ii) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$ και $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{5})^2$
- iii) $(2^3 + \sqrt{5x})^2$ και $(\chi^2 + \sqrt{2x})^2$
- iv) $\sqrt{52 + 30\sqrt{3}}$ και $\sqrt{\chi^2 + 75 - 10\chi\sqrt{5}}$
- v) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{11 + \sqrt{11}} \sqrt{11 - \sqrt{11}}$ [Απ. = $5\sqrt{22}$]
- vi) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11 + \sqrt{110}} \sqrt{11 - \sqrt{110}}$ [Απ. = 11]

3. Με την προϋπόθεση ότι έχουν νόημα να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

- ι) $\sqrt[3]{3^5} \sqrt[4]{3^3}$, $\sqrt[3]{(-3)^6} \sqrt[5]{(-3)^4}$, $\sqrt[7]{7^5} \sqrt[4]{(-7)^4}$
- ii) $\frac{3\chi^2}{\sqrt{\chi^2 + 1}}$

$$\text{iii)} \frac{(\chi^3 + 7)}{\sqrt{\chi^3 + 7}}$$

$$\text{iv)} \frac{11}{\sqrt{21} - \sqrt{10}}$$

$$\text{v)} \frac{3\chi}{\sqrt{5\chi + 7} + \sqrt{2\chi + 7}}$$

$$\text{vi)} \frac{(3\chi^2 + 5\chi + 6)}{\sqrt{5\chi + 7} + \sqrt{4\chi + 9}}$$

$$\text{vii)} \frac{2\chi}{\sqrt[5]{\chi^4}} \quad \text{και} \quad \frac{23}{\sqrt[5]{5^4}}$$

$$\text{viii)} \frac{5}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}} \quad \text{και} \quad \frac{3\chi}{\sqrt[3]{\chi^2} - \sqrt[3]{5}}$$

$$\text{ix)} \frac{11}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}} \quad \text{και} \quad \frac{5\chi^2}{\sqrt[3]{3\chi} + \sqrt[3]{5\chi}}$$

$$\text{x)} \sqrt{5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \quad \text{και} \quad \sqrt[5]{7 \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}} \quad [\alpha\text{παντ. } \sqrt[4]{5^3} \quad \text{και} \quad \sqrt[18]{7^5}]$$

4. Να υπολογίσεις τους αντίστροφους των :

$$\text{i)} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \text{και} \quad \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \quad \text{όταν } \alpha, \beta > 0$$

$$\text{ii)} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$\text{iii)} \sqrt{6} + \sqrt{5} \quad \text{και} \quad \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

Τι παρατηρείς ; μπορείς να γενικεύσεις το συμπέρασμα

5. Να δείξεις ότι :

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha - \beta = 1$ τότε ο αντίστροφος του $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ είναι ο $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$
εφαρμογή : ποιος είναι ο αντίστροφος του $\sqrt{24} - \sqrt{23}$

6. Να δείξεις ότι :

$$\text{Αν } \alpha, \beta \geq 0 \text{ και } \alpha - \beta = 1 \text{ τότε } \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = \alpha + \beta = 2\beta + 1 = 2\alpha - 1$$

7. Να δείξεις ότι αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε

$$\text{i)} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq \sqrt{2\alpha \cdot \beta} \quad \text{ii)} \alpha + \beta \geq \sqrt{2\alpha \cdot \beta}$$

8. Να δείξεις ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$ τότε

$$\text{i)} \alpha < \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \sqrt{\alpha \cdot \beta} < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \quad \text{ii)} 10 < \sqrt{120} < 11 < 12$$

9. Να δείξεις ότι αν $\alpha \geq 0$ τότε

$$\text{i)} \sqrt[\mu]{\alpha} \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha^{\mu + \nu}} \quad \text{ii)} \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[7]{\alpha^5} = \sqrt[35]{\alpha^{12}}$$

10. Να συγκρίνεται τους αριθμούς

ι) $\alpha) \sqrt{\alpha+\beta}$ και $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ όταν $\alpha, \beta \geq 0$

ιι) $\sqrt{13}$ και $\sqrt{7}+\sqrt{6}$

ιιι) $\sqrt[5]{5}$ και $\sqrt[3]{3}$

ιν) $\sqrt[5]{(-5)^2}$ και $\sqrt[3]{(-3)^2}$

νι) $3+\sqrt{5}$ και $\sqrt{12\sqrt{5}}$

11. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

ι) $\chi^3 = 8$ ιι) $\chi^3 = -8$ ιιι) $\chi^6 = -32$ ιν) $\chi^{10} = 1024$ ν) $\chi^{2001} = -2001$

νι) $\chi^{2001} = -\chi$ νιι) $\chi^{2001} = \chi^{2000}$ νιιι) $\chi^{\kappa+\lambda} = \chi^{\kappa}$ ιχ) $\chi^7 - 7\chi^6 + 6\chi^5 = 0$

χ) $\sqrt[11]{(11\chi-1)^{11}} = 11$ χι) $\sqrt[2004]{(2004\chi-2003)^{2004}} = 2003$ χιι) $\sqrt{2\chi^2+1} = 3$

12. Να επιλύσετε τις εξισώσεις

ι) $\sqrt{5\chi^{11} + \chi^2 + 7} = -5$ ιι) $\sqrt[3]{\frac{5(\chi+3)}{2}} = 5$

ιιι) $\sqrt{3\chi-7} = 2\sqrt{\chi+1}$ ιν) $\sqrt{7-11\chi} = \sqrt{\chi+4}$

ν) $\sqrt{1998\chi-1999} = -2000\sqrt{2001\chi+2002}$

νι) $\sqrt{\chi-100} = \sqrt{50-2\chi}$ νιι) $\sqrt{3\chi^2+24} = \sqrt{6-15\chi}$

νιιι) $\sqrt{\chi} + 2\sqrt{\chi-2} = -\sqrt{2\chi-1}$ ιχ) $\sqrt[2001]{\chi^2+1999} = \sqrt[2001]{-5\chi+1993}$

Είδες τι παθαίνει όποιος διαβάζει πολύ

Και γενικότερα :

**Διαβάζει κάποιος για να γίνει έξυπνος άνθρωπος.
Εσύ που είσαι «ξύπνιος» από γεννησιμιού σου δεν ...
το χρειάζεσαι**

Από το δεκάλογο του «ξύπνιου» μαθητή



*Υπομονή άλλα 3 κεφάλαια μείνανε μόνο το πέμπτο
δεν ξέρει κανείς τι θα γίνει*

Περί εξισώσεων ο λόγος

2.1 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$).

✓ Κάθε πολυώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ονομάζεται **τριώνυμο 2^{ου} βαθμού**.

✓ Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ονομάζεται **εξίσωση 2^{ου} βαθμού**.

Επειδή ο όρος που τα χαρακτηρίζει είναι ο αx^2 , γι' αυτό όταν θα μιλάμε για το τριώνυμο ή την εξίσωση 2^{ου} βαθμού θα απαιτούμε $\alpha \neq 0$ διότι αν $\alpha = 0$ τότε το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \beta x + \gamma$ και δεν είναι 2^{ου} βαθμού.

Επειδή για πάρα πολλά προβλήματα ή εξισώσεις η λύση τους «περνάει» μέσα από τη λύση μίας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού, για το λόγο αυτό στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με αυτά τα θέματα.

✓ **Λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$.**

Για την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ υπάρχει γενικός τύπος ο οποίος μας δίνει της λύσεις της, όταν υπάρχουν.

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ (1)

Είναι $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 0$ και επειδή $\alpha \neq 0$ άρα η εξίσωση γίνεται :

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = 0$$

- **Θέτω $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$** οπότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0$.

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις για το $\frac{\Delta}{4\alpha^2}$: ι) $\frac{\Delta}{4\alpha^2} > 0$ ιι) $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0$ ιιι) $\frac{\Delta}{4\alpha^2} < 0$ και επειδή $4\alpha^2 > 0$ στην ουσία διακρίνουμε 3 περιπτώσεις για το Δ

1) $\Delta > 0$ Τότε $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = 0 \Leftrightarrow$

α) $x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

β) $x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ή

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2) $\Delta = 0$

Τότε η $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\chi + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \text{ ή } \chi + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

διπλή ρίζα ή δυο ρίζες πραγματικές και ίσες

3) $\Delta < 0$

Τότε η παράσταση

$$\alpha \left(\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right)$$

δεν παραγοντοποιείται

και επομένως

η εξίσωση

$$\alpha \left(\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right) = 0 \text{ δεν έχει λύση στο } \mathbb{R}.$$

Συμπερασματικά

➤ $\Delta > 0$ η $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\varrho_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } \varrho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad \varrho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Το $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ παραγοντοποιείται και είναι $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \varrho_1)(\chi - \varrho_2)$

➤ $\Delta = 0$ η $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Το $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ παραγοντοποιείται και είναι $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \varrho)^2$

➤ $\Delta < 0$ η $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ δεν έχει ρίζα πραγματική και

το τριώνυμο $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ δεν παραγοντοποιείται

Παρατήρηση 1

Η ποσότητα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ονομάζεται «Διακρίνουσα» διότι από αυτήν (δηλ. το πρόσθετό της συγκεκριμένα) διακρίνουμε αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες και πόσες. Από την Δ διακρίνουμε επίσης αν, πότε και πως παραγοντοποιείται το $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ γι' αυτό χρησιμοποιούμε τον όρο διακρίνουσα όχι μόνο για την εξίσωση αλλά και για το τριώνυμο.

Παρατήρηση 2

Αν οι α και γ είναι ετερόσημοι τότε $\alpha \cdot \gamma < 0 \Leftrightarrow -\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ άρα όταν α και γ ετερόσημοι η $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πάντοτε λύση. Αν οι α και γ είναι ομόσημοι δεν σημαίνει ότι η $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ δεν έχει λύση απλώς δεν έχει σίγουρα λύση και πρέπει να βρω την Δ για να δω αν έχει λύση.

Παρατήρηση 3

Όταν $\Delta < 0$ η $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$ με $\alpha \neq 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, αυτό δεν σημαίνει ότι δεν έχει καθόλου ρίζες, απλά σημαίνει ότι έχει ρίζες μόνο που αυτές (οι ρίζες δηλ.) ανήκουν σε άλλο σύνολο (το σύνολο των Μιγαδικών) που δεν μάθαμε ακόμη και θα μάθουμε αργότερα.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 + 3x - 2 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το αντίστοιχο τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$.

Απάντηση : Είναι $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -2$. Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 \Leftrightarrow \Delta = 25 > 0$.

Άρα 2 ρίζες τις $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ άρα $\rho_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ και $\rho_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

άρα ρίζες οι αριθμοί $\rho_1 = -2$ και $\rho_2 = \frac{1}{2}$

Οπότε $2x^2 + 3x - 2 = 2(x - \frac{1}{2})(x - (-2)) = 2(x - \frac{1}{2})(x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$.

2. Να λυθεί η $9x^2 - 12x + 4 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το $9x^2 - 12x + 4$.

Απάντηση :

Είναι $\alpha = 9, \beta = -12, \gamma = 4$. Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 \Leftrightarrow \Delta = 0$.

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα την $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{3}$ και

Το τριώνυμο $9x^2 - 12x + 4 = 9(x - \frac{2}{3})^2 = (3x - 2)^2$.

3. Να λυθεί η $5x^2 - 2x + 4 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το $5x^2 - 2x + 4$.

Είναι $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 4$. Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 4 - 80 \Leftrightarrow \Delta = -76 < 0$.

Άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες πραγματικές και το $5x^2 - 2x + 4$ δεν παραγοντοποιείται.

Παρατήρηση 4

Αν στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ (1) είναι: $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$ προτιμούμε (αντί για την Διακρίνουσα και τον τύπο των λύσεων) να ακολουθούμε την εξής πορεία:

i) Αν $\beta = 0$ τότε η (1) έχει την μορφή $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$ τότε

- Αν $-\frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$ τότε η $\alpha x^2 + \gamma = 0$ έχει δύο λύσεις τις $x = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ ενώ
- Αν $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ τότε η $\alpha x^2 + \gamma = 0$ είναι αδύνατη (δεν έχει λύσεις διότι $x^2 \geq 0$ για κάθε x)

ii) Αν $\gamma = 0$ τότε αυτή έχει την μορφή $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
(δηλαδή η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x = 0$ έχει πάντοτε δύο λύσεις εκ των οποίων η μία είναι το 0)

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $-3x^2 + 5x = 0$

Απάντηση : $-3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

2. Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 + 2 = 0$

Απάντηση: $3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$ Αδύνατη γιατί $x^2 > 0$ και $-\frac{2}{3} < 0$

3. Να λυθεί η εξίσωση $-2x^2 + 1 = 0$

Απάντηση: $-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Υπενθύμιση ➔ Να μην αφήνεις ποτέ ρίζα στον παρονομαστή ενός κλάσματος.

Έτσι λοιπόν είναι: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Παρατήρηση 5 ➔ Πολλές φορές η διακρίνουσα είναι **τέλειο** τετράγωνο $\pi\chi \kappa^2$ οπότε στον τύπο των λύσεων εμφανίζεται η παράσταση $\pm|\kappa|$. Το $\pm|\kappa|$ απλοποιείται ως εξής:

ι) αν $\kappa \geq 0$ τότε $|\kappa| = \kappa$ και άρα $\pm|\kappa| = \pm\kappa$ και

ιι) $\kappa < 0$ τότε $\pm|\kappa| = \pm(-\kappa) = \mp\kappa = \pm\kappa$ Τελικά είτε $\kappa \geq 0$ είτε $\kappa < 0$ το $\pm|\kappa| = \pm\kappa$ άρα όπου εμφανίζεται $\pm|\kappa|$ εμείς χωρίς πρόβλημα θα βάζουμε $\pm\kappa$ όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \lambda x - 2\lambda^2 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το $x^2 - \lambda x - 2\lambda^2$.

Απάντηση:

Είναι $\alpha = 1, \beta = -\lambda, \gamma = -2\lambda^2$. Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2\lambda^2) = \lambda^2 + 8\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta = 9\lambda^2$ είναι $\varrho_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{\lambda \pm \sqrt{9\lambda^2}}{2} \Leftrightarrow \varrho_{1,2} = \frac{\lambda \pm 3\lambda}{2 \cdot 1} = \frac{\lambda \pm 3\lambda}{2}$ άρα στην πράξη

$\varrho_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{\lambda \pm 3\lambda}{2}, \Leftrightarrow \boxed{\varrho_1 = -\lambda}$ και $\boxed{\varrho_2 = 2\lambda}$ και το $\boxed{x^2 - \lambda x - 2\lambda^2 = (x + \lambda)(x - 2\lambda)}$

Παρατήρηση 6 ➔ Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση συνδυασμού εξίσωσης 2ου βαθμού (ή τριωνύμου) και ανισοτήτων είναι οι ασκήσεις στις οποίες οι συντελεστές της εξίσωσης εξαρτώνται από μια παράμετρο και σου ζητά να βρεις την τιμή ή τις τιμές της παραμέτρου έτσι ώστε η εξίσωση $\pi\chi$ να έχει δυο ρίζες ή να έχει πραγματικές ρίζες κλπ. Σε κάθε περίπτωση μετατρέπεις την ερώτηση σε ανίσωση για την διακρίνουσα Δ και στη συνέχεια σε ανίσωση για την παράμετρο την οποία και λύνεις όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

Παραδείγματα

1. Να βρεις για ποιες τιμές του λ έχει ρίζες πραγματικές η $\lambda x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda = 0$ και πόσες ρίζες έχει σε κάθε περίπτωση.

Απάντηση: Για να έχει κατ' αρχήν ρίζες πραγματικές η εξίσωση πρέπει $\Delta \geq 0$.

Είναι $\alpha = \lambda, \beta = 2\lambda + 1, \gamma = \lambda$. Άρα $\Delta = (2\lambda + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda + 1$.

Είναι $4\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq -\frac{1}{4}$.

• Άρα όταν $\lambda > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$ και **η εξίσωση έχει 2 πραγματικές ρίζες.**

• Όταν $\lambda = -\frac{1}{4}$ τότε **η εξίσωση έχει μια πραγματική διπλή ρίζα.**

2. Να βρεις για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Απάντηση: Για να είναι τέλειο τετράγωνο το τριώνυμο πρέπει (και αρκεί) $\Delta = 0$.

Είναι $\alpha = \lambda$, $\beta = \lambda + 1$, $\gamma = 1$. Άρα $\Delta = (\lambda + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$.

Είναι $(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

- Άρα όταν $\lambda = 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$ και το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ είναι τέλειο τετράγωνο

3. Αν η εξίσωση $\mu^2 x^2 + 6\mu x + \mu + 11 = 0$ με $\mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα να βρείτε την τιμή του μ .

Απάντηση: Για να έχει διπλή ρίζα η εξίσωση $\mu^2 x^2 + 6\mu x + \mu + 11 = 0$ πρέπει (και αρκεί) $\Delta = 0$.

Είναι $\alpha = \mu^2$, $\beta = 6\mu$, $\gamma = \mu + 11$.

Άρα $\Delta = (6\mu)^2 - 4 \cdot \mu^2 \cdot (\mu + 11) = 36\mu^2 - 4\mu^3 - 44\mu^2 = -4\mu^2(\mu + 2)$. Άρα $-4\mu^2(\mu + 2) = 0 \Leftrightarrow$

- ❖ $\mu = 0$ που απορρίπτεται λόγω του αρχικού περιορισμού (ο οποίος υπάρχει για να έχει νόημα ως 2^{ου} βαθμού η εξίσωση).
- ❖ $\mu + 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = -2$ δεκτή, οπότε η $\mu^2 x^2 + 6\mu x + \mu + 11 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{3}{2}$ η αντίστοιχη λύση

Προβλήματα που λύνονται με Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Η λύση ορισμένων από τα «γνωστά μας» προβλήματα «περνάει» μέσα από την επίλυση μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού. Δεν υπάρχει καμία διαφορά στον τρόπο που αντιμετωπίζουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, ισχύει ότι έχουμε κουβεντιάσει στο 1^ο κεφάλαιο για τα προβλήματα γενικά. Ορίζουμε τον άγνωστο και προσπαθούμε να «μεταφράσουμε» αυτά που λέει το πρόβλημα, με λόγια, σε αλγεβρικές σχέσεις, δεσ δυο παραδείγματα

Παραδείγματα

1. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου αν είναι γνωστό ότι αυτά είναι διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί.

Απάντηση: Να θυμηθούμε ότι οι άρτιοι αριθμοί συμβολίζονται με $2k$ με $k \in \mathbb{Z}$. Άρα 3 διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί θα είναι οι $2k$, $2k + 2$, $2k + 4$. Προφανώς η υποτείνουσα που είναι η μεγαλύτερη πλευρά θα έχει μήκος $2k + 4$, και επί πλέον θα είναι $k > 0$ γιατί πρόκειται για μήκη πλευρών. Άρα θα είναι $(2k + 4)^2 = (2k + 2)^2 + (2k)^2$ (1) (λόγω Πυθαγορείου Θεωρήματος).

$$(1) \Leftrightarrow 4k^2 + 16k + 16 = 4k^2 + 8k + 4 + 4k^2 \Leftrightarrow 8k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 16k - 16 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 8k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(k^2 - 2k - 3) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta = \dots = 16. \text{ Άρα 2 ρίζες τις } k_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ άρα}$$

- ❖ $k_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ που απορρίπτεται λόγω του αρχικού περιορισμού και

- ❖ $k_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ άρα λύση οι αριθμοί $2 \cdot k = 6$ η μια κάθετη, $2 \cdot k + 2 = 8$ η άλλη κάθετη και $2 \cdot k + 4 = 10$ η υποτείνουσα

2. Το πλήθος των διαγωνίων ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο $\frac{n(n-3)}{2}$. Να υπολογίσεις πόσες πλευρές έχει το πολύγωνο αν είναι γνωστό ότι οι διαγωνιές του είναι 14

Απάντηση: Παρατήρησε ότι το $n > 0$. Έτσι λοιπόν θα πρέπει $\frac{n(n-3)}{2} = 14 \Leftrightarrow n^2 - 3n = 28 \Leftrightarrow$

$$n^2 - 3n - 28 = 0 \quad \Delta = \dots = 121 \quad \text{Άρα 2 ρίζες τις } n_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 11}{2} \quad \text{άρα}$$

❖ $n_1 = \frac{3-11}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ που απορρίπτεται λόγω του αρχικού περιορισμού και

❖ $n_2 = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7$ άρα το πολύγωνο έχει 7 πλευρές



Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

	Σ	Λ
1. Το πολυώνυμο $\alpha x^3 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο.	☐	☐
2. Το πολυώνυμο $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο.	☐	☐
3. Το πολυώνυμο $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο.	☐	☐
4. Οι εξισώσεις $\alpha x^2 + \beta x = 0$ και $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ είναι εξισώσεις 2ου βαθμού.	☐	☐
5. Οι εξισώσεις $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma = 0$ και $\alpha x^4 + \beta x^2 = 0$ με $\alpha \neq 0$ είναι 2ου βαθμού.	☐	☐
6. Η εξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -\beta^2 - 4\alpha\gamma$.	☐	☐
7. Το πολυώνυμο $\alpha x^2 + \beta x$ με $\alpha \neq 0$ είναι τριώνυμο	☐	☐
8. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πάντα δυο λύσεις, και η μία είναι το 0.	☐	☐
9. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει πάντοτε δυο λύσεις, τις $\pm \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.	☐	☐
10. Αν $\Delta \geq 0$ τότε η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.	☐	☐
11. Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ είναι τέλειο τετράγωνο.	☐	☐

Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

Στις πιο κάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής να κυκλώσετε την σωστή επιλογή.

1. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια διπλή ρίζα τότε θα είναι :
ι) $\Delta \leq 0$ ιι) $\Delta \geq 0$ ιιι) $\Delta \neq 0$ ιν) $\Delta > 0$ ν) $\Delta < 0$ νι) $\Delta = 0$ νιι) τίποτε απ' όλα.
2. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει :
ι) καμιά πραγματική ρίζα ιι) δυο ρίζες πραγματικές και άνισες
ιιι) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες ιν) άπειρες ρίζες
3. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μια ρίζα ρ (διπλή), τότε για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ θα ισχύει :
ι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (\alpha(\alpha - \rho))^2$ ιι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(\alpha - \rho)^2$ ιιι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(\alpha + \rho)^2$ ιν) τίποτε απ' όλα
4. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δυο πραγματικές ρίζες τότε θα είναι :
ι) $\Delta \neq 0$ ιι) $\Delta \geq 0$ ιιι) $\Delta = 0$ ιν) $\Delta > 0$ ν) $\Delta < 0$ νι) $\Delta \leq 0$ νιι) τίποτε απ' όλα.
5. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει :
ι) καμιά πραγματική ρίζα ιι) δυο ρίζες πραγματικές και άνισες
ιιι) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες ιν) άπειρες ρίζες
6. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές έστω ρ_1 και ρ_2 , τότε για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ θα ισχύει :
ι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (\alpha - \rho_1)(\alpha - \rho_2)$ ιι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(\alpha - \rho_1)(\alpha - \rho_2)$ ιιι) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(\alpha + \rho_1)(\alpha + \rho_2)$
7. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα τότε θα είναι :
ι) $\Delta \neq 0$ ιι) $\Delta \geq 0$ ιιι) $\Delta = 0$ ιν) $\Delta > 0$ ν) $\Delta < 0$ νι) $\Delta \leq 0$ νιι) τίποτε απ' όλα.
8. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει :
ι) καμιά πραγματική ρίζα ιι) δυο ρίζες πραγματικές και άνισες ιιι) άπειρες ρίζες
ιν) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες ν) τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα νι) τίποτε απ' όλα αυτά
9. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές τότε θα είναι :
ι) $\Delta \neq 0$ ιι) $\Delta \geq 0$ ιιι) $\Delta = 0$ ιν) $\Delta > 0$ ν) $\Delta < 0$ νι) $\Delta \leq 0$ νιι) τίποτε απ' όλα.
10. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση έχει :
ι) καμιά πραγματική ρίζα ιι) δυο ρίζες πραγματικές και άνισες ιιι) άπειρες ρίζες
ιν) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες ν) τουλάχιστον μια ρίζα νι) το πολύ μια ρίζα

11. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύει $\Delta \leq 0$ τότε η εξίσωση έχει :

- ι) καμιά πραγματική ρίζα ιι) δυο ρίζες πραγματικές και άνισες ιιι) άπειρες ρίζες
 ιν) δυο ρίζες πραγματικές και ίσες ν) τουλάχιστον μια ρίζα νι) το πολύ μια ρίζα.

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά πιο κάτω :

Η διακρίνουσα $\Delta = \dots\dots\dots$ και αν $\Delta \dots\dots 0$ τότε έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$\rho_1 = \dots\dots\dots$ και $\rho_2 = \dots\dots\dots$ ενώ αν $\Delta = 0$ τότε έχει μια $\dots\dots\dots$ ρίζα την $\rho = -\dots\dots\dots$

2. Έστω η εξίσωση $-\kappa x^2 - \lambda x + \alpha = 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά πιο κάτω :

Η διακρίνουσα $\Delta = \dots\dots\dots$ και αν $\Delta \dots\dots 0$ τότε έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

3. Αν η εξίσωση $x^2 - 4\alpha x + 1 = 0$ έχει μια διπλή πραγματική ρίζα να συμπληρώσετε τα κενά πιο κάτω :

Η διακρίνουσα $\Delta = \dots\dots\dots$ και πρέπει να είναι $\Delta \dots\dots 0$ (για να έχει μια διπλή πραγματική ρίζα) οπότε το

- $\alpha = \dots\dots\dots$ και η διπλή ρίζα είναι $\rho = \dots\dots\dots$ ή
- $\alpha = \dots\dots\dots$ και η διπλή ρίζα είναι $\rho = \dots\dots\dots$

4. Έστω η εξίσωση $5x^2 - 4x = 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά στην διαδικασία επίλυσης της που φαίνεται πιο κάτω :

$$5x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(\dots\dots\dots - \dots\dots) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots\dots\dots \text{ ή } 5x - \dots\dots\dots = 0 \Leftrightarrow x_2 = \dots\dots\dots$$

5. Έστω η εξίσωση $2x^2 - 8 = 0$. Να συμπληρώσετε τα κενά στην διαδικασία επίλυσης της που φαίνεται πιο κάτω :

$$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dots\dots\dots \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \dots\dots\dots$$

α σκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις και να παραγοντοποιηθούν τα αντίστοιχα τριώνυμα.

ι) $x^2 - 3x + 2 = 0$ ιι) $x^2 - x - 6 = 0$ ιιι) $x^2 - 12x + 35 = 0$ ιν) $-2x^2 + 9x - 7 = 0$

[είναι $\Delta > 0$]

2. Να λυθούν οι εξισώσεις και να παραγοντοποιηθούν τα αντίστοιχα τριώνυμα.

ι) $x^2 + x - 12 = 0$ ιι) $x^2 - 5x + 4 = 0$ ιιι) $-x^2 + 4x - 3 = 0$

[είναι $\Delta > 0$]

3. Να λυθούν οι εξισώσεις και να παραγοντοποιηθούν τα αντίστοιχα τριώνυμα.

ι) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ιι) $x^2 - 4x + 4 = 0$ ιιι) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ ιν) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

[είναι $\Delta = 0$]

4. Να λυθούν οι εξισώσεις και να παραγοντοποιηθούν τα αντίστοιχα τριώνυμα.

ι) $x^2 - 5x + 7 = 0$ ιι) $2x^2 + 3x + 6 = 0$ ιιι) $7x^2 - 5x + 6 = 0$

[είναι $\Delta < 0$]

5. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $x^2 - 9 = 0$ ιι) $x^2 + 16 = 0$ ιιι) $2x^2 - 32 = 0$ ιν) $\sqrt{3} \cdot x^2 = -\sqrt{6}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $(\sqrt{3} - 1) \cdot x^2 - 4 = 0$ ιι) $\sqrt{5} \cdot x^2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{5}$ ιιι) $3(x - 1)^2 = 12$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $x^2 - 5x = 0$ ιι) $2x^2 + 3x = 0$ ιιι) $7x^2 - 5x = 0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $x^2 - x = 0$ ιι) $(\sqrt{6} + 1) \cdot x^2 - 5x = 0$ ιιι) $3x^2 + 2x = x^2 - x$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $x^2 + \kappa x - 12\kappa^2 = 0$ ιι) $(\alpha + 1)^2 x^2 - 5(\alpha + 1)x - 6 = 0$ ιιι) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις

ι) $\kappa x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$ ιι) $\kappa x^2 - (\kappa - 1)x - 1 = 0$

11. Να βρεις τις τιμές των κ, λ έτσι ώστε η εξίσωση $x^2 - (\kappa + 2\lambda)x + 3\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3

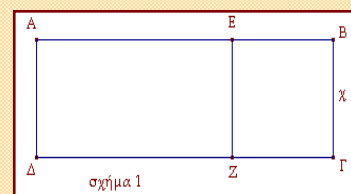
12. Να βρεις τις τιμές του λ έτσι ώστε η εξίσωση $x^2 + 9x - 2\lambda^2 - \lambda + 9 = 0$ να έχει ρίζα το -1 .
Για κάθε μια από τις πιο πάνω τιμές να βρεις την άλλη ρίζα.

13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 5x + \alpha = 0$ (1) και η εξίσωση $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + 4\alpha - 25 = 0$ (2) για τις διάφορες τιμές του αριθμού α , έχουν ακριβώς το ίδιο αριθμό λύσεων.

(Υπ: Μελέτησε το πρόσημο των Διακρινουσών Δ_1 και Δ_2)

α σκήσεις

14. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(\omega - 1)x^2 + 2(\omega + 5)x + \omega + 5 = 0$ για τις διάφορες τιμές του ω .
15. Να βρείτε το μικρότερο ακέραιο κ για τον οποίο η εξίσωση $3x^2 - 2\kappa x - 2 = 2x^2 - 3$ δεν έχει ρίζα πραγματική.
16. Να αποδείξετε ότι για εκείνες τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ (1) δεν έχει ρίζες πραγματικές, η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0$ (2) έχει δυο ρίζες πραγματικές.
(Υπόδειξη : Δείξτε ότι αν $\Delta_1 < 0$ τότε $\Delta_2 > 0$)
17. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $16x^2 - 8x + \alpha = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\frac{1}{4}$ τότε αυτή θα είναι διπλή ρίζα (δηλαδή δεν θα έχει και άλλη διαφορετική ρίζα).
18. Να δείξετε ότι για κάθε α οι εξισώσεις : $9x^2 - 6\alpha x + 3\alpha^2 + 2 = 0$ και $(\alpha^2 + 1)x^2 - 2\alpha x + 1 = 0$ δεν έχουν ρίζες πραγματικές.
19. Το πρόβλημα αφορά την ηλικία ενός πατέρα και της κόρης του και έχει ως εξής : Αν η ηλικία της κόρης είναι σήμερα κ τότε ο πατέρας είναι κ^2 και όταν η κόρη γίνει κ^2 τότε ο πατέρας θα είναι 11 κ . Πόσο είναι ο καθένας σήμερα ;
(Υπόδειξη : Όσο «μεγαλώνει» ο ένας τόσο «μεγαλώνει» και ο άλλος)
20. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί αριθμοί α, β, γ , αν είναι γνωστό ότι $\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \gamma + \gamma \cdot \alpha = 107$.
(Υπόδειξη : Συμβόλισε τους αριθμούς $\alpha = \kappa + 1, \beta = \kappa + 2, \gamma = \kappa + 3$ ή $\alpha = \kappa - 1, \beta = \kappa, \gamma = \kappa + 1$)
21. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί αριθμοί α, β, γ , αν είναι γνωστό ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 77$.
(Υπόδειξη : Συμβόλισε τους αριθμούς $\alpha = \kappa + 1, \beta = \kappa + 2, \gamma = \kappa + 3$ ή $\alpha = \kappa - 1, \beta = \kappa, \gamma = \kappa + 1$)
22. Να βρεθούν τρεις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου αν είναι γνωστό ότι η μια κάθετος είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 2 μ και η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι 4 μ.
23. Να βρεθούν οι διαστάσεις μιας φωτογραφίας αν είναι γνωστό ότι η μια είναι τα $\frac{3}{4}$ της άλλης και το εμβαδόν της είναι 432 cm².
24. Να βρεις τις τιμές των α, β έτσι ώστε η συνάρτηση $\psi = (\alpha + \beta)x^2 + x + (\alpha + \beta - 1)$ να τέμνει τον $\psi' \cdot \psi$ στο $B(0, 1)$ και τον $\chi' \cdot \chi$ στο σημείο $A(\frac{1}{2}, 0)$
25. Να βρεθεί το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου με περίμετρο 30 m και υποτείνουσα 13 m.
26. Αν το A B Γ Δ είναι ορθογώνιο με Δ Γ = 5, το E B Γ Ζ τετράγωνο πλευράς χ και το E A E Z Δ = 6 m² (όπως στο σχήμα 1) να βρείτε το χ



Περί του αθροίσματος των ριζών ο λόγος

2.2 Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$.

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$ (1) και ϱ_1 και ϱ_2 οι ρίζες της.

Συμβολίζω με S το $\varrho_1 + \varrho_2$ και P το $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ (δηλαδή $S = \varrho_1 + \varrho_2$ και $P = \varrho_1 \cdot \varrho_2$) τότε

Για το S και το P έχω αντίστοιχα

$$\diamond S = \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta - \sqrt{\Delta}) + (-\beta + \sqrt{\Delta})}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\diamond P = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta - \sqrt{\Delta}) \cdot (-\beta + \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Άρα τελικά είναι

$$\varrho_1 + \varrho_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha}$$

και

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Οι τύποι αυτοί μας επιτρέπουν να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) (με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν ρίζες, δηλ πρέπει $\Delta \geq 0$) χωρίς να την λύσουμε και λέγονται τύποι του **Vieta**

Με βάση τους τύπους του **Vieta** η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ (1) μετασχηματίζεται ως εξής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 0 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - S \cdot x + P = 0 \quad (2)$$

Παρατήρηση 1 Οι εξισώσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \alpha \neq 0$ (1) και $x^2 - S \cdot x + P = 0$ (2) είναι ισοδύναμες δηλαδή έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Παρατήρηση 2 Η εξίσωση (2) μας βοηθάει να βρίσκουμε γρήγορα 2 αριθμούς α και β αν είναι γνωστό το $\alpha + \beta = S$ και το $\alpha \beta = P$ διότι οι αριθμοί α και β θα είναι λύσεις της $x^2 - S \cdot x + P = 0$.

Π.χ. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β αν είναι γνωστό ότι :

$$\alpha + \beta = 3 \text{ και } \alpha \beta = 2$$

Απάντηση : Οι αριθμοί α και β θα είναι λύσεις της $x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ η οποία έχει

$\Delta = \dots = 1 > 0$ και ρίζες $\varrho_1 = 2$ και $\varrho_2 = 1$ άρα ($\alpha = 1$ και $\beta = 2$) ή ($\alpha = 2$ και $\beta = 1$).

Παρατήρηση 3 Έστω η εξίσωση $2x^2 - 3x + 8 = 0$. Σύμφωνα με τους τύπους **Vieta** θα είναι

$$S = \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \text{ και } P = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Όμως είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 9 - 64 = -55 < 0$. Άρα η $2x^2 - 3x + 8 = 0$ δεν έχει ρίζες !!! Δηλαδή εμείς πριν βρήκαμε το άθροισμα και το γινόμενο ριζών που δεν υπάρχουν ; Κάνουμε λάθος ;

Για την απάντηση

Ναι, ένα λάθος μας είναι όταν λέμε πως «όταν $\Delta < 0$ δεν υπάρχουν ρίζες».

Στην πραγματικότητα η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντοτε ρίζες μόνο που όταν $\Delta \geq 0$ οι ρίζες είναι **πραγματικοί αριθμοί** ενώ όταν $\Delta < 0$ οι ρίζες ανήκουν σε ένα **άλλο ευρύτερο** σύνολο, το σύνολο των **Μιγαδικών**.

Και το δεύτερο «λάθος» μας είναι ότι οι τύποι του Vieta προς το παρόν (μέχρι την Γ! Λυκείου) ισχύουν μόνο όταν $\Delta \geq 0$ και όχι πάντα. Δηλαδή όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του **Vieta** πρώτα θα υπολογίζουμε το Δ και αν $\Delta \geq 0$ τότε



Παρατήρηση

Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α και β τότε όπως είναι γνωστό η περίμετρος $\Pi = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$ άρα $\alpha + \beta = \frac{\Pi}{2}$ και $E = \alpha \cdot \beta$ το εμβαδόν του, οπότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \frac{\Pi}{2}x + E = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - \Pi x + 2E = 0$.

- Προσοχή οι ρίζες της εξίσωσης αυτής για να είναι αποδεκτές ως πλευρές ορθογωνίου πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 4$ m και εμβαδόν $E = 3$ m²

Λύση : Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \frac{\Pi}{2}x + E = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 3 = 0$. Είναι $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις άρα δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.

2. Να βρεθεί το ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 8$ m και εμβαδόν $E = 3$ m²

Λύση : Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \frac{\Pi}{2}x + E = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ άρα $q_1 = \dots = 1$, $q_2 = \dots = 3$.

Επομένως το ορθογώνιο έχει διαστάσεις **1 m και 3 m**.

3. Να βρεθεί το ορθογώνιο που οι διαστάσεις του είναι ρίζες της : $x^2 - 4x + 3 = 0$. Ποια είναι η περίμετρος του.

Λύση : $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ άρα $q_1 = \dots = 2$, $q_2 = \dots = 2$

Επομένως το ορθογώνιο έχει διαστάσεις **2 m και 2 m** δηλαδή ίσες άρα πρόκειται για τετράγωνο με πλευρά $\alpha = 2$ m.

Από το πρόσημο του $-\frac{\beta}{\alpha}$ και του $\frac{\gamma}{\alpha}$ μπορούμε να έχουμε ασφαλή συμπεράσματα για το πρόσημο των ριζών.



Ισχύουν οι πιο κάτω περιπτώσεις : **δες στην απέναντι σελίδα**

Πρόσημο ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\alpha \neq 0$

- ι) $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$. Το γινόμενο των ριζών είναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ άρα ρίζες είναι ομόσημες και επειδή το άθροισμά τους είναι $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ άρα πρόκειται για θετικές ρίζες
- ιι) $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$. Το γινόμενο των ριζών είναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες και επειδή το άθροισμά τους είναι $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ άρα πρόκειται για αρνητικές ρίζες.
- ιιι) $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$. Το γινόμενο των ριζών είναι $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ οι ρίζες είναι ετερόσημες και επειδή το άθροισμά τους είναι > 0 άρα ρίζες ετερόσημες με την θετική ρίζα να έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή
- ιiv) $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$. Το γινόμενο των ριζών είναι $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ οι ρίζες είναι ετερόσημες και επειδή το άθροισμά τους είναι < 0 άρα ρίζες ετερόσημες με την αρνητική ρίζα να έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή
- v) $-\frac{\beta}{\alpha} = 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} \neq 0$. Από το γεγονός ότι $-\frac{\beta}{\alpha} = 0$ (άθροισμα 0) συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες είναι αντίθετες.
- vi) $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$. Από το γεγονός ότι $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία διπλή ρίζα το 0

Παραδείγματα

1. Δίνεται η $3x^2 + 7x + 1 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών.

Λύση: Επειδή $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{3} > 0$ άρα ρίζες ομόσημες, $-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{7}{3} < 0$ άρα ομόσημες αρνητικές

2. Δίνεται η $x^2 - 2x - 1 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και τη σχέση μεγέθους που έχουν.

Λύση: Επειδή $\frac{\gamma}{\alpha} = -1 < 0$ άρα ρίζες ετερόσημες, $-\frac{\beta}{\alpha} = 2 > 0$ άρα ετερόσημες και κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη η θετική.

3. Δίνεται η $x^2 - 5x + 2 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και να υπολογίσεις την παράσταση $2x_1 - 5x_1 \cdot x_2 + 2x_2$.

Λύση: Επειδή $\frac{\gamma}{\alpha} = 2 > 0$ άρα ρίζες ομόσημες, $-\frac{\beta}{\alpha} = 5 > 0$ άρα ομόσημες θετικές.

$$\text{Είναι } 2x_1 - 5x_1 \cdot x_2 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) - 5x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 0$$

4. Δίνεται η $x^2 + 3x - 2 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών, τη σχέση μεγέθους που έχουν και να υπολογίσεις την παράσταση $\frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_1}$.

Λύση : Επειδή $\frac{\gamma}{\alpha} = -2 < 0$ άρα ρίζες ετερόσημες, $-\frac{\beta}{\alpha} = -3 < 0$ άρα ετερόσημες και κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη η αρνητική.

$$\text{Είναι } \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_1} = \frac{3x_1 + 3x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3(x_1 + x_2)}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3(-3)}{-2} = \frac{9}{2}$$

Δυο πολύ σημαντικά παραδείγματα με παράμετρο

Το παραδείγματα χαρακτηρίζονται ως σημαντικά γιατί περιλαμβάνουν **σχεδόν όλες** τις περιπτώσεις που μπορεί να συναντήσεις και στην πραγματικότητα, για να τα απαντήσεις δεν έχεις παρά να εφαρμόσεις την απλή θεωρία που μάθαμε πιο πάνω.

5. Δίνεται η $x^2 + 2x + \lambda + 2 = 0$. Χωρίς να λυθεί η εξίσωση να βρεις για τις διάφορες τιμές του λ αν έχει ρίζες πραγματικές, αν είναι ίσες και σε κάθε περίπτωση να βρεις το πρόσημο τους.

Λύση : Κατ' αρχήν για να δεις αν υπάρχουν ρίζες πραγματικές θα πρέπει να εξετάσεις το πρόσημο της διακρίνουσας Δ . Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda + 2) \Leftrightarrow \Delta = 4 - 4\lambda - 8 \Leftrightarrow$

$$\Delta = -4\lambda - 4. \text{ Οπότε για να έχει ρίζες πραγματικές θα πρέπει } \Delta \geq 0 \text{ άρα } -4\lambda - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1$$

Αν τώρα είναι $\lambda \leq -1$ τότε και μόνο τότε μπορώ να προχωρήσω και να αναζητήσω αν είναι

ίσες οι ρίζες και τι πρόσημο έχουν. Δηλαδή πρέπει να απαιτήσουμε το αυτονόητο : ότι προϋπόθεση για να βρεις πρόσημο κλπ είναι να υπάρχουν πραγματικές ρίζες.

- ❖ Έτσι λοιπόν για να είναι ίσες οι ρίζες θα πρέπει $\Delta = 0$ άρα $-4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$
- ❖ Από κει και πέρα μελετάω το πρόσημο των ριζών μελετώντας το πρόσημο του γινομένου και του αθροίσματος : είναι $\frac{\gamma}{\alpha} = \lambda + 2$ οπότε αν $\lambda + 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -2$ και $\lambda \leq -1 \Leftrightarrow -2 < \lambda \leq -1$ θα είναι ρίζες πραγματικές και ομόσημες οπότε επειδή $-\frac{\beta}{\alpha} = -2 < 0$ άρα είναι ρίζες πραγματικές και ομόσημες αρνητικές.
- ❖ Αν είναι $\lambda = -2$ τότε $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$ που σημαίνει η μια ρίζα είναι το μηδέν και επειδή $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2$ άρα $0 + \rho_2 = -2 \Leftrightarrow \rho_2 = -2$ η άλλη ρίζα.
- ❖ Αν είναι $\lambda < -2$ τότε $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ που σημαίνει ρίζες πραγματικές και ετερόσημες και επειδή $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2$ άρα κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερη η αρνητική

6. Δίνεται η $\chi^2 - 2\chi + \lambda - 1 = 0$. Να βρεις τις τιμές του λ για να έχει η εξίσωση δυο ρίζες πραγματικές, οι οποίες συνδέονται με τη σχέση $2\varrho_1 + 5\varrho_2 = 1$.

Λύση : Κατ' αρχήν για να υπάρχουν ρίζες πραγματικές θα πρέπει η διακρίνουσα $\Delta \geq 0$. Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 1) \Leftrightarrow \Delta = 4 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow \Delta = -4\lambda + 8$. Οπότε για να έχει **ρίζες πραγματικές** θα πρέπει $\Delta \geq 0$ άρα $-4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 2$

Με αυτή την προϋπόθεση και επειδή $\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} \Leftrightarrow \varrho_1 + \varrho_2 = 2$, είναι και $2\varrho_1 + 5\varrho_2 = 1$ άρα

$$\text{οι λύσεις } \varrho_1 \text{ και } \varrho_2 \text{ είναι λύσεις του συστήματος } \begin{cases} \varrho_1 + \varrho_2 = 2 \\ 2\varrho_1 + 5\varrho_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho_2 = 2 - \varrho_1 \\ 2\varrho_1 + 5\varrho_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varrho_2 = 2 - \varrho_1 \\ 2\varrho_1 + 5(2 - \varrho_1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho_2 = 2 - \varrho_1 \\ -3\varrho_1 = -10 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho_2 = 2 - \varrho_1 \\ -3\varrho_1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho_2 = -1 \\ \varrho_1 = 3 \end{cases} \text{ . Εφ' όσον } \varrho_1 = 3 \text{ και } \varrho_2 = -1 \text{ τότε}$$

$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = -3$ όμως από την εξίσωση $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = \lambda - 1$ άρα $\lambda - 1 = -3 \Leftrightarrow \lambda = -2$ η οποία είναι δεκτή γιατί ικανοποιεί τον περιορισμό $\lambda \leq 2$

Παρατήρηση

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου δίνεται ότι οι ϱ_1 και ϱ_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ και ζητάει να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες τις όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν :

Παραδείγματα

1. Με δεδομένο ότι οι ϱ_1 και ϱ_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις $\kappa \cdot \varrho_1$ και $\kappa \cdot \varrho_2$

Λύση : Είναι $S' = \kappa \cdot \varrho_1 + \kappa \cdot \varrho_2 = \kappa(\varrho_1 + \varrho_2) = \kappa \cdot S$ και

$$P' = (\kappa \cdot \varrho_1) \cdot (\kappa \cdot \varrho_2) = \kappa^2 \varrho_1 \varrho_2 = \kappa^2 \cdot P \text{ άρα οι } \kappa \cdot \varrho_1 \text{ και } \kappa \cdot \varrho_2 \text{ είναι λύσεις της } \chi^2 - (\kappa S)\chi + \kappa^2 P = 0$$

2. Με δεδομένο ότι οι ϱ_1 και ϱ_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις $\kappa \varrho_1^2$ και $\kappa \varrho_2^2$

Λύση : $S' = \kappa \varrho_1^2 + \kappa \varrho_2^2 = \kappa[(\varrho_1 + \varrho_2)^2 - 2\varrho_1 \cdot \varrho_2] = \kappa(S^2 - 2P)$,

$$P' = \kappa \varrho_1^2 \cdot \kappa \varrho_2^2 = \kappa^2 (\varrho_1 \varrho_2)^2 = \kappa^2 P^2 \text{ Άρα οι } \kappa \varrho_1^2 \text{ και } \kappa \varrho_2^2 \text{ είναι λύσεις της } \chi^2 - \kappa(S^2 - 2P)\chi + \kappa^2 P^2 = 0$$

3. Με δεδομένο ότι οι ϱ_1 και ϱ_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις $\varrho_1 + \kappa$ και $\varrho_2 + \kappa$

Λύση : $S' = (\varrho_1 + \kappa) + (\varrho_2 + \kappa) = (\varrho_1 + \varrho_2) + 2\kappa = S + 2\kappa$, $P' = (\varrho_1 + \kappa)(\varrho_2 + \kappa) = \varrho_1 \varrho_2 + \kappa \varrho_1 + \kappa \varrho_2 + \kappa^2 = P + \kappa(\varrho_1 + \varrho_2) + \kappa^2 = P + \kappa S + \kappa^2$

$$\text{Άρα οι } \varrho_1 + \kappa \text{ και } \varrho_2 + \kappa \text{ είναι λύσεις της } \chi^2 - (S + 2\kappa)\chi + (P + \kappa S + \kappa^2) = 0$$

4. Με δεδομένο ότι οι ϱ_1 και ϱ_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - S \cdot \chi + P = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις

$$\frac{\kappa}{\varrho_1} \text{ και } \frac{\kappa}{\varrho_2}$$

$$\text{Λύση : } S' = \frac{\kappa}{\varrho_1} + \frac{\kappa}{\varrho_2} = \frac{\kappa \varrho_2 + \kappa \varrho_1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\kappa(\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\kappa S}{P} \text{ και } P' = \frac{\kappa}{\varrho_1} \cdot \frac{\kappa}{\varrho_2} = \frac{\kappa^2}{P}$$

$$\text{Άρα οι } \frac{\kappa}{\varrho_1} \text{ και } \frac{\kappa}{\varrho_2} \text{ είναι λύσεις της } \chi^2 - \kappa \frac{S}{P} \chi + \frac{\kappa^2}{P} = 0$$

Εφαρμογή : Με δεδομένο ότι οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - 5 \cdot \chi + 2 = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις $q_1 + 3$ και $q_2 + 3$

Λύση : $S' = (q_1 + 3) + (q_2 + 3) = (q_1 + q_2) + 6 = 5 + 6 = 11$, $P' = (q_1 + 3)(q_2 + 3) =$

$$q_1 q_2 + 3q_1 + 3q_2 + 3^2 = P + 3(q_1 + q_2) + 9 = 2 + 3 \cdot 5 + 9 = 26$$

Άρα οι $q_1 + 3$ και $q_2 + 3$ είναι λύσεις της $\chi^2 - 11\chi + 26 = 0$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 4,5$ m και εμβαδόν $E = 5$ m²
2. Να βρεθεί το ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 8$ m και εμβαδόν $E = 4$ m². Τι σχήμα είναι ;
3. Να βρεθεί το ορθογώνιο που οι διαστάσεις του είναι ρίζες της : $\chi^2 - 6\chi + 9 = 0$
4. Να βρεθεί το ορθογώνιο που οι διαστάσεις του είναι ρίζες της : $2\chi^2 + 3\chi + 5 = 0$
5. Να βρεθεί το ορθογώνιο που οι διαστάσεις του είναι ρίζες της : $\chi^2 + 4\chi + 3 = 0$
6. Χωρίς να λυθεί η εξίσωση να βρεις το πρόσημο των ριζών και τη σχέση μεγέθους που έχουν στις περιπτώσεις :
 ι) $\chi^2 - 5\chi + 3 = 0$ ιι) $3\chi^2 - 2\chi - 7 = 0$ ιιι) $2\chi^2 + 7\chi + 5 = 0$ ιιιι) $\chi^2 + \chi - 3 = 0$
7. Δίνεται η $\chi^2 - 6\chi + 9 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και τη σχέση μεγέθους που έχουν.
8. Δίνεται η $\chi^2 - 3 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και τη σχέση μεγέθους που έχουν.
9. Δίνεται η $\chi^2 - 2\chi = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και τη σχέση μεγέθους που έχουν.
10. Δίνεται η $\chi^2 - 5\chi + 2 = 0$. Χωρίς να λυθεί να βρεις το πρόσημο των ριζών και να υπολογίσεις την παράσταση $-\chi_2 - 7\chi_1 \cdot \chi_2 - \chi_1$.
11. Αν οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - 3 \cdot \chi + 1 = 0$ να υπολογίσεις τις παραστάσεις
 ι) $q_1 + q_2$ ιι) $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ιιι) $\frac{5}{q_1} + \frac{5}{q_2}$ ιιιι) $q_1^2 + q_2^2$ ιν) $-\frac{2}{q_1} - \frac{2}{q_2}$ νι) $q_1^3 + q_2^3$ νιι) $\frac{2}{q_1^3} + \frac{2}{q_2^3}$
 [Υπ. Είναι $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ και $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$].
12. Με δεδομένο ότι οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $\chi^2 - 7 \cdot \chi + 4 = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις
 ι) $2 \cdot q_1$ και $2 \cdot q_2$ ιι) $-5q_1^2$ και $-5q_2^2$ ιιι) $q_1 - 7$ και $q_2 - 7$
13. Με δεδομένο ότι οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $\chi^2 + 5 \cdot \chi + 1 = 0$ να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις
 ι) $\frac{4}{q_1}$ και $\frac{4}{q_2}$ ιι) $\frac{2}{q_1^2}$ και $\frac{2}{q_2^2}$ ιιι) $\frac{q_2}{q_1}$ και $\frac{q_1}{q_2}$
14. Να βρεθεί η τιμή του κ έτσι ώστε η εξίσωση $\chi^2 + (\lambda + 2)\chi + \lambda^2 - 4$ να έχει :
 ι) ρίζες αντίθετες ιι) μία ρίζα το 0 και η άλλη ρίζα $\neq 0$ ιιι) διπλή ρίζα το 0.

α σκήσεις

15. Αν οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $x^2 - 3 \cdot x + \kappa^2 - 2\kappa + 3 = 0$ να βρεις το κ ώστε να είναι $q_1 = 2q_2$
 [Υπ. $S = q_1 + q_2 = 3q_2$ κ λ π]
16. Αν οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $x^2 - 6 \cdot x + \kappa^2 - \kappa + 3 = 0$ να υπολογίσεις το κ έτσι ώστε να είναι $q_1 = q_2 + 4$
 [Υπ. $S = q_1 + q_2 = 2q_2 + 4$ κ λ π]
17. Αν οι q_1 και q_2 είναι ρίζες της $x^2 - \kappa \cdot x - \kappa^2 - 5 = 0$ να υπολογίσεις το κ έτσι ώστε να είναι $(q_1 - 2)(q_2 - 3) + q_1 + 2 = 0$
 [Υπ. Κάνε πράξεις και $S = q_1 + q_2$ $P = q_1 q_2$]
18. Να βρεις την εξίσωση με ρίζες τις :
 ι) $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ ιι) -2α και $\frac{\alpha}{2}$
19. Αν η $x^2 - 6 \cdot x + \kappa^2 - \kappa - 12 = 0$ έχει μία ρίζα το 0 να υπολογίσεις το κ
 [Υπόδειξη $P = q_1 q_2 = 0$ κ λ π]

2.3 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού ειδικής μορφής.

- Είναι εξισώσεις οι οποίες, μετά από πράξεις στην προσπάθειά μας να λυθούν, οδηγούνται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού, όπως στις περιπτώσεις που ακολουθούν :

✓ Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta |x| + \gamma = 0$ και γενικά $\alpha \cdot \Phi^2(x) + \beta \cdot |\Phi(x)| + \gamma = 0$ $\alpha \neq 0$.

Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με την χρήση βοηθητικού αγνώστου.

Θέτω $\psi = |x|$ ή $\psi = |\Phi(x)|$ οπότε $x^2 = |x|^2 = \psi^2$ άρα η εξίσωση γίνεται $\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$. Την λύνω με τον γνωστό τρόπο, και κατόπιν λύνω τις ($|x| = \psi_1$, $|x| = \psi_2$) ή αντίστοιχα [$|\Phi(x)| = \psi_1$, $|\Phi(x)| = \psi_2$].

Παραδείγματα :

Να λυθούν οι εξισώσεις ι) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ ιι) $(x+2)^2 - 3|x+2| + 2 = 0$.

Απάντηση :

- ι) Θέτω $\psi = |x|$ ή $\psi = |\Phi(x)|$ οπότε $x^2 = |x|^2 = \psi^2$ άρα η εξίσωση γίνεται :
 $\psi^2 - 5\psi + 6 = 0$ τότε $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα $q_1 = \dots = 2$, $q_2 = \dots = 3$ τότε
 α) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και β) $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- ιι) Θέτω $\psi = |x+2|$ οπότε $(x+2)^2 = |x+2|^2 = \psi^2$ άρα η εξίσωση $(x+2)^2 - 3|x+2| + 2 = 0$ γίνεται :
 $\psi^2 - 3\psi + 2 = 0$ τότε $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ άρα $q_1 = \dots = 1$, $q_2 = \dots = 2$
 α) $|x+2| = 1 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x+2 = -1 \Leftrightarrow x = -3$
 β) $|x+2| = 2 \Leftrightarrow x+2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x+2 = -2 \Leftrightarrow x = -4$

Άρα 4 λύσεις οι $-5, -1, -3, 1$

✓ Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (διτετράγωνες) και γενικά $\alpha x^{2k} + \beta x^k + \gamma = 0$ αλλά και $\alpha \cdot \Phi^{2k}(x) + \beta \cdot |\Phi(x)|^k + \gamma = 0$

Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται με την χρήση βοηθητικού αγνώστου.

Θέτω $\psi = x^2 \Leftrightarrow \psi^2 = x^4$ ή $\psi = x^k \Leftrightarrow \psi^2 = x^{2k}$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$ την λύνω και μετά λύνω την $\psi = x^2$ ή την $\psi = x^k$ αντίστοιχα

Παραδείγματα :

Να λυθούν οι εξισώσεις ι) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ και ιι) $x^{10} - 7x^5 - 800 = 0$ ιιι) $(x-1)^{10} - 7(x-1)^5 - 800 = 0$

Απάντηση :

ι) Θέτω $\omega = x^2$ τότε $x^4 = \omega^2$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 2\omega - 8 = 0$. $\Delta = \dots = 36 \Leftrightarrow$

$\omega_1 = \dots = -2$, $\omega_2 = \dots = 4$ άρα είναι $x^2 = -2$ (αδύνατη διότι $x^2 \geq 0$) ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

ιι) Θέτω $\omega = x^5$ τότε $x^{10} = \omega^2$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega - 800 = 0$. $\Delta = \dots = 3249 \Leftrightarrow$

$\omega_1 = \dots = -25$, $\omega_2 = \dots = 32$ άρα είναι $x^5 = -25 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{25}$ ή $x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$

ιιι) Θέτω $\omega = (x-1)^5$ τότε $(x-1)^{10} = \omega^2$ άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega - 800 = 0$. $\Delta = \dots = 3249 \Leftrightarrow$

$\omega_1 = \dots = -25$, $\omega_2 = \dots = 32$ άρα είναι $(x-1)^5 = -25 \Leftrightarrow x-1 = -\sqrt[5]{25} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[5]{25}$ ή

$(x-1)^5 = 32 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = 3$

✓ Εξισώσεις που η λύση τους οδηγείται στη λύση μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Εξισώσεις αυτής της μορφής λύνονται εύκολα με απλές πράξεις και μετασχηματισμούς.

Παραδείγματα :

Να λυθούν οι εξισώσεις ι) $\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x-4} = 2$ και ιι) $x-3 = \frac{5}{1+x}$

Παρατήρηση : Προσοχή πρέπει να βρίσκεις πάντα τους περιορισμούς.

Απάντηση :

ι) Είναι Ε.Κ.Π = $(x-1)(x-4)$ άρα πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 4$.

Τότε $\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x-4} = 2 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \frac{5}{x-1} + (x-1)(x-4) \frac{2}{x-4} = 2(x-1)(x-4) \Leftrightarrow$

$5(x-4) + 2(x-1) = 2(x-1)(x-4) \Leftrightarrow 5x - 20 + 2x - 2 = 2x^2 - 10x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 17x + 30 = 0$, $\Delta = \dots = 49$

$x_1 = \frac{17 - \sqrt{49}}{4}$ $x_2 = \frac{17 + \sqrt{49}}{4}$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{17-7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ $x_2 = \frac{17+7}{4} = \frac{24}{4} = 6$

ιι) Είναι Ε.Κ.Π = $1+x$ άρα πρέπει $x \neq -1$

Τότε $x-3 = \frac{5}{1+x} \Leftrightarrow (x-3)(1+x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$, $\Delta = \dots = 36$

$x_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2}$ $x_2 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2}$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{2-6}{2} = -2$ $x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ ιι) $2x^2 - 3|x| + 1 = 0$ ιιι) $(x-2)^2 - 5|x-2| + 6 = 0$
2. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ιι) $x^4 + 7x^2 + 6 = 0$ ιιι) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$ ιιιι) $x^8 - 4x^4 + 3 = 0$.
3. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $(x+3)^2 - 5|x+3| + 2 = 0$ ιι) $(2x-1)^4 - 2|2x-1|^2 - 3 = 0$ ιιι) $x^6 - 16|x|^3 + 64 = 0$
4. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $4(x+5)^4 - 8(x+5)^2 + 3 = 0$ ιι) $(x+7)^6 - |x+7|^3 - 2 = 0$ ιιι) $x^{-4} - 16x^{-2} + 64 = 0$
5. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 - 10\left(\frac{x+1}{2x}\right) + 21 = 0$ ιι) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 21 = 0$ ιιι) $\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^6 - 2\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^3 + 1 = 0$
6. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $\left(\frac{x^2+49}{2x}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2+49}{2x}\right) + 21 = 0$ ιι) $\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^4 - 2\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + 1 = 0$ ιιι) $\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^6 - 4\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right)^3 + 4 = 0$
7. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$ ιι) $\frac{6}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x-1}$ ιιι) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{4x+3}{3x+4}$ ιιιι) $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{x}{x-1}$
8. Να λυθούν οι εξισώσεις
 ι) $\frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$ ιι) $\frac{x^2-4x}{2x^2-5x} + \frac{2x^2-5x}{x^2-4x} = -2$
9. Μια οικογένεια πλήρωσε ως ενοίκιο μιας γκαρσονιέρας, στις διακοπές, 360 €. Αν η οικογένεια είχε ένα ακόμη παιδί τότε το μερίδιο του κάθε μέλους της οικογένειας θα ελαττωνόταν κατά 18 €. Πόσα μέλη έχει η οικογένεια.
10. Ένα εργάτης τελειώνει μια εργασία σε x ώρες. Ένας δεύτερος χρειάζεται 5 ώρες περισσότερες για την ίδια εργασία. Να βρείτε το x αν και οι δυο μαζί τελειώνουν την εργασία σε 6 ώρες.



ΠΡΟΣΟΧΗ

**Το δικαίωμα στην τεμπελιά κινδυνεύει,
προστάτεψε το με κάθε τρόπο από
το διάβασμα και τη μόρφωση**

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή)



Όταν δεις το φίλο σου που ξεκουράζεται
βοήθησέ τον , μην τον αφήνεις μόνο του
οι φίλοι άλλωστε στα δύσκολα φαίνονται !

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή



Το βιβλίο πολλοί αγάπησαν
για το διάβασμα
θα σε γελάσω και δε θέλω

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή

Περί συνόλων ο λόγος

2.3 Σύνολα.

- ❖ Από την καθημερινή ζωή μας είναι γνωστές οι λέξεις και οι εκφράσεις : «Ποδοσφαιρική Ομάδα», «Αθλητικός Σύλλογος», «Εμπορικός Σύλλογος», «Δεκαπενταμελές Συμβούλιο», «Συλλογή Πινάκων», «Συλλογή Γραμματοσήμων».
- Επίσης από τα προηγούμενα είναι γνωστά τα : Σύνολο των Φυσικών Αριθμών, Σύνολο των Ακεραίων, Σύνολο των Ρητών, Σύνολο των Πραγματικών.
- ❖ Στα Μαθηματικά όλες αυτές οι έννοιες, σύλλογος, ομάδα, σύνολο κλπ συμπίπτουν στην έννοια του συνόλου.

Ορισμός

- Σύνολο είναι μερικά αντικείμενα – άνθρωποι – έννοιες κλπ που είναι σαφώς ορισμένα, είναι διαφορετικά μεταξύ τους και τα οποία θεωρούμε όλα μαζί .

Παρατηρήσεις

- Τα αντικείμενα, ανθρώπους, έννοιες κλπ που δημιουργούν ένα σύνολο τα ονομάζουμε **στοιχεία** του συνόλου.
- Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο του δίνουμε ως όνομα ένα κεφαλαίο Ελληνικό ή Λατινικό γράμμα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ κλπ.
- **Πληθικός αριθμός** ή **πληθάριθμος** ενός συνόλου είναι ο αριθμός που φανερώνει το πλήθος των στοιχείων του.

Προσοχή

Στον ορισμό του συνόλου υπάρχουν **τρεις έννοιες που χρειάζονται προσοχή.**

Προσοχή

α) Τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι σαφώς (με ακρίβεια) ορισμένα. Δηλαδή πρέπει όποιος και αν «διαβάζει» το σύνολο να βρίσκει τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Έτσι λοιπόν εκφράσεις όπως «μεγάλος αριθμός», «ψηλό βουνό», «ψηλός άνθρωπος», «ωραίο τραγούδι» «ωραίος άνδρας», «δύσκολη άσκηση» κλπ **δεν αποτελούν σαφή ορισμό** στοιχείων ενός συνόλου διότι αν π.χ τα στοιχεία ενός συνόλου ήταν οι «ωραίες γυναίκες» τότε η κάθε γυναίκα θα έβαζε σ' αυτό το σύνολο τον εαυτό της (και πιθανόν καμία άλλη). Το ίδιο ακριβώς θα συνέβαινε αν ζητούσα από ένα τμήμα να μου φτιάξει το σύνολο των «ωραίων τραγουδιών», θα είχα όχι ένα σύνολο (το ίδιο από όλους) αλλά περίπου 25 διαφορετικά σύνολα που όλα θα ήταν **το σύνολο** των ωραίων τραγουδιών !

Αντιθέτως είναι **σαφής ο ορισμός** των στοιχείων ενός συνόλου με τις εκφράσεις «αριθμός μεγαλύτερος από τον 23.455.667.890.838.736» ή «άνθρωπος με ύψος πάνω από 190 εκ. » κλπ.

β) Τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Δηλαδή δεν «βάζουμε» σε ένα σύνολο δύο φορές το **ίδιο ακριβώς** στοιχείο. Π χ αν το σύνολο E αποτελείται από τα γράμματα της λέξης «παραπατάω» δεν θα γράψω το α 4 φορές και το π 2 φορές αλλά μία, έτσι είναι $E = \{\pi, \alpha, \rho, \tau, \omega\}$.

γ) Τα στοιχεία ενός συνόλου τα **θεωρούμε** όλα μαζί, δεν είναι ανάγκη να είναι και όλα μαζί. Π χ είναι σωστά ορισμένο το σύνολο $\Gamma = \{\text{Πρωθυπουργός της Ευρωπαϊκής Ένωσης}\}$ παρ' όλο που ο ένας Πρωθυπουργός βρίσκεται στην Αθήνα, ο άλλος στην Ρώμη, ο άλλος στο Παρίσι κλπ.

➤ Παράσταση συνόλου – Συμβολισμοί.

- Έστω το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Για να μην επαναλαμβάνουμε διαρκώς την φράση το α «είναι στοιχείο του συνόλου» Α γράφουμε $\alpha \in A$ και διαβάζουμε το α ανήκει στο Α.
- Για να μην επαναλαμβάνουμε διαρκώς την φράση το δ «δεν είναι στοιχείο του συνόλου» Α γράφουμε $\delta \notin A$ και διαβάζουμε το δ δεν ανήκει στο Α.

Η παράσταση ενός συνόλου γίνεται με 3 τρόπους .

1. Με αναγραφή των στοιχείων του.

Βάζουμε μέσα σε άγκιστρα τα στοιχεία του συνόλου χωρίζοντάς τα με κόμμα .

Π χ $A = \{\alpha, \beta, 3, 20, \text{Παπατρεχαγυρενονικολακογιωργακόπουλος}\}$

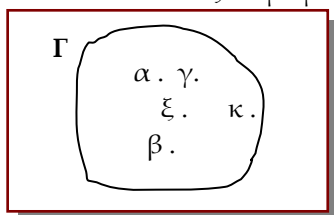
2. Με περιγραφή των στοιχείων του.

Βάζουμε μέσα σε άγκιστρα μια χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του.

Π χ Αν ήθελα να συμβολίσω το σύνολο που αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 3 θα έγραφα $B = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

3. Με διάγραμμα του Ven.

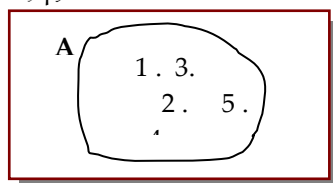
Γράφουμε τα στοιχεία του κλείνοντας τα με μια γραμμή όπως π χ για το $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \xi, \kappa\}$



Κάθε σύνολο μπορεί να παρασταθεί και με τους τρεις τρόπους. Ανάλογα με το σύνολο χρησιμοποιούμε αυτόν που βολεύει περισσότερο. Αν έχουμε σύνολο με λίγα στοιχεία χρησιμοποιούμε την αναγραφή π χ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ενώ αν θέλαμε να παραστήσουμε το σύνολο των ακεραίων από το -1567 έως το 2500 προτιμούμε την περιγραφή $B = \{x \in \mathbb{Z} \text{ με } -1567 \leq x \leq 2500\}$.

Προσοχή όμως η περιγραφή πρέπει να γίνει με μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του και όχι με κάτι που φαίνεται να περιγράφει τα στοιχεία του. Δες ξανά τα παραδείγματα χαρακτηριστικών και μη ιδιοτήτων πιο πάνω.

Αν ήθελα μια πιο «εποπτική» εικόνα για το $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ θα μπορούσα να το παρουσιάσω με διάγραμμα του Ven ως εξής :



Είναι προφανές ότι σε λίγες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τα διαγράμματα του Ven. Πολλές φορές, για να παραστήσουμε ένα σύνολο με πολλά στοιχεία, τα οποία όμως ακολουθούν έναν συγκεκριμένο τρόπο «κατασκευής» κάνουμε τα εξής : έστω $\Delta = \{x \in \mathbb{N} \text{ και } x \text{ περιττός}\}$, αυτό το σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε ως εξής $\Delta = \{1, 3, 5, \dots\}$ δηλ μπορούμε να παριστάνουμε σύνολα και με ένα συνδυασμό 1^{ης} και 2^{ης} μεθόδου περιγράφοντας μερικά αρχικά στοιχεία και βάζοντας αποσιωπητικά όπως πιο πάνω ή όπως στο $M = \{1,2,3,4, \dots, 107\}$.

Ιδιαίτερη περίπτωση συμβολισμού συνόλου είναι τα διαστήματα.

Διάστημα είναι ένα συνπαγές τμήμα του συνόλου $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις $(,)$, και τις αγκύλες $[,]$, για να συμβολίσουμε τα διαστήματα π χ $(2, 5)$ ή $(5, 8]$.

Αυτά τα σύμβολα διαβάζονται «διάστημα» και όταν υπάρχει παρένθεση (αριστερά ή δεξιά) διαβάζεται «ανοικτό» ενώ αν υπάρχει $[\text{ ή }]$ διαβάζεται κλειστό π χ το $(15, 23]$ διαβάζεται «διάστημα ανοικτό 15, 23 κλειστό» ή το $(1, 3)$ διαβάζεται «ανοικτό 1, 3» έτσι έχουμε τα πιο κάτω διαστήματα :

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$ | «ανοικτό α β » |
| 2. $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}$ | «κλειστό α β » |
| 3. $[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$ | «κλειστό α ανοικτό β » |
| 4. $(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$ | «ανοικτό α κλειστό β » |
| 5. $(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$ | « $-\infty$ ανοικτό α » |
| 6. $(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\}$ | « $-\infty$ κλειστό α » |
| 7. $(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$ | «ανοικτό α $+\infty$ » |
| 8. $[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\}$ | «κλειστό α $+\infty$ » |

Προσοχή τα $-\infty$ και $+\infty$ είναι σύμβολα και δεν είναι αριθμοί, επομένως δεν μπορεί να υπάρχει διάστημα της μορφής $[-\infty, \alpha)$ ή $(\alpha, +\infty]$ δηλ «στο μέρος» του ∞ δεν μπαίνει ποτέ $[,]$, γράφουμε όμως $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.



Το διάβασμα κουράζει το μυαλό

η κούραση προκαλεί φθορές

πρόσεχε λοιπόν μη σε βρει μεγαλύτερο κακό

(Απόσπασμα από τον δεκάλογο του «καλού» μαθητή)

➤ Σχέσεις συνόλων.

Ορισμός

- ✓ Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** ($A = B$) όταν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία

Παράδειγμα : $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ μονοψήφιος}\}$ είναι $A = B$

Άμεση συνέπεια είναι ότι μπορούμε να γράφουμε τα στοιχεία ενός συνόλου με όποια σειρά θέλουμε και το σύνολο δεν αλλάζει π.χ τα $A = \{1, 2, \alpha, \beta\}$ και $B = \{2, \alpha, 1, \beta\}$ είναι ίσα γιατί περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία και συμβολίζουμε $A = B$

✓ Υποσύνολο συνόλου.

Ορισμός

Ένα σύνολο A θα λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B (συμβολικά $A \subseteq B$) εάν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B

Παράδειγμα : Αν $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$ τότε $A \subseteq B$, $A \subseteq \mathbb{R}$ και

$B \subseteq \mathbb{R}$, Στα επόμενα **το $\mathbb{R}$ θα είναι το βασικό σύνολο**. Από τους ορισμούς των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ είναι φανερό η σχέση $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ισχύουν οι εξής πολύ βασικές ιδιότητες

1. $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A **Ανακλαστική ιδιότητα**
2. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ **Μεταβατική ιδιότητα**
3. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$ **Συμμετρική ιδιότητα**

Αποδείξεις :

1. Προφανής
2. Έστω $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ και $x \in A$ και $A \subseteq B$ τότε $x \in B$ άρα $x \in \Gamma$ λόγω της $B \subseteq \Gamma$ τελικά αν $x \in A$ τότε $x \in \Gamma$ άρα σύμφωνα με τον ορισμό $A \subseteq \Gamma$
3. Αν $A \subseteq B$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και $B \subseteq A$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A άρα το A και το B περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία, επομένως είναι $A = B$

Παρατηρήσεις

- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα ακολουθούμε την εξής διαδικασία :

Αποδεικνύουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ οπότε βάση της συμμετρικής ιδιότητας θα είναι $A = B$.

Η διαδικασία δηλ αυτή αποτελεί μέθοδο.

- Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο αριθμοί α και β είναι ίσοι, μερικές φορές, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία δηλ αποδεικνύουμε ότι $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$ οπότε $\alpha = \beta$. Αυτό συμβαίνει διότι οι αριθμοί (γενικώς) είναι πληθάρημοι συνόλων, έτσι αν $\alpha \leq \beta$ σημαίνει ότι υπάρχουν σύνολα A και B έτσι ώστε $A \subseteq B$ και $\alpha \geq \beta$ τότε $B \subseteq A$ άρα $A = B \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Τελικά $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

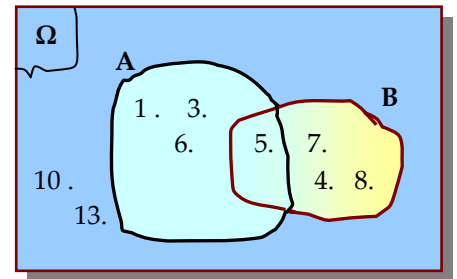
- Υπάρχουν σύνολα που δεν περιέχουν καθόλου στοιχεία, όπως τα :

$A = \{x / x \text{ κάτοικος της Ελλάδας με ύψος πάνω από } 5 \text{ m}\}$ ή $\Gamma = \{x : |2x + 3| \leq -2\}$ ή

$B = \{x / x \text{ λύση της } x^4 = -16\}$.

Συμβολίζουμε, για τις ανάγκες των πράξεων, τα σύνολα αυτά με $\{\}$ ή με το σύμβολο $\emptyset$

Στη θεωρία των συνόλων χρησιμοποιούμε και την έννοια του Βασικού Συνόλου, δηλαδή θεωρούμε ότι όλα σύνολα που χρησιμοποιούμε σε μια άσκηση αποτελούνται από μερικά στοιχεία ενός συνόλου ή ότι υπάρχει πάντα ένα σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία όλων των συνόλων μαζί, αυτό το σύνολο το ονομάζουμε Βασικό και από συνήθεια το συμβολίζουμε με Ω πάντα. Επίσης αν τα σύνολα παριστάνονται με διαγράμματα του Ven τότε το Ω παριστάνεται με ορθογώνιο και τα υπόλοιπα με κλειστές γραμμές όπως π χ $A = \{1,2,3,5,6\}$ και $B = \{4,5,7,8\}$ τότε το Ω όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,13\}$



Εστω Ω το βασικό σύνολο και A ένα υποσύνολό του τότε

✓ Συμπληρωματικό ή Συμπλήρωμα συνόλου

Ορισμός

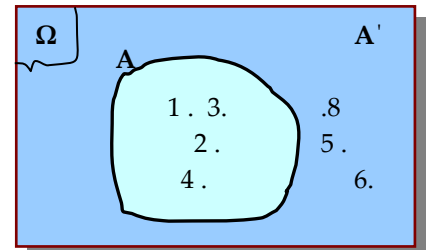
Συμπληρωματικό ή Συμπλήρωμα του συνόλου A το σύνολο που συμβολίζεται με A' και περιέχει όλα τα (υπόλοιπα) στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A δηλ $A' = \{x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$.

Π χ αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ και $A = \{1,2,3,4\}$ τότε το συμπλήρωμα του A είναι το $A' = \{5,6,8\}$ όπως φαίνεται και στο σχήμα .

Επίσης αν $\Omega = \mathbb{R}$ και $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\} = (-\infty, 3]$ τότε το συμπλήρωμα του A είναι το $A' = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\} = (3, +\infty)$.

Αν $\Omega = \{x / x \text{ μαθητής ή μαθήτρια του } A_3\}$ και $A = \{x / x \text{ μαθήτρια του } A_3\}$ τότε $A' = \{x / x \text{ μαθητής του } A_3\}$

Αν $\Omega = \{1,2,3, \dots, 100\}$ και $A = \{1,2,3, \dots, 44\}$ τότε $A' = \{45,46,47, \dots, 100\}$



✓ Ξένα σύνολα.

Ορισμός

Δύο ή περισσότερα σύνολα λέγονται ξένα όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Π χ τα $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{10,11, \dots, 100\}$ και $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ είναι ξένα σύνολα

✓ Διαφορά συνόλων.

Ορισμός

Διαφορά των συνόλων A και B είναι το σύνολο Γ που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B συμβολικά $A - B = \Gamma = \{x \in A \text{ και } x \notin B\}$.

Δηλαδή για να βρω το $A - B$ διαγράφω από το A τα στοιχεία εκείνα που ανήκουν και στο B .

Π χ Αν $A = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ και $B = \{5,6,8\}$ τότε $A - B = \Gamma = \{1,2,3,4\}$

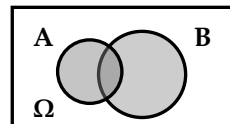
➤ Πράξεις Συνόλων

✓ Ένωση συνόλων.

Ορισμός

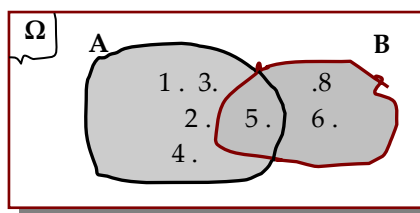
Ένωση δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο σύνολα. Συμβολικά $A \cup B$

Παριστάνεται στο διπλανό σχήμα με το γραμμοσκιασμένο τμήμα. Εννοείται ότι τα κοινά στοιχεία του A και του B τα γράφω μόνο μία φορά στην ένωση.



Παράδειγμα

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{5, 6, 8\}$ τότε $\Gamma = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
Στο διπλανό σχήμα η ένωση $A \cup B$ είναι ότι το γραμμοσκιασμένο τμήμα.

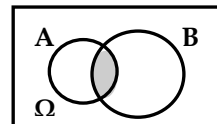


✓ Τομή συνόλων.

Ορισμός

Τομή δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα (κοινά στοιχεία). Συμβολικά $A \cap B$

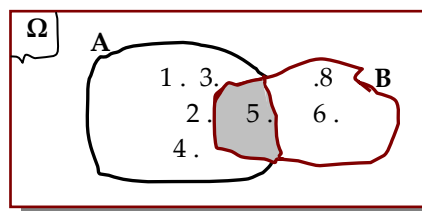
Παριστάνεται στο διπλανό σχήμα με το γραμμοσκιασμένο τμήμα.



Παράδειγμα

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{5, 6, 8\}$ τότε
 $\Delta = A \cap B = \{5\}$

Στο διπλανό σχήμα η τομή $A \cap B$ είναι ότι είναι γραμμοσκιασμένο τμήμα.



Παραδείγματα

1. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και $B = \{1, 5, 9, 13, 17\}$ να βρεθούν τα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' , $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cap B'$

Απάντηση:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17\}$, $A \cap B = \{1, 5, 9\}$,

$A' = \{10, 11, \dots, 20\}$, $B' = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20\}$

$(A \cup B)' = \{10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20\}$ και $(A \cap B)' = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, \dots, 20\}$

$A' \cup B' = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, \dots, 20\}$, $A' \cap B' = \{10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20\}$

Παρατηρούμε ότι $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Ιδιότητα των πράξεων των συνόλων που θα μας χρειαστεί αργότερα

2. Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ να βρεις τα $A \cup \emptyset$ και $A \cap \emptyset$

Απάντηση: Είναι $A \cup \emptyset = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = A$ και $A \cap \emptyset = \emptyset$. Δηλαδή το $\emptyset$ σύνολο έχει ως προς την $\cup$ και την $\cap$ τις ιδιότητες του 0 ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό :

$$\alpha + 0 = \alpha \quad \text{αντίστοιχα} \quad A \cup \emptyset = A$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{αντίστοιχα} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Αυτό δεν είναι άσχετο από το γεγονός ότι ο πληθάνριθμος του $\emptyset$ είναι το 0 καθώς επίσης και ότι άθροισμα δύο αριθμών είναι ο πληθικός αριθμός της ένωσης δύο ξένων συνόλων A και B τα οποία έχουν πληθικούς αριθμούς τα α και β αντίστοιχα.

3. Να βρεθεί η $A \cap B$ όταν $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ και $B = \{50,51, \dots, 100\}$

Απάντηση: $A \cap B = \emptyset$ [παρατήρησε ότι τα A και B είναι ξένα σύνολα]

4. Αν $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$ και $\Gamma = \{1,2,7,10,11\}$ να βρεις τα $A \cup B$, $(A \cup B) \cap \Gamma$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$, τι παρατηρείς

Απάντηση: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $(A \cup B) \cap \Gamma = \{1,2,7\}$

$A \cap \Gamma = \{1,2\}$, $B \cap \Gamma = \{1,7\}$, $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) = \{1,2,7\}$

Παρατηρούμε ότι $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$ [είναι μια άλλη ιδιότητα των πράξεων $\cup$ και $\cap$ που μοιάζει με την επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση]

5. Αν $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$ και $\Gamma = \{1,2,7,10,11\}$ να βρεις τα $A \cap B$, $(A \cap B) \cup \Gamma$, $A \cup \Gamma$, $B \cup \Gamma$, $(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$, τι παρατηρείς

Απάντηση: $A \cap B = \{1,3,5\}$, $(A \cap B) \cup \Gamma = \{1,2,3,5,7,10,11\}$

$A \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6,7,10,11\}$, $B \cup \Gamma = \{1,2,3,5,7,9,10,11\}$,

$(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = \{1,2,3,5,7,10,11\}$

Παρατηρούμε ότι $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$ [είναι μια άλλη ιδιότητα των πράξεων $\cap$ και $\cup$ που μοιάζει με την επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση]

α σκήσεις

1. Να βρεις ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι «καλώς ορισμένα» :

$$A = \{1,3,5, \dots, 1821\}, B = \{1,2,3,6,7,10, \dots, 54\}, \Gamma = \{\chi \in \mathbb{R} : \chi < -23\}$$

$$\Delta = \{\text{Βουνό της Ελλάδας ψηλότερο από τον Παρνασσό}\}$$

$$E = \{\text{Μεγάλο ποτάμι της Ελλάδας}\}$$

$$M = \{\text{Αριστούχος μαθητής τη χρονιά 2000 – 2001}\}$$

$$[A \cap B, \Gamma, \Delta, M]$$

2. Να γίνουν με αναγραφή τα σύνολα :

$$A = \{\chi \in \mathbb{Z} \text{ και } -2 < \chi \leq 3\}, B = \{\chi / \chi \text{ γράμμα της λέξης «πατάτα»}\},$$

$$\Gamma = \text{Το σύνολο των λύσεων του } \begin{cases} 2\chi + 3\psi = 8 \\ \chi - \psi = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \{\text{ψηφίο του 2,00003}\}$$

3. Να γίνουν με περιγραφή τα σύνολα :

$$A = \{1,2,3, \dots, 100\}, B = \{0,2,4, \dots\}, \Gamma = (3, 7], \Delta = [-3, 3]$$

4. 4) Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{\gamma, \delta, \alpha, \beta\}$ είναι σωστό το $B \subseteq A$

5. Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{\gamma, \delta, \alpha, \beta\}$ είναι σωστό το $B = A$

6. Με την διαδικασία της συμμετρικής ιδιότητας ($A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$)

να αποδείξεις τις :

$$i) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$ii) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$iii) (A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$$

$$iv) (A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$$

$$[\text{υπ. } \chi \in (A \cup B)' \Leftrightarrow \chi \notin A \cup B \Leftrightarrow \chi \notin A \text{ και } \chi \notin B \Leftrightarrow \chi \in A' \text{ και } \chi \in B' \text{ κλπ}]$$

7. Αν $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$ και $\Omega = \{1,2, \dots, 10\}$ να βρεις τα :

$$A', B', A \cup B, (A \cup B)', \emptyset', \Omega'$$

8. Αν $A = \{\chi \in \mathbb{R} : 2\chi^4 = -32\}$ να βρεις το A'

(για τα αριθμητικά σύνολα αν δεν αναφέρεται το Ω εννοείται $\Omega = \mathbb{R}$)

9. Αν $\mathbb{R}$ το βασικό σύνολο ποιο είναι το $\mathbb{R}'$;

10. Είναι σωστό το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

11. Να γράψεις με την μορφή διαστήματος τα :

$$i) \mathbb{R}^+ = \{\chi \in \mathbb{R} : \chi \geq 0\} \quad ii) \mathbb{R}_*^+ = \{\chi \in \mathbb{R} : \chi > 0\} \quad iii) \mathbb{R}^- = \{\chi \in \mathbb{R} : \chi \leq 0\} \quad iv) \mathbb{R}_*^- = \{\chi \in \mathbb{R} : \chi < 0\}$$

Περί συναρτήσεων ο λόγος

2.4 Συναρτήσεις.

Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε πολλές φορές λέξεις και εκφράσεις όπως :

- Ο τόκος **Τ** **εξαρτάται** από το επιτόκιο ϵ
- Η εισαγωγή κάποιου σε Α. Ε. Ι. είναι **συνάρτηση** του διαβάσματός του
- Η απόσταση που θα διανύσει ένα κινητό είναι **συνάρτηση** της ταχύτητάς του
- Το μήκος του κύκλου είναι **συνάρτηση** της ακτίνας του ρ και δίνεται από τον τύπο $\Gamma = 2\pi\rho$.

Όλες αυτές οι εκφράσεις , όπως και πολλές άλλες , περιγράφουν **διαδικασίες** όπου η τιμή ενός μεγέθους είναι **συνάρτηση** της τιμής ενός άλλου μεγέθους.

Να ξεκαθαρίσουμε ότι μέγεθος είναι π χ ο **όγκος** της βενζίνας. Όταν πάει κάποιος στο βενζινάδικο και βάλει 15 λίτρα τότε το 15 είναι η τιμή του μεγέθους «όγκος βενζίνας» και τα λίτρα είναι η μονάδα μέτρησης. Επίσης όταν ένα κινητό διανύσει 30Km το μέγεθος είναι η «απόσταση» το 30 είναι η τιμή του μεγέθους «απόσταση» και Km είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης .

Έτσι λοιπόν πολλές φορές χρησιμοποιούμε τον όρο **συνάρτηση** για να δηλώσουμε ότι οι τιμές ενός μεγέθους εξαρτώνται άμεσα από τις τιμές ενός άλλου μεγέθους .

Τι ακριβώς είναι συνάρτηση :

Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι μια **διαδικασία** κατά την οποία **σε κάθε** ένα στοιχείο του Α **αντιστοιχίζεται ένα μόνο** στοιχείο του Β.

Οι **συναρτήσεις έχουν όνομα** , βέβαια δεν τις λέμε Κώστα , Νίκο, Μαίρη αλλά τις ονομάζουμε συνήθως με μικρά (πεζά) γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, όπως **f , g , w , s , φ , θ** , έτσι έχουμε την συνάρτηση **f** ή την συνάρτηση **g** ή την συνάρτηση **φ** αλλά και **F , G , Φ** κλπ.

Επειδή είναι δύσκολος ο χειρισμός συναρτήσεων όταν αυτές περιγράφονται λεκτικά και επειδή είμαστε ήδη αρκετά εξοικειωμένοι με τους αριθμούς και τους αλγεβρικούς τύπους, στην μελέτη των συναρτήσεων χρησιμοποιούμε συναρτήσεις οι οποίες περιγράφονται από αλγεβρικούς τύπους και συνδέουν δύο σύνολα Α και Β για τα οποία ισχύει $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$.

Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται **πραγματικές συναρτήσεις** .

Παράδειγμα Αν μας έδιναν την συνάρτηση με τον εξής τρόπο : Δίνεται το $A = [3 , 7]$ το $B = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση **f** με την οποία «σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται το πηλίκο του διπλασίου του αυξημένο κατά 5 προς το x ελαττωμένο κατά 3» !! δεν βρίσκεις άκρη με τίποτα, ενώ η ίδια

συνάρτηση όταν δοθεί με αλγεβρικό τύπο ως εξής : « Δίνεται $A = [3, 7]$, $B = \mathbb{R}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ » είναι σαφώς πιο απλά τα πράγματα

Συνηθίζουμε να γράφουμε $\psi = f(x) / x \in A$ και $\psi \in B$.

- Το x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, το ψ ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το A ονομάζεται **Πεδίο ή Σύνολο Ορισμού** της συνάρτησης.
- Το $f(x)$ διαβάζεται f του x και είναι η τιμή της f στο x , δηλαδή είναι ο αριθμός από το B που αντιστοιχεί στον αριθμό x από το A , πράγμα που σημαίνει ότι άλλο πράγμα η συνάρτηση, η οποία είναι μια διαδικασία και δύο σύνολα και άλλο το $f(x)$ που είναι ένας αριθμός. Γι' αυτό είναι κακή έκφραση η πρόταση «Δίνεται η συνάρτηση $f(x) \dots$ ». Με $f(x)$ παριστάνουμε τον τύπο μιας συνάρτησης μέσω του οποίου υπολογίζουμε την τιμή της f στο x . Για να υπολογίσουμε π.χ. το $f(3)$ βάζουμε στον τύπο $f(x)$ στη θέση του x το 3 και κάνουμε πράξεις οπότε το αποτέλεσμα είναι το $f(3)$.

Π.χ. αν $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{3,5,7,9,10,12\}$ και $f(x) = 2x + 1$ τότε $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ και $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ή $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Το σύνολο $f(A) = \{3,5,7,9\} \subseteq B$, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, ονομάζεται **πεδίο ή σύνολο τιμών**

Με βάση τον ορισμό μιας συνάρτησης μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις

Παρατηρήσεις

- Κάθε στοιχείο του συνόλου A πρέπει να έχει οπωσδήποτε ένα και μόνο ένα αντίστοιχο στο σύνολο B .
Αυτό πρακτικά σημαίνει πως για να είναι μια σχέση, ανάμεσα στα στοιχεία του A και του B συνάρτηση, πρέπει να μην υπάρχει στοιχείο του A χωρίς αντίστοιχο και να μην υπάρχει στοιχείο του A με δύο ή περισσότερα αντίστοιχα.
- Κανονικά για να μας ορίσουν μια συνάρτηση πρέπει να μας δίνουν **το πεδίο ορισμού** (ΠO) και **το πεδίο τιμών** (ΠT), όμως το ΠT μπορούμε (θεωρητικά) να το βρούμε βρίσκοντας το $f(A) = \{\psi \in B / \psi = f(x) \text{ με } x \in A\}$ όπως πιο πάνω, γι' αυτό σπανίως δίνεται και επίσης σπανίως ζητείται.
Όπως θα δούμε στη συνέχεια το ΠT μικρή σημασία έχει για την συνάρτηση.
- Πολλές φορές επίσης δεν μας δίνουν ούτε το ΠO μιας συνάρτησης και μας δίνουν μόνο τον τύπο της. **Θα πρέπει πριν απ' όλα να βρίσκουμε οπωσδήποτε ΠO .**

Για να βρούμε το ΠO μιας συνάρτησης κάνουμε τις εξής σκέψεις :

1^{ον} Όλες οι συναρτήσεις, με τις οποίες εμείς θα ασχοληθούμε, είναι πραγματικές.
Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το ΠO A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) και μάλιστα το «ευρύτερο» δυνατό υποσύνολο και το $f(A)$ επίσης υποσύνολο του $\mathbb{R}$ [$f(A) \subseteq \mathbb{R}$]

2^{ον} Αφού τα A , $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ (ίσως και το ίδιο το $\mathbb{R}$), για να βρούμε το A θα αναζητήσουμε εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία δεν υπάρχει αντίστοιχο στο $\mathbb{R}$ και θα τα εξαιρέσουμε από το $\mathbb{R}$. Επειδή για να βρω το $f(x)$ για κάποιο x , όπως είδαμε και στο παράδειγμα, αντικαθιστώ το x στον τύπο της συνάρτησης και κάνω πράξεις, για να μην υπάρχει το $f(x)$ θα πρέπει να μην γίνονται όλες οι πράξεις που υπάρχουν στον τύπο $f(x)$.

Οι πράξεις στον τύπο της f είναι οι γνωστές μας πράξεις του $\mathbb{R}$.

Όμως στο $\mathbb{R}$ δύο μόνο πράξεις δεν γίνονται : η διαίρεση με το 0 και η εύρεση ρίζας με αρνητικό υπόριζο . Άρα δεν μπορώ να βρω την αντίστοιχη τιμή ενός $x \in \mathbb{R}$ μόνο όταν αυτό το x μηδενίζει έναν παρονομαστή ή καθιστά μια υπόριζη ποσότητα αρνητική.



Πως βρίσκω το Πεδίο Ορισμού μια συνάρτησης ; ; ;

Πρακτικά λοιπόν όταν μου δίνει έναν αλγεβρικό τύπο και **πρέπει να βρω το Π Ο**, για να γίνει ο αλγεβρικός τύπος συνάρτηση, **θα βρίσκω τους περιορισμούς έτσι ώστε να έχει νόημα η παράσταση** δηλ θα εξετάζω τον τύπο της συνάρτησης και :

α) Αν έχει παρονομαστή που εξαρτάται από το x θα βρίσκω τις τιμές που τον μηδενίζουν και θα τις εξαιρώ από το $\mathbb{R}$, και αυτό το σύνολο θα είναι το Πεδίο Ορισμού (Π Ο).

β) Αν υπάρχει ρίζα που εξαρτάται από το x **απαιτώ** η υπόριζη ποσότητα να είναι **μη αρνητική** (δηλ ≥ 0). Οι λύσεις της αντίστοιχης ανισότητας μου δίνουν το Π Ο .

γ) Αν υπάρχει συνδυασμός από παρονομαστές και ρίζες τότε ο συνδυασμός (συναλήθευση) των περιορισμών θα μου δώσει το Π Ο

Παραδείγματα στην 1^η περίπτωση :

Να βρεθεί το Π Ο των συναρτήσεων :

$$\text{ι) } f \text{ με } f(x) = \frac{3x+1}{x^2-9} \quad \text{ιι) } g \text{ με } g(x) = \frac{x}{3x-7} \quad \text{ιιι) } \varphi \text{ με } \varphi(x) = \frac{3x^2-1}{23} \quad \text{ιιιι) } f \text{ με } f(x) = \frac{x-2}{3x^2+5}$$

Απάντηση :

ι) Ο τύπος της f έχει παρονομαστή . Άρα γράφω $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$, οι τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Άρα Π Ο είναι το $A = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$ διαβάζεται $\mathbb{R}$ εκτός από το ± 3

ιι) Ο τύπος της g έχει παρονομαστή. Είναι δε $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$ άρα Π Ο το

$$A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{3} \right\} \quad \text{ή} \quad A = \mathbb{R} \text{ εκτός του } \frac{7}{3}$$

ιιι) Είναι Π Ο το $\mathbb{R}$ διότι ο 23 δεν εξαρτάται από το x (δεν μηδενίζεται ποτέ)

ιιιι) Για το Π Ο της f έχω $3x^2 + 5 = 0$. Αδύνατη εξίσωση άρα Π Ο το $A = \mathbb{R}$

Παραδείγματα στην 2^η περίπτωση :

Να βρεθεί το Π Ο των συναρτήσεων f, g, φ, w που έχουν αλγεβρικό τύπο :

$$\text{ι) } f(x) = \sqrt{3x-7} \quad \text{ιι) } g(x) = \sqrt[3]{6-2(x+1)} \quad \text{ιιι) } \varphi(x) = \sqrt{2x^3+x} \quad \text{ιιιι) } w(x) = \sqrt{(x+2)^2}$$

Απάντηση :

ι) Ο τύπος της f έχει ρίζα άρα πρέπει $3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$

$$\text{Άρα Π Ο το } A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{7}{3}\} = \left[\frac{7}{3}, +\infty \right)$$

ιι) Ο τύπος της g έχει ρίζα που εξαρτάται από το x άρα πρέπει $6 - 2(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \leq 2$ άρα Π Ο το $A = (-\infty, 2]$

ιιι) Π Ο είναι το $A = \mathbb{R}$ γιατί δεν έχει ρίζα που να εξαρτάται από το x

iv) Ο τύπος της w έχει ρίζα άρα πρέπει $(\chi + 2)^2 \geq 0$. Πράγμα που ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Προσοχή τότε η w απλοποιείται ως εξής $w(\chi) = \sqrt{(\chi + 2)^2} \Leftrightarrow w(\chi) = |\chi + 2|$ [παρακάτω θα δούμε τι γίνεται με το απόλυτο].

Παραδείγματα στην 2^η περίπτωση :

Να βρεθεί το ΠΟ των συναρτήσεων :

i) f με $f(\chi) = \frac{\sqrt{3\chi-7}}{2\chi-4}$

ii) g με $g(\chi) = \frac{2\chi+5}{\sqrt{\chi-1}}$

iii) φ με $\varphi(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi-3} + \frac{3}{\chi^2-4}$

iv) θ με $\theta(\chi) = \frac{\chi-1}{\chi^2-4} - \frac{\sqrt{\chi+1}}{3\chi}$

v) p με $p(\chi) = \sqrt{2\chi-1} + \sqrt{\chi+2}$

Απάντηση :

i) Ο τύπος της f έχει ρίζα άρα πρέπει $3\chi-7 \geq 0 \Leftrightarrow 3\chi \geq 7 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{7}{3}$ όμως στον τύπο υπάρχει και

παρονομαστής άρα έχω $2\chi-4=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi=2$. Τελικά ΠΟ είναι το $A = [\frac{7}{3}, +\infty) - \{2\} = [\frac{7}{3}, +\infty)$

διότι έτσι κι' αλλιώς το $2 \notin [\frac{7}{3}, +\infty)$ και επομένως δεν χρειάζεται η εξαίρεσή του.

ii) Στην g με $g(\chi) = \frac{2\chi+5}{\sqrt{\chi-1}}$ υπάρχει ρίζα στον παρονομαστή επομένως $\chi-1 \geq 0$ και

$\chi-1 \neq 0$ που **συμπυκνώνονται** στην $\chi-1 > 0$.

Άρα για το ΠΟ έχω $\chi-1 > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ άρα ΠΟ το $A = (1, +\infty)$.

iii) Στην φ με $\varphi(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi-3} + \frac{\chi-2}{\chi^2-4}$ πρέπει $\chi-3 \neq 0$ και $\chi^2-4 \neq 0$. Όμως $\chi-3=0 \Leftrightarrow \chi=3$ και $\chi^2-4=0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi = \pm 2$ Τελικά ΠΟ το $A = \mathbb{R} - \{\pm 2, 3\}$.

Τότε η φ γίνεται $\varphi(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi-3} + \frac{\chi-2}{\chi^2-4} \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi-3} + \frac{\chi-2}{(\chi-2)(\chi+2)} \Leftrightarrow \varphi(\chi) = \frac{3\chi-5}{\chi-3} + \frac{1}{\chi+2}$

δηλαδή ο τύπος της $\varphi(\chi)$ απλοποιείται αλλά **προσοχή το ΠΟ εξακολουθεί να είναι το**

$A = \mathbb{R} - \{\pm 2, 3\}$ και παρ' όλο που μετά την απλοποίηση δεν υπάρχει στον παρονομαστή ο $\chi-2$, το χ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

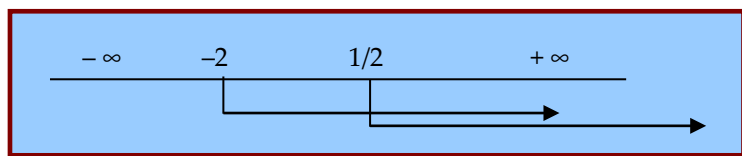
iv) Στην θ με $\theta(\chi) = \frac{\chi-1}{\chi^2-4} - \frac{\sqrt{\chi+1}}{3\chi}$ πρέπει $\chi^2-4 \neq 0$ και $3\chi \neq 0$ και $\chi+1 \geq 0$. Όμως $\chi^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\dots \Leftrightarrow \chi = \pm 2$ και $3\chi=0 \Leftrightarrow \chi=0$ και $\chi+1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -1$.

Τελικά για το ΠΟ έχω $\chi \in [-1, +\infty) - \{0, \pm 2\} = \chi \in [-1, +\infty) - \{0, +2\}$ γιατί το -2 δεν υπάρχει στο $[-1, +\infty)$ έτσι κι' αλλιώς

v) Για την p με $p(\chi) = \sqrt{2\chi-1} + \sqrt{\chi+2}$ πρέπει $2\chi-1 \geq 0$ και $\chi+2 \geq 0$. Όμως

$2\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\chi \geq 1 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{2}$ και $\chi+2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -2$ όποτε αν συναληθεύσουμε τις ανισώσεις έχουμε



Άρα ΠΟ το $A = [\frac{1}{2}, +\infty)$ (τελικά)

✓ Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι οι συναρτήσεις στις οποίες δεν υπάρχει ένας ενιαίος τύπος για όλο το πεδίο ορισμού αλλά σε **διαφορετικά «κομμάτια»** του πεδίου ορισμού ισχύει **διαφορετικός τύπος** π.χ. έστω f με Π.Ο. το $A = \mathbb{R}$ και $f(x) = 2x + 1$ όταν $x \in (-\infty, 3]$ ενώ είναι $f(x) = x^2 - 5$ όταν $x \in (3, +\infty)$ ή αλλιώς πιο εποπτικά $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \in (-\infty, 3] \\ x^2-5 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$

$$\text{Δες επίσης την } g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x & \text{αν } x \in (-\infty, 1) \\ 2 & \text{αν } x = 1 \\ x - 3 & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Όταν μια συνάρτηση όπως πιο πάνω περιγράφεται από περισσότερους από έναν τύπους λέμε ότι είναι **πολλαπλού τύπου**.

Ο χειρισμός μιας τέτοιας συνάρτησης απαιτεί προσοχή. Π.χ. αν θέλω να βρω το $g(-2)$, $g(1)$ και $g(3)$ στην $g(x)$ όπως δίνεται πιο πάνω πρέπει κάθε φορά να επιλέξω τον κατάλληλο τύπο δηλ. είναι:

$g(-2) = 3(-2)^2 - 5(-2) = 22$ επειδή $-2 \in (-\infty, 1)$ ενώ $g(1) = 2$ γιατί έτσι δίνεται από τον τύπο της συνάρτησης και $g(3) = 3 - 3 = 0$.

Αν είχα να επιλύσω την $g(x) = 0$ θα έλυνα δύο εξισώσεις

1^{ον} $3x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 5/3$ και θα έκανα δεκτή μόνο την ρίζα 0 διότι $5/3 > 1$ άρα $5/3 \notin (-\infty, 1)$ και

2^{ον} $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ δεκτή διότι $3 \in (1, +\infty)$

Πολλές φορές όπως στη περίπτωση της g δεν δίνεται το Π.Ο. Στην πραγματικότητα το Π.Ο. είναι η ένωση των διαστημάτων που δίνονται με τον τύπο της συνάρτησης στην περίπτωση της g είναι $\Pi.Ο. \text{ το } A = (-\infty, 1) \cup \{1\} \cup (1, +\infty) = \mathbb{R}$

Προσοχή

Όλες οι συναρτήσεις που δίνονται με ένα τύπο και περιέχουν απόλυτα μόλις **απαλλάξουμε τον τύπο της συνάρτησης από τα απόλυτα** (όπως είδαμε στο 1^ο Κεφάλαιο) τότε αυτομάτως η συνάρτηση μετατρέπεται σε πολλαπλού τύπου.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x+1| + 2x - 1$ να βρεις τον τύπο της f χωρίς απόλυτα.

Απάντηση: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ τότε $|x+1| = x+1 \Leftrightarrow f(x) = x+1 + 2x - 1 = 3x$

Και $x < -1 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1 \Leftrightarrow f(x) = -x-1 + 2x - 1 = x-2$

Δηλαδή ισχύει ο πιο κάτω πίνακας (όπως κάναμε στο 1^ο Κεφάλαιο)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$ x+1 $	$-x-1$		$x+1$
$f(x)$	$x-2$		$3x$

τότε ο τύπος της f γίνεται : $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \\ 3x & \text{αν } x \in [-1, +\infty) \end{cases}$

Παρατηρήσεις

1^{ον} Στον τύπο μιας συνάρτησης μπορεί να δίνεται η τιμή της για μια συγκεκριμένη τιμή του x

όπως στον τύπο της συνάρτησης g : $g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x & \text{αν } x \in (-\infty, 1) \\ 2 & \text{αν } x = 1 \\ x-3 & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

που δίνεται ότι $g(x) = 2$ αν $x = 1$ δηλαδή $g(1) = 2$.

2^{ον} Μπορεί μια συνάρτηση να έχει την ίδια τιμή για κάθε x που ανήκει στο Πεδίο Ορισμού της όπως π.χ η f με Π.Ο το $A = [3, +\infty)$ και $f(x) = 34,5$ για κάθε $x \in A$.

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **σταθερή συνάρτηση**

3^{ον} Επίσης μπορεί η συνάρτηση να έχει την ίδια τιμή για ένα διάστημα του Π.Ο όπως στο παράδειγμα είναι $\varphi(x) = -10$ για κάθε $x \in (-\infty, -5)$ και $\varphi(x) = 10$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **σταθερή κατά διαστήματα**.

Ασκήσεις

- Δίνεται η $\varphi(x) = 2x^2 + 5x + 2$ να βρεις το Π.Ο και τα $\varphi(1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1/2)$.
Που βρίσκονται τα σημεία $A(-2, \varphi(-2))$, $B(0, \varphi(0))$ και $\Gamma(1/2, \varphi(1/2))$ σε ένα σύστημα αξόνων;
- Δίνεται η g η οποία αντιστοιχίζει σε ένα x το πηλίκο του τριπλασίου του x δια του διπλασίου του αυξημένο κατά 5.
Να βρεις τον αλγεβρικό τύπο της g , να βρεις το Π.Ο και το $g(5)$.
- Να βρεις το Π.Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :
ι) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x + 5}$ ιι) $g(x) = \frac{7}{x^2 - 9}$ ιιι) $s(x) = \frac{3x + 2}{(x^2 - 1)(3x + 2)(x + 2)}$
- Να βρεις το Π.Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :
ι) $g(x) = \frac{7}{x^2 + \sqrt{3}}$ ιι) $\varphi(x) = \frac{7}{x^2 - 11}$ ιιι) $g(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$
- Να βρεις το Π.Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :
ι) $f(x) = \frac{x^2}{x + 5} + \frac{2x + 3}{x - 4}$ ιι) $g(x) = \frac{3}{2x} + \frac{x - 2}{x^2 - 4}$ ιιι) $w(x) = \frac{3x^2 - 27}{x - 1} + \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- Να βρεις το Π.Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :
ι) $s(x) = \sqrt{3x - 7}$ ιι) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x - 5}$ ιιι) $\theta(x) = \sqrt{(3x - 7)^2}$ ιν) $g(x) = (\sqrt{x + 2})^2$
- Να βρεις το Π.Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :

ι) $f(x) = (\sqrt{(x+2)^2})^2$

ιι) $f(x) = \sqrt[23]{(3x+5)^{24}}$

ιιι) $f(x) = (\sqrt{3x+1})^2$

α σκήσεις

8. Να βρεις το Π Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :

ι) $g(x) = \sqrt{x^2+15} - 2 \sqrt[3]{x-1} + 3 \sqrt[3]{24-3x}$ ιι) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[4]{7-x}$ ιιι) $u(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{1-x}$

9. Να βρεις το Π Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :

ι) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+5}$ ιι) $g(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x+7}}$ ιιι) $w(x) = \frac{3x^2-27}{x+1} + \frac{\sqrt{2x+1}}{x-2}$

10. Να βρεις το Π Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :

ι) $u(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+7}$ ιι) $\varphi(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

11. Να βρεις το Π Ο των συναρτήσεων και να τις απλοποιήσεις αν γίνεται :

ι) $f(x) = \sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$ ιι) $\varphi(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$ ιιι) $g(x) = |x+2| - 2|x+1|$

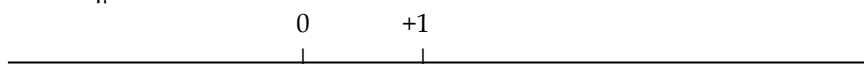
12. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x \in (-\infty, 1] \\ 3 & \text{αν } x \in (2, 3) \\ x-2 & \text{αν } x \in [3, +\infty) \end{cases}$ να βρεις το Π Ο και τα $f(-1)$, $f(\sqrt{5})$, $f(4)$

13. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ να βρεις το Π Ο και τα $f(2)$, $f(2,23)$, $f(\sqrt{5})$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$, $f(\pi)$

2.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης .

✓ Συστήματα αξόνων – Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Αξονας είναι μία ευθεία πάνω στην οποία έχουμε τοποθετήσει (αυθαίρετα) σε ένα σημείο το 0 και σε ένα σημείο το +1.



Με αυτό τον απλό τρόπο αποκαθιστούμε μια «τέλεια» σχέση ανάμεσα στα σημεία της ευθείας και στους πραγματικούς αριθμούς. Πράγματι όταν βάλουμε αυθαίρετα το 0 και το +1 από κει και πέρα σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός και σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο.

Αυτή την τέλεια σχέση την επεκτείνουμε, με απλό τρόπο επίσης, και στο επίπεδο, αν πάρουμε δύο άξονες με κοινή αρχή (ένα κοινό σημείο στο οποίο αντιστοιχεί το 0 και για τους δύο άξονες). Τότε σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζευγάρι αριθμών, και σε κάθε ζευγάρι αριθμών αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου με τον τρόπο που θα δούμε πιο κάτω.

Έστω δύο άξονες χ' χ και ψ' ψ με κοινή αρχή O και σημείο M

Από M το φέρνω $MA \parallel \psi'$ ψ , στο A του άξονα χ' χ αντιστοιχεί ένας αριθμός (ο 3), αυτός αποτελεί το πρώτο στοιχείο του ζευγαριού που αντιστοιχούμε στο M και λέγεται τετμημένη του A .

Από το M φέρνω $MB \parallel \chi'$ χ , στο B του άξονα ψ' ψ αντιστοιχεί ένας αριθμός (ο 2), αυτός αποτελεί το δεύτερο στοιχείο του ζευγαριού που αντιστοιχούμε στο M και λέγεται τεταγμένη του A και οι δύο μαζί (ζευγάρι) λέγονται συντεταγμένες. Έτσι οι συντεταγμένες του A είναι $(3, 2)$.

Δύο άξονες με κοινή αρχή λέγονται σύστημα αξόνων ή σύστημα συντεταγμένων.

Προσοχή οι άξονες δεν είναι απαραίτητα κάθετοι μεταξύ τους, αν είναι κάθετοι τότε το σύστημα λέγεται ορθογώνιο, αν οι άξονες δεν είναι κάθετοι τότε το σύστημα λέγεται πλαγιογώνιο όπως $\pi \chi$

Και σ' αυτή την περίπτωση φέρνοντας από το $M \parallel$ στους άξονες βρίσκω τις συντεταγμένες του M που είναι πάλι $(3, 2)$

Αν οι μονάδες των δύο αξόνων είναι ίσες κατά μήκος τότε το σύστημα λέγεται κανονικό. Έτσι έχουμε ορθογώνια συστήματα, συστήματα ορθογώνια και κανονικά ή ορθοκανονικά, συστήματα πλαγιογώνια και συστήματα πλαγιογώνια και κανονικά.

Στα μαθηματικά συνήθως χρησιμοποιούμε ορθοκανονικά γιατί έτσι βολεύει καλύτερα.

Στην πράξη και κυρίως στη Φυσική χρησιμοποιούμε απλώς πλαγιογώνια (θυμήσου $\pi \chi$ την σύνθεση δυνάμεων)

Η σύνδεση των σημείων με τις συντεταγμένες τους υπήρξε κυριολεκτικά μια επανάσταση στα μαθηματικά διότι μας έδωσε τη δυνατότητα να μελετάμε τα σχήματα κάνοντας απλές αλγεβρικές πράξεις.

Ένα σύστημα αξόνων λέγεται και **Καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων.

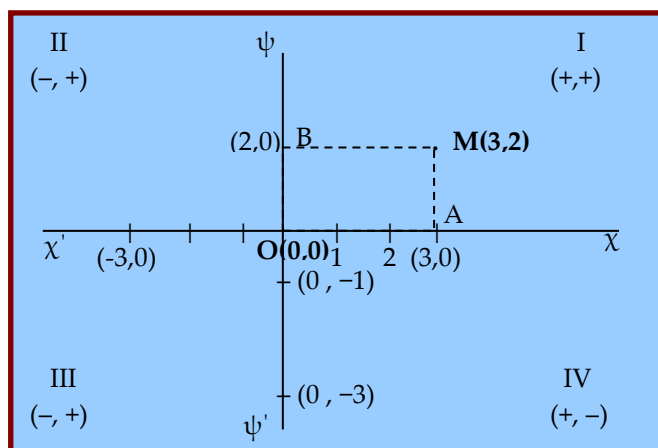
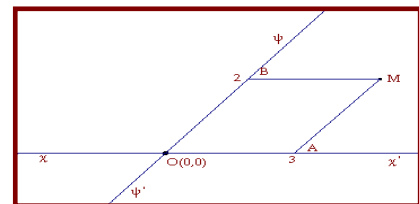
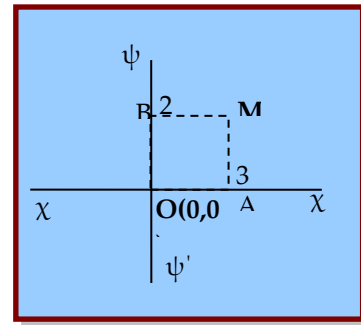
Στα επόμενα με τον όρο σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων εκτός και αν αναφέρεται κάτι άλλο.

Έστω ένα (ορθοκανονικό) σύστημα αξόνων σ' ένα επίπεδο τότε εύκολα

διαπιστώνουμε ότι **όλα τα σημεία του χ' χ έχουν τεταγμένη 0** δηλαδή έχουν συντεταγμένες της μορφής $(\chi, 0)$ $\pi \chi (-3, 0), (2, 0), (3, 0)$ κλπ.

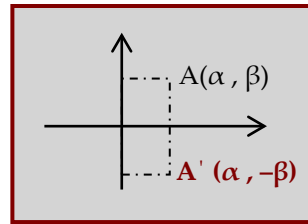
Ενώ **τα σημεία του ψ' ψ έχουν τετμημένη 0** δηλ συντεταγμένες της μορφής $(0, \psi)$ $\pi \chi (0, -3), (1, 0), (2, 0)$.

Το επίπεδο χωρίζεται σε τέσσερα κομμάτια (μόρια) τα οποία τα λέμε **τεταρτημόρια** και αριθμούνται I, II, III, IV με αρχή πάνω δεξιά και **φορά αντίστροφη από τη φορά που κινούνται οι δείκτες του ρολογιού, η φορά αυτή θεωρείται θετική.**

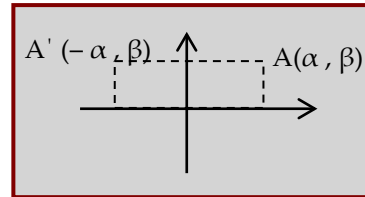


Στο σχήμα δίπλα φαίνονται και τα πρόσημα των συντεταγμένων έτσι παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία με **θετική τεταγμένη** βρίσκονται **πάνω από τον χ'** και όλα τα σημεία με **θετική τετμημένη** βρίσκονται **δεξιά από τον ψ'**
Θυμάσαι, βέβαια, ότι δύο σημεία A και A' λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ε αν και μόνο αν η ε είναι μεσοκάθετη στο τμήμα AA'.

- ✓ Τα σημεία A(α , β) και A' (α , $-\beta$) είναι συμμετρικά ως προς τον χ'

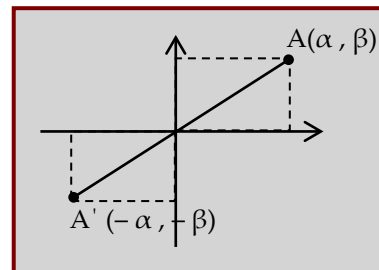


- ✓ Τα σημεία A(α , β) και A' ($-\alpha$, β) είναι συμμετρικά ως προς τον ψ'

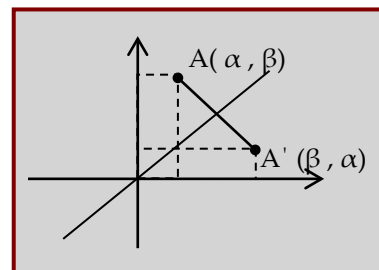


Θυμάσαι, βέβαια, ότι δύο σημεία A και A' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο O αν και μόνο αν το O είναι μέσον του AA'.

Τα σημεία A(α , β) και A' ($-\alpha$, $-\beta$) είναι συμμετρικά ως προς το O (0,0)



Τα σημεία A(α , β) και A' (β , α) είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας του I τεταρτημορίου



✓ Απόσταση Σημείων.

Εστω τα σημεία K(χ_1 , ψ_1), L(χ_2 , ψ_2) τότε η απόσταση K L είναι :

$$KL = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και όταν το K L είναι παράλληλο στο χ' ή στον ψ'

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία A(2, 3) και B(4, 5) και το M(3,4) που βρίσκεται πάνω στο AB να αποδείξεις ότι το M είναι μέσον του AB.

Απάντηση : Είναι $MA = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$MB = \sqrt{(3-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ άρα $MA = MB$ και επειδή M ανήκει στο AB είναι M μέσον του AB (Στο μέλλον δεν θα δίνεται ότι το M ανήκει στο AB αλλά θα πρέπει εσύ να το αποδεικνύεις. Θα δούμε αργότερα πως γίνεται αυτό)

✓ Γραφική παράσταση συνάρτησης.

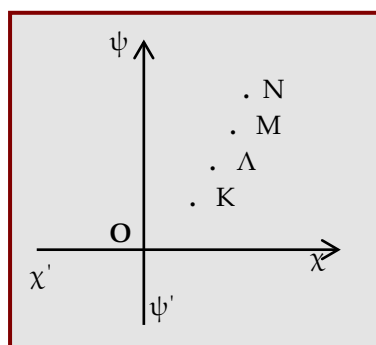
Έστω μια συνάρτηση f με Π Ο ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται το $f(x)$. Θα μπορούσα λοιπόν να φτιάξω ένα σύνολο που να αποτελείται από τα ζευγάρια αντιστοιχών, μέσω της f , τιμών. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται συνήθως με το Γ και λέγεται γράφημα της f (το Γ από τη λέξη γράφημα) και είναι: $\Gamma = \{(x, f(x)) / x \in A\}$.

Αν θεωρήσω τα ζευγάρια $(x, f(x))$ ως συντεταγμένες σημείων, τότε για κάθε τέτοιο ζευγάρι θα υπάρχει ένα σημείο στο επίπεδο των αξόνων με συντεταγμένες το κάθε ζευγάρι. **Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν ως συντεταγμένες τα ζευγάρια αντιστοιχών τιμών [δηλ τα $(x, f(x))$] ονομάζεται γραφική παράσταση της f .**

Δηλαδή γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι η παράσταση με σημεία, στο επίπεδο των αξόνων, των ζευγαριών του γραφήματος Γ .

Παράδειγμα 1

Έστω η f με $f(x) = 2x$ και $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Είναι $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$ τότε $\Gamma = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ οπότε στο σύστημα των αξόνων η γραφική παράσταση είναι τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν και μόνο.



Παράδειγμα 2

Έστω η f με $f(x) = 2x$ και $A = [1, 4]$. Τότε είναι $f(1) = 2$, $f(4) = 8$ και επειδή τα στοιχεία του $[1, 4]$ είναι άπειρα είναι αδύνατον να βρούμε το $f(x)$ για κάθε $x \in A$ και επομένως αδύνατον να βρούμε το Γ με αναγραφή των στοιχείων του.

Σε τέτοιες περιπτώσεις στηριζόμαστε στις γνώσεις που θα αποκτήσουμε στις επόμενες παραγράφους για να κατασκευάσουμε την Γ Π (γραφική παράσταση) μιας συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα θα δούμε πως επιδρά το Π Ο μιας συνάρτησης στη γραφική της παράσταση, στη συνέχεια θα «φτιάξουμε» τις γραφικές Παραστάσεις (Γ Π) **συγκεκριμένων και χαρακτηριστικών** συναρτήσεων οπότε με βάση αυτά τα στοιχεία θα μπορούμε να κατασκευάσουμε τις Γ Π πάρα πολλών συναρτήσεων.

➤ Πεδίο Ορισμού και Γραφική Παράσταση

Μια συνάρτηση f είναι γνωστή αν είναι γνωστό το Π Ο και ο τύπος της $f(x)$. Το Π Τ μπορούμε να το βρούμε αν βρούμε το $f(A)$ και σε κάθε περίπτωση το Π Τ δεν παίζει κανένα ρόλο στην κατασκευή της Γ Π.

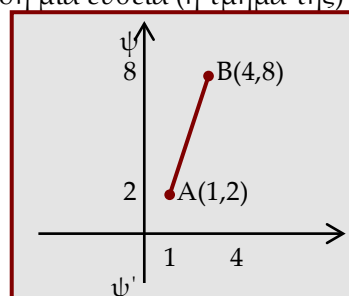
Έτσι λοιπόν αν το $\Pi \cup \Theta$ είναι ένα σύνολο A που αποτελείται από μεμονωμένα στοιχεία όπως στο πρώτο παράδειγμα που ήταν $A = \{1,2,3,4\}$ τότε η $\Gamma \Pi$ της συνάρτησης θα αποτελείται από μεμονωμένα σημεία του επιπέδου.

Αν το $\Pi \cup \Theta$ είναι ένα διάστημα ή το $\Pi \cup \Theta$ είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$ τότε η $\Gamma \Pi$ της συνάρτησης στις περισσότερες περιπτώσεις * θα είναι κομμάτι μιας συνεχόμενης γραμμής ή ολόκληρη γραμμή.

* Εννοείται ότι η $\Gamma \Pi$ μιας συνάρτησης εξαρτάται και από τον τύπο της συνάρτησης

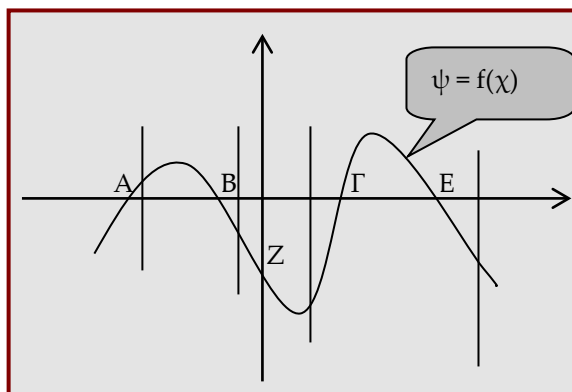
Επειδή όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο κάθε συνάρτηση $\psi = \alpha \chi + \beta$ (δηλ κάθε συνάρτηση 1^{ου} βαθμού) έχει ως γραφική παράσταση μια ευθεία (ή τμήμα της) τότε για το δεύτερο παράδειγμα η $\Gamma \Pi$ είναι η

Δηλαδή το τμήμα AB
(Η ευθεία ε είναι $\Gamma \Pi$ της $\psi = 2\chi$ όταν $A = \mathbb{R}$)



Η $\Gamma \Pi$ μιας συνάρτησης είναι η εικόνα της και το κάθε τι που έχει σχέση με την συνάρτηση έχει **αντανάκλαση** στην $\Gamma \Pi$ έτσι μπορούμε από την $\Gamma \Pi$ να καταλαβαίνουμε πολλά πράγματα για την συνάρτηση.

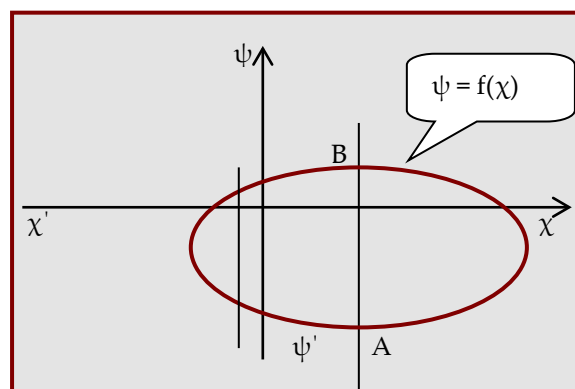
Μια πολύ σημαντική παρατήρηση είναι και η εξής : **Αν η f είναι συνάρτηση τότε η παράλληλη προς τον ψ' από κάθε σημείο του $\Pi \cup \Theta$ θα τέμνει οπωσδήποτε και σε ένα ακριβώς σημείο την $\Gamma \Pi$.** Αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε χ του $\Pi \cup \Theta$ πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς ψ του $\Pi \cup \Theta$ δηλ να δημιουργείται ένα ακριβώς ζευγάρι $(\chi, f(\chi))$ όπως στο σχήμα που ακολουθεί :



SOS Τα σημεία A, B, Γ, E έχουν τεταγμένες 0 δηλ είναι $\psi = f(\chi) = 0$ και το Z έχει τετμημένη 0 δηλαδή είναι $\psi = f(0)$

Η γραμμή του σχήματος δίπλα δεν παριστάνει συνάρτηση διότι υπάρχουν ευθείες παράλληλες του ψ' ψ που την τέμνουν σε περισσότερα από ένα σημεία

Π χ η ευθεία ε τέμνει στα σημεία A και B



Υποδείξεις

- Εξίσωση μιας γραμμής είναι μια εξίσωση $\psi = f(x)$ για την οποία ισχύει ότι κάθε ζευγάρι αριθμών που είναι λύση της εξίσωσης είναι και συντεταγμένες σημείου που ανήκει στη γραμμή και αντίστροφα κάθε σημείο της γραμμής έχει συντεταγμένες που επαληθεύουν την εξίσωση $\psi = f(x)$. Έτσι λοιπόν την συνάρτηση $\psi = f(x)$ αν την θεωρήσω ως εξίσωση τότε μπορώ να την ονομάζω εξίσωση της γραμμής που είναι η Γ Π.
- Θυμίζω ότι **γραμμή** στα μαθηματικά είναι **κάθε σύνολο σημείων**. Ακόμα και το σημείο λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί στοιχειώδης γραμμή.
- Αν θέλω να βρω που η Γ Π της f τέμνει τον x' x λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$. Η Γ Π της f θα τέμνει τον x' x σε τόσα σημεία όσες είναι και οι λύσεις.
- Αν θέλω να βρω που η Γ Π της f τέμνει τον ψ' ψ βρίσκω το $f(0)$. Εννοείται ότι το 0 θα ανήκει στο Π Ο διαφορετικά η Γ Π της f δεν τέμνει τον ψ' ψ .
- Αν θέλω να εξετάσω μήπως ένα σημείο ανήκει στην Γ Π της f εξετάζω αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την $\psi = f(x)$

Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και η Γ Π της f έχει άκρα τότε

- Οι τετμημένες των άκρων της γραμμής μου δείχνουν τα άκρα του Π Ο

α σκήσεις

1. Να βρεθούν οι αποστάσεις των σημείων :
 ι) $A(-2, 3)$ και $B(3, 2)$ ιι) $\Gamma(2, 3)$ και $\Delta(2, -1)$ ιιι) $E(1, 1)$ και $O(0, 0)$
2. Να βρεις την περίμετρο του τριγώνου $A B \Gamma$ και το είδος του τριγώνου αν :
 $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 0)$.

[Υπόδ. Βρες $AB + AG + BG$]
3. Να δείξεις ότι τα σημεία $A(2,3)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(-1,5)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου

[Υπ. Δείξε $AB = AG$]
4. Να δείξεις ότι τα σημεία $A(2,3)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(-1,4)$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου

[Υπ. Δείξε $AB = AG = BG$]
5. Δίνεται η συνάρτηση φ με
 ι) $\varphi(x) = 3x - 2$ ιι) $\varphi(x) = x^2 - 4$ ιιι) $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ ιιιι) $\varphi(x) = x^2 + 11$.

Να βρεις σε κάθε περίπτωση που η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες

[Υπ. λύσε την $\varphi(x) = 0$ και βρες το $\varphi(0)$]

6. Δίνεται η συνάρτηση g με

ι) $g(x) = 3x(x - 2)$ ιι) $g(x) = x^2(x + 4)$ ιιι) $g(x) = 3x^2 \sqrt{x - 1}$

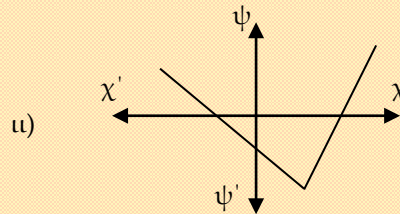
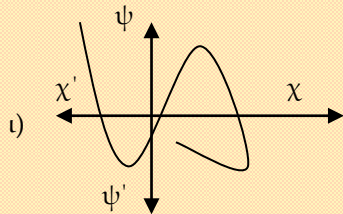
Να βρεις σε κάθε περίπτωση που η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες

[Υπ. λύσε την $g(x) = 0$ και βρες το $g(0)$]

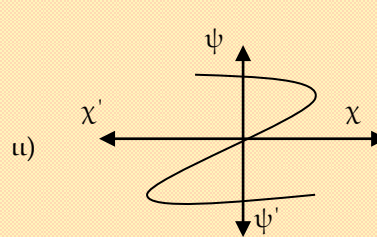
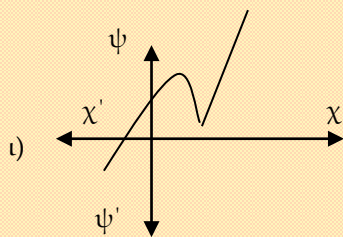
α

σκήσεις

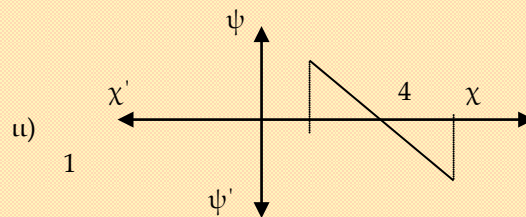
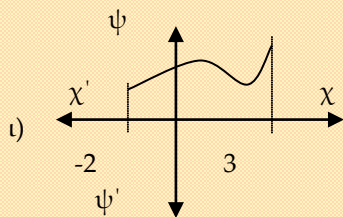
7. Να βρεις σε κάθε περίπτωση αν η γραμμή παριστάνει Γραφική Παράσταση συνάρτησης.



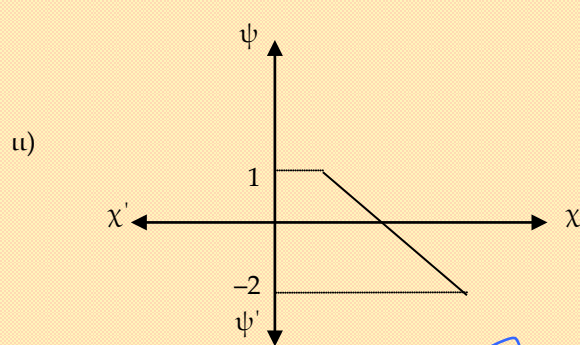
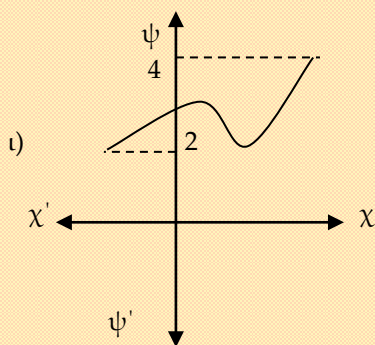
8. Να βρεις σε κάθε περίπτωση αν η γραμμή παριστάνει Γραφική Παράσταση συνάρτησης.



9. Να βρεις από την Γραφική Παράσταση το Πεδίο Ορισμού στις περιπτώσεις που ακολουθούν :



10. Να βρεις από την Γραφική Παράσταση το Πεδίο Τιμών στις περιπτώσεις που ακολουθούν :

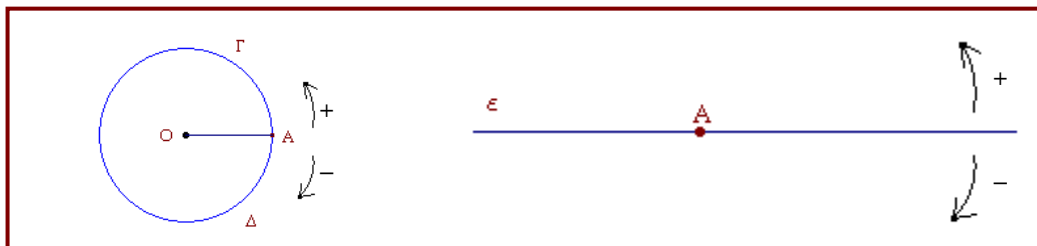


2.5 Η συνάρτηση $\psi = f(x) = \alpha x + \beta$.

✓ Φορά περιστροφής

Έστω κύκλος κέντρου O και A ένα σημείο πάνω του. Η κυκλική κίνηση μπορεί να γίνει κατά δύο τρόπους ή από το A προς το Γ ή από το A προς το Δ . Η φορά κίνησης που είναι **αντίθετη στην κίνηση των δεικτών του ρολογιού** θεωρείται **θετική φορά** και η άλλη (που ταιριάζει με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) **θεωρείται αρνητική φορά**.

Το ίδιο ισχύει και για την περιστροφή της ακτίνας OA καθώς επίσης και για την περιστροφή μιας ευθείας ε γύρω από ένα σημείο της A (όπως δείχνει και το σχήμα)

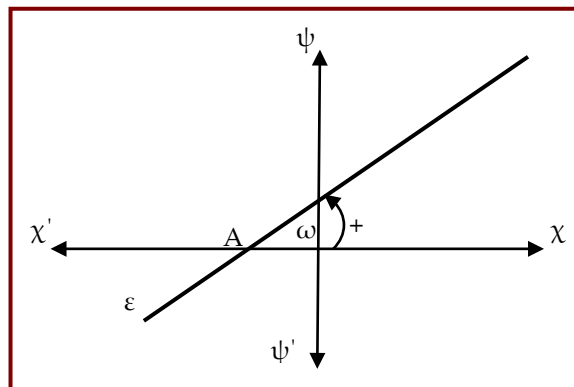


✓ Γωνία μιας ευθείας με τον x'

Έστω ευθεία ε η οποία τέμνει τον x' στο σημείο A

ονομάζουμε

«Γωνία της ε και του άξονα την γωνία ω την οποία διαγράφει ο άξονας x' όταν περιστραφεί κατά την θετική φορά, μέχρι να συμπίψει με την ε »



* Εδικά στην περίπτωση που $\varepsilon \parallel x'$ είναι $\omega = 0$

* Γενικά είναι $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.

✓ Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ $\alpha \neq 0$.

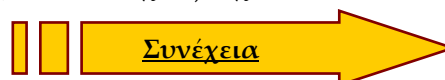
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$, θα αποδειχθεί σε επόμενη τάξη ότι η συνάρτηση αυτή, η οποία ταυτίζεται με την εξίσωση $\psi = \alpha x + \beta$, έχει ως Γραφική Παράσταση μια ευθεία γραμμή για την οποία ισχύουν τα εξής :

1^ο Τέμνει τον x' σε σημείο A με τετμημένη την λύση της $f(x) = 0$ δηλ στο σημείο με $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

είναι δηλαδή $A\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$

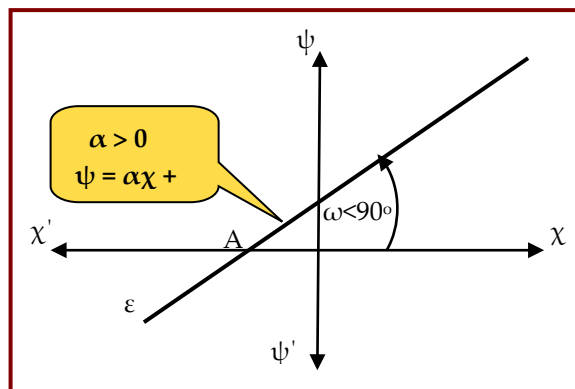
2^ο Τέμνει τον ψ' σε σημείο B με τεταγμένη $f(0)$ δηλ στο $B(0, \beta)$

3^ο Σχηματίζει με τον άξονα γωνία ω για την οποία (όπως θα αποδειχθεί) ισχύει

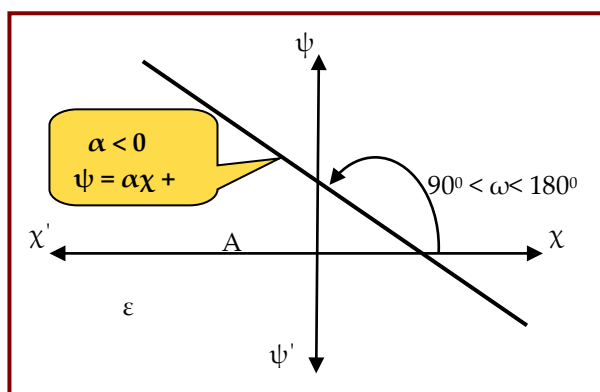


εφω = α και αν χρησιμοποιήσεις τις στοιχειώδεις γνώσεις τριγωνομετρίας που απόκτησες στο Γυμνάσιο εύκολα διαπιστώνεις ότι :

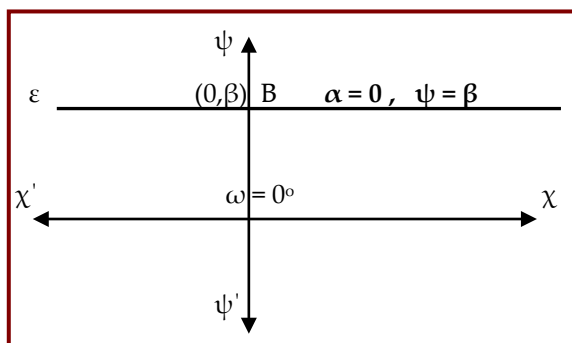
* $\alpha > 0 \Leftrightarrow \text{εφ}\omega > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ$ άρα η θέση της ευθείας ως προς τους άξονες είναι περίπου έτσι



* $\alpha < 0 \Leftrightarrow \text{εφ}\omega < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \omega < 180^\circ$ άρα η θέση της ευθείας ως προς τους άξονες είναι περίπου έτσι



* $\alpha = 0 \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ$. Σε αυτή την περίπτωση ($\alpha = 0$) η συνάρτηση έχει την μορφή $\psi = \beta \Leftrightarrow f(\chi) = \beta$ η οποία όπως μάθαμε λέγεται σταθερή συνάρτηση και είναι $\varepsilon \parallel \chi' \chi$



Ορισμός

Ο συντελεστής α στην $f(\chi) = \alpha\chi + \beta$ καθορίζει απόλυτα την διεύθυνση της ευθείας $\psi = \alpha\chi + \beta$ και γι' αυτό λέγεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Θα ασχοληθούμε στα επόμενα με την συνάρτηση – ευθεία $\psi = \alpha\chi$ και με τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο .

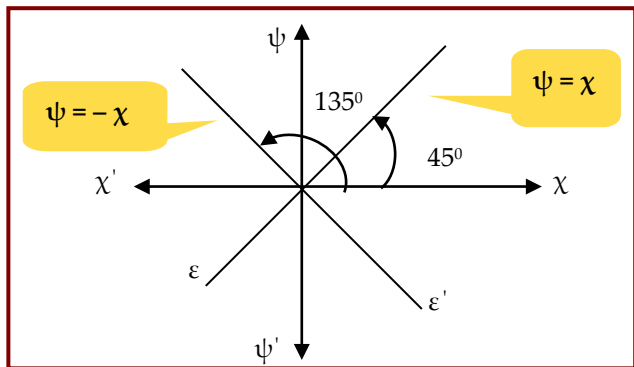
➤ Η συνάρτηση $\psi = f(x) = \alpha x$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ και $\beta = 0$ τότε η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \alpha x$ και έχει γραφική παράσταση την ευθεία $\psi = \alpha x$ [Δες πιο κάτω σχήμα].

Ας δούμε μερικά χρήσιμα πράγματα για την $\psi = \alpha x$

1^{ον} Η $\psi = \alpha x$ περνάει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ διότι το $(0,0)$ επαληθεύει την $\psi = \alpha x$. Πράγματι είναι $0 = \alpha \cdot 0$.

2^{ον} Αν στην $\psi = \alpha x$ έχουμε επί πλέον ότι $\alpha = 1$ τότε αυτή γίνεται $\psi = x$ και αν ω η γωνία της ευθείας $\varepsilon \rightarrow \psi = x$ και του x' x , θα έχω $\varepsilon\omega = \alpha \Leftrightarrow \varepsilon\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$
άρα η ε διχοτομεί την 1^η και 3^η γωνία των αξόνων όπως στο πιο κάτω σχήμα



3^{ον} Αν στην $\psi = \alpha x$ έχουμε επί πλέον ότι $\alpha = -1$ τότε αυτή γίνεται $\psi = -x$ και αν ω η γωνία της ευθείας $\varepsilon' \rightarrow \psi = -x$ και του x' x θα έχω $\varepsilon'\omega = \alpha \Leftrightarrow \varepsilon'\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$ άρα η ε' διχοτομεί την 2^η και 4^η γωνία των αξόνων όπως στο πιο πάνω σχήμα

➤ Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο.

Θα αναζητήσουμε την σχέση των συντελεστών διεύθυνσης δύο ευθειών ανάλογα με την σχετική τους θέση

* Ευθείες παράλληλες

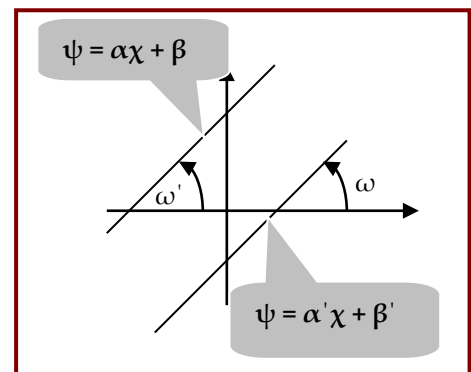
Έστω οι ευθείες $\varepsilon : \psi = \alpha x + \beta$ και $\varepsilon' : \psi = \alpha' x + \beta'$

✓ Αν $\varepsilon \parallel \varepsilon' \Leftrightarrow \omega = \omega'$ (ως εντός – εκτός και επί τα αυτά)
οπότε είναι $\varepsilon\omega = \varepsilon'\omega' \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$

$$\text{Άρα } \varepsilon \parallel \varepsilon' \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$$

✓ Αν είναι και $\beta = \beta'$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες με την ευρεία έννοια της παραλληλίας δηλ ταυτίζονται.

✓ Όταν είναι $\alpha \neq \alpha'$ τότε οι ευθείες τέμνονται.

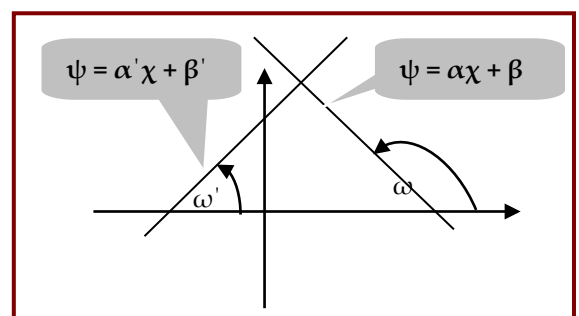


* Ευθείες κάθετες

Έστω οι ευθείες $\varepsilon : \psi = \alpha x + \beta$ και $\varepsilon' : \psi = \alpha' x + \beta'$ και έστω ε κάθετη στην ε' ($\varepsilon \perp \varepsilon'$) τότε :

$$\varepsilon \text{ κάθετη στην } \varepsilon' (\varepsilon \perp \varepsilon') \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha' = -1$$

✓ Όταν είναι $\alpha \neq \alpha'$ και δεν ισχύει $\alpha \alpha' = -1$ τότε οι ευθείες τέμνονται απλώς.



Παρατηρήσεις

- Απαραίτητη προϋπόθεση για να κάνεις οτιδήποτε με μια συνάρτηση είναι «να είναι συνάρτηση». Δηλαδή εκτός από τον αλγεβρικό τύπο πρέπει να ξέρεις και το ΠO .
- Για να κατασκευάσω τη $\Gamma \Pi$ πρέπει να τακτοποιήσω τον τύπο της συνάρτησης, πράγμα που σημαίνει ότι αν έχει $\pi \chi$ απόλυτα μετά την εύρεση του ΠO , θα απαλλάξω την παράσταση από τα απόλυτα, οπότε η συνάρτηση γίνεται, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, πολλαπλού τύπου. Κατόπιν θα κατασκευάσω τη $\Gamma \Pi$ κατά τμήματα ανάλογα με το πως χωρίζεται το ΠO .
- Η γραφική παράσταση ($\Gamma \Pi$) μιας συνάρτησης $\varphi(x) = ax + b$ θα είναι μια ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα ή ημιευθεία ή συνδυασμός ευθύγραμμων τμημάτων και ημιευθειών. Αυτό εξαρτάται αποκλειστικά από το ΠO , αν το ΠO είναι το $\mathbb{R}$ τότε η $\Gamma \Pi$ είναι ευθεία, αν το ΠO είναι διάστημα (α, β) ή $[\alpha, \beta]$ ή $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ τότε η $\Gamma \Pi$ θα είναι ευθύγραμμο τμήμα με ή χωρίς τα άκρα α και β ανάλογα με το ανοικτό ή κλειστό άκρο του διαστήματος. Αν το ΠO είναι διάστημα με ένα άκρο το $\pm \infty$ τότε η $\Gamma \Pi$ θα είναι ημιευθεία με ή χωρίς το άκρο ανάλογα. $\pi \chi$ όταν $\Pi O = [\alpha, +\infty)$ τότε συμπεριλαμβάνεται η αρχή της ημιευθείας. Αν το ΠO είναι ένωση διαστημάτων τότε η $\Gamma \Pi$ θα είναι συνδυασμός τμημάτων και ημιευθειών όπως θα δούμε στα παραδείγματα πιο κάτω.
- Κάθε ευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα προσδιορίζεται από δύο σημεία. Προσδιορίζεις τυχαία σημεία για την ευθεία, τα άκρα για το ευθ. τμήμα, την αρχή και ένα τυχαίο σημείο για την ημιευθεία. Τα σημεία αυτά όπως και κάθε σημείο οποιασδήποτε γραμμής τα βρίσκω αν αντικαταστήσω στον τύπο της συνάρτησης το χ με μια τιμή από το ΠO . Εννοείται ότι αν το ΠO είναι το $[\alpha, \beta)$ $\pi \chi$ για να βρω τα άκρα του τμήματος A και B βάζω στον τύπο της $\varphi(x)$ τις τιμές α και β , παρ' όλο που το β δεν ανήκει στο ΠO , και μετά εξαιρώ από το τμήμα το άκρο B , ανάλογα και στις άλλες περιπτώσεις.
- Όταν μου ζητά να βρω της παραμέτρους για να είναι δυο ευθείες παράλληλες ή κάθετες τότε ξεκινάω από την συνθήκη που πρέπει να ισχύει για τους συντελεστές διεύθυνσης και κατόπιν λύνω την εξίσωση που προκύπτει.

Παραδείγματα

1. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: -3\chi + \psi - 5 = 0$ και το σημείο $A(1, -1)$. Να βρεθεί η ευθεία η οποία περνάει από το A και είναι παράλληλη στην ε .

Απάντηση:

Η $\varepsilon: -3\chi + \psi - 5 = 0 \Leftrightarrow \psi = 3\chi - 5$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = 3$. Αν ε' η ζητούμενη ευθεία τότε αν α' ο συντελεστής διεύθυνσης και οι ευθείες είναι παράλληλες πρέπει $\alpha = \alpha' \Leftrightarrow \alpha' = 3$ άρα η ε' έχει εξίσωση $\psi = 3\chi + \beta$. Επειδή περνάει από το $A(1, -1)$ θα είναι $-1 = 3 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -4$ άρα η ε' έχει εξίσωση $\psi = 3\chi - 4$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $A(1, -1)$ και κάθετη στην $\varepsilon: \psi = \frac{3}{5}\chi - 4$

Απάντηση:

Η $\varepsilon: \psi = \frac{3}{5}\chi - 4$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = \frac{3}{5}$. Αν ε' η ζητούμενη ευθεία και α' ο συντελεστής διεύθυνσης της επειδή οι ευθείες είναι κάθετες πρέπει $\alpha \cdot \alpha' = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \cdot \alpha' = -1 \Leftrightarrow$

$$\alpha' = -\frac{5}{3} \text{ άρα η } \varepsilon' \text{ έχει εξίσωση } \psi = -\frac{5}{3}\chi + \beta. \text{ Επειδή περνάει από το } A(1, -1) \text{ θα είναι}$$

$$-1 = -\frac{5}{3} \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -3 = -5 + 3\beta \Leftrightarrow 3\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} \text{ άρα η } \varepsilon' \text{ έχει εξίσωση } \boxed{\psi = -\frac{5}{3}\chi + \frac{2}{3}}$$

3. Δίνονται οι ευθείες $\psi = (3\lambda - 1)\chi + 5$ και $\psi = 2\lambda\chi - 7$. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Απάντηση: Π Ο το $A = R$.

Για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει $\alpha = \alpha' \Leftrightarrow 3\lambda - 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

4. Δίνονται οι ευθείες $\psi = (2\lambda^2 - 4\lambda + 6)\chi + 1$ και $\psi = \lambda(\lambda + 1)\chi - 3$. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Απάντηση: Π Ο το $A = R$.

Για να είναι οι ευθείες παράλληλες πρέπει $\alpha = \alpha' \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 6 = \lambda(\lambda + 1) \Leftrightarrow$
 $2\lambda^2 - 4\lambda + 6 = \lambda^2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ τότε $\boxed{\lambda_1 = 2 \text{ και } \lambda_2 = 3}$.

5. Δίνονται οι ευθείες $\psi = (\lambda - 1)\chi + 5$ και $\psi = 2\chi + 3$. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

Απάντηση: Π Ο το $A = R$.

Για να είναι οι ευθείες κάθετες πρέπει $\alpha \cdot \alpha' = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)2 = -1 \Leftrightarrow 2\lambda - 2 = -1 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

6. Δίνονται οι ευθείες $\psi = (\lambda - 1)\chi + 11$ και $\psi = \lambda\chi + 9$. Να βρεθεί το λ έτσι ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

Απάντηση: Π Ο το $A = R$.

Για να είναι οι ευθείες κάθετες πρέπει $\alpha \cdot \alpha' = -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\lambda = -1 \Leftrightarrow$
 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ άρα η εξίσωση δεν έχει λύση άρα
δεν υπάρχει λ για να είναι οι ευθείες κάθετες

7. Να γίνει η Γ Π της $\varphi(\chi) = |\chi|$ (κλασική περίπτωση)

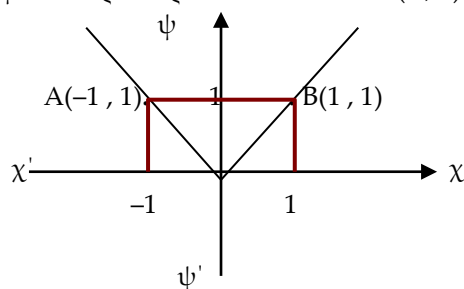
Απάντηση: Π Ο το $A = R$.

Απαλλάσσω την παράσταση από το απόλυτο. Έχω $\chi \geq 0 \Leftrightarrow |\chi| = \chi$ και $\chi < 0 \Leftrightarrow$

$|\chi| = -\chi$ οπότε $\varphi(\chi) = \begin{cases} \chi & \text{αν } \chi \geq 0 \\ -\chi & \text{αν } \chi < 0 \end{cases}$ οπότε η Γ Π θα κατασκευαστεί κατά διαστήματα.

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι ημιευθεία που περνάει από το $O(0,0)$, δίνω στο χ και μια τιμή από το $(-\infty, 0)$ π χ $\chi = -1$ άρα $\psi = -(-1) = 1$ άρα περνάει και από το $A(-1, 1)$ όπως στο σχήμα.

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι ημιευθεία που περνάει από το $O(0,0)$, δίνω στο χ και μια τιμή από το $[0, +\infty)$ π χ $\chi = +1$ άρα $\psi = +1$ άρα περνάει και από το $B(1, 1)$ όπως στο σχήμα



Με τον ίδιο τρόπο ακριβώς γίνεται και η Γ Π κάθε συνάρτησης της μορφής $\varphi(\chi) = |\alpha\chi + \beta|$.

8. Να γίνει η Γ Π της $\varphi(x) = |2x - 3|$

Απάντηση : Π Ο το $A = \mathbb{R}$.

Απαλλάσσω την παράσταση από το απόλυτο και έχω $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ τότε $|2x - 3| =$

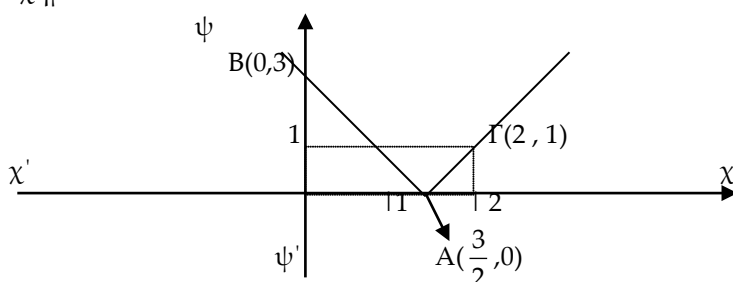
$2x - 3, x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow |2x - 3| = -2x + 3$ δηλαδή ισχύει ο πίνακας

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-2x + 3$	$ $	$2x - 3$

$$\text{Άρα η } \varphi(x) \begin{cases} -2x + 3 & \text{αν } x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{αν } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Στο διάστημα $(-\infty, \frac{3}{2})$ είναι ημιευθεία που έχει ως αρχή το $A(\frac{3}{2}, 0)$, δίνω στο x και μια τιμή από το $(-\infty, \frac{3}{2})$ π.χ. $x = 0$ άρα $\psi = 3$ άρα περνάει και από το $B(0, 3)$ όπως στο σχήμα.

Στο διάστημα $[\frac{3}{2}, +\infty)$ είναι ημιευθεία που περνάει από το $A(\frac{3}{2}, 0)$, η αρχή της, δίνω στο x και μια τιμή από το $[\frac{3}{2}, +\infty)$ π.χ. $x = 2$ άρα $\psi = 1$ άρα περνάει από το $\Gamma(2, 1)$ όπως στο σχήμα

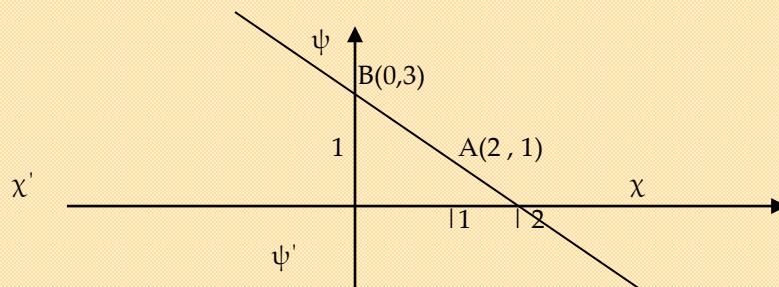


Άσκησης

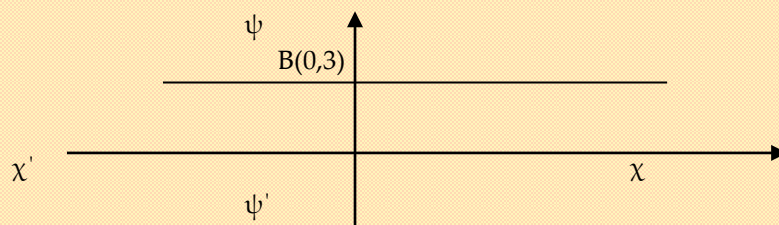
- Δίνονται οι ευθείες $\psi = 3x$, $\psi = 3x - 5$, $\psi = 3x + 7$ να βρεις την σχέση που έχουν.
- Δίνονται οι ευθείες $\psi = \frac{1}{5}x$, $\psi = 5x - 1$, $\psi = 5x + 3$ να βρεις την σχέση που έχουν
- Να βρεθεί το κ έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = (5\kappa - 2)x + 3$ και $\psi = (2\kappa + 1)x - 7$ να είναι παράλληλες.
- Να βρεθεί το κ έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = (2\kappa^2 - 2)x + 3$ και $\psi = (\kappa^2 + 5\kappa - 8)x - 7$ να είναι παράλληλες.
- Να βρεθεί το κ έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = (2\kappa^2 + 2)x + 3$ και $\psi = (\kappa^2 + 2\kappa - 9)x - 7$ να είναι παράλληλες.
- Να βρεθεί το κ έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = (\kappa - 2)x + 3$ και $\psi = 2x - 7$ να είναι κάθετες.

Ασκήσεις

7. Να βρεθεί το κ έτσι ώστε οι ευθείες $\psi = (\kappa - 2)\chi + 6$ και $\psi = (\kappa + 2)\chi - 3$ να είναι κάθετες.
8. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \begin{cases} -\chi + 1 & \text{αν } \chi \leq 1 \\ 0 & \text{αν } 1 < \chi \leq 5 \\ \chi - 5 & \text{αν } \chi > 5 \end{cases}$
9. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \begin{cases} -1 & \text{αν } \chi < 1 \\ 0 & \text{αν } \chi \neq 1 \\ 1 & \text{αν } \chi > 1 \end{cases}$
10. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $g(\chi) = |2\chi - 3| + 3\chi$
11. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(\chi) = |\chi - 3| - |\chi + 2|$
12. Μια δεξαμενή βενζίνας έχει όγκο 5 m^3 . Είναι ρυθμισμένη να σταματά αυτόματα την λειτουργία της όταν η βενζίνη που απομένει στη δεξαμενή είναι 500 λίτρα. Ένα βυτίο που αδειάζει στη δεξαμενή έχει παροχή 50 λίτρα το λεπτό. Να φτιάξεις την συνάρτηση του όγκου της βενζίνας, μέσα στη δεξαμενή, σε σχέση με τον χρόνο, να βρεις το $\Pi \text{ O}$, να βρεις πότε θα γεμίσει η δεξαμενή και να κάνεις την $\Gamma \Pi$
13. Το κινητό κάποιου έχει πάγιο 7,3 € και κατά μέσο όρο καθημερινά κάνει τηλεφωνήματα αξίας 2 €. Να βρεις την συνάρτηση μεταβολής του μηνιαίου του λογαριασμού, πόσο θα είναι ο λογαριασμός του μήνα και να φτιάξεις την $\Gamma \Pi$.
14. Να βρεις την συνάρτηση με $\Gamma \Pi$ την ευθεία του σχήματος



15. Να βρεις την συνάρτηση με $\Gamma \Pi$ την ευθεία του σχήματος



Περί συστημάτων ο λόγος

3.1 Γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

✓ Γραμμική Εξίσωση

Μια εξίσωση με περισσότερους από έναν αγνώστους ονομάζεται παγκόσμια πλην Ελλάδας (!!!) **Διοφαντική εξίσωση** ή **εξίσωση του Διόφαντου** προς τιμήν «αρχαίου τινός» προγόνου μας. Αυτό δεν έγινε τυχαία. Ο Διόφαντος «είπε» ότι χρειαζόνταν να λεχθεί για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων και έκτοτε δεν έχει προστεθεί κάτι.

Π.χ. η οι εξισώσεις $3x^2 - 5x\psi + 7\chi = -5$, $2\chi + 3\psi = 7$, $3\psi - 7\chi + 2\omega = 3$ κλπ είναι Διοφαντικές.

❖ Μια **Διοφαντική** εξίσωση στην οποία **όλοι οι όροι είναι μονώνυμα 1^{ου} βαθμού** όπως στην : $3\chi + 2\psi - 7\omega + 3\theta - 5\lambda = -11$ ονομάζεται και **γραμμική**.

❖ **Λύση** μιας τέτοιας εξίσωσης είναι κάθε ζευγάρι, τριάδα, κλπ αριθμών (αν αντίστοιχα η εξίσωση έχει δύο, τρεις, κλπ αγνώστους), που επαληθεύει την εξίσωση.

❖ Κάθε Διοφαντική εξίσωση έχει **άπειρες λύσεις**.

Γραμμικό Σύστημα

- **Σύστημα** είναι ένα σύνολο εξισώσεων από τις οποίες αναζητούμε την κοινή ή τις κοινές τους λύσεις (αν υπάρχουν). Δηλαδή τα ζευγάρια, τριάδες, τετράδες, κλπ αριθμών, αν το σύστημα έχει δύο, τρεις, τέσσερις, κλπ αγνώστους, που επαληθεύουν **όλες** τις εξισώσεις του συστήματος,
- **Γραμμικό σύστημα** είναι ένα σύστημα στο οποίο υπάρχουν μόνο γραμμικές εξισώσεις

Ένα σύστημα μπορεί **να έχει μια λύση, να μην έχει λύση** ή **να έχει άπειρες λύσεις**.

- **Σύστημα αδύνατο** : είναι το σύστημα που δεν έχει λύση.
- **Σύστημα αόριστο (με άπειρες λύσεις)** : είναι το σύστημα που οι εξισώσεις του επαληθεύονται από άπειρες λύσεις.
- **Ισοδύναμα Συστήματα** : Δύο ή περισσότερα συστήματα λέγονται ισοδύναμα αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις $E_1, E_2, E_3, \dots, E_v$, από αυτό το σύστημα θα προκύψει ισοδύναμο σύστημα με έναν από τους εξής δύο τρόπους :

1^{ον} Αν «λύσω» μια από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς τον έναν άγνωστο (δηλ την γράψω στην μορφή $\chi = \lambda\psi + \mu\omega + \dots + v\theta$ ή $\omega = \alpha\chi + \beta\psi + \dots + \varrho\theta$) και αντικαταστήσω αυτόν τον άγνωστο στις υπόλοιπες εξισώσεις.

2^{ον} Αν αντικαταστήσω την μια από τις εξισώσεις με ένα γραμμικό συνδυασμό μερικών από τις άλλες. Π. χ. αν αντικαταστήσω την E_3 με ένα συνδυασμό της μορφής $5E_1 - 7E_2 + 8E_4$

(γραμμικός συνδυασμός εξισώσεων $E_1, E_2, E_3, \dots, E_v$ είναι κάθε σχέση της μορφής

$\lambda E_1 + \mu E_2 + v E_3 + \dots + \varrho E_v$)



Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους είναι μια εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$,

π. χ. η $2\chi - \psi = 3$. Μια τέτοια εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Πράγματι $2\chi - \psi = 3 \Leftrightarrow \psi = 2\chi - 3$ οπότε όταν δώσουμε στο χ την τιμή 1 τότε το $\psi = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, άρα λύση είναι το ζευγάρι $(1, -1)$, όταν $\chi = 2$ τότε το $\psi = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ άρα λύση είναι και το ζευγάρι $(2, 1)$.

Αν $\chi = \lambda$ τότε $\psi = 2\lambda - 3$ οπότε λύσεις είναι κάθε ζευγάρι της μορφής $(\lambda, 2\lambda - 3)$.

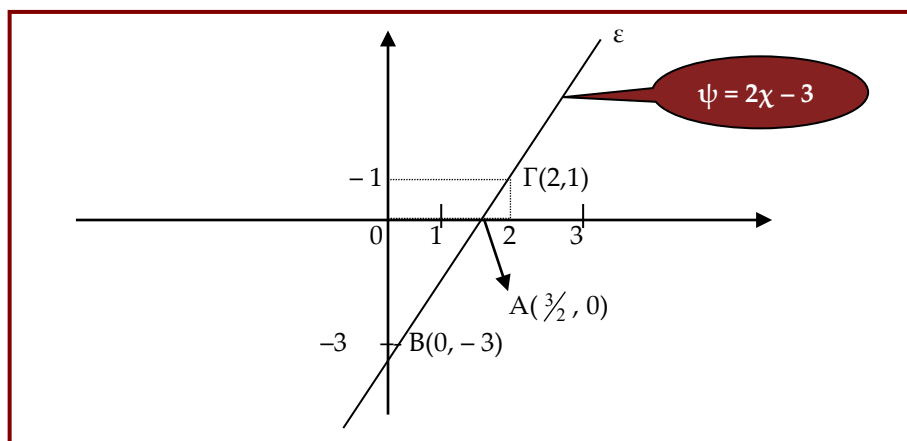
Δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης είναι άπειρες (άπειρα ζευγάρια λύσεων).

Έστω η εξίσωση $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$ (1). Αν $\alpha, \beta \neq 0$ τότε $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma \Leftrightarrow \beta \cdot \psi = -\alpha \cdot \chi + \gamma \Leftrightarrow$

$\psi = -\frac{\alpha}{\beta}\chi + \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \psi = \lambda \chi + \kappa$. Δηλαδή η εξίσωση $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$ γράφεται με μορφή συνάρτησης ως

$\psi = \lambda \chi + \kappa$.

Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση της μορφής $\psi = \lambda \chi + \kappa$ έχει ως γραφική παράσταση μια ευθεία, όπως στο σχήμα για την $\psi = 2\chi - 3$.

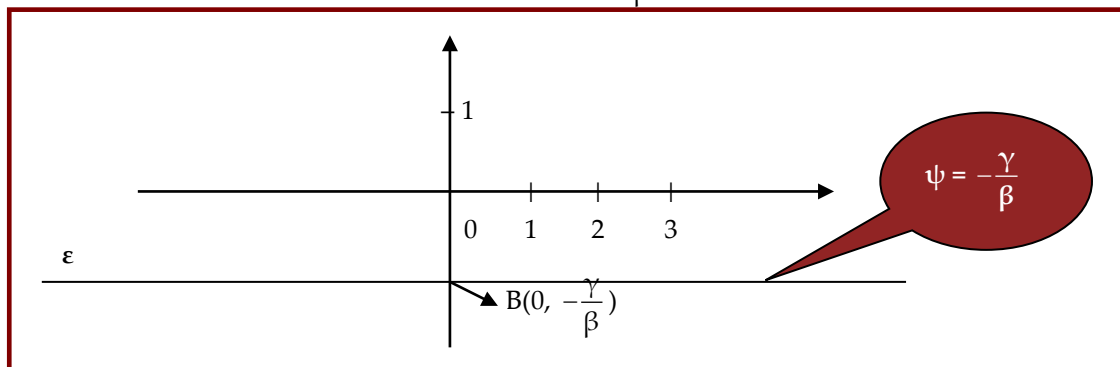


Παρατήρηση Αν στην συνάρτηση $\psi = \lambda \chi + \kappa$ (ή στην $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$) θέσω $\psi = 0$ τότε βρίσκω $\chi = -\frac{\kappa}{\lambda}$. Το σημείο $A(-\frac{\kappa}{\lambda}, 0)$ είναι το σημείο στο οποίο η $\psi = \lambda \chi + \kappa$ τέμνει τον άξονα χ' και λέγεται **τετμημένη επί την αρχή**. Στο παράδειγμα είναι $A(\frac{3}{2}, 0)$

Αν στην συνάρτηση $\psi = \lambda \chi + \kappa$ (ή στη $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$) θέσω $\chi = 0$ τότε βρίσκω $\psi = \kappa$.

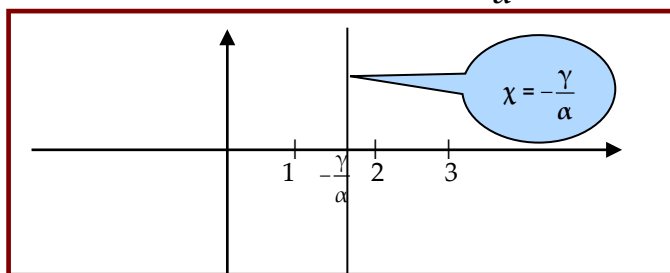
Το σημείο $B(0, \kappa)$ είναι το σημείο στο οποίο η $\psi = \lambda \chi + \kappa$ τέμνει τον άξονα ψ' και λέγεται **τεταγμένη επί την αρχή**, στο παράδειγμα είναι $B(0, -3)$

Αν $\alpha = 0, \beta \neq 0$ τότε η (1) γίνεται $0 \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma \Leftrightarrow \psi = -\frac{\gamma}{\beta} = \kappa$ οπότε έχω το σχήμα



Δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής $\psi = \kappa$ είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα χ'

Αν $\alpha \neq 0, \beta = 0$ τότε η (1) γίνεται $\alpha \cdot \chi + 0 \cdot \psi = \gamma \Leftrightarrow \chi = -\frac{\gamma}{\alpha} = \lambda$ οπότε έχω το σχήμα



Δηλαδή κάθε εξίσωση της μορφής $\chi = \lambda$ είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα ψ

Συμπέρασμα

❖ Δηλαδή όταν δοθεί μια εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$, υπάρχει μια ευθεία τέτοια ώστε : Κάθε ζευγάρι που επαληθεύει την $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$ να είναι συντεταγμένες ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στην ευθεία και αντίστροφα κάθε σημείο πάνω στην ευθεία να έχει συντεταγμένες ένα ζευγάρι αριθμών οι οποίοι επαληθεύουν την $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$. Με αυτή την έννοια η εξίσωση $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$ ονομάζεται **εξίσωση της ευθείας ε**



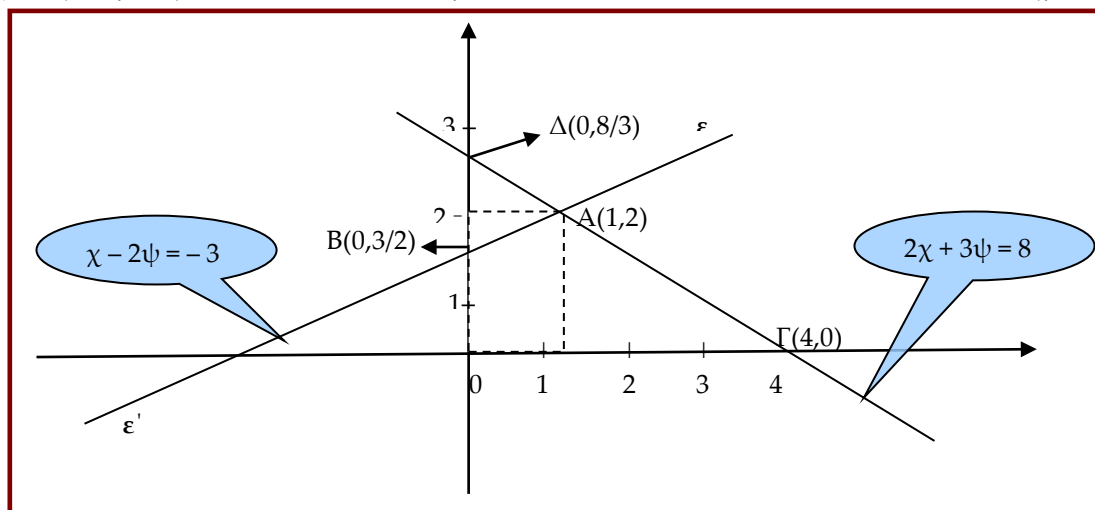
Γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους και δύο εξισώσεις

Γραμμικό εξίσωση με δύο αγνώστους και δύο εξισώσεις είναι κάθε σύστημα της

$$\begin{array}{lcl} \text{μορφής} & \alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma & \text{π. χ. το} \\ & \alpha' \cdot \chi + \beta' \cdot \psi = \gamma' & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\chi + 3\psi = 8 \quad (1) \\ \chi - 2\psi = -3 \quad (2) \end{array} \quad (\Sigma)$$

• Γραφική επίλυση συστήματος με δύο αγνώστους και δύο εξισώσεις

Αν παραστήσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) με τις αντίστοιχες ευθείες ε και ε' όπως στο σχήμα



«διαπιστώνουμε» (!!!) ότι τέμνονται στο σημείο $A(1, 2)$. Άρα το ζευγάρι $(1, 2)$ είναι η λύση του συστήματος (Σ). **Υποτίθεται** ότι αυτός είναι ένας τρόπος για να επιλύουμε συστήματα. Αυτό όμως είναι «κουτό» διότι δεν μπορείς να βρεις με ακρίβεια τις συντεταγμένες των σημείων. Πχ αν θελήσεις να βρεις από το γράφημα τις συντεταγμένες του σημείου Δ δεν μπορείς να ξέρεις αν η τεταγμένη του, που πρέπει να είναι $\frac{8}{3} \cong 2,666$, είναι πράγματι 2,666 ή είναι 2,75.

Στην πραγματικότητα αυτή η διαδικασία λειτουργεί αντίστροφα :

Αν έχω δύο ευθείες (ή δύο γραμμές γενικά) και θέλω να βρω τις συντεταγμένες του κοινού σημείου τους τότε «λύνω» το αντίστοιχο σύστημα που δημιουργείται από τις εξισώσεις των γραμμών.

Να έχεις υπ' όψιν σου και τα εξής :

- Αν οι γραμμές είναι ευθείες και το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις των γραμμών έχει μία λύση τότε οι ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο με συντεταγμένες το ζευγάρι που είναι λύση το συστήματος.
- Αν οι γραμμές είναι ευθείες και το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις των γραμμών δεν έχει λύση (είναι αδύνατο) τότε οι ευθείες δεν έχουν κοινό σημείο και είναι παράλληλες.
- Αν οι γραμμές είναι ευθείες και το σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις των γραμμών έχει άπειρες λύσεις (είναι αόριστο) τότε οι ευθείες ταυτίζονται.
- Αν οι γραμμές δεν είναι ευθείες τότε οι γραμμές έχουν τόσα κοινά σημεία όσες είναι οι λύσεις του συστήματος.

✓ Αλγεβρική επίλυση συστήματος με δύο αγνώστους και δύο εξισώσεις

Αλγεβρική επίλυση συστήματος είναι η διαδικασία με την οποία βρίσκω τις λύσεις χρησιμοποιώντας αλγεβρικές μεθόδους, δηλαδή τις μεθόδους που περιέγραψα πιο πάνω για να βρίσκεις ισοδύναμα συστήματα.

Εννοείται ότι κάθε φορά βρίσκω ένα σύστημα ισοδύναμο με αυτό που είχα αλλά με πιο απλή μορφή.

Όταν το σύστημα είναι γραμμικό με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους δουλεύουμε με τις εξής τρεις μεθόδους :

- 1) Μέθοδος της αντικατάστασης
- 2) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών και
- 3) Μέθοδος της σύγκρισης

Θα «λύσουμε» ένα σύστημα και με τους τρεις τρόπους (με υποδειγματικά βήματα)

Έστω το σύστημα (Σ)
$$\begin{aligned} 2x + 3\psi &= 8 & (1) \\ x - 2\psi &= -3 & (2) \end{aligned}$$
 [βολεύει να αριθμούμε τις εξισώσεις]

• Μέθοδος της αντικατάστασης

Επιλέγω την εξίσωση με τους πιο απλούς συντελεστές [ειδικά αν υπάρχει εξίσωση όπου ο ένας άγνωστος να έχει συντελεστή 1 όπως εδώ η (2) επιλέγω αυτήν] και στη συνέχεια λύνω αυτή την εξίσωση ως προς τον ένα άγνωστο. Στο παράδειγμα μας επιλέγω την (2) οπότε έχω $x - 2\psi = -3 \Leftrightarrow x = 2\psi - 3$ (3) [δηλαδή φέρνω την εξίσωση στη μορφή $x = \dots\dots$ ή $\psi = \dots\dots$].

Κατόπιν την τιμή του x ή του ψ που βρίσκω την αντικαθιστώ στην άλλη εξίσωση του συστήματος.

Στο παράδειγμά μας αντικαθιστώ το x με το $2\psi - 3$ στην (1) και έχω $2x + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 2(2\psi - 3) + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 4\psi - 6 + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 7\psi = 8 + 6 \Leftrightarrow 7\psi = 14 \Leftrightarrow \psi = 2$.

Έτσι υπολόγισα τον ένα άγνωστο, τον ψ στο παράδειγμα. Την τιμή του ψ (εδώ το 2) την αντικαθιστώ σε μια από τις δύο αρχικές εξισώσεις του συστήματος ή σε αυτή που έχω «λυμένη» [εδώ στην (3) βολεύει καλύτερα] και έτσι υπολογίζω και τον άλλον άγνωστο. Η (3) λοιπόν

γίνεται $x = 2\psi - 3 \Leftrightarrow x = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Όλα αυτά γραμμένα χωρίς λόγια είναι :

Από την (2) έχω $\chi - 2\psi = -3 \Leftrightarrow \chi = 2\psi - 3$ (3) τότε η (1) γίνεται

$$2\chi + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 2(2\psi - 3) + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 4\psi - 6 + 3\psi = 8 \Leftrightarrow 7\psi = 8 + 6 \Leftrightarrow 7\psi = 14$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\psi = 2} \text{ Αντικαθιστώ το } \psi \text{ στη (3) οπότε } \chi = 2\psi - 3 \Leftrightarrow \chi = 2 \cdot 2 - 3 \Leftrightarrow \boxed{\chi = 1}$$

Άρα λύση είναι το ζευγάρι (1, 2)

• Μέθοδος των αντικείμενων συντελεστών

Σε αυτή τη μέθοδο επιλέγουμε άγνωστο. Προτιμάμε τον άγνωστο με ετερόσημους ή ακόμα καλύτερα με αντίθετους συντελεστές.

$$\begin{aligned} \text{Εστω το σύστημα } (\Sigma) \quad & 4\chi + 5\psi = 7 \quad (1) \\ & 6\chi - 3\psi = 21 \quad (2) \end{aligned}$$

* Στο σύστημα (Σ) βολεύει να επιλέξω τον ψ . Για να φανεί καλύτερα η μέθοδος αλλά και για να σου δείξω ότι δεν έχει και πολύ μεγάλη σημασία η επιλογή εγώ θα επιλέξω τον χ .

* Στο (Σ) λοιπόν επιλέγω τον χ οπότε οι συντελεστές του χ στις δύο εξισώσεις είναι 4 και 6.

* Στη συνέχεια βρίσκω το Ε. Κ. Π. αυτών των αριθμών. Είναι Ε. Κ. Π. (4, 6) = 12. Δίπλα από κάθε εξίσωση γράφω το **πηλίκο του Ε. Κ. Π. (εδώ του 12) και του συντελεστή του αγνώστου** που έχω επιλέξει (αν οι συντελεστές δεν είναι ετερόσημοι βάζω στο ένα πηλίκο -) όπως πιο κάτω. Επιλέγω τον χ τότε Ε. Κ. Π. (4, 6) = 12 άρα έχω

$$\begin{array}{rcl} 4\chi + 5\psi = 7 & \begin{array}{l} -3 \\ 2 \end{array} & \text{Πολλαπλασιάζω την κάθε εξίσωση με τον αριθμό} \\ 6\chi - 3\psi = 21 & & \text{που βρίσκεται δίπλα της και έτσι το σύστημα} \\ & & \text{αποκτά την μορφή :} \\ \hline -12\chi - 15\psi = -21 & & \text{Αν προσθέσω κατά μέλη τις εξισώσεις προκύπτει η :} \\ 12\chi - 6\psi = -42 & & \\ \hline 0\chi - 21\psi = -63 & \Leftrightarrow & -21\psi = -63 \Leftrightarrow \psi = \frac{-63}{-21} \Leftrightarrow \boxed{\psi = 3} \end{array}$$

Αντικαθιστώ στην μία από τις δύο εξισώσεις (σε όποια θέλω) έστω στην 1^η και έχω

$$4\chi + 5\psi = 7 \Leftrightarrow 4\chi + 5 \cdot 3 = 7 \Leftrightarrow 4\chi = 7 - 15 \Leftrightarrow 4\chi = -8 \Leftrightarrow 4\chi = -8 \Leftrightarrow \boxed{\chi = -2}$$

Άρα λύση είναι το ζευγάρι (-2, 3)

Παρατήρηση Αν είχα επιλέξει τον ψ τότε δεν θα χρειαζόταν την 1^η να την πολλαπλασιάσω με αρνητικό αριθμό διότι ο ψ έχει ετερόσημους συντελεστές στις δύο εξισώσεις.

• Μέθοδος της σύγκρισης

Αυτή η μέθοδος είναι παραλλαγή της 1^{ης}. Δηλαδή «λύνω» και τις δύο εξισώσεις ως προς τον **ίδιο** άγνωστο και εξισώνω τα αποτελέσματα. Π. χ.

$$\begin{aligned} \text{Εστω το σύστημα } (\Sigma) \quad & 2\chi - 3\psi = 3 \quad (1) \\ & \chi + 5\psi = -2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{η (1) γίνεται } 2\chi - 3\psi = 3 \Leftrightarrow 2\chi = 3\psi + 3 \Leftrightarrow \chi = \frac{3\psi + 3}{2}$$

$$\text{η (2) γίνεται } \chi + 5\psi = -2 \Leftrightarrow \chi = -5\psi + 8 \text{ και επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα πρέπει}$$

$$\frac{3\psi + 3}{2} = -5\psi + 8 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3\psi + 3}{2} = 2(-5\psi + 8) \Leftrightarrow 3\psi + 3 = -10\psi + 16 \Leftrightarrow 3\psi + 10\psi = 16 - 3$$

$$\Leftrightarrow 13\psi = 13 \Leftrightarrow \boxed{\psi = 1} \text{ . Αν αντικαταστήσω π. χ. στην (2) έχω } \chi + 5\psi = -2 \Leftrightarrow$$

$$\chi + 5 \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow \chi = -2 - 5 \Leftrightarrow \boxed{\chi = -7}$$

Άρα λύση είναι το ζευγάρι (-7, 1)

Για παραδείγματα δες ...

Παραδείγματα :

Στα παραδείγματα που ακολουθούν πρώτα θα τα «κατασκευάσουμε» το σύστημα και μετά θα το «λύσουμε». Για να «φτιάξω ένα σύστημα ακολουθώ τα εξής βήματα :

1. 1^{ον} Θέτω από την αρχή τους αγνώστους και τις τιμές που θέλω να βρω γι' αυτούς π. χ. έστω x και ω οι άγνωστοι και 2 και 3 οι τιμές τους (δηλ « $x = 2$ και $\omega = 3$ »).

2^{ον} Δημιουργώ κατόπιν τις εξισώσεις ως εξής :

1^η εξίσωση : αυθαίρετα «βάζω» $3x - 5\omega$ άρα αν $x = 2$ και $\omega = 3$ τότε $3x - 5\omega = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -9$ άρα μια εξίσωση στο σύστημα είναι η $3x - 5\omega = -9$

2^η εξίσωση : βάζω $x + 2\omega$ άρα αν $x = 2$ και $\omega = 3$ τότε $x + 2\omega = 2 + 2 \cdot 3 = 8$ άρα η 2^η εξίσωση στο σύστημα είναι η $x + 2\omega = 8$.

Το σύστημα που δημιουργήσαμε είναι : (Σ)
$$\begin{cases} 3x - 5\omega = -9 \\ x + 2\omega = 8 \end{cases}$$

Να λοιπόν η : **Ασκηση :** Να επιλυθεί το (Σ)
$$\begin{cases} 3x - 5\omega = -9 \\ x + 2\omega = 8 \end{cases}$$

Οπότε μπορώ να διαλέξω είτε την μέθοδο της αντικατάστασης «βλέποντας» ότι ο x στην δεύτερη εξίσωση έχει συντελεστή 1 είτε την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών επειδή ο ω έχει ετερόσημους συντελεστές.

✳ **Προσωπικά σου συνιστώ την μέθοδο της αντικατάστασης η οποία είναι «τυφλοσούρτης» με την έννοια ότι δεν θέλει και πολύ περίτεχνα «πράγματα» άρα μειώνονται οι πιθανότητες λάθους.**

Έτσι αριθμώ και τις εξισώσεις και έχω :
$$\begin{cases} 3x - 5\omega = -9 & (1) \\ x + 2\omega = 8 & (2) \end{cases}$$

Η (2) γίνεται $x + 2\omega = 8 \Leftrightarrow x = -2\omega + 8$ (3)

Άρα η (1) γίνεται $3x - 5\omega = -9 \Leftrightarrow 3(-2\omega + 8) - 5\omega = -9 \Leftrightarrow -6\omega + 24 - 5\omega = -9 \Leftrightarrow -11\omega = -33 \Leftrightarrow \omega = 3$

άρα η (3) γίνεται $x = -2\omega + 8 \Leftrightarrow x = -2 \cdot 3 + 8 \Leftrightarrow x = 2$ **Λύση το (2, 3)**

«Βρήκαμε» πράγματι τους αριθμούς που είχαμε «βάλει»

2. Έστω « $\psi = -1$ και $\theta = 5$ ».

$-4\psi + \theta = -4(-1) + 5 = 9$ άρα 1^η εξίσωση είναι $-4\psi + \theta = 9$

$2\psi - 3\theta = 2(-1) - 3 \cdot 5 = -17$ άρα 2^η εξίσωση είναι $2\psi - 3\theta = -17$

Να λοιπόν η : **Ασκηση :** Να επιλυθεί το (Σ)
$$\begin{cases} -4\psi + \theta = 9 \\ 2\psi - 3\theta = -17 \end{cases}$$

Με αντίθετους συντελεστές για τον άγνωστο θ έχω

$$-4\psi + \theta = 9 \quad 3 \Leftrightarrow -12\psi + 3\theta = 27$$

$$2\psi - 3\theta = -17 \quad 1 \Leftrightarrow 2\psi - 3\theta = -17$$

$$-10\psi = 10 \Leftrightarrow \psi = -1$$

Άρα η 1^η γίνεται $-4(-1) + \theta = 9 \Leftrightarrow 4 + \theta = 9 \Leftrightarrow \theta = 9 - 4 \Leftrightarrow \theta = 5$ **Λύση το (-1, 5)**

3. Σύστημα με άπειρες λύσεις (αόριστο)

Για να κατασκευάσω αόριστο σύστημα «φτιάχνω την 1^η εξίσωση όπως πριν

Έστω « $x = 2$ και $\psi = -3$ » άρα 1^η εξίσωση $-3x + \psi = -9$.

Για την 2^η εξίσωση αν θέλω το σύστημα να είναι αόριστο πολλαπλασιάζω την 1^η επί ένα αριθμό και έτσι δημιουργώ την 2^η Τότε το σύστημα θα είναι αόριστο Πράγματι αν την $-3x + \psi = -9$ πολλαπλασιάσω επί -2 έχω $6x - 2\psi = 18$ οπότε

Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} -3\chi + \psi = -9 \\ 6\chi - 2\psi = 18 \end{cases}$

Με την μέθοδο της σύγκρισης για τον άγνωστο ψ έχω

$$\begin{cases} -3\chi + \psi = -9 \\ 6\chi - 2\psi = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3\chi - 9 \\ 2\psi = 6\chi - 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 3\chi - 9 \\ \psi = 3\chi - 9 \end{cases} \text{ και επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα πρέπει :}$$

$3\chi - 9 = 3\chi - 9 \Leftrightarrow 0\chi = 0$ **εξίσωση αόριστη** άρα το σύστημα έχει ως λύση κάθε ζευγάρι που επαληθεύει την 1^η δηλαδή άπειρες λύσεις.

4. Σύστημα χωρίς λύσεις (αδύνατο)

Για να κατασκευάσω ένα αδύνατο σύστημα «φτιάχνω την 1^η εξίσωση όπως πριν Έστω $\chi = 5$ και $\psi = -1$ » άρα **1^η εξίσωση $\chi - 3\psi = 8$.**

Για να φτιάξω την 2^η εξίσωση (αν θέλω το σύστημα να είναι αδύνατο) πολλαπλασιάζω το α μέλος της 1^{ης} εξίσωσης επί ένα αριθμό και το β μέλος με άλλο αριθμό Δηλ το $\chi - 3\psi$ το πολλαπλασιάζω επί 5 οπότε έχω $5(\chi - 3\psi) = 5\chi - 15\psi$ και το 8 που είναι το β μέλος το πολλαπλασιάζω επί 4 π χ , τότε προκύπτει η **$5\chi - 15\psi = 32$** ως 2^η εξίσωση, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} \chi - 3\psi = 8 & (1) \\ 5\chi - 15\psi = 32 & (2) \end{cases}$$

Πράγματι με την μέθοδο της αντικατάστασης για τον άγνωστο χ έχω :

(1) $\Leftrightarrow \chi = 8 + 3\psi$ οπότε η (2) γίνεται $5(8 + 3\psi) - 15\psi = 32 \Leftrightarrow 40 + 15\psi - 15\psi = 32 \Leftrightarrow 0\psi = 32 - 40 \Leftrightarrow 0\psi = -8$ **αδύνατη εξίσωση** δηλ δεν επαληθεύεται από καμιά τιμή του ψ άρα αδύνατο το σύστημα.

5. Να «λυθεί» το σύστημα : $\begin{cases} 3(\chi - 1) + \frac{\psi}{2} = -\chi - 3\psi \\ -\chi + \psi = 3 \end{cases}$

Στις περιπτώσεις όπου κάποια από τις εξισώσεις δεν είναι στη μορφή $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ πρέπει πρώτα να κάνω μετασχηματισμούς ώστε το σύστημα να έχει την μορφή $\begin{matrix} \alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma \\ \alpha' \cdot \chi + \beta' \cdot \psi = \gamma' \end{matrix}$ και μετά να το «λύνω».

Έτσι έχω : η 1^η εξίσωση γίνεται $2 \cdot 3(\chi - 1) + 2 \cdot \frac{\psi}{2} = 2(-\chi - 3\psi) \Leftrightarrow 6\chi - 6 + \psi = -2\chi - 6\psi \Leftrightarrow$

$$6\chi + \psi + 2\chi + 6\psi = 6 \Leftrightarrow 8\chi + 7\psi = 6 \text{ οπότε λύνω το σύστημα } \begin{cases} 8\chi + 7\psi = 6 & (1) \\ -\chi + \psi = 3 & (2) \end{cases}$$

η (2) $\Leftrightarrow \chi = \psi - 3$ τότε η (1) $\Leftrightarrow 8(\psi - 3) + 7\psi = 6 \Leftrightarrow 8\psi - 24 + 7\psi = 6 \Leftrightarrow 15\psi = 24 + 6 \Leftrightarrow 15\psi = 30 \Leftrightarrow \psi = 2$
 άρα $\chi = \psi - 3 \Leftrightarrow \chi = 2 - 3 \Leftrightarrow \chi = -1$ **Λύση είναι το $(-1, 2)$**

6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία «περνάει» από τα σημεία A(3, 5) και B(1, 1).

Απάντηση :

Αφού πρόκειται για ευθεία τότε αυτή θα έχει εξίσωση της μορφής : $\psi = \kappa\chi + \lambda$. Επίσης λέμε ότι μια ευθεία «περνάει» από ένα σημείο όταν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Στο παράδειγμα λοιπόν πρέπει $5 = \kappa \cdot 3 + \lambda$ για να «περνάει» από το A και

$1 = \kappa \cdot 1 + \lambda$ για να «περνάει» από το B οπότε έχω το σύστημα : $\begin{cases} 3\kappa + \lambda = 5 & (1) \\ \kappa + \lambda = 1 & (2) \end{cases}$ το οποίο λύνω με

την μέθοδο της σύγκρισης λύνοντας και τις δύο εξισώσεις ως προς λ

$$(1) \Leftrightarrow \lambda = 5 - 3\kappa, \quad (2) \Leftrightarrow \lambda = 1 - \kappa.$$

$$\text{Άρα } 5 - 3\kappa = 1 - \kappa \Leftrightarrow -3\kappa + \kappa = 1 - 5 \Leftrightarrow -2\kappa = -4 \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ οπότε } \lambda = 1 - \kappa \Leftrightarrow \lambda = -2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

άρα η ευθεία είναι $\psi = 2\chi + 1$! ! !



7. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 3\chi - 5\psi = -9$ και $\varepsilon_2: \chi + 2\psi = 8$

Για να βρω το σημείο τομής δύο ευθειών βρίσκω τις συντεταγμένες του «λύνοντας» το σύστημα :

$$3\chi - 5\psi = -9 \quad (1)$$

$$\chi + 2\psi = 8 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \chi = -2\psi + 8 \quad (3) \text{ άρα } (1) \Leftrightarrow 3(-2\psi + 8) - 5\psi = -9 \Leftrightarrow -6\psi + 24 - 5\psi = -9 \Leftrightarrow -6\psi - 5\psi = -24 - 9 \\ \Leftrightarrow -11\psi = -33 \Leftrightarrow \psi = 3 \text{ και τότε } (3) \Leftrightarrow \chi = -2 \cdot 3 + 8 \Leftrightarrow \chi = -6 + 8 \Leftrightarrow \chi = 2.$$

Άρα το σημείο τομής είναι $A(2, 3)$

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε ☒ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

	Σ	Λ
1. Διοφαντική εξίσωση ονομάζεται μια εξίσωση με περισσότερους από έναν αγνώστους.	☐	☐
2. Κάθε Διοφαντική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.	☐	☐
3. Λύση μιας Διοφαντικής εξίσωσης είναι κάθε ζευγάρι αριθμών.	☐	☐
4. Γραμμικό σύστημα είναι ένα σύστημα στο οποίο υπάρχουν μόνο γραμμικές εξισώσεις.	☐	☐
5. Σύστημα αόριστο είναι το σύστημα που οι εξισώσεις του επαληθεύονται από άπειρες λύσεις.	☐	☐
6. Δύο ή περισσότερα συστήματα λέγονται ισοδύναμα αν έχουν τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και τον ίδιο αριθμό αγνώντων.	☐	☐
7. Δύο ή περισσότερα συστήματα λέγονται ισοδύναμα αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις	☐	☐
8. Ένα σύστημα λέγεται αδύνατο όταν οι συντελεστές του είναι αρνητικοί αριθμοί.	☐	☐
9. Ένα σύστημα λέγεται αόριστο όταν οι συντελεστές του δεν είναι Συγκεκριμένοι (γνωστοί) αριθμοί.	☐	☐
10. Σύστημα λέγεται μια διαδικασία με την οποία παίζουμε ΛΟΤΟ , ΠΡΟΠΟ και άλλα ευγενή σπορ για να λύσουμε ανεπιτυχώς το οικονομικό μας πρόβλημα	☐	☐

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού

1. Η εξίσωση $\alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει _____ γραμμή.
2. Δύο ή περισσότερα _____ λέγονται **ισοδύναμα** αν έχουν ακριβώς τις ίδιες _____
3. Ένα _____ λέγεται **αόριστο** όταν έχει _____ λύσεις.
4. Ένα σύστημα λέγεται _____ όταν _____ έχει λύσεις.
5. Λύση ενός _____ ή _____ με δυο εξισώσεις και δυο αγνώστους είναι κάθε _____ αριθμών που επαληθεύουν τις εξισώσεις του.

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν ευθεία $2\chi - 3\psi = 6$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, -2), B(3, 2), \Gamma(9, 4)$
2. Να εξετάσετε αν ευθεία $\psi = \frac{3}{5}\chi - 1$ διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2), B(5, 3), \Gamma(\frac{10}{3}, 1)$

3. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{ι)} \begin{cases} 3\chi - 2\psi = 7 \\ 6\chi + \psi = 4 \end{cases}$$

Απ. « $\chi = 1, \psi = -2$ »

$$\text{ιι)} \begin{cases} 2\chi + 3\psi = -3 \\ \chi - \psi = 6 \end{cases}$$

Απ. « $\chi = 3, \psi = -3$ »

$$\text{ιιι)} \begin{cases} \chi - \psi = 0 \\ 2\chi - \psi = -1 \end{cases}$$

Απ. « $\chi = -1, \psi = -1$ »

4. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{ι)} \begin{cases} 3\chi - 2\psi = 7 \\ -6\chi + 4\psi = 4 \end{cases}$$

Απ. «αδύνατο»

$$\text{ιι)} \begin{cases} 16\chi + 3\psi = 30 \\ 3(\chi - 1) + \frac{\psi}{2} = \frac{\chi}{3} + 2 \end{cases}$$

Απ. «αόριστο»

$$\text{ιιι)} \begin{cases} 2(4 - \chi) - 1 = 2\psi + 4 \\ \chi + \psi = 2 \end{cases}$$

Απ. «αόριστο»

5. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{ι)} \begin{cases} 2\chi + 3\psi = 3 \\ 4\chi + \psi = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Απ. « $\chi = \frac{1}{2}, \psi = \frac{2}{3}$ »

$$\text{ιι)} \begin{cases} \frac{2(\chi - 1)}{3} = \frac{3 + \psi}{2} \\ \frac{\chi}{2} = \frac{2\psi + 9}{6} \end{cases}$$

Απ. « $\chi = 1, \psi = -3$ »

$$\text{ιιι)} \begin{cases} \frac{\chi + 1}{2} = \frac{\psi + 4}{6} \\ \chi + 2 = \frac{2\psi + 9}{3} \end{cases}$$

Απ. «αδύνατο»

6. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{ι)} \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{3} + \frac{2\alpha+\beta}{2} = 3 \\ \alpha + \frac{\beta}{2} = 2 \end{cases}$$

Απ. « $\alpha = 1, \beta = 2$ »

$$\text{ιι)} \begin{cases} \frac{\chi-3}{2} = \frac{\psi+2}{3} \\ \frac{\chi}{3} - \frac{\psi}{2} = 2 \end{cases}$$

Απ. « $\chi = 3, \psi = -2$ »

$$\text{ιιι)} \begin{cases} \frac{2\chi}{3} = \frac{\psi}{2} \\ 4\chi - 3\psi = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Απ. «αδύνατο»

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών

$$\text{ι)} \quad \varepsilon_1: \psi = \chi - 6 \text{ και } \varepsilon_2: \psi = -3\chi - 2$$

A(1, -5)

$$\text{ιι)} \quad \varepsilon_3: \psi = 2\chi + 1 \text{ και } \varepsilon_4: \psi = -\chi$$

A(-1/3, 1/3)

$$\text{ιιι)} \quad \varepsilon_5: \psi = 2 \text{ και } \varepsilon_6: \psi = 5\chi + 7$$

A(-1, 2)

$$\text{ιν)} \quad \varepsilon_7: \psi = -5\chi + 1 \text{ και } \varepsilon_8: \chi = -5$$

A(-5, 26)

$$\text{ν)} \quad \varepsilon_9: 3\chi - 2\psi = 7 \text{ και } \varepsilon_{10}: 6\chi - 4\psi = -5$$

Οι ευθείες είναι
παράλληλες

$$\text{νι)} \quad \varepsilon_{11}: \chi + 2\psi = 3 \text{ και } \varepsilon_{12}: 3\chi + 6\psi = 9$$

Οι ευθείες
ταυτίζονται



σ' αυτούς που σου λένε ότι μεγάλωσες και πρέπει να σοβαρευτείς δώσε την

απάντησή σου



(με σοβαρότητα όμως)

Από το δεκάλογο του «ξύπνιου» μαθητή

3.2 Διερεύνηση συστήματος.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με συστήματα στα οποία **όλοι** οι συντελεστές των αγνώστων ήταν συγκεκριμένοι αριθμοί.

Υπάρχουν όμως συστήματα στα οποία, σε μία ή περισσότερες εξισώσεις, οι συντελεστές εξαρτώνται από μία ή περισσότερες παραμέτρους. Οι εξισώσεις δηλαδή του συστήματος είναι παραμετρικές. Όπως π. χ. στο σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)\chi + 8\psi = 4\lambda \\ \lambda\chi + (\lambda + 3)\psi = 3\lambda - 1 \end{cases}$$

Σε τέτοια συστήματα δουλεύουμε με διαφορετικό τρόπο.

Επειδή η παράμετρος «παίρνει» πολλές τιμές είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε (να διερευνήσουμε) τι συμβαίνει για της διάφορες τιμές της παραμέτρου.

Ας δούμε πρώτα μερικά πράγματα σε σχέση με ένα σύστημα στην γενική του μορφή.

Έστω το σύστημα (γενικής μορφής) (Σ)

$$\begin{cases} \alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma \\ \alpha' \cdot \chi + \beta' \cdot \psi = \gamma' \end{cases}$$

Την παράσταση $\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta$ την ονομάζουμε ορίζουσα **D** και την συμβολίζουμε $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$

δηλαδή είναι $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta$

Γενικά το σύμβολο

$\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix}$ ονομάζεται **ορίζουσα 2^{ης} τάξης** και είναι εξ ορισμού $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} = \kappa \cdot \nu - \mu \cdot \lambda$.

Στα συστήματα εκτός από την ορίζουσα **D**, που όπως μπορείς να διαπιστώσεις αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων όπως ακριβώς εμφανίζονται στο σύστημα και για αυτό ονομάζεται και ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος, χρησιμοποιούμε και δύο άλλες ορίζουσες την D_χ και D_ψ οι οποίες είναι :

- Η D_χ είναι η ορίζουσα **D** αν στη θέση των συντελεστών του χ βάλω τους σταθερούς όρους

(γι' αυτό και D_χ) δηλαδή $D_\chi = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}$

- Η D_ψ είναι η ορίζουσα **D** αν στη θέση των συντελεστών του ψ βάλω τους σταθερούς όρους

(γι' αυτό και D_ψ) δηλαδή $D_\psi = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$.

Οπότε χρησιμοποιώντας τις ορίζουσες και τυποποιώντας τα συμπεράσματα από την διερεύνηση

που κάναμε πριν στο (Σ) $\begin{cases} \alpha \cdot \chi + \beta \cdot \psi = \gamma \\ \alpha' \cdot \chi + \beta' \cdot \psi = \gamma' \end{cases}$ έχουμε την εξής διερεύνηση :

Διερεύνηση

- Αν $D \neq 0$ τότε το (Σ) έχει **μοναδική λύση** την $\chi = \frac{D_\chi}{D}$ και $\psi = \frac{D_\psi}{D}$.
- Αν $D = 0$ και $D_\chi \neq 0$ ή $D_\psi \neq 0$ τότε το (Σ) είναι **αδύνατο**.
- Αν $D = D_\chi = D_\psi = 0$ τότε το (Σ) είναι **αόριστο** ή **αδύνατο**.



Όλα αυτά φαίνονται μπερδεμένα και «δίκιο έχεις».

Στην πράξη τα «πράγματα» είναι πολύ πιο απλά, δουλεύουμε όπως στις παραμετρικές εξισώσεις.

Δες τι κάνουμε μέσα από μερικά παραδείγματα διερεύνησης παραμετρικού συστήματος.

Παραδείγματα :

1. Να «λυθεί» και να διερευνηθεί το σύστημα
- $$\begin{cases} (\lambda+1)x + 8\psi = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda+3)\psi = 3\lambda - 1 \end{cases}$$

Απάντηση :

Βρίσκω τις D , D_x , D_ψ , που είναι παραστάσεις του λ και τις παραγοντοποιώ (αν γίνεται)

$$\text{Είναι } D = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 8 \\ \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) - 8\lambda = \lambda^2 + 3\lambda + \lambda + 3 - 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) \text{ άρα}$$

$$D = (\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda & 8 \\ 3\lambda-1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 4\lambda(\lambda+3) - (3\lambda-1)8 = 4\lambda^2 + 12\lambda - 24\lambda + 8 = 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 4(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \Leftrightarrow$$

$$D_x = 4(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 4\lambda \\ \lambda & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(3\lambda-1) - \lambda \cdot 4\lambda = 3\lambda^2 - \lambda + 3\lambda - 1 - 4\lambda^2 = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \Leftrightarrow$$

$$D_\psi = -(\lambda-1)^2$$

και τότε διακρίνω τις εξής περιπτώσεις :

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 3$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{4(\lambda-1)(\lambda-2)}{(\lambda-1)(\lambda-3)} = \frac{4(\lambda-2)}{\lambda-3} \Leftrightarrow x = \frac{4(\lambda-2)}{\lambda-3} \text{ και} \\ \psi &= \frac{D_\psi}{D} = \frac{-(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)(\lambda-3)} = -\frac{(\lambda-1)}{\lambda-3} \Leftrightarrow \psi = -\frac{(\lambda-1)}{\lambda-3} \end{aligned}$$

- Αν $\lambda = 1$ τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x + 8\psi = 4 \\ x + 4\psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\psi = 2 \\ x + 4\psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - 4\psi$
 άρα **αόριστο** με λύσεις τα ζεύγη της μορφής **$(2 - 4\kappa, \kappa)$** με $\kappa \in \mathbb{R}$

- Αν $\lambda = 3$ τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 4x + 8\psi = 12 \\ 3x + 6\psi = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\psi = 3 \\ x + 2\psi = 8/3 \end{cases}$ **αδύνατο**

Δηλαδή τα βήματα της διερεύνησης συστήματος με παράμετρο λ είναι

- **Βήμα 1°** : Βρίσκω τις D , D_x , D_ψ ως παραστάσεις της παραμέτρου και τις παραγοντοποιώ (οπότε βρίσκω και τις τιμές που μηδενίζουν την D)

- **Βήμα 2°** : Υποθέτω $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \dots$ και $\lambda \neq \dots$ οπότε η μοναδική λύση είναι

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ και } \psi = \frac{D_\psi}{D} \quad [\text{εννοείται ότι αν γίνονται, κάνω τις απλοποιήσεις}]$$

- **Βήμα 3°** : Υποθέτω $\lambda = \dots$ με την 1^η τιμή που μηδενίζει την D οπότε την αντικαθιστώ στο σύστημα και καταλήγω ή σε σύστημα που είναι αόριστο ή καταλήγω σε αδύνατο σύστημα. Το ίδιο κάνω και για τις άλλες τιμές του λ που μηδενίζουν την ορίζουσα (αν υπάρχουν και άλλες τότε υπάρχουν και άλλα τόσα βήματα από δω και κάτω). Βολεύει καλύτερα έτσι παρά να μπλέξω με τις D_x και D_ψ .

2. Να «λυθεί» και να διερευνηθεί το σύστημα $(\lambda+2)\chi+4\psi=2\lambda$
 $(\lambda+1)\chi+(\lambda+1)\psi=\lambda-1$
 βρίσκω τις D, D_χ, D_ψ , που είναι παραστάσεις του λ και τις παραγοντοποιώ

$$\text{Είναι } D = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 4 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+1) - 4(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda + 2\lambda + 2 - 4\lambda - 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$D = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$D_\chi = \begin{vmatrix} 2\lambda & 4 \\ \lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 2\lambda(\lambda+1) - 4(\lambda-1) = 2\lambda^2 + 2\lambda - 4\lambda + 4 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 2(\lambda^2 - \lambda + 2) \Leftrightarrow$$

$$D_\chi = 2(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$D_\psi = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 2\lambda \\ \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1) - (\lambda+1) \cdot 2\lambda = \lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2 - 2\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda^2 - \lambda - 2 \Leftrightarrow$$

$$D_\psi = -(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

Βρίσκω τις τιμές για τις οποίες είναι $D=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=2$ και διακρίνω τις εξής περιπτώσεις :

➤ Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 2$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$\chi = \frac{D_\chi}{D} = \frac{2(\lambda^2 - \lambda + 2)}{(\lambda+1)(\lambda-2)} = \frac{2(\lambda-1)(\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda-2)} \Leftrightarrow \chi = 2 \frac{(\lambda-1)}{(\lambda+1)}$$

$$\psi = \frac{D_\psi}{D} = \frac{-(\lambda^2 + \lambda + 2)}{(\lambda+1)(\lambda-2)}$$

- Αν $\lambda = -1$ τότε το σύστημα γίνεται $\chi + 4\psi = -2$
 $0\chi + 0\psi = -2$ αδύνατο γιατί η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη

- Αν $\lambda = 2$ τότε το σύστημα γίνεται $4\chi + 4\psi = 4$
 $3\chi + 3\psi = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi + \psi = 1 \\ \chi + \psi = \frac{1}{3} \end{cases}$ αδύνατο

Παρατήρηση Αν σε ένα παραμετρικό σύστημα μας ζητάει τις τιμές της παραμέτρου για να είναι αόριστο (μόνο) ή αδύνατο (μόνο) εμείς πάλι τα ίδια θα κάνουμε. Αν μας δίνει δύο παραμετρικά συστήματα και μας ζητάει τις τιμές των παραμέτρων $\pi \chi \lambda, \mu$ για να είναι το σύστημα αόριστο ή αδύνατο τότε ουσιαστικά οδηγούμαστε σε νέο σύστημα το $\begin{bmatrix} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{bmatrix}$ με αγνώστους τις παραμέτρους το οποίο λύνοντας θα βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που μηδενίζουν τις δύο ορίζουσες και από εκεί και πέρα θα πρέπει να εξετάσουμε ποιες από αυτές τις τιμές κάνουν το σύστημα αόριστο ποιες το κάνουν αδύνατο και να απαντήσουμε κατάλληλα.

Δες τα πιο κάτω παραδείγματα :

3. Να βρεθούν οι τιμές του μ έτσι ώστε το σύστημα $\lambda\chi - 2\lambda\psi = \lambda$
 $(\lambda+3)\chi - 4\lambda\psi = -\lambda+9$ να είναι
 ι) αόριστο και ιι) αδύνατο

Απάντηση Κάνω κανονικά την διερεύνησή μου. Βρίσκω την $D = \begin{vmatrix} \lambda & -2\lambda \\ \lambda+3 & -4\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda^2 + 2\lambda(\lambda+3) \Leftrightarrow$

$$D = -4\lambda^2 + 2\lambda^2 + 6\lambda = -2\lambda^2 + 6\lambda \Leftrightarrow D = -2\lambda(\lambda-3)$$

είναι και $D_x = \begin{vmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -\lambda+9 & -4\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda^2 + 2\lambda(-\lambda+9) = -4\lambda^2 - 2\lambda^2 + 18\lambda = -2\lambda^2 + 18\lambda$ $D_x = -6\lambda(\lambda-3)$

$D_\psi = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda+3 & -\lambda+9 \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda+9) - \lambda(\lambda+3) = -\lambda^2 + 9\lambda - \lambda^2 - 3\lambda = -2\lambda^2 + 6\lambda \Leftrightarrow D_\psi = -2\lambda(\lambda-3)$

➤ Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 3$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$\chi = \frac{D_x}{D} = \frac{-6\lambda(\lambda-3)}{-2\lambda(\lambda-3)} = 3$$

$$\psi = \frac{D_\psi}{D} = \frac{-2\lambda(\lambda-3)}{-2\lambda(\lambda-3)} = 1$$

➤ Αν $\lambda = 0$ τότε το σύστημα γίνεται $\begin{matrix} 0\chi - 0\psi = 0 \\ 3\chi - 0\psi = 9 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 0\chi + 0\psi = 0 \\ \chi = 3 \end{matrix}$ **αόριστο** με λύσεις τα ζεύγη της μορφής **(3, κ)**

➤ Αν $\lambda = 3$ τότε το σύστημα γίνεται $\begin{matrix} 3\chi - 6\psi = 3 \\ 6\chi - 12\psi = 6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \chi - 2\psi = 1 \\ \chi - 2\psi = 1 \end{matrix}$ **αόριστο**

Πρόσεξε ότι αν $D \neq 0$ τότε $\chi = 3$ και $\psi = 1$ (δηλαδή είναι ανεξάρτητα από το λ) παρ' όλο που το σύστημα εξαρτάται από το λ . [Τι να κάνουμε συμβαίνει κι' αυτό ! !]

Στα σοβαρά τώρα : Υπάρχουν και ασκήσεις οι οποίες ζητούν : **Να δείξεις ότι οι λύσεις του συστήματος, αν υπάρχουν, είναι ανεξάρτητες της παραμέτρου λ .**

Τέτοιες ασκήσεις παρ, όλη την «πομπώδη» εκφώνηση, θέλουν απλώς να λύσεις κανονικά το σύστημα και μετά τις απλοποιήσεις, γιατί προφανώς απλοποιούνται όλα, θα βρίσκεις τα χ, ψ που θα είναι αριθμοί, χωρίς προφανώς να εξαρτώνται από το λ

4. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ έτσι ώστε τα συστήματα :

$$(\Sigma_1) \begin{matrix} (\lambda + \mu + 2)\chi - 2\psi = 3\lambda - 2\mu \\ (3\lambda + 2\mu + 3)\chi - 4\psi = \lambda - 2\mu - 1 \end{matrix} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) \begin{matrix} \lambda\chi - 3\psi = 2\lambda + \mu \\ 3\chi - (2\mu + 3)\psi = 3\lambda + 4\mu \end{matrix}$$

να είναι συγχρόνως **α)** αόριστα και **β)** αδύνατα.

Απάντηση :

Για να είναι συγχρόνως αόριστα ή αδύνατα τα συστήματα απαραίτητη προϋπόθεση είναι η $D_1 = 0$ και η $D_2 = 0$ (συγχρόνως) όπου D_1 και D_2 οι ορίζουσες των συστημάτων.

Βέβαια αυτό είναι απαραίτητο αλλά δεν είναι και ικανό από μόνο του να μας εξασφαλίσει για το αόριστο ή το αδύνατο, γι' αυτό όταν βρούμε τις τιμές των λ, μ θα τις αντικαταστήσουμε στα συστήματα και «θα δείξει !»

Είναι

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda + \mu + 2 & -2 \\ 3\lambda + 2\mu + 3 & -4 \end{vmatrix} = (\lambda + \mu + 2)(-4) - (3\lambda + 2\mu + 3)(-2) = -4\lambda - 4\mu - 8 + 6\lambda + 4\mu + 6 \Leftrightarrow D_1 = 2(\lambda - 1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 3 & -(2\mu + 3) \end{vmatrix} = -(2\mu + 3)\lambda + 9 = -2\mu\lambda - 3\lambda + 9 = -3\lambda - 2\lambda\mu + 9 \Leftrightarrow D_2 = -3\lambda - 2\lambda\mu + 9$$

$$\text{Αρα} \quad \begin{matrix} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda - 2 = 0 \\ -3\lambda - 2\lambda\mu + 9 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ 3\lambda + 2\lambda\mu = 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ 2\mu + 3 = 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ 2\mu = 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda = 1 \\ \mu = 3 \end{pmatrix}.$$

Αρα όταν $\lambda = 1$ και $\mu = 3$ είναι $D_1 = 0$ και η $D_2 = 0$ οπότε τα συστήματα γίνονται αντίστοιχα

$$\Sigma_1 \quad \begin{matrix} 6\chi - 2\psi = -3 \\ 12\chi - 4\psi = -6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6\chi - 2\psi = -3 \\ 6\chi - 2\psi = -3 \end{matrix} \quad \text{αόριστο και}$$

$$\Sigma_2 \quad \begin{matrix} \chi - 3\psi = 5 \\ 3\chi - 9\psi = 15 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \chi - 3\psi = 5 \\ \chi - 3\psi = 5 \end{matrix} \quad \text{επίσης αόριστο}$$

Άρα για $\lambda = 1$ και $\mu = 3$ τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύιστα και δεν υπάρχει συνδυασμός λ και μ έτσι ώστε αυτά να είναι συγχρόνως αδύνατα διότι αν είναι $\lambda \neq 1$ ή $\mu \neq 3$ τότε θα είναι $D_1 \neq 0$ ή $D_2 \neq 0$ οπότε ένα από τα δύο θα έχει λύση.

Παρατήρηση

Οι ορίζουσες υπάρχουν στα Μαθηματικά ως ανεξάρτητες παραστάσεις και απλώς χρησιμοποιούνται για την λύση των συστημάτων. Έτσι δεν είναι παράξενο αν συναντήσουμε ασκήσεις (εξισώσεις, ταυτότητες κλπ) στις οποίες θα συμμετέχουν μόνο ορίζουσες, ως αυτόνομες μονάδες.

Παραδείγματα :

ι) Να λυθεί η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} 2\chi + 3 & -2 \\ 3\chi - 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

ιι) Να λυθεί η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} \chi - 1 & -2 \\ -4 & \chi + 1 \end{vmatrix} = 0$$

ιιι) Να βρεθεί ο χ αν $D(\chi) = \begin{vmatrix} \chi + 3 & -2 \\ 1 & \chi - 3 \end{vmatrix}$ και $D^2(\chi) + D(\chi) - 6 = 0$

ιiv) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3\chi - 2\psi = -7 \\ 2\chi + 3\psi = 4 \end{cases}$ με την μέθοδο των οριζουσών

Απάντηση :

Στην ι) Είναι $D = \dots\dots\dots 76\chi + 103$ άρα $76\chi + 103 = 0 \Leftrightarrow \chi = -\frac{103}{76}$

Στην ιι) Είναι $D = \dots\dots\dots \chi^2 - 9 \Leftrightarrow \chi^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \chi = 3$ ή $\chi = -3$

Στην ιιι) Λύνω πρώτα την $D^2(\chi) + D(\chi) - 6 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow D(\chi) = 2$ ή $D(\chi) = -3$

[Είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το $D(\chi)$] και κατόπιν λύνω τις $D(\chi) = 2$ και $D(\chi) = -3$

π. χ. είναι $D(\chi) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \chi + 3 & -2 \\ 1 & \chi - 3 \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow \chi^2 - 9 + 2 = 2 \Leftrightarrow \chi^2 = 9 \Leftrightarrow \chi = \pm 3$

όμοια $D(\chi) = -3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \chi + 3 & -2 \\ 1 & \chi - 3 \end{vmatrix} = -3 \Leftrightarrow \chi^2 - 9 + 2 = -3 \Leftrightarrow \chi^2 = 4 \Leftrightarrow \chi = \pm 2$

ιiv) Βολεύουν καλύτερα οι ορίζουσες στη λύση ενός συστήματος γιατί με τις πράξεις των αριθμών είμαστε εξοικειωμένοι. Πράγματι έστω το σύστημα : $\begin{cases} 3\chi - 2\psi = -7 \\ 2\chi + 3\psi = 4 \end{cases}$ τότε είναι

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 9 + 4 = 13 \text{ και}$$

$$D_\chi = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = -21 + 8 = -13, D_\psi = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-7) \cdot 2 = 12 + 14 = 26$$

$$\text{Άρα } \chi = \frac{D_\chi}{D} = \frac{-13}{13} = -1 \text{ και } \psi = \frac{D_\psi}{D} = \frac{26}{13} = 2$$

Βέβαια είπαμε βολεύει καλύτερα η λύση συστήματος με τις ορίζουσες αλλά αν στο μέλλον χρειαστεί να λύσεις σύστημα εσύ θα το λύσεις με όποιο τρόπο «θέλεις κι' αγαπάς». Εκεί που θα χρησιμοποιήσεις οπωσδήποτε ορίζουσες είναι όταν θες να ξέρεις πόσες λύσεις έχει ένα σύστημα χωρίς όμως και να το λύσεις.



1. Να υπολογίσεις τις ορίζουσες :

$$ι) \begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \quad \left(\text{Απ } \frac{14}{5} \right) \quad ιι) \begin{vmatrix} \alpha & 3 \\ -\alpha & 2 \end{vmatrix} \quad \left(\text{Απ } 5 \cdot \alpha \right) \quad ιιι) \begin{vmatrix} 2\chi-1 & \chi^2 \\ -2 & \chi+3 \end{vmatrix} \quad \left(\text{Απ } 4\chi^2 + 5\chi - 3 \right)$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$ι) \begin{vmatrix} 2\chi-4 & 2 \\ 3\chi & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Απ } \chi = 5) \quad ιι) \begin{vmatrix} \chi-5 & 2 \\ -3 & \chi \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Απ } \chi = 2 \text{ ή } \chi = 3)$$

$$ιιι) \begin{vmatrix} 2\chi-1 & \chi^2 \\ -2 & \chi+3 \end{vmatrix} = 4\chi^2 \quad (\text{Απ } \chi = \frac{3}{5}) \quad ιιιι) \begin{vmatrix} 2\chi-1 & \chi^2 \\ -2 & \chi+3 \end{vmatrix} = 6\chi^2 - 3\chi + 5 \quad (\text{Απ } \chi = 2)$$

3. Να βρεις πόσες λύσεις έχει καθ' ένα από τα συστήματα (χωρίς να λυθεί !)

$$ι) \begin{cases} 3\chi - 2\psi = 7 \\ 6\chi + \psi = 4 \end{cases} \quad (\text{μία}) \quad ιι) \begin{cases} 2\chi + 3\psi = -3 \\ 6\chi + 9\psi = 6 \end{cases} \quad (\text{καμία}) \quad ιιι) \begin{cases} \chi - \psi = 3 \\ 2\chi - 2\psi = 6 \end{cases} \quad (\text{Απειρες})$$

4. Να «λυθούν» και να διερευνηθούν τα συστήματα

$$ι) \begin{cases} 2\lambda\chi - (\lambda+1)\psi = \lambda \\ -6\lambda\chi + (\lambda-1)\psi = 6 \end{cases} \quad \text{Απ } \text{όταν } \lambda \neq 0, \lambda \neq -2 \text{ μία λύση κλπ}$$

$$ιι) \begin{cases} 2\chi + (\lambda-1)\psi = 2\lambda \\ \chi + \lambda\psi = 6 \end{cases} \quad \text{όταν } \lambda \neq -1 \text{ μία λύση κλπ}$$

5. Να «λυθούν» και να διερευνηθούν τα συστήματα

$$ι) \begin{cases} 1999 \cdot \chi + 2000\lambda\psi = 2001 \cdot \lambda \\ \lambda\chi - \psi = 2002 \end{cases} \quad \text{Απ για κάθε } \lambda \text{ μία λύση}$$

$$ιι) \begin{cases} 2\lambda\chi + 3\lambda\psi = 2\lambda - 7 \\ 10\lambda\chi + 15\lambda\psi = \lambda^2 + 2 \end{cases} \quad \text{για κάθε } \lambda \text{ αδύνατο}$$

6. Να «λυθούν» και να διερευνηθούν τα συστήματα

$$ν) \begin{cases} \lambda\chi + 3\lambda\psi = 2\lambda \\ 5\lambda\chi + 15\lambda\psi = 10\lambda \end{cases} \quad \text{Απ για κάθε } \lambda \text{ αόριστο}$$

$$νι) \begin{cases} \lambda\chi + 3\lambda\psi = 2\lambda \\ 5\lambda\chi + 15\lambda\psi = \lambda + 1 \end{cases} \quad \text{για κάθε } \lambda \neq 1 \text{ αδύνατο, } \lambda = 1 \text{ αόριστο}$$

7. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ έτσι ώστε τα συστήματα

$$(\Sigma) \begin{cases} (\lambda+\mu)\chi - 2\lambda\psi = -\lambda \\ \lambda\chi - \mu\psi = \mu \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma ι) \begin{cases} 2\mu\chi - 3\lambda\psi = 3\lambda + \mu \\ (\lambda+\mu)\chi - (2\mu+1)\psi = 2(\lambda+\mu) \end{cases}$$

να είναι συγχρόνως ι) αόριστα και ιι) αδύνατα.



Μην κάνεις «χάρες», όπως το διάβασμα ή το ντύσιμο, στους γονείς και στους καθηγητές σου γιατί τους καλομαθαίνεις και ζητάνε κι' άλλα ύστερα.

Καλλίτερα να είσαι αυστηρός μαζί τους

Από το δεκάλογο του «ξύπνιου» μαθητή



3.3 Συστήματα με περισσότερους από δύο αγνώστους.

Εκτός από τα γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων και δύο αγνώστων υπάρχουν και γραμμικά συστήματα με περισσότερες εξισώσεις και περισσότερους αγνώστους. Π. χ. με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους ή με n εξισώσεις και n αγνώστους. Υπάρχουν και συστήματα με n εξισώσεις και m αγνώστους όπου $n \neq m$. Δηλαδή συστήματα με περισσότερες εξισώσεις από τους αγνώστους και συστήματα με περισσότερους αγνώστους από τις εξισώσεις. Με αυτά θα ασχοληθείς σε επόμενα χρόνια.

Υπάρχουν βέβαια και μη γραμμικά συστήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε σε επόμενη παράγραφο.

Πώς λύνουμε π. χ. ένα σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους;

Θεωρητικά και με τις 4 μεθόδους (αντικατάσταση, αντίθετους συντελεστές, σύγκριση, ορίζουσες) Παρ' όλο που το σχολικό προτείνει την απαλοιφή (αντίθετους συντελεστές) εγώ επιμένω στον «τυφλοσύρτη» της αντικατάστασης. Δες ένα παράδειγμα λυμένο με αυτόν τον τρόπο :

Παραδείγματα :

$$\begin{aligned} 2\chi + \psi - 2\omega &= 6 & (1) \\ 1. \quad \text{Να λυθεί το } (\Sigma) \quad \chi - \psi - 2\omega &= 1 & (2) \\ 3\chi + \psi - \omega &= 6 & (3) \end{aligned}$$

Λύνω την (2) ως προς χ και έχω $\chi = 1 + \psi + 2\omega$ οπότε $(1) \Leftrightarrow 2(1 + \psi + 2\omega) + \psi - 2\omega = 6 \Leftrightarrow 2 + 2\psi + 4\omega + \psi - 2\omega = 6 \Leftrightarrow 3\psi + 2\omega = 4$ (4)

Όμοια η (3) $\Leftrightarrow 3(1 + \psi + 2\omega) + \psi - \omega = 6 \Leftrightarrow 3 + 3\psi + 6\omega + \psi - \omega = 6 \Leftrightarrow 4\psi + 5\omega = 3$ (5)

Η (4) και (5) αποτελούν σύστημα $\begin{cases} 3\psi + 2\omega = 4 & (4) \\ 4\psi + 5\omega = 3 & (5) \end{cases}$ το οποίο λύνω [με όποιον τρόπο με βολεύει καλύτερα] και βρίσκω « $\psi = 2$ και $\omega = -1$ ». Αν τώρα αντικαταστήσω τις τιμές αυτές στην $\chi = 1 + \psi + 2\omega$ έχω $\chi = 1 + 2 + 2(-1) = 3 - 2 = 1$ άρα « $\chi = 1$ ».

Παρατήρηση: Υπάρχει περίπτωση σ' ένα σύστημα οι σταθεροί όροι να είναι όλοι μηδέν.

$$\alpha_1\chi + \beta_1\psi + \gamma_1\omega = 0$$

Δηλαδή το σύστημα να είναι της μορφής $\alpha_2\chi + \beta_2\psi + \gamma_2\omega = 0$.

$$\alpha_3\chi + \beta_3\psi + \gamma_3\omega = 0$$

Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **ομογενές** και είναι (όπως λέμε) **συμβιβαστό**, που σημαίνει ότι έχει πάντοτε λύση, την προφανή $(0, 0, 0)$.

Αυτό το γεγονός μας κάνει να λέμε ότι **το ομογενές σύστημα «είναι αδύνατο να είναι αδύνατο»**. Το ερώτημα σε ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι αν έχει λύσεις και πόσες αλλά αν έχει και άλλες λύσεις, εκτός από την προφανή $(0, 0, 0)$.

Αυτό, σε σχέση με την ορίζουσα των συντελεστών, μεταφράζεται ως εξής :

α) Σύστημα ομογενές και $D \neq 0$ τότε έχει μόνο την προφανή λύση $(0, 0, 0)$.

β) Σύστημα ομογενές και $D = 0$ τότε έχει άπειρες λύσεις (αόριστο).

2. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{aligned} & \chi + \psi + \omega = 0 & (1) \\ \text{ι) } & 3\chi + 2\psi = 0 & \\ & 2\chi + 3\psi + \omega = 0 & (2) \\ & 3\chi + 4\psi + 2\omega = 0 & (3) \\ & 5\chi + 7\psi = 0 & \end{aligned}$$

Απάντηση :

ι) Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 10 = 11 \neq 0$ άρα έχει ως μοναδική λύση την $(0,0)$

ιι) Αν λύσω την (1) ως προς χ έχω $\chi = -\psi - \omega$ οπότε η (2) γίνεται $2(-\psi - \omega) + 3\psi + \omega = 0 \Leftrightarrow -2\psi - 2\omega + 3\psi + \omega = 0 \Leftrightarrow \psi - \omega = 0$ (4).

και η (3) γίνεται $-3\psi - 3\omega + 4\psi + 2\omega = 0 \Leftrightarrow \psi - \omega = 0$ (5) οπότε οι (4) και (5) αποτελούν σύστημα

$$\psi - \omega = 0 \quad \psi = \omega$$

$$\psi - \omega = 0 \quad \psi = \omega$$

το οποίο είναι προφανώς αόριστο άρα και το αρχικό (ομογενές) έχει άπειρες

λύσεις της μορφής $(-2\kappa, \kappa, \kappa)$

α σκήσεις

1. Να λυθούν τα συστήματα :

$$2\chi + 3\psi - \omega = 5$$

$$2\chi + \psi - \omega = -11$$

$$2\chi + 3\psi - \omega = -1$$

ι) $\chi - \psi + \omega = 2$

ιι) $\chi - \psi + \theta = -4$

ιιι) $\chi - \psi + \omega = 5$

$$3\chi - \psi + 2\omega = 7$$

$$\psi + 2\theta = 5$$

$$\omega = 7$$

Απ $(1, 2, 3)$

Απ $(-5, 1, 2)$

Απ $(0, 2, 7)$

2. Να λυθούν τα συστήματα :

$$2\chi + 3\psi - \omega = 13$$

$$\kappa - 2\lambda + \mu = 5$$

$$0,3\chi - 0,5\psi + \omega = 2,3$$

ι) $-\psi = -2$

ιι) $-\kappa - \lambda + \mu = 5$

ιιι) $\chi + 0,7\psi - \omega = -1,4$

$$\chi - 2\psi = 1$$

$$2\kappa + \lambda + \mu = -2$$

$$\chi + \psi + \omega = 0$$

Απ $(5, 2, 3)$

Απ $(-1, -2, 2)$

Απ $(1, -2, 1)$

3. Να λυθούν τα συστήματα :

$$2\chi + 3\psi + \omega = 0$$

$$3\chi + \psi + \frac{3}{2}\omega = 0$$

ι) $\chi + \psi + \omega = 0$

ιι) $2\chi + \omega = 0$

ιιι) $2\chi + 3\psi + \omega = 0$

$$3\chi + 2\psi + 3\omega = 0$$

$$\chi + \omega = 0$$

$$\chi + \psi + \omega = 0$$

Απ μόνο $(0, 0, 0)$

Απ μόνο $(0, 0)$

Απ μόνο $(0, 0, 0)$

$$\frac{1}{2}\chi + 2\psi + 3\omega = 0$$

$$\chi - \psi + 2\omega = 0$$

ιν) $3\chi + 2\psi + \omega = 0$

ν) $2\chi + 2\psi = 0$

$$2\chi + 8\psi + 12\omega = 0$$

$$3\chi + \psi + 6\omega = 0$$

Απ Άπειρες λύσεις

Απ μόνο $(0, 0, 0)$

3.4 Συστήματα ειδικής μορφής.

- Συστήματα που χρειάζεται ειδική τεχνική [«τέχνασμα»].

1^η Περίπτωση : Όταν έχω σύστημα με n αγνώστους και n εξισώσεις αλλά σε κάθε εξίσωση υπάρχει ένας άγνωστος λιγότερος και οι εξισώσεις προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των αγνώστων όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν. Σε τέτοια συστήματα η λύση τους διευκολύνεται αν χρησιμοποιήσω μια επιλεγμένη τεχνική.

Τα συστήματα αυτά λύνονται και με τους «παραδοσιακούς τρόπους» απλώς η διαφορετική τεχνική («τέχνασμα») διευκολύνει την επίλυσή τους.

Να λυθούν τα συστήματα

$$\begin{array}{ll} \chi + \psi = 3 & \chi + \psi + \theta = 9 \quad (1) \\ (\Sigma_1) \quad \psi + \omega = 5 & (\Sigma_2) \quad \psi + \theta + \omega = 12 \quad (2) \\ \omega + \chi = 4 & \theta + \omega + \chi = 11 \quad (3) \\ & \omega + \chi + \psi = 10 \quad (4) \end{array}$$

Για να λύσω ένα τέτοιο σύστημα προσθέτω όλες τις εξισώσεις και αφού βρω το $\chi + \psi + \omega$ στο (Σ_1) ή το $\chi + \psi + \theta + \omega$ στο (Σ_2) κατόπιν αφαιρώ από το $\chi + \psi + \omega$ κάθε μία εξίσωση, οπότε υπολογίζεται ένας άγνωστος κάθε φορά π. χ. για το (Σ_2) αν προσθέσω τις 4 εξισώσεις κατά μέλη έχω $3 \cdot \chi + 3 \cdot \psi + 3 \cdot \theta + 3 \cdot \omega = 42 \Leftrightarrow \chi + \psi + \theta + \omega = 14$ **(5)** άρα **(5) – (1) $\Leftrightarrow \omega = 5$, (5) – (2) $\Leftrightarrow \chi = 2$, (5) – (3) $\Leftrightarrow \psi = 3$, (5) – (4) $\Leftrightarrow \theta = 4$.** Όμοια και το (Σ_1) .

$$\chi \cdot \psi = \alpha$$

2^η Περίπτωση : Συστήματα της μορφής $(\Sigma) \quad \psi \cdot \omega = \beta \quad \text{με} \quad \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$ λύνονται αν $\omega \cdot \chi = \gamma$

πολλαπλασιάσω κατά μέλη τις 3 εξισώσεις οπότε έχω την $(\chi \cdot \psi \cdot \omega)^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ **(1)**

Στην (1) παρατηρούμε ότι $\chi \cdot \psi \cdot \omega \neq 0$ αφού είναι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$.

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις :

i) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma < 0$ τότε το (Σ) δεν έχει λύση διότι $(\chi \cdot \psi \cdot \omega)^2 \geq 0$ και

ii) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \geq 0$ άρα η (1) γίνεται $\chi \cdot \psi \cdot \omega = \pm \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$ επομένως η λύση του συστήματος ανάγεται στη λύση δύο συστημάτων :

1) $\chi \cdot \psi \cdot \omega = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$ (2) τότε βρίσκω τα χ, ψ, ω αν κάθε φορά διαιρώ την (2) με κάθε μία εξίσωση

του συστήματος : $\frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\chi \cdot \psi} = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\alpha} \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\alpha}$ αφού $\chi \psi \neq 0$

$$\frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\psi \cdot \omega} = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\beta} \Leftrightarrow \chi = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\omega \cdot \chi} = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\gamma} \Leftrightarrow \psi = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\gamma}$$

2) $\chi \cdot \psi \cdot \omega = -\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \Leftrightarrow \frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\chi \cdot \psi} = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\alpha} \Leftrightarrow \omega = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\alpha}$ αφού $\chi \psi \neq 0$,

$$\frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\psi \cdot \omega} = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\beta} \Leftrightarrow \chi = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\chi \cdot \psi \cdot \omega}{\omega \cdot \chi} = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\gamma} \Leftrightarrow \psi = \frac{-\sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}}{\gamma}$$

- Συστήματα που χρειάζεται βοηθητικός άγνωστος.

1^η Περίπτωση: Συστήματα όπου οι άγνωστοι βρίσκονται στον παρονομαστή

$$\frac{\alpha}{P(\chi)} + \frac{\beta}{\Phi(\chi)} = \kappa$$

δηλαδή συστήματα της μορφής

$$\frac{\gamma}{P(\chi)} + \frac{\delta}{\Phi(\chi)} = \lambda$$

όπως στα παραδείγματα

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) \quad & \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\psi} = 11 \\ & \frac{2}{\chi} - \frac{1}{\psi} = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (\Sigma_2) \quad & \frac{3}{\chi-1} - \frac{2}{3\psi+1} = -17 \\ & \frac{1}{\chi-1} + \frac{1}{3\psi+1} = 11 \end{aligned}$$

Για να λύσω ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιώ βοηθητικό άγνωστο, κάτι που θα κάνουμε πολύ συχνά τα επόμενα χρόνια.

- Για το (Σ_1) ακολουθώ τα εξής βήματα:

Πρώτα βρίσκω τους περιορισμούς για να έχει νόημα η παράσταση, εδώ πρέπει $\chi \neq 0$ και $\psi \neq 0$.

Κατόπιν θέτω $\kappa = \frac{1}{\chi}$ και $\lambda = \frac{1}{\psi}$ οπότε το (Σ_1) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} + \frac{3}{\psi} = 11 & \Leftrightarrow \frac{1}{\chi} + 3\frac{1}{\psi} = 11 & \Leftrightarrow \kappa + 3\lambda = 11 \\ \frac{2}{\chi} - \frac{1}{\psi} = 1 & \Leftrightarrow 2\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\psi} = 1 & \Leftrightarrow 2\kappa - \lambda = 1 \end{aligned}$$

Λύνω αυτό το σύστημα με έναν από τους γνωστούς

τρόπους και βρίσκω $\kappa = 2$ και $\lambda = 3$ τότε είναι $\frac{1}{\chi} = 2 \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{\psi} = 3 \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{3}$.

Λύση το $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

- Για το (Σ_2) : Πρέπει $\chi - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 1$ και $3\psi + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \psi \neq -\frac{1}{3}$ τότε αν θέσω $\kappa = \frac{1}{\chi-1}$ και $\lambda = \frac{1}{3\psi+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\psi+1} \text{ θα έχω } & \frac{3}{\chi-1} - \frac{2}{3\psi+1} = -17 & \Leftrightarrow 3\frac{1}{\chi-1} - 2\frac{1}{3\psi+1} = -17 \\ & \frac{1}{\chi-1} + \frac{1}{3\psi+1} = 11 & \Leftrightarrow \frac{1}{\chi-1} + \frac{1}{3\psi+1} = 11 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa - 2\lambda = -17 \\ \kappa + \lambda = 11 \end{cases} (\Sigma) \end{aligned}$$

Λύνοντας το (Σ) βρίσκω $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$. Άρα $\kappa = \frac{1}{\chi-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\chi-1} = 1 \Leftrightarrow \chi - 1 = 1 \Leftrightarrow \chi = 2$ και

$$\lambda = \frac{1}{3\psi+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3\psi+1} = 10 \Leftrightarrow 30\psi + 10 = 1 \Leftrightarrow 30\psi = -9 \Leftrightarrow \psi = -\frac{9}{30} = -\frac{3}{10}$$

Λύσεις που είναι αποδεκτές γιατί ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2^η Περίπτωση: Συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} \\ 2\chi - \psi + 3\omega = 21 \end{aligned}$$

Αυτό το σύστημα δεν απαιτεί ιδιαίτερο τρόπο λύσης. Απλώς 2 από τις εξισώσεις του έχουν δοθεί με την μορφή μιας διπλής ισότητας.

Δηλαδή η $\frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4}$ χωρίζεται σε δύο εξισώσεις τις $\frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2}$ οπότε το σύστημα γίνεται $\frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4}$

$$\frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} \quad (2) \quad \text{Αφού τακτοποιήσω τις 2 πρώτες εξισώσεις, δηλαδή τις φέρω στην}$$

$$2\chi - \psi + 3\omega = 21 \quad (3)$$

μορφή $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ (με απαλοιφή παρονομαστών κλπ) κατόπιν λύνω κανονικά το σύστημα δηλαδή :

$$\begin{aligned} \frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} & \Leftrightarrow \frac{\chi-1}{3} = \frac{\omega-1}{4} & (1) & \Leftrightarrow 2\chi - 3\psi = 2 & (1) \\ \frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} & \Leftrightarrow \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} & (2) & \Leftrightarrow 2\psi - \omega = -1 & (2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi = 4, \psi = 2, \omega = 5 \\ 2\chi - \psi + 3\omega = 21 & & (3) & \Leftrightarrow 2\chi - \psi + 3\omega = 21 & (3) \end{aligned}$$

Παρατήρηση Θα μπορούσα να ακολουθήσω την εξής διαδικασία :

$$\text{Να θέσω } \frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} = \lambda \text{ (βοηθητικός άγνωστος)}$$

$$\frac{\chi-1}{3} = \frac{\psi}{2} = \frac{\omega-1}{4} = \lambda \Leftrightarrow \chi-1=3\lambda \Leftrightarrow \chi=3\lambda+1, \psi=2\lambda, \omega-1=4\lambda \Leftrightarrow \omega=4\lambda+1, \text{ τότε η 2}^{\text{η}} \text{ εξίσωση του αρχικού συστήματος γίνεται : } 2(3\lambda+1) - (2\lambda) + 3(4\lambda+1) = 21 \Leftrightarrow 6\lambda - 2\lambda + 12\lambda = 16 \Leftrightarrow 16\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ άρα } \chi=3 \cdot 1+1=4, \psi=2 \cdot 1=2, \omega=4 \cdot 1+1=5$$

Βρήκαμε τις ίδιες λύσεις ίσως λίγο πιο «εύκολα», αλλά όπως είδες λύνεται και χωρίς την «ιδιαίτερη» διαδικασία .

3^η Περίπτωση Σε συστήματα όπου οι άγνωστοι δεν είναι στην «κλασική» μορφή « χ, ψ » ή « θ, ω » αλλά εμφανίζονται με την μορφή « χ^2, ψ^2 » ή « $\sqrt{\chi}, \sqrt{\psi}$ » ή όπως πιο πάνω « $\frac{\alpha}{2\chi+1}, \frac{\beta}{3\psi-2}$ » κλπ χρησιμοποιούμε βοηθητικό άγνωστο όπως στα επόμενα παραδείγματα.

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \chi^2 + \psi^2 &= 13 \\ 2\chi^2 - 3\psi^2 &= 6 \end{aligned}$$

Απάντηση Θεωρώ ως κατ' αρχήν αγνώστους τα χ^2 και ψ^2 οπότε θέτω $\theta = \chi^2$ και $\omega = \psi^2$ με θ και $\omega \geq 0$ άρα το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} \theta + \omega &= 13 & (1) \\ 2\theta - 3\omega &= 6 & (2) \end{aligned}$$

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow \theta = 13 - \omega \text{ άρα η (2)} \Leftrightarrow 2(13 - \omega) - 3\omega = 6 \Leftrightarrow 26 - 2\omega - 3\omega = 6 \Leftrightarrow -5\omega = 6 - 26 = -20 \Leftrightarrow 5\omega = 20 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 4 \text{ άρα } \theta = 13 - 4 \Leftrightarrow \theta = 9. \text{ Άρα } \begin{aligned} \chi^2 &= 9 \\ \psi^2 &= 4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \chi &= \pm 3 \\ \psi &= \pm 2 \end{aligned}$$

Λύσεις του συστήματος τα ζεύγη $(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} (\chi+1)^2 + (2\psi-1)^2 &= 13 \\ 2(\chi+1)^2 - 3(2\psi-1)^2 &= 6 \end{aligned}$$

Απάντηση Θεωρώ ως κατ' αρχήν αγνώστους τα $(\chi+1)^2$ και $(2\psi-1)^2$ οπότε θέτω $\theta = (\chi+1)^2$ και $\omega = (2\psi-1)^2$ με θ και $\omega \geq 0$

$$\text{άρα το σύστημα γίνεται } \begin{aligned} \theta + \omega &= 13 & (1) \\ 2\theta - 3\omega &= 6 & (2) \end{aligned} \text{ Το λύνω κανονικά (δες προηγούμενο παράδειγμα)}$$

$$\text{και βρίσκω } \omega = 4 \text{ και } \theta = 9$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } (\chi+1)^2 &= 9 \Leftrightarrow \chi+1 = \pm 3 \\ (2\psi-1)^2 &= 4 \Leftrightarrow 2\psi-1 = \pm 2 \Leftrightarrow (\chi=2 \text{ ή } \chi=-4) \text{ και } (\psi=3/2 \text{ ή } \psi=-1/2) \end{aligned}$$

Λύσεις του συστήματος τα ζεύγη $(2, 3/2)$, $(2, -1/2)$, $(-4, 3/2)$, $(-4, -1/2)$

Όμοια λύνεται και κάθε σύστημα της μορφής $\alpha\Phi^\nu(\chi) + \beta\Theta^\nu(\psi) = \kappa$ όπου $\gamma\Phi^\nu(\chi) + \delta\Theta^\nu(\psi) = \lambda$
 $\Phi(\chi)$ και $\Theta(\psi)$ παραστάσεις των χ και ψ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda$ αριθμοί.

3. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} \sqrt{\chi} + \sqrt{\psi} &= 13 \\ 2\sqrt{\chi} - 3\sqrt{\psi} &= 6 \end{aligned}$$

Απάντηση: Θεωρώ ως κατ' αρχήν αγνώστους τα $\sqrt{\chi}$ και $\sqrt{\psi}$ οπότε θέτω $\theta = \sqrt{\chi}$ και $\omega = \sqrt{\psi}$
 με θ και $\omega \geq 0$ άρα το σύστημα γίνεται
$$\begin{aligned} \theta + \omega &= 13 & (1) \\ 2\theta - 3\omega &= 6 & (2) \end{aligned}$$
 Το λύνω κανονικά (δες προηγούμενο παράδειγμα) και βρίσκω $\omega = 4$ και $\theta = 9$

Άρα $\sqrt{\chi} = 9$ και $\sqrt{\psi} = 4 \Leftrightarrow \chi = 81$ και $\psi = 16$.

Λύσεις του συστήματος το ζεύγος $(81, 16)$

Όμοια λύνεται και κάθε σύστημα της μορφής $\alpha\sqrt[\nu]{\Phi(\chi)} + \beta\sqrt[\nu]{\Theta(\psi)} = \kappa$ όπου $\gamma\sqrt[\nu]{\Phi(\chi)} + \delta\sqrt[\nu]{\Theta(\psi)} = \lambda$
 $\Phi(\chi)$ και $\Theta(\psi)$ παραστάσεις των χ και ψ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda$ αριθμοί.

3η Περίπτωση Συστήματα όπου η μία (τουλάχιστον) εξίσωση είναι ανωτέρου βαθμού, δηλαδή μη γραμμικά συστήματα. Γενικά η λύση τέτοιων συστημάτων οδηγεί στη λύση 2 ή και περισσότερων γραμμικών συστημάτων και οπωσδήποτε η λύση ενός τέτοιου συστήματος δεν είναι πάντοτε «εύκολη».

4. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} 2\chi^2 - \psi^2 &= -2 \\ \chi + \psi &= 3 \end{aligned}$$

Η μία εξίσωση είναι ανωτέρου βαθμού και η άλλη είναι γραμμική.

Αυτό το σύστημα δεν απαιτεί ιδιαίτερη τεχνική, λύνεται απλά.

Λύνω την γραμμική εξίσωση ως προς έναν από τους δύο αγνώστους π. χ. τον χ και αντικαθιστώ στην άλλη έτσι έχω $\chi + \psi = 3 \Leftrightarrow \chi = 3 - \psi$ τότε η άλλη γίνεται $2(3 - \psi)^2 - \psi^2 = -2 \Leftrightarrow$

$$2(9 - 6\psi + \psi^2) - \psi^2 = -2 \Leftrightarrow 18 - 12\psi + 2\psi^2 - \psi^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \psi^2 - 12\psi + 20 = 0 \Leftrightarrow \psi = 2 \text{ ή } \psi = 10 \text{ οπότε για το } \chi \text{ έχω } \chi = 3 - 2 = 1 \text{ ή } \chi = 3 - 10 = -7.$$

Άρα λύσεις τα $(1, 2)$ ή $(-7, 10)$.



α σκήσεις



1. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \chi + \psi = 0 & \chi + \psi = 1 & \chi + \psi + \theta = 3 & (1) \\ \text{ι) } \psi + \omega = 1 & \text{ιι) } \psi + \omega = 2 & \text{ιιι) } \psi + \theta + \omega = 1 & (2) \\ \omega + \chi = -1 & \omega + \chi = 2 & \text{ιιιι) } \theta + \omega + \chi = 2 & (3) \\ & & \omega + \chi + \psi = 0 & (4) \end{array}$$

Απ ι) $(-1, 1, 0)$ Απ ιι) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ Απ ιιι) $(1, 0, 2, -1)$ Απ ιιιι) $(2, 3, 1, 2)$

2. Να λυθεί το σύστημα : $2\chi + \psi = 1$ (1) $2\psi + \omega = 7$ (2) $2\omega + \chi = 1$ (3) Υποδ. (1)+(2)+(3)=(4) και (4) -(1) +(3) ... Λύση $(-1, 3, 1)$

3. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \chi \cdot \psi = -4 & \chi \cdot \psi = 2\sqrt{2} & \chi \cdot \psi = -4 & \\ \text{ι) } \psi \cdot \omega = -6 & \text{ιι) } \psi \cdot \omega = 2 & \text{ιιι) } \psi \cdot \omega = -6 & \\ \omega \cdot \chi = 6 & \omega \cdot \chi = \sqrt{2} & \omega \cdot \chi = -8 & \end{array}$$

Απ ι) $(2, -2, 3)$ Απ ιι) $(\sqrt{2}, 2, 1)$ Απ ιιι) Αδύνατο

4. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \frac{3}{\chi} + \frac{2}{\psi} = -7 & \frac{1}{\chi} + \frac{5}{\psi} = 10 & \frac{8}{\chi+1} - \frac{5}{3\psi+2} = 3 & \frac{2}{\chi-1} - \frac{1}{\psi+1} = -1 \\ \text{ι) } \frac{2}{\chi} + \frac{3}{\psi} = -8 & \text{ιι) } \frac{2}{\chi} - \frac{3}{\psi} = -6 & \text{ιιι) } \frac{1}{\chi+1} + \frac{2}{3\psi+2} = \frac{9}{10} & \text{ιιιι) } \frac{1}{\chi-1} + \frac{2}{\psi+1} = 3 \end{array}$$

Απ ι) $(-1, -\frac{1}{2})$ Απ ιι) Αδύνατο Απ ιιι) $(1, 1)$ Απ ιιιι) Αδύνατο

5. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \frac{2\chi+1}{3} = \frac{\psi+10}{6} = \frac{7\omega-1}{12} & \frac{\chi+1}{2} = \frac{\psi+14}{3} = \omega+1 & \frac{\chi+1}{2} = \frac{\psi+5}{3} = \frac{\omega+4}{4} & \\ \text{ι) } \chi-2\psi+3\omega=11 & \text{ιι) } 2\chi+3\omega=23 & \text{ιιι) } \chi-2\psi+2\omega=5 & \\ \text{Απ ι) } (2, 0, 3) & \text{Απ ιι) } (7, -2, 3) & \text{Απ ιιι) } (3, 1, 4) & \end{array}$$

6. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} \chi^2 - 2\psi^2 = -3 & 2(2\chi+1)^2 - 3(3\psi+1)^2 = 38 & \frac{1}{(\chi+1)^2} - \frac{1}{(\psi+2)^2} = 0 & \\ \text{ι) } 5\chi^2 - 3\psi^2 = -1 & (2\chi+1)^2 + (3\psi+1)^2 = 29 & \frac{1}{(\chi+1)^2} + \frac{2}{(\psi+2)^2} = \frac{3}{4} & \\ \text{Απ ι) } (1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2}) & \text{Απ ιι) } (2, 1/3), (2, -1), (-3, 1/3), (-3, -1) & \text{Απ ιιι) } (1, 0), (1, -4), (-3, 0), (-3, -4) & \end{array}$$

7. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\begin{array}{llll} 2\chi^3 + (\psi+1)^3 = 24 & 2\chi^3 + (\psi+1)^3 = 24 & B^{1453} + E^{1821} = 2 & 2\chi^3 - (\psi+1)^3 = 8 \\ \text{ι) } \chi^3 + 2(\psi+1)^3 = 24 & \chi^3 + 2(\psi+1)^3 = 24 & 2B^{1453} + 3E^{1821} = 5 & \chi^3 - 2(\psi+1)^3 = -8 \end{array}$$

8. Να λυθούν τα συστήματα :

ι) $2\sqrt{\chi} + 3\sqrt{\psi} = 8$
 $3\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi} = 1$
 Απ ι) (1, 4)

ιι) $-3\sqrt{\chi+1} + 5\sqrt{\psi-2} = 11$
 $2\sqrt{\chi+1} + \sqrt{\psi-2} = 10$
 Απ ιι) (8, 18)

ιιι) $2\sqrt[3]{\chi+2} + 3\sqrt[3]{\psi-1} = -5$
 $5\sqrt[3]{\chi+2} + 2\sqrt[3]{\psi-1} = 4$
 Απ ιιι) αδύνατο

9. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2000\sqrt{\chi+2} + 3 \cdot 2001\sqrt{\psi-2} &= 5 \\ 5 \cdot 2000\sqrt{\chi+2} + 2 \cdot 2001\sqrt{\psi-2} &= 7 \end{aligned}$$

Απ (-1, 3)

10. Να λυθούν τα συστήματα :

ι) $\chi^2 + 2\omega^2 = 1$
 $\chi - 5\omega = 1$

ιι) $\chi^2 + \psi^2 = 2$
 $2\chi - \psi = 1$

ιιι) $\chi^2 + \psi^2 = 5$
 $2\chi - \psi = 0$

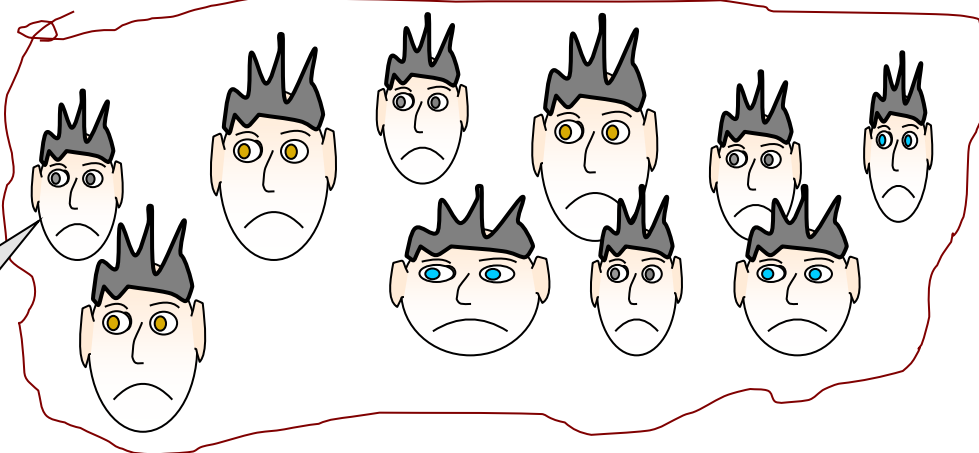
Απ ι) (1, 0), $(-\frac{23}{27}, -\frac{10}{27})$

Απ ιι) (1, 1), $(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$

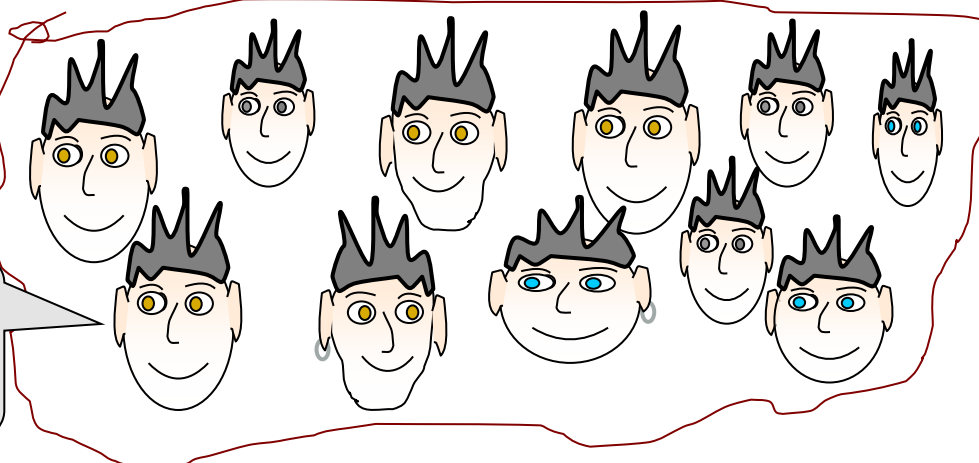
Απ ιιι) (1, 2), (-1, -2)

Η αντίφαση των συναισθημάτων ή το συναίσθημα της αντίφασης ;

Μαθητές
χαρούμενοι
την ώρα του
μαθήματος



Μαθητές
λυπημένοι
την ώρα του
σχολάσματος



3.5

Επίλυση προβλημάτων με συστήματα.

Όπως είχαμε πει και στο κεφάλαιο περί εξισώσεων «Υπάρχουν πολλά προβλήματα που η επίλυσή τους με βάση την πρακτική αριθμητική είναι δύσκολη έως ακατόρθωτη. Τέτοια προβλήματα συναντάμε καθημερινά στην Φυσική, στη Χημεία, στα Μαθηματικά αλλά και στην καθημερινή ζωή.

Υπάρχει ένας συγκεκριμένος 'βηματισμός' τον οποίο πρέπει γενικά να ακολουθείς.

Για να «λύσεις» ένα πρόβλημα πρέπει να το κατανοήσεις καλά, για το λόγο αυτό πρέπει να το διαβάσεις 1 – 2 φορές σωστά έτσι ώστε να έχεις κατά νου την σειρά των «γεγονότων».

Κατόπιν αποφασίζεις και «ονομάζεις» τους αγνώστους [αποδίδοντάς τους μια μεταβλητή όπως χ , ψ , t , v]. Αν πρόκειται για άσκηση φυσικής, χημείας βάζεις το κατάλληλο γράμμα π χ αν πρόκειται για ταχύτητα το v , αν για έργο το γράμμα W κ λ π.

Στη συνέχεια μεταφράζεις (στην κυριολεξία) τα λόγια με σύμβολα κατασκευάζοντας το σύστημα, η επίλυση του οποίου θα σου δώσει «την λύση του προβλήματος.»

Όλα τα προβλήματα φυσικής, χημείας κλπ για να λυθούν απαιτούν την λύση ενός συστήματος.

- ✓ Στα προβλήματα υπάρχουν περιορισμοί τους οποίους «βάζει» η φύση του προβλήματος π χ αν στο πρόβλημα άγνωστος είναι ο αριθμός ανθρώπων που ικανοποιούν μια συνθήκη είναι φανερό ότι είναι φυσικός αριθμός και όχι δεκαδικός ή αρνητικός. Φυσικά καταγράφουμε τους περιορισμούς από την αρχή και απαιτούμε να ικανοποιούνται από την λύση.

Παραδείγματα :

1. Να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός του οποίου τα ψηφία έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 15.

Απάντηση

Αν χ και ψ τα ψηφία του αριθμού τότε πρέπει $0 < \chi \leq 9$ και $0 \leq \psi \leq 9$ και

$$\chi + \psi = 8 \quad (1) \quad \text{και} \quad \chi \cdot \psi = 15 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα
$$\begin{cases} \chi + \psi = 8 & (1) \\ \chi \cdot \psi = 15 & (2) \end{cases}$$

$$H (1) \Leftrightarrow \chi = 8 - \psi \text{ οπότε } (2) \Leftrightarrow (8 - \psi)\psi = 15 \Leftrightarrow 8\psi - \psi^2 = 15 \Leftrightarrow \psi^2 - 8\psi + 15 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \psi = 3 \text{ ή } \psi = 5 \text{ άρα}$$

$$i) \quad \psi = 3 \Leftrightarrow \chi = 8 - 3 \Leftrightarrow \chi = 5 \text{ άρα } \boxed{\text{ο ένας αριθμός είναι ο } 53} \text{ και}$$

$$ii) \quad \psi = 5 \Leftrightarrow \chi = 8 - 5 \Leftrightarrow \chi = 3 \text{ άρα } \boxed{\text{ο άλλος αριθμός είναι ο } 35}$$

2. Να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός του οποίου αν αλλάξω την σειρά των ψηφίων του προκύπτει αριθμός κατά 45 μεγαλύτερος του και τα ψηφία του έχουν άθροισμα 9.

Απάντηση

Αν χ και ψ τα ψηφία του αριθμού πρέπει $0 < \chi \leq 9$ και $0 \leq \psi \leq 9$. Τότε $\chi \psi$ ο αριθμός και $\psi \chi$ ο αριθμός που προκύπτει αν αντιστρέψω την σειρά των ψηφίων του.

💧 Να σημειώσεις ότι αν $\chi \psi$ ένας αριθμός τότε είναι $\chi \psi = 10\chi + \psi$ (ανάλυση αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης).

Τότε ο αντίστροφος του θα είναι $\psi \chi = 10\psi + \chi$ άρα (σύμφωνα με το συγκεκριμένο πρόβλημα) είναι $10\psi + \chi = 10\chi + \psi + 45$ (1) και $\chi + \psi = 9$ (2). $H (1) \Leftrightarrow 9\chi - 9\psi = -45 \Leftrightarrow \chi - \psi = -5$ (3).

Οι (3) και (2) αποτελούν σύστημα

$$\chi - \psi = -5 \quad (3)$$

$$\chi + \psi = 9 \quad (2)$$

άρα $\boxed{\text{ο αριθμός είναι ο } 27}$.

3. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-2, -5)$

Απάντηση

Έστω $\psi = \kappa \cdot \chi + \lambda$ η εξίσωση της ευθείας.

Για να «περνάει» από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(-2, -5)$ πρέπει $1 = \kappa \cdot 1 + \lambda$ (1) και $-5 = \kappa(-2) + \lambda$ (2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa + \lambda = 1 \\ -2\kappa + \lambda = -5 \end{cases}$ με αφαίρεση κατά μέλη $3\kappa = 6 \Leftrightarrow \kappa = 2$ οπότε από $\kappa + \lambda = 1$ βρίσκω $\lambda = -1$ άρα η ευθεία έχει εξίσωση $\psi = 2\chi - 1$

4. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από το σημείο $A(2, -1)$ και είναι κάθετη στην $\psi = \frac{\chi}{2} + 7$

Απάντηση

Έστω $\psi = \kappa \cdot \chi + \lambda$ η εξίσωση της ευθείας. Για να «περνάει» από το σημείο $A(2, -1)$ πρέπει

$-1 = 2\kappa + \lambda$ (1) και για να είναι κάθετη στην $\psi = \frac{\chi}{2} + 7$ πρέπει $\kappa \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \kappa = -2$ τότε (1) $\Leftrightarrow$

$2(-2) + \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 3$ και η ευθεία είναι

$$\psi = -2\chi + 3$$

5. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία είναι κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{5}\chi - 5$ στο σημείο $A(2, 3)$

Απάντηση

Έστω $\psi = \kappa \cdot \chi + \lambda$ η εξίσωση της ευθείας. Για να είναι κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{5}\chi - 5$ πρέπει

$\kappa \cdot (-\frac{1}{5}) = -1 \Leftrightarrow \kappa = 5$ (1) και αφού είναι κάθετη στο σημείο $A(2, 3)$ άρα «περνάει» από το Α άρα

$3 = 2\kappa + \lambda$ (2) οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα με λύση $\kappa = 5$ και $\lambda = -7$ οπότε η ευθεία έχει εξίσωση $\psi = 5\chi - 7$

6. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραμμών $2\chi + \psi = 4$ (1) και $\chi^2 - \psi = -1$ (2)

Απάντηση

Τα κοινά σημεία των γραμμών (1) και (2) είναι οι λύσεις του
$$\begin{cases} 2\chi + \psi = 4 & (1) \\ \chi^2 - \psi = -1 & (2) \end{cases}$$

Το σύστημα όταν λυθεί δίνει λύσεις τα ζεύγη $(1, 2)$ και $(-3, 10)$ άρα τα κοινά σημεία των γραμμών είναι τα $A(1, 2)$ και $B(-3, 10)$

7. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας την οποία φέρνουμε κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{5}\chi - 5$ από το σημείο τομής των ευθειών $\epsilon_1 \rightarrow \psi = 2\chi - 1$ και $\epsilon_2 \rightarrow \psi = 3\chi - 3$

Απάντηση

Έστω $\psi = \kappa \cdot \chi + \lambda$ η εξίσωση της ευθείας. Για να είναι κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{5}\chi - 5$ πρέπει

$\kappa \cdot (-\frac{1}{5}) = -1 \Leftrightarrow \kappa = 5$ (1). Στην συνέχεια βρίσκω το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 λύνοντας το

σύστημα $\begin{cases} \psi = 2\chi - 1 \\ \psi = 3\chi - 3 \end{cases}$ με την μέθοδο της σύγκρισης άρα είναι $2\chi - 1 = 3\chi - 3 \Leftrightarrow -\chi = -2 \Leftrightarrow \chi = 2$

οπότε $\psi = 2 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow \psi = 3$ άρα το σημείο τομής τους είναι $A(2, 3)$ και πρέπει $3 = 5 \cdot 2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -7$ και η ευθεία είναι

$$\psi = 5\chi - 7$$

8. Να βρεθούν τα λ και μ έτσι ώστε για την συνάρτηση f με $f(x) = \lambda x^2 - \mu x + \lambda + \mu$ να ισχύει ι) $f(1) = 2$ και ιι) η γρ. παράσταση της f να τέμνει τον ψ' ψ στο -1

Απάντηση

Αν $f(1) = 2 \Leftrightarrow \lambda - \mu + \lambda + \mu = 2 \Leftrightarrow 2\lambda = 2$ (1), αν τέμνει τον ψ' ψ στο -1 τότε $f(0) = -1 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -1$ (2). Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα με λύση $(1, -2)$

Άρα $\lambda = 1$ και $\mu = -2$

9. Ένας αγρότης όταν τον ρώτησε ο γείτονας πόσα κουνέλια και πόσες κόττες έχει στο στάβλο του απάντησε : «όλα τα ζωντανά είναι 50 και έχουν 160 πόδια». Πόσα κουνέλια και πόσες κόττες έχει ο αγρότης ;

Απάντηση

Έστω ότι x κουνέλια και y κόττες έχει ο αγρότης τότε $x + y = 50$ (1)

Και επειδή κάθε κουνέλι έχει 4 πόδια και κάθε κότα 2 πρέπει $4x + 2y = 160$ (2)

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα το οποίο όταν λυθεί δίνει $x = 30$ και $y = 20$.

Άρα 30 κουνέλια και 20 κόττες έχει ο αγρότης

10. Μια οικογένεια έχει 5 παιδιά. Αν για κάθε παιδί που πάει στο Γυμνάσιο ξοδεύει 30.000 δρχ. και γι' αυτά που πάνε Λύκειο 40.000 δρχ. να βρείτε πόσα παιδιά πάνε Γυμνάσιο και πόσα πάνε Λύκειο αν το σύνολο των εξόδων για τα παιδιά είναι 170.000

Απάντηση

Έστω x παιδιά πάνε Γυμνάσιο και y στο Λύκειο τότε $x + y = 5$ (1) και

$30.000x + 40.000y = 170.000$ (2) τα συνολικά έξοδα. Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα με λύση το ζευγάρι $(3, 2)$. Άρα 3 παιδιά στο Γυμνάσιο και 2 στο Λύκειο



1. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(-1, 5)$
[Απ. $\psi = -2\chi + 3$]
2. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από το σημείο $A(-3, 3)$ και είναι κάθετη στην $\psi = 3\chi - 1$.
[Απ. $\psi = -\frac{1}{3}\chi + 2$]
3. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία είναι κάθετη στην $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 3$ στο σημείο $A(2, 5)$
[Απ. $\psi = 2\chi + 1$]
4. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από το σημείο $A(-1, 5)$ και είναι παράλληλη στην $\psi = -2\chi + 7$
[Απ. $\psi = -2\chi + 3$]
5. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας η οποία «περνάει» από το κοινό σημείο των ευθειών $\epsilon_1 \rightarrow \psi = 2\chi + 1$ και $\epsilon_2 \rightarrow \psi = -\chi - 2$ και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\psi = 3\chi + 5$
[Απ. $\psi = 3\chi + 2$]
6. Να βρεθούν τα α, β έτσι ώστε η συνάρτηση f με $f(\chi) = (2\alpha - \beta)\chi^2 - \alpha\chi - \beta$ να «περνάει» από το $A(1, -4)$ και να τέμνει τον χ' χ στο $\chi = 3$ και στην συνέχεια να βρεθεί το $f(2)$
[Απ. $\alpha = 2, \beta = 3, f(2) = -3$]
7. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας $\psi = 5\chi - 5$ και της γραμμής $2\chi^2 + \psi^2 = 1$
[Απ. $A(1, 0)$ και $B(-\frac{23}{27}, -\frac{10}{27})$]
8. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας $\psi = 2\chi$ και της γραμμής $\psi^2 + \chi^2 = 2$
[Απ. $A(1, 2)$ και $B(-1, -2)$]
9. Ποιος τριψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 11, αν τον γράψω «ανάποδα» παραμένει ο ίδιος και το γινόμενο των ψηφίων του ισούται με το μεσαίο ψηφίο του;
[Απ. 191]
10. Ποιος τριψήφιος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 12, η διαφορά του τελευταίου ψηφίου από το μεσαίο είναι το διπλάσιο του πρώτου ψηφίου και αν τον γράψω «ανάποδα» (αντίστροφα τα ψηφία του) προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος κατά 99;
[Απ. 273]
11. Τα ψηφία ενός τριψήφιου είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί με άθροισμα 12. Να βρεθεί ο αριθμός.
[Απ. 345]
12. Ρώτησαν κάποιο μαθητή «πως τα πήγες στις Πανελλήνιες ;» και αυτός απάντησε ως εξής : «Με άριστα το 100 πήρα βαθμό που είναι ένας διψήφιος αριθμός για τον οποίο σας λέω ότι το τετράγωνο του 1^{ου} ψηφίου του ισούται με το οκταπλάσιο του 2^{ου} ψηφίου του αυξημένου κατά 1 και το άθροισμα των ψηφίων του είναι 8»
Μπορείτε να βρείτε τι βαθμό πήρε για να πάρετε και εσείς άριστα στην άσκηση
[Απ. 53]
13. Δύο αδελφές έχουν διαφορά ηλικίας 4 χρόνια ενώ το άθροισμα των ηλικιών τους είναι δεκαπλάσιο από τη διαφορά τους. Να υπολογίσετε την ηλικία της κάθε μιας.
[Απ. $\alpha = 20, \beta = 22$]

14. Αν D , D_χ , D_ψ είναι οι οριζουσες ενός συστήματος για τις οποίες είναι γνωστά τα εξής :
η οριζουσα $D \neq 0$, το άθροισμα των οριζουσών D_χ , D_ψ είναι τριπλάσιο της D , ενώ η διαφορά $D_\chi - D_\psi$ είναι ακριβώς D , τότε να βρείτε την λύση του συστήματος.
[Απ. $\chi = 2$, $\psi = 1$]
15. Σε μια εκδρομή του ενός Σχολείου για την Έδεσσα οι μαθητές έθεσαν στον οδηγό τα εξής ερωτήματα : Τι ώρα πρέπει να ξεκινήσουν και πόση είναι η απόσταση μέχρι την Έδεσσα ; Ο οδηγός απάντησε : Εάν πάμε με ταχύτητα 60 km/h θα φτάσουμε στις 14.00'. Εάν πάμε με 70 km/h θα φτάσουμε στις 13.00'. Μπορείτε να βρείτε την απόσταση από την πόλη τους μέχρι την Έδεσσα και την ώρα που θα ξεκινήσει το πούλμαν ;
(Υπ. χρησιμοποιείτε τον τύπο $s = v \cdot t$ Απ 420 km, 07.00').
16. Σε ένα χώρο στάθμευσης υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες. Αν όλα τα οχήματα έχουν συνολικά 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσες μοτοσικλέτες είναι σταθμευμένες στο χώρο αυτό ;
[Απ. 32 Αυτοκ., 18 Μοτ.]
17. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.
[Απ. Έζησε 33 και βασίλεψε 12 χρόνια.]
18. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η εξωτερική της γωνίας Α είναι 110° και η διαφορά των γωνιών Β και Γ είναι 30° ($B > \Gamma$). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
(Υπ. Υπολογίστε τις γωνίες Απ $A=70^\circ$, $B=70^\circ$, $\Gamma=40^\circ$).
19. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α και β . Αν α και ψ είναι τέτοιοι ώστε να έχουν άθροισμα α και διαφορά β τότε να δείξεις ότι $\chi = \frac{\alpha + \beta}{2}$ και $\psi = \frac{\alpha - \beta}{2}$
(Υπ. λύστε το σύστημα που σχηματίζεται).
20. Αν σας «δώσω» 10 ασκήσεις «για το σπίτι» και συμφωνήσουμε ότι για κάθε άσκηση που λύνετε σωστά θα παίρνετε 10 μόρια ενώ για κάθε άσκηση που λύνετε λάθος ή δεν την λύνετε καθόλου θα σας αφαιρώ 2 μόρια, να βρείτε πόσες ασκήσεις έλυσε ο συμμαθητής σας που πήρε 64 μόρια ;
[Απ. $\chi = 7$, $\psi = 3$]



4.1 Μελέτη συναρτήσεων .

« **Μελετάω** » μια συνάρτηση σημαίνει εξετάζω αν η συνάρτηση έχει (ή δεν έχει) ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα (ιδιότητες) .

Δηλαδή παρατηρήθηκε ότι κάποιες γνωστές συναρτήσεις όπως οι $\psi = \alpha\chi + \beta$, $\psi = \chi^2$, $\psi = \alpha\chi^2$,

$\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$ κλπ έχουν κάποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα και έτσι προέκυψε η ανάγκη

να εξετάζουμε τις συναρτήσεις αν έχουν και ποια από αυτά τα γνωρίσματα έχουν.

Αυτό δεν έγινε για να παιδευόμαστε , έγινε γιατί **η μελέτη μιας συνάρτησης βοηθά στην κατανόησή της και στο σχεδιασμό της γραφικής της παράστασης** και κατ' επέκταση βοηθά στην κατανόηση του προβλήματος που εκφράζεται από την συνάρτηση .

Η μελέτη μιας συνάρτησης είναι στην κυριολεξία η **κορύφωση** της ασχολίας μας με αυτήν.

Η σωστή και ολοκληρωμένη μελέτη απαιτεί γνώσεις που ξεφεύγουν από την Α' Λυκείου θα είναι δε κάτι σχετικά απλό όταν φτάσουμε στο αντίστοιχο κομμάτι της Γ' Λυκείου.

Για της ανάγκες της ύλης της Α! θα προσπαθήσω να σου δείξω με απλό τρόπο πως γίνεται η μελέτη των γνωστών συναρτήσεων που ανέφερα πιο πάνω.

Πιο πριν πρέπει να ορίσουμε με ακρίβεια πια ακριβώς χαρακτηριστικά μελετάμε σε μια συνάρτηση , για το λόγο αυτό ακολουθούν μια σειρά ορισμοί .

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο **A** θα λέγεται **άρτια** εάν

Για κάθε $\chi \in A$ 1) $-\chi \in A$
και 2) $\varphi(-\chi) = \varphi(\chi)$

Δηλαδή για αντίθετες τιμές του χ η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή

Προσοχή

Εξετάζω πρώτα αν ισχύει το « $-\chi \in A$ για κάθε $\chi \in A$ » και αν ισχύει **τότε και μόνον τότε**

προχωρώ για να εξετάσω αν το $\varphi(-\chi) = \varphi(\chi)$.

Στις πραγματικές συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθείς, αυτό σημαίνει ότι το Πεδίο Ορισμού πρέπει να είναι «συμμετρικό» ως προς το 0.

Δηλαδή το Πεδίο Ορισμού θα είναι ή **ολόκληρο το R** ή διάστημα της μορφής $(-\alpha, \alpha)$ π χ το $(-3, 3)$ ή διάστημα της μορφής $[-\alpha, \alpha]$ π χ το $[-3, 3]$ ή ένωση διαστημάτων με το 0 «στο κέντρο» π χ το $(-5, -3) \cup (5, 3)$.

Δεν μπορείς να εξετάσεις αν είναι άρτια μια συνάρτηση με Πεδίο Ορισμού το $A = [3, 4]$ γιατί ενώ το $3 \in A$, άρα μπορώ να βρω «πόσο κάνει» το $\varphi(3)$, το $-3 \notin A$ και δεν μπορώ βρω «πόσο κάνει» το $\varphi(-3)$, άρα πώς να δω αν $\varphi(3) = \varphi(-3)$. Τα ίδια ισχύουν αν Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (-5, 3)$ διότι π χ $-4 \in A$ και $4 \notin A$ παρόμοια αν $A = [-7, 7)$ διότι $-7 \in A$ και $7 \notin A$.

Είναι κακή συνήθεια να πας κατ' ευθείαν στον τύπο της συνάρτησης αγνοώντας το Πεδίο Ορισμού δες τα παραδείγματα και θα καταλάβεις .

Παραδείγματα

1. Δίνεται η $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ με Πεδίο Ορισμού το $A = (-11, 11)$, να εξετάσεις αν είναι άρτια.

Απάντηση : Για κάθε $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$ και $\varphi(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = \varphi(x)$ άρα είναι άρτια.

2. Δίνεται η $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ με Πεδίο Ορισμού το $A = (-7, 11)$ να εξετάσεις αν είναι άρτια.

Απάντηση : Επειδή υπάρχει $x \in A$ για το οποίο $-x \notin A$ π.χ. το $9 \in A$ αλλά $-9 \notin A$ δεν μπορώ να εξετάσω αν η συνάρτηση είναι άρτια .

- Παρατήρησε ότι ο τύπος της φ , όπως είδαμε στο παράδειγμα 1 είναι τύπος άρτιας συνάρτησης όμως εδώ το Πεδίο Ορισμού δεν σου επιτρέπει να εξετάσεις αν πράγματι είναι άρτια ή όχι η συνάρτηση .

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση φ με Πεδίο Ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται **περιττή** εάν

Για κάθε $x \in A$ και

1) $-x \in A$
2) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

Δηλαδή για αντίθετες τιμές του x η συνάρτηση έχει αντίθετη τιμή

Και για την περιττή συνάρτηση και το Πεδίο Ορισμού ισχύουν τα ίδια ακριβώς με την άρτια συνάρτηση, δες τα παραδείγματα και θα καταλάβεις .

3. Δίνεται η $g(x) = 4x^3 + 5x$ με Πεδίο Ορισμού το $A = [-7, 7]$, να εξετάσεις αν είναι περιττή.

Απάντηση : Για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in A$ και $g(-x) = 4(-x)^3 + 5(-x) = -4x^3 - 5x = -g(x)$ άρα είναι περιττή.

4. Δίνεται η $g(x) = 4x^3 + 5x$ με Πεδίο Ορισμού το $A = [-7, 7)$, να εξετάσεις αν είναι περιττή

Απάντηση : Επειδή υπάρχει $x \in A$ για το οποίο $-x \notin A$ π.χ. $-7 \in A$ αλλά $7 \notin A$ δεν μπορώ να εξετάσω αν η συνάρτηση είναι περιττή .

- Παρατήρησε ότι ο τύπος της φ , όπως είδαμε στο παράδειγμα 3 είναι τύπος περιττής συνάρτησης όμως εδώ το Πεδίο Ορισμού δεν σου επιτρέπει να εξετάσεις αν είναι περιττή ή όχι η συνάρτηση .

Παρατηρήσεις

Α. Όπως είδαμε μπορεί μια συνάρτηση να έχει τύπο άρτιας ή περιττής αλλά να μην έχει το κατάλληλο Πεδίο Ορισμού για να μπορώ να την εξετάσω, σ' αυτήν την περίπτωση δεν απαντάω ότι δεν είναι άρτια ή δεν είναι περιττή, απαντάω απλά ότι δεν μπορώ να την εξετάσω διότι το Πεδίο Ορισμού δεν το επιτρέπει.

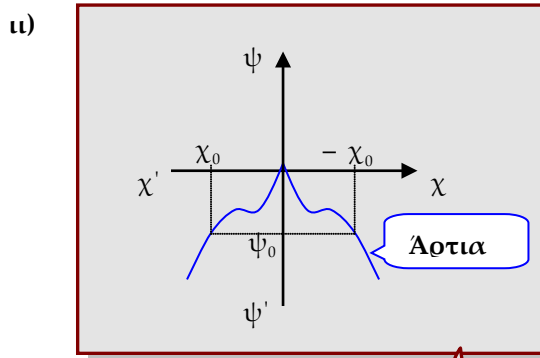
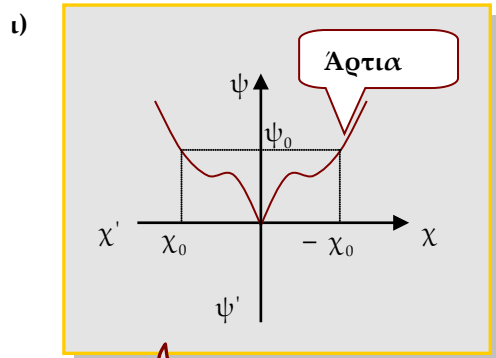
Με άλλα λόγια οι συναρτήσεις χωρίζονται σε

α) Αυτές που δεν έχουν κατάλληλο Πεδίο Ορισμού και δεν μπορώ να τις εξετάσω, οπότε δεν μπορώ να πω ότι δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή και λέω ακριβώς αυτό που συμβαίνει «δεν μπορώ να εξετάσω την συνάρτηση»

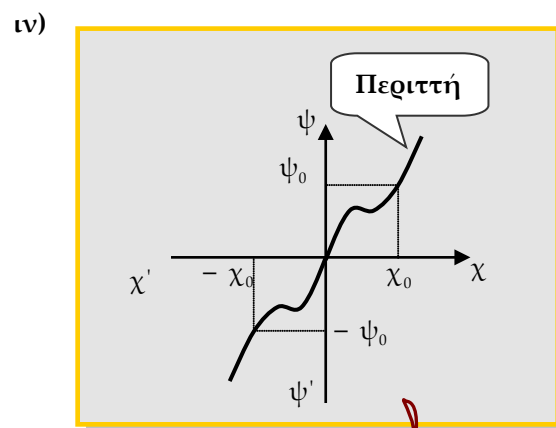
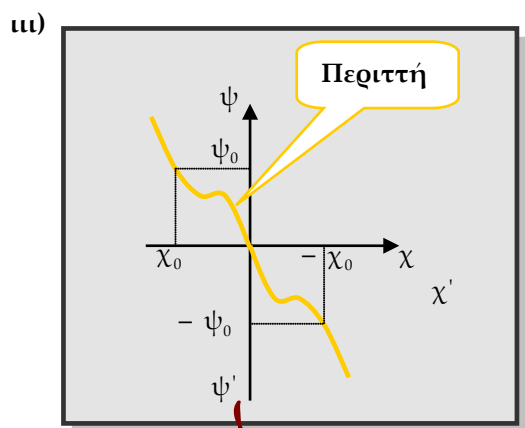
β) Σε αυτές που έχουν το κατάλληλο Πεδίο Ορισμού Οι συναρτήσεις αυτές χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες στις άρτιες, στις περιττές και σ' αυτές που δεν είναι τίποτα από τα δύο. δηλ μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή όπως κάθε τριώνυμο $P(x) = ax^2 + bx + c$ με $a, b, c \neq 0$ δεν είναι ούτε άρτιο ούτε περιττό διότι $P(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq P(x)$.

Β. Μια συνάρτηση που είναι άρτια π χ δεν μπορεί να είναι και περιττή και αντίστροφα.

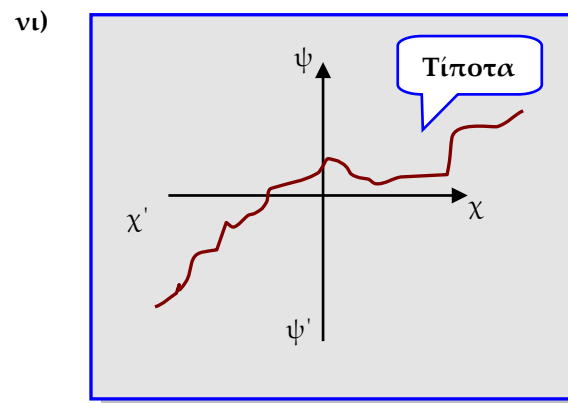
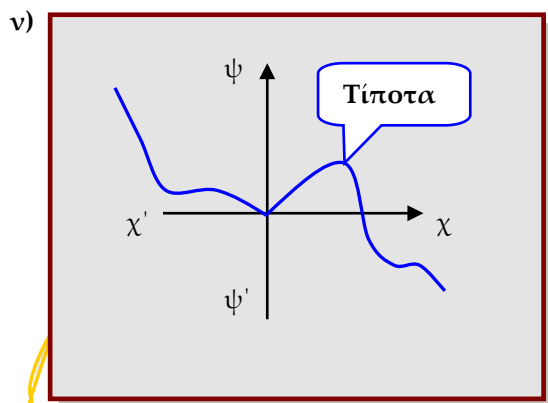
Γ. Όπως έχεις δει όλα όσα αφορούν μια συνάρτηση έχουν άμεση αντανάκλαση στην Γ Π δεξ πως θα μοιάζει η Γ Π μιας άρτιας, μιας περιττής και μιας συνάρτησης που δεν είναι τίποτα από τα δυο :



Οι Άρτιες συναρτήσεις έχουν άξονα συμμετρίας τον ψ'



Οι Περιττές συναρτήσεις έχουν κέντρο συμμετρίας το Ο.



Οι συναρτήσεις που δεν είναι ούτε Άρτιες ούτε Περιττές, δεν έχουν άξονα συμμετρίας, ούτε κέντρο συμμετρίας.

Ορισμός 3

Μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται :
Γνησίως αύξουσα συνάρτηση αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$

Ορισμός 4

Μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται :
Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$

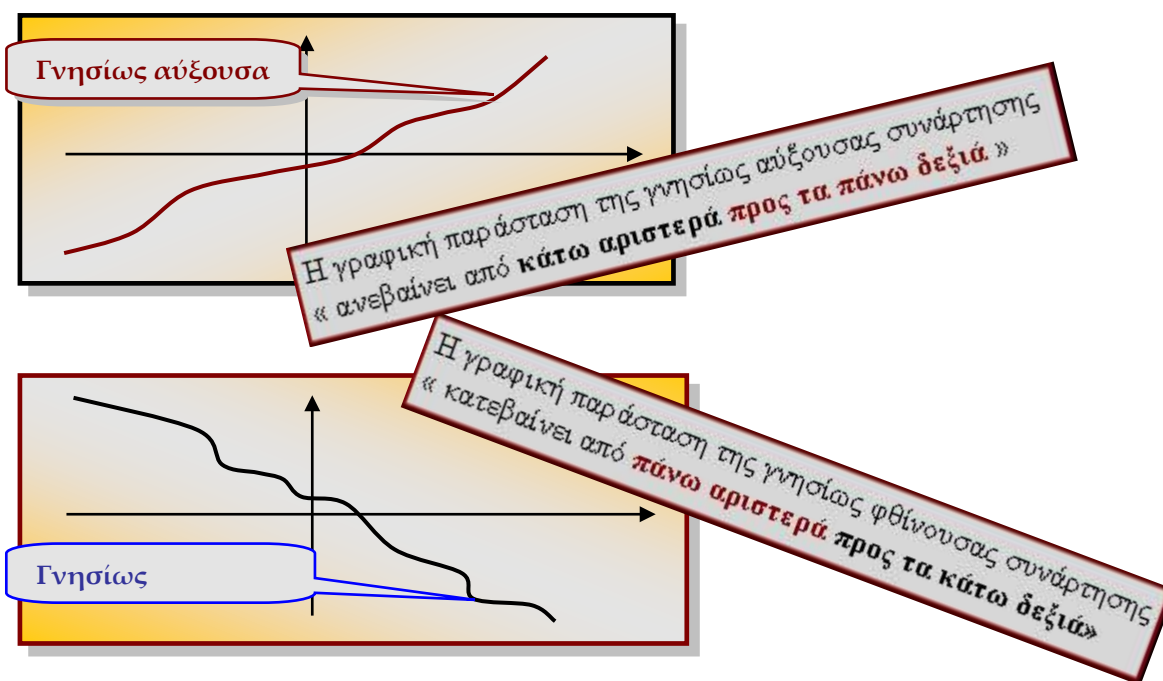
Ορισμός 5

Μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται :
Γνησίως μονότονη συνάρτηση αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

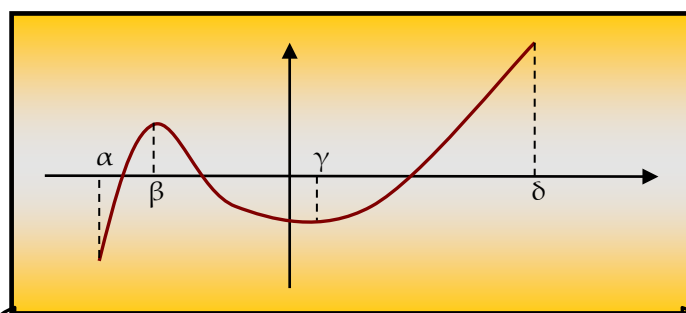
- Μπορεί μια συνάρτηση να μην είναι γνησίως μονότονη σ' ολόκληρο το Πεδίο Ορισμού αλλά να είναι γνησίως μονότονη σε κάποια διαστήματα του Πεδίο Ορισμού, τότε λέγεται γνησίως μονότονη κατά διαστήματα

Κάθε τι που έχει σχέση με μια συνάρτηση έχει αντανάκλαση και στην γραφική της παράσταση.

Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης :



Δες πως θα μοιάζει η Γραφική Παράσταση συνάρτησης μονότονης κατά διαστήματα :



Συνάρτηση **Αύξουσα** στο (α, β) , **Φθίνουσα** στο (β, γ) και **Αύξουσα** στο (γ, δ)

- Έστω μια **συνάρτηση** φ η οποία είναι **γνησίως αύξουσα**. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα ισχύει: Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$.

Όμως $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 - \chi_2 < 0$ και $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2) \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) < 0$.

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2}$ ως **πηλίκο ομόσημων** ποσοτήτων θα είναι $\lambda > 0$

- Έστω μια **συνάρτηση** φ η οποία είναι **γνησίως φθίνουσα**. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα ισχύει: Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

Όμως $\chi_1 < \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 - \chi_2 < 0$ και $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2) \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2) > 0$.

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2}$ ως **πηλίκο ετερόσημων** ποσοτήτων θα είναι $\lambda < 0$

Ο λόγος $\lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2}$ λέγεται και **πηλίκο μεταβολών της φ** επειδή μας δείχνει **τον τρόπο** με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές $\varphi(\chi)$ της φ όταν οι τιμές του χ μεταβάλλονται με **έναν ορισμένο τρόπο** ($\chi_1 < \chi_2$)

Βλέπουμε ότι το **πρόσημο** του πηλίκου μεταβολών λ μας δείχνει το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης και πιο συγκεκριμένα:

Αν φ είναι μια συνάρτηση και $\lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2}$ το πηλίκο μεταβολών της τότε

- Αν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2$ είναι $\lambda > 0$ τότε η φ **γνησίως αύξουσα**
- Αν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2$ είναι $\lambda < 0$ τότε η φ **γνησίως φθίνουσα**

Μία μέθοδος για να εξετάσουμε στην πράξη την μονοτονία μιας συγκεκριμένης συνάρτησης είναι και η ακόλουθη

Εξετάζουμε τον λόγο ή πηλίκο μεταβολών λ και αν

Ο λ διατηρεί το πρόσημό του σταθερό τότε η συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** (αν $\lambda > 0$ γνησίως αύξουσα, αν $\lambda < 0$ γνησίως φθίνουσα),

Αν ο λ δεν έχει σταθερό πρόσημο τότε η φ δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση

Όταν λέμε ότι ο λ διατηρεί το πρόσημο του σταθερό (διατηρεί πρόσημο) εννοούμε ότι το πρόσημο του δεν εξαρτάται από το πρόσημο του χ ή άλλων παραστάσεων δηλ ο λ θα ισούται με μια παράσταση του χ αλλά παρ' όλα αυτά το πρόσημο του θα είναι σταθερό ανεξάρτητο από τις τιμές του χ , θα εξαρτάται δηλ μόνο από το γεγονός ότι $\chi_1 < \chi_2$ ή ισοδύναμα $\chi_1 - \chi_2 < 0$

Υπάρχουν βέβαια και άλλες αλγεβρικές μέθοδοι για να εξετάσεις την μονοτονία μιας συνάρτησης που στηρίζονται, κυρίως, στις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Μία τέτοια μέθοδος, όχι και η καλύτερη κατά τη γνώμη μου, είναι να εξετάζεις το πρόσημο της διαφοράς $\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)$ [δες σχολικό]

Όμως η μέθοδος με το λόγο λ είναι η βάση για τις διαδικασίες, που θα αναπτύξουμε αργότερα στην Γ! Λυκείου. Διαδικασίες οι οποίες είναι και πιο ολοκληρωμένες και πιο μοντέρνες και κυρίως πιο απλές.

Σε ορισμένες από τις, γενικής, μορφής συναρτήσεις που θα μελετήσουμε πιο κάτω θα δούμε και δεύτερη μέθοδο παράλληλα.

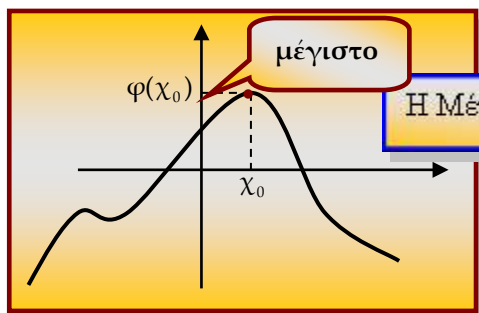
Ορισμός 6

Μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέμε ότι έχει :
Ελάχιστο ή ελάχιστη τιμή στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ είναι $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$

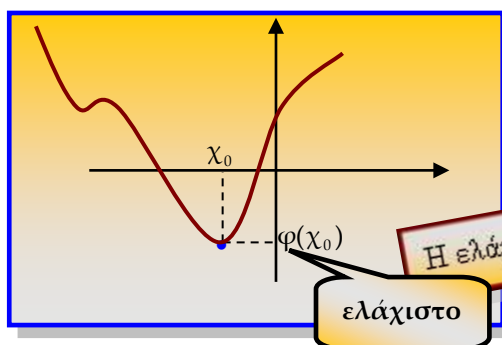
Ορισμός 7

Μια συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέμε ότι έχει :
Μέγιστο ή μέγιστη τιμή στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $x \in A$ είναι $\varphi(x_0) \geq \varphi(x)$

Δες πως φαίνεται στην Γραφική Παράσταση το μέγιστο και το ελάχιστο :



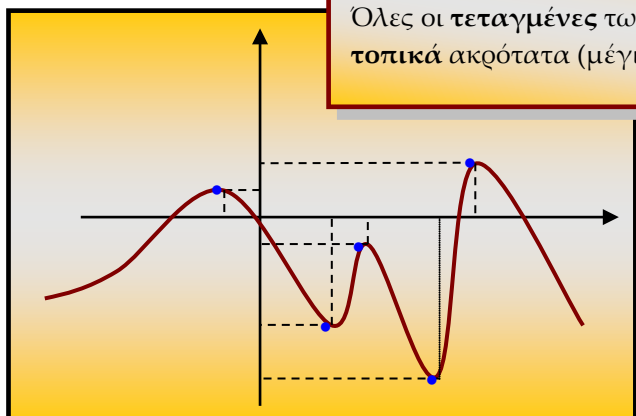
Η Μέγιστη τιμή $\varphi(x_0)$ είναι το «πιο υψηλό σημείο» στον ψ' ψ



Η ελάχιστη τιμή $\varphi(x_0)$ είναι το πιο «χαμηλό σημείο» στον ψ' ψ

Παρατήρηση

- ❖ Το Μέγιστο και το Ελάχιστο μιας συνάρτησης **αφορούν τις τιμές της συνάρτησης** και μπορεί να υπάρχουν μπορεί να μην υπάρχουν, όπως μπορεί μια συνάρτηση να έχει πολλά «**τοπικά**» μέγιστα ή ελάχιστα δηλαδή ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα διάστημα (σε ένα τόπο) του Πεδίου Ορισμού.



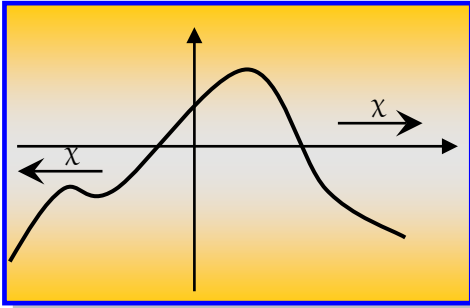
Όλες οι **τεταγμένες** των σημείων που είναι σημειωμένα στο σχήμα είναι **τοπικά ακρότατα** (μέγιστα, ελάχιστα) και

Ένα από τα τοπικά μέγιστα μπορεί να είναι και μέγιστο (συνολικά) καθώς και ένα από τα τοπικά ελάχιστα μπορεί να είναι και ελάχιστο (συνολικά).

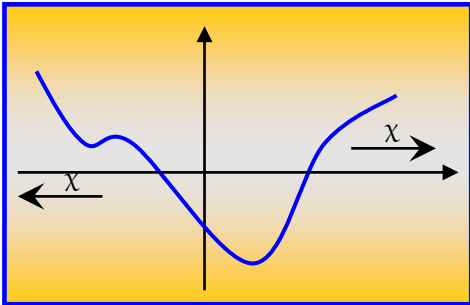
Αυτό εξαρτάται από το Πεδίο Ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης.

Όμως ξεφύγαμε ήδη αρκετά από το στόχο μας, περισσότερα στις επόμενες τάξεις.

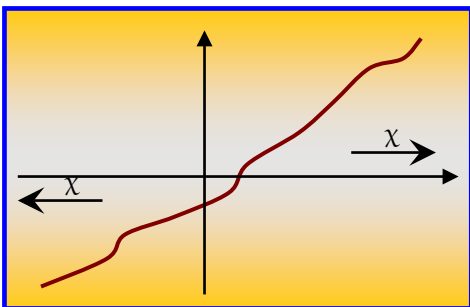
Ένα χαρακτηριστικό μιας συνάρτησης f είναι και η συμπεριφορά των τιμών της καθώς το x «αυξάνει» διαρκώς όπως επίσης και η συμπεριφορά των τιμών της καθώς το x «μικραίνει» διαρκώς. Αυτό όμως και αν είναι πολύ πέρα από τις γνώσεις μας!!! Απλά δες μερικά παραδείγματα μέσα από την εικόνα της f δηλ την $\Gamma \Pi$



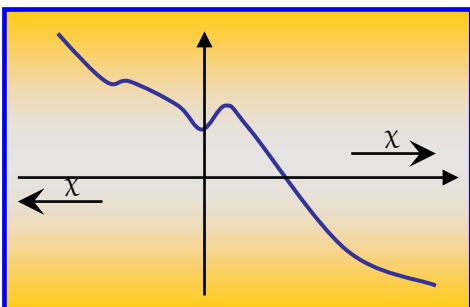
Οι τιμές $f(x)$ μικραίνουν είτε το x μεγαλώνει διαρκώς είτε το x μικραίνει διαρκώς



Οι τιμές $f(x)$ μεγαλώνουν είτε το x μεγαλώνει διαρκώς είτε το x μικραίνει διαρκώς



Οι τιμές $f(x)$ μικραίνουν όταν το x μικραίνει διαρκώς και οι τιμές $f(x)$ μεγαλώνουν όταν το x μεγαλώνει διαρκώς



Οι τιμές $f(x)$ μεγαλώνουν όταν το x μικραίνει διαρκώς και οι τιμές $f(x)$ μικραίνουν όταν το x μεγαλώνει διαρκώς

Και πολλές άλλες περιπτώσεις βέβαια. Αρκούν αυτά για τώρα.

Μελέτη συνάρτησης

Για να μελετήσεις μια συνάρτηση πρέπει να κάνεις τα εξής βήματα :

- ✓ Να βρεις το Πεδίο Ορισμού (οπωσδήποτε)
- ✓ Να εξετάσεις τη συνάρτηση αν είναι άρτια ή περιττή
- ✓ Να εξετάσεις τη μονοτονία της συνάρτησης
- ✓ Να βρεις τα ακρότατα , αν υπάρχουν
- ✓ Να εξετάσεις την συμπεριφορά των τιμών της συνάρτησης καθώς το x «μεγαλώνει διαρκώς» όπως και όταν το x «μικραίνει διαρκώς»
- ✓ Να σχεδιάσεις τη Γραφική Παράσταση της συνάρτησης.

Συμβουλή

Για να σχεδιάσεις την Γραφική Παράσταση βρίσκεις τα ακρότατα και αν υπάρχουν, τα σημεία στα οποία η καμπύλη τέμνει τους άξονες, καθώς και μερικά ακόμα σημεία και με βάση την Γραφική Παράσταση γνωστών συναρτήσεων, που θα μελετήσουμε αμέσως πιο κάτω σχεδιάζεις μια γραμμή που να « μοιάζει » με την Γραφική Παράσταση.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε όλα τα πιο πάνω εκτός από την συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς το x «αυξάνει» διαρκώς η «μικραίνει» διαρκώς, διότι είναι θέμα που απαιτεί την γνώση ορίων .

Ας «μελετήσουμε» τώρα μερικές γνωστές συναρτήσεις

1. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(x) = \alpha \cdot x$, με $\alpha > 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες ούτε και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x$ είναι περιττή διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$ και επί πλέον : $\varphi(-x) = \alpha(-x) = -\alpha x = -\varphi(x)$, άρα περιττή, άρα έχει το σημείο $O(0,0)$ ως κέντρο συμμετρίας .
- ✓ Η $\varphi(x) = \alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$ διότι πx αν $x_1 < x_2$, $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

2ος τρόπος με τον λόγο μεταβολής λ . Είναι $\lambda = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1 - \alpha x_2}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha > 0$ άρα $\lambda > 0$

άρα φ γνησίως αύξουσα.

- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x$ δεν έχει ακρότατα

Αν υπήρχε x_0 έτσι ώστε $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) \Leftrightarrow \alpha x \leq \alpha x_0 \Leftrightarrow x \leq x_0$ αυτό είναι άτοπο διότι το x δεν περιορίζεται από τίποτα .

Όλα αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της φ .

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(x) = \alpha \cdot x$ με $\alpha > 0$		

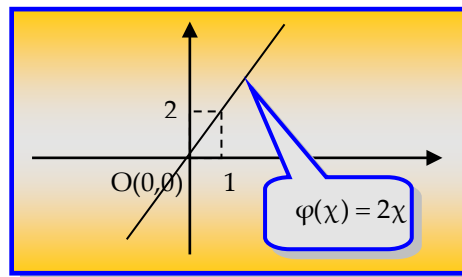
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, η μονοτονία στο $(-\infty, +\infty)$, το είδος της μονοτονίας (γνησίως αύξουσα) και ότι πράγματι δεν έχει ακρότατα

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = 2\chi$ Γί' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης, φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ δύο τιμές, και επειδή η συνάρτηση είναι περιττή θα έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = 2\chi$

χ	0	1
$\varphi(\chi) = 2\chi$	0	2



2. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi$, με $\alpha < 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες ούτε και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi$ είναι περιττή διότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι και $-\chi \in \mathbb{R}$ και επί πλέον : $\varphi(-\chi) = \alpha(-\chi) = -\alpha\chi = -\varphi(\chi)$, άρα περιττή, άρα έχει το σημείο $O(0,0)$ ως κέντρο συμμετρίας .
- ✓ Η $\varphi(\chi) = \alpha\chi$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$ διότι $\pi \chi$ αν $\chi_1 < \chi_2$, $\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha\chi_1 > \alpha\chi_2 \Leftrightarrow \varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$.

Μπορεί και εδώ να εφαρμόσεις τον 2° τρόπο με τον λόγο λ

- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi$ δεν έχει ακρότατα
[Δες το προηγούμενο παράδειγμα]

Αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα που λέγεται και πίνακας μεταβολών της φ .

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi$ με $\alpha < 0$	↘	

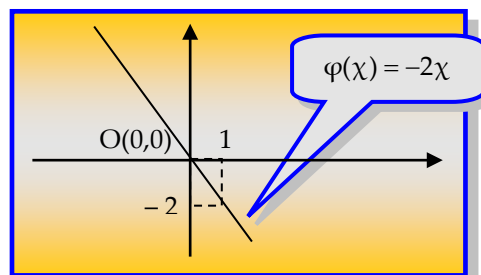
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, η μονοτονία στο $(-\infty, +\infty)$, το είδος της μονοτονίας (γνησίως φθίνουσα) και ότι πράγματι δεν έχει ακρότατα

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = -2\chi$ Γί' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης, φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ δύο τιμές, και επειδή η συνάρτηση είναι περιττή θα έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = -2\chi$

χ	0	1
$\varphi(\chi) = -2\chi$	0	-2



3. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(x) = \alpha \cdot x + \beta$, με $\alpha > 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ δεν είναι άρτια ούτε είναι περιττή διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$ αλλά $\varphi(-x) = \alpha(-x) + \beta = -\alpha x + \beta \neq -\varphi(x)$ και $\neq \varphi(x)$ άρα ούτε άρτια ούτε περιττή.
- ✓ Η $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$.
Διότι πx αν $x_1 < x_2, \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

2ος τρόπος με το λ .

$$\text{Είναι } \lambda = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\alpha x_1 + \beta) - (\alpha x_2 + \beta)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha > 0 \text{ άρα } \lambda > 0$$

άρα φ γνησίως αύξουσα

- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ δεν έχει ακρότατα
[Απόδειξη όπως στα προηγούμενα]

Αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(x) = \alpha \cdot x + \beta$ με $\alpha > 0$		

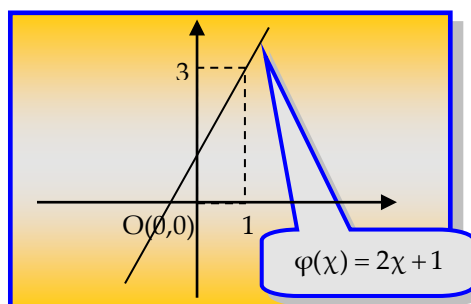
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού = $(-\infty, +\infty)$, η μονοτονία στο $(-\infty, +\infty)$, το είδος της μονοτονίας (γνησίως αύξουσα) και ότι πράγματι δεν έχει ακρότατα

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = 2x + 1$. Γι' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης, φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο x δύο τιμές.

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = 2x + 1$

x	0	1
$\varphi(x) = 2x + 1$	1	3



4. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(x) = \alpha \cdot x + \beta$, με $\alpha < 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ δεν είναι άρτια ούτε είναι περιττή διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$ αλλά $\varphi(-x) = \alpha(-x) + \beta = -\alpha x + \beta \neq -\varphi(x)$ και $\neq \varphi(x)$ άρα ούτε άρτια ούτε περιττή.
- ✓ Η $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$.
Διότι πx αν $x_1 < x_2, \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha x_1 > \alpha x_2 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$.

2ος τρόπος με το λ [όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα]

- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ δεν έχει ακρότατα
[Απόδειξη όπως στα προηγούμενα]

Όλα όσα είπαμε πιο πάνω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi + \beta$ με $\alpha < 0$	↘	

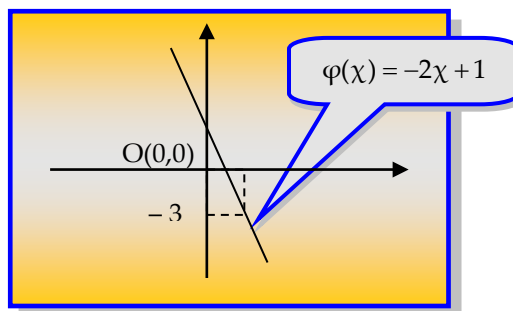
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, η μονοτονία στο $(-\infty, +\infty)$, το είδος της μονοτονίας (γνησίως φθίνουσα) και ότι πράγματι δεν έχει ακρότατα

Εστω ως παράδειγμα η $\psi = -2\chi + 1$. Γί' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης, φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ δύο τιμές.

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = -2\chi + 1$

χ	0	1
$\varphi(\chi) = -2\chi + 1$	1	-1



5. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi^2$ με $\alpha > 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2$ είναι άρτια διότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι και $-\chi \in \mathbb{R}$ και επί πλέον $\varphi(-\chi) = \alpha(-\chi)^2 = \alpha\chi^2 = \varphi(\chi)$ άρα άρτια, άρα έχει τον ψ' ως άξονα συμμετρίας
- ✓ Η $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2$ δεν είναι γνησίως μονότονη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

1ος τρόπος : Αν $\chi_1 < \chi_2 < 0 \Leftrightarrow \chi_1^2 > \chi_2^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha\chi_1^2 > \alpha\chi_2^2 > 0$ αφού $\alpha > 0$ άρα $\varphi(\chi_1) > \varphi(\chi_2)$

Όμως $\chi_1 < \chi_2 > 0 \Leftrightarrow \chi_1^2 < \chi_2^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha\chi_1^2 < \alpha\chi_2^2 > 0$ αφού $\alpha > 0$ άρα $\varphi(\chi_1) < \varphi(\chi_2)$

δηλ φαίνεται πως αλλάζοντας διάστημα αλλάζει και η μονοτονία .

$$\text{2ος τρόπος Είναι } \lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha\chi_1^2 - \alpha\chi_2^2}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha(\chi_1^2 - \chi_2^2)}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 + \chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} = \alpha(\chi_1 + \chi_2)$$

Οπότε αν είναι $\chi_1, \chi_2 < 0$ τότε $\chi_1 + \chi_2 < 0$ τότε επειδή $\alpha > 0$ είναι $\lambda < 0$ ενώ αν $\chi_1, \chi_2 > 0$ τότε $\chi_1 + \chi_2 > 0$ τότε $\lambda > 0$.

Όπως βλέπεις το πρόσημο του λ δεν είναι σταθερό, ανεξάρτητο των τιμών του χ , γί' αυτό και η $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2$ δεν είναι μονότονη.

Παρατηρούμε όμως ότι το λ διατηρεί το πρόσημό του ($\lambda < 0$) αν το $\chi \in (-\infty, 0)$.

Επίσης το λ διατηρεί το πρόσημό του ($\lambda > 0$) αν το $\chi \in (0, +\infty)$.

Από αυτά συμπεραίνουμε ότι η $\varphi(\chi)$ δεν είναι μονότονη στο $\mathbb{R}$ αλλά ότι είναι μονότονη κατά διαστήματα και μάλιστα :

στο $(-\infty, 0)$ είναι γνησίως φθίνουσα

Συμβολικά ↓

στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα

Συμβολικά ↑

Επειδή $\chi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \chi^2 \geq 0$ (αφού $\alpha > 0$) και $\varphi(0) = \alpha \cdot 0^2 = 0$ άρα $\varphi(\chi) \geq \varphi(0)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα το $\varphi(0) = 0$ είναι **ελάχιστη τιμή**.

Όλα όσα είπαμε πιο πάνω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi^2$ με $\alpha > 0$			

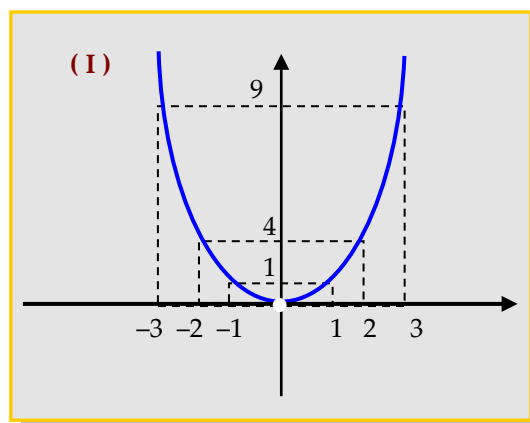
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, τα διαστήματα και το είδος της μονοτονίας $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ καθώς και το ακρότατο που είναι το $\varphi(0) = 0$

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = \chi^2$. Γ' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ τιμές συμμετρικές ως προς το 0 (δηλ. αντίθετους αριθμούς) οπότε επειδή η συνάρτηση είναι άρτια θα βρίσκεις την ίδια τιμή για το ψ όπως στον πιο κάτω πίνακα :

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = \chi^2$

χ	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi = \chi^2$	9	4	1	0	1	4	9



6. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi^2$ με $\alpha < 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού της φ είναι το $A = \mathbb{R}$ (διότι δεν υπάρχουν ρίζες και παρονομαστές)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha \chi^2$ είναι άρτια διότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ είναι και $-\chi \in \mathbb{R}$ και επί πλέον $\varphi(-\chi) = \alpha(-\chi)^2 = \alpha\chi^2 = \varphi(\chi)$ άρα άρτια, άρα έχει τον ψ' ψ ως άξονα συμμετρίας
- ✓ Η $\varphi(\chi) = \alpha \chi^2$ δεν είναι γνησίως μονότονη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha\chi_1^2 - \alpha\chi_2^2}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha(\chi_1^2 - \chi_2^2)}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha(\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 + \chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} = \alpha(\chi_1 + \chi_2)$$

Οπότε αν είναι $\chi_1, \chi_2 < 0$ οπότε $\chi_1 + \chi_2 < 0$ τότε επειδή $\alpha < 0$ είναι $\lambda > 0$ ενώ αν $\chi_1, \chi_2 > 0$ οπότε $\chi_1 + \chi_2 > 0$ τότε $\lambda < 0$.

Όπως βλέπεις το πρόσημο του λ δεν είναι σταθερό, ανεξάρτητο των τιμών του χ , γι' αυτό και η $\varphi(\chi) = \alpha \chi^2$ δεν είναι μονότονη.

Παρατηρούμε όμως ότι το λ διατηρεί το πρόσημό του ($\lambda > 0$) αν το $\chi \in (-\infty, 0)$.

Επίσης το λ διατηρεί το πρόσημό του ($\lambda < 0$) αν το $\chi \in (0, +\infty)$.

Από αυτά συμπεραίνουμε ότι η $\varphi(\chi)$ δεν είναι μονότονη στο $\mathbb{R}$ αλλά ότι είναι μονότονη κατά διαστήματα και μάλιστα :

στο $(-\infty, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα Συμβολικά $\uparrow$ και
στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα Συμβολικά $\downarrow$

Επειδή $\chi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \chi^2 \leq 0$ (αφού $\alpha < 0$) και $\varphi(0) = \alpha \cdot 0^2 = 0$ άρα $\varphi(\chi) \leq \varphi(0)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ άρα το $\varphi(0) = 0$ είναι μέγιστη τιμή.

Όλα όσα είπαμε πιο πάνω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(\chi) = \alpha \cdot \chi^2$ με $\alpha < 0$			

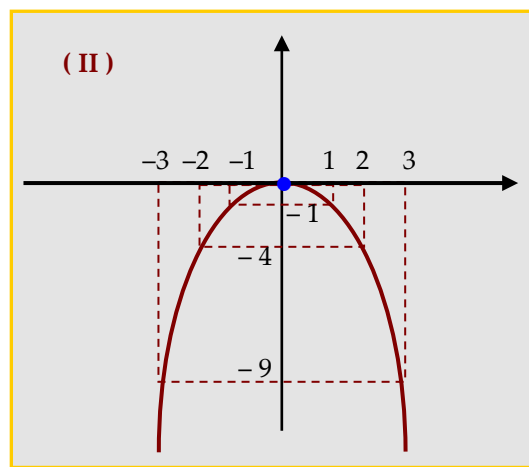
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, τα διαστήματα και το είδος της μονοτονίας $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ καθώς και το ακρότατο που είναι το $\varphi(0) = 0$

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = -\chi^2$. Γι' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ τιμές συμμετρικές ως προς το 0 (δηλ. αντίθετους αριθμούς) οπότε επειδή η συνάρτηση είναι άρτια θα βρίσκεις την ίδια τιμή για το ψ όπως στον πιο κάτω πίνακα :

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = -\chi^2$

χ	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi = -\chi^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



Η καμπύλη (I) όπως και η (II) ονομάζεται **Παραβολή**.

Το **O(0,0)** δηλ το σημείο που έχει ως τεταγμένη του το μέγιστο ή αντίστοιχα το ελάχιστο της συνάρτησης ονομάζεται **Κορυφή** της καμπύλης.

7. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ με $\alpha > 0$

✓ Πεδίο Ορισμού . Πεδίο Ορισμού είναι το $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (λόγω του παρονομαστή)

✓ Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ είναι **περιττή** διότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}^*$ είναι και $-\chi \in \mathbb{R}^*$ και επί πλέον :

$$\varphi(-\chi) = \frac{\alpha}{-\chi} = -\frac{\alpha}{\chi} = -\varphi(\chi).$$

✓ Η φ με $\varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ δεν είναι γνησίως μονότονη σ' όλο το $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Είναι } \lambda = \frac{\varphi(\chi_1) - \varphi(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\frac{\alpha}{\chi_1} - \frac{\alpha}{\chi_2}}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\frac{\alpha\chi_2 - \alpha\chi_1}{\chi_1\chi_2}}{\chi_1 - \chi_2} = \frac{\alpha(\chi_2 - \chi_1)}{\chi_1\chi_2(\chi_1 - \chi_2)} = -\frac{\alpha}{\chi_1\chi_2}.$$

Αν $\chi_1, \chi_2 < 0$ τότε $\chi_1 \cdot \chi_2 > 0$, είναι $\alpha > 0$ τότε $\lambda = -\frac{\alpha}{\chi_1\chi_2} < 0$.

Αν $\chi_1, \chi_2 > 0$ τότε πάλι $\chi_1 \cdot \chi_2 > 0$ είναι $\alpha > 0$ οπότε πάλι $\lambda = -\frac{\alpha}{\chi_1\chi_2} < 0$.

Αν όμως $\chi_1 < 0$ και $\chi_2 > 0$ τότε $\chi_1 \cdot \chi_2 < 0$ είναι $\alpha > 0$ τότε $\lambda = -\frac{\alpha}{\chi_1 \chi_2} > 0$.

Άρα το λ δεν διατηρεί πρόσημο για κάθε $\chi \in \mathbb{R}^*$ και φ με $\varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ δεν είναι μονότονη

Από τα προηγούμενα όμως είναι φανερό ότι η $\varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ είναι μονότονη κατά διαστήματα :

στο $(-\infty, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα Συμβολικά $\downarrow$ και
 στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα Συμβολικά $\downarrow$

Όλα όσα είπαμε πιο πάνω φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(\chi) = \frac{\alpha}{\chi}$ με $\alpha > 0$			

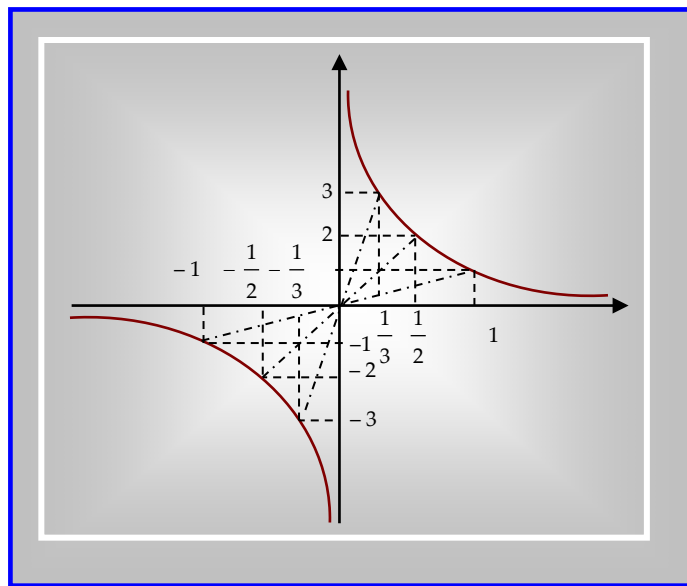
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, τα διαστήματα μονοτονίας $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ το είδος της μονοτονίας και το ακρότατο που είναι το $\varphi(0) = 0$

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = \psi = \varphi(\chi) = \frac{1}{\chi}$. Γί' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο χ τιμές συμμετρικές ως προς το 0 (δηλ. αντίθετους αριθμούς) οπότε επειδή η συνάρτηση είναι περιττή θα βρίσκεις την αντίθετη τιμή για το ψ όπως στον πιο κάτω πίνακα :

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = \frac{1}{\chi}$

χ	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
ψ	-1	-2	-3	3	2	1



Παρατηρήσεις

Επειδή το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, που είναι το $\mathbb{R}^*$, η καμπύλη διακόπτεται και αποτελείται από δύο κλάδους (κομμάτια) και λέγεται **Υπερβολή**. Το $O(0,0)$ κέντρο συμμετρίας της Υπερβολής. Παρατήρησε ότι όσο οι τιμές του χ απομακρύνονται από το 0 είτε προς το $+\infty$ είτε προς το $-\infty$ τόσο οι αποστάσεις των σημείων της υπερβολής από των χ' χ μικραίνουν δηλαδή ο χ' χ και η καμπύλη (και οι δύο κλάδοι) δείχνουν να πλησιάζουν διαρκώς, ποτέ όμως δεν θα συμπέσουν, γι' αυτό λέμε ότι ο χ' χ είναι **ασύμπτωτη** της υπερβολής [από το $\alpha + \text{συμπίπτω}$]. Το ίδιο συμβαίνει και με τον άξονα ψ' ψ καθώς οι τιμές του χ πλησιάζουν το 0 είτε από αρνητικές είτε από θετικές θέσεις, γι' αυτό και ο ψ' ψ λέγεται επίσης **ασύμπτωτη** της υπερβολής.

8. Η συνάρτηση $\psi = \varphi(x) = -\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha < 0$

- ✓ Πεδίο Ορισμού . Πεδίο Ορισμού είναι το $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (λόγω του παρονομαστή)
- ✓ Η συνάρτηση $\varphi(x) = -\frac{\alpha}{x}$ είναι περιττή διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι και $-x \in \mathbb{R}^*$ και επί πλέον :

$$\varphi(-x) = \frac{\alpha}{-x} = -\frac{\alpha}{x} = -\varphi(x).$$

Η φ με $\varphi(x) = -\frac{\alpha}{x}$ δεν είναι γνησίως μονότονη σ' όλο το $\mathbb{R}^*$. (Η απόδειξη είναι όμοια με πριν και μάλιστα σε αυτήν την περίπτωση η $\varphi(x) = \frac{\alpha}{x}$ είναι μονότονη κατά διαστήματα :

στο $(-\infty, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα

Συμβολικά $\uparrow$

και

στο $(0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα

Συμβολικά $\uparrow$

Όλα αυτά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών της φ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x) = -\frac{\alpha}{x}$ με $\alpha < 0$			

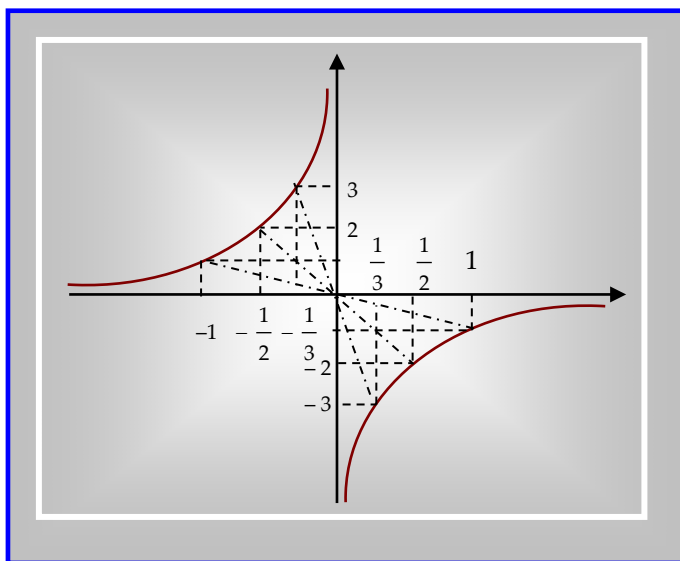
Φαίνονται το Πεδίο Ορισμού $= (-\infty, +\infty)$, τα διαστήματα μονοτονίας $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ το είδος της μονοτονίας και το ακρότατο που είναι το $\varphi(0) = 0$

Έστω ως παράδειγμα η $\psi = \varphi(x) = -\frac{1}{x}$. Γί' αυτήν ισχύουν όλα τα πιο πάνω ακριβώς.

Για τον σχεδιασμό της Γραφικής Παράστασης φτιάχνω και ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών, όπως πιο κάτω, δίνοντας στο x τιμές συμμετρικές ως προς το 0 (δηλ. αντίθετους αριθμούς) οπότε επειδή η συνάρτηση είναι περιττή θα βρούμε την αντίθετη τιμή για το ψ όπως στον πιο κάτω πίνακα :

Πίνακας αντίστοιχων τιμών της $\psi = -\frac{1}{x}$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
ψ	1	2	3	-3	-2	-1



Παρατηρήσεις

Η $\varphi(x) = -\frac{\alpha}{x}$ επίσης αποτελείται από δύο κλάδους (κομμάτια) και λέγεται Υπερβολή, το $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της Υπερβολής, ο x' και ο y' είναι ασύμπτωτες της υπερβολής.

Μια πολύ ξεχωριστή και ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η μελέτη συναρτήσεων πολλαπλού τύπου ή συναρτήσεων με απόλυτα που καταλήγουν όπως είδαμε σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου. Θα μελετήσουμε αμέσως μια τέτοια συνάρτηση για να διαπιστώσεις ότι ενώ φαίνεται πολύ – πάρα πολύ δύσκολο, στην πράξη είναι πολύ απλό. Θα δεις επίσης τι σημαίνει η φράση «με βάση την μελέτη των γνωστών συναρτήσεων γίνεται και η μελέτη πολλών άλλων συναρτήσεων»

Παράδειγμα : Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = |x-3| - 2|x+1|$

Απάντηση : Είναι Πεδίο Ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Απαλλάσσω τώρα την παράσταση από τα απόλυτα, για να βρω τον τύπο της φ .

Όταν $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow |x-3| = x-3$ και όταν $x < 3$ τότε $|x-3| = -x+3$

Όμοια $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow |x+1| = x+1$ ενώ $x < -1 \Leftrightarrow |x+1| = -x-1$ άρα ισχύει ο πίνακας

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$ x-3 $	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\varphi(x)$	$x+5$	$-3x+1$	$-x-$	

Άρα είναι $\varphi(x) = \begin{cases} x+5 & \text{αν } x \leq -1 \\ -3x+1 & \text{αν } -1 < x \leq 3 \\ -x-5 & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

➤ Μια τέτοια συνάρτηση (πολλαπλού τύπου) την μελετάω σαν να είχα να μελετήσω τις συναρτήσεις :

$\varphi_1(x) = x+5$ με Πεδίο Ορισμού το $(-\infty, -1]$

$\varphi_2(x) = -3x+1$ με Πεδίο Ορισμού το $(-1, 3]$

$\varphi_3(x) = -x-5$ με Πεδίο Ορισμού το $(3, +\infty)$

Δηλαδή για την $\varphi(x)$ ισχύουν τα εξής :

1^{ον} Η φ στο $(-\infty, -1)$ όταν δηλ είναι $x \leq -1$ έχει τύπο $\varphi(x) = x+5$ και είναι γνησίως αύξουσα γιατί είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$ και έχει **στο διάστημα αυτό μέγιστο** το $\varphi(-1) = 4$.

Η γραφική της παράσταση είναι ημιευθεία με αρχή το σημείο $(-1, 4)$ και ισχύει ο διπλανός πίνακας

Η Γραφική Παράσταση θα γίνει στο τέλος στο ίδιο σύστημα για όλο το Πεδίο Ορισμού

x	-1	-2
ψ	4	3

2^{ον} Η φ στο $(-1, 3)$ όταν δηλ είναι $-1 < x < 3$ έχει τύπο $\varphi(x) = -3x+1$ και είναι γνησίως φθίνουσα γιατί είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ με $\alpha < 0$ και έχει **στο διάστημα αυτό ελάχιστο** το $\varphi(3) = -8$ και ισχύει ο διπλανός πίνακας.

Η γραφική της παράσταση είναι ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $(-1, 4)$ και τέλος το $(3, -8)$ γιατί ο τύπος $\varphi(x) = -3x+1$ ισχύει για το $(-1, 4)$.

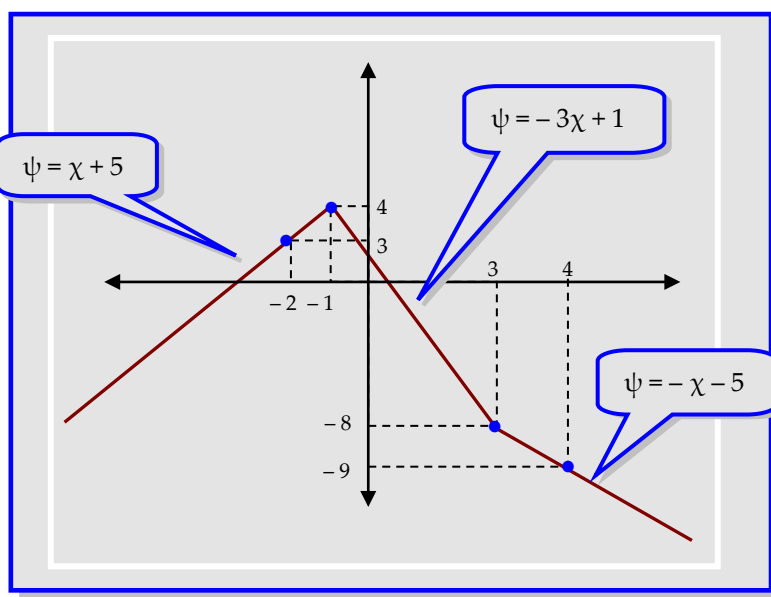
x	-1	3
ψ	4	-8

3^{ον} Η φ στο $(3, +\infty)$ όταν δηλ είναι $x > 3$ έχει τύπο $\varphi(x) = -x-5$ και είναι γνησίως

γνησίως φθίνουσα γιατί είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ με $\alpha < 0$. Η γραφική της παράσταση είναι ημιευθεία με αρχή το $(3, -8)$ και ισχύει ο διπλανός πίνακας.

x	3	4
ψ	-8	-9

Οπότε η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x-3| - 2|x+1|$ για όλο το Πεδίο Ορισμού είναι :

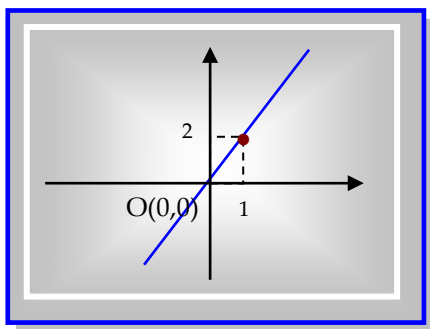


Αυτά και τίποτε άλλο είναι η μελέτη μια δύσκολης πράγματι συνάρτησης. Όμως η δυσκολία είναι στο να βγάλεις τα απόλυτα, από εκεί και πέρα όλα είναι τυποποιημένα και δουλεύεις με βάση αυτά που ισχύουν για τις γνωστές όπως είπαμε συναρτήσεις .

Ένα άλλο «πρόβλημα» που μπορεί να αντιμετωπίσεις είναι να «μελετήσεις» την Γραφική Παράσταση και να βγάλεις (ορισμένα) συμπεράσματα για την συνάρτηση.

1. Γραφική παράσταση

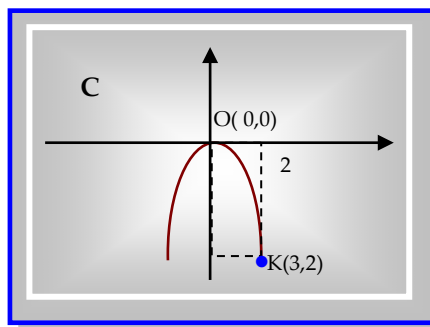
Συμπεράσματα



Η ϵ είναι της μορφής $\psi = \varphi(x) = \alpha x$ επειδή περνάει από το $O(0,0)$.
Επειδή περνάει και από το $(1,2)$ πρέπει $2 = \alpha \cdot 1$
 $\Leftrightarrow \alpha = 2$ άρα $\psi = \varphi(x) = 2x$.

2. Γραφική παράσταση

Συμπεράσματα



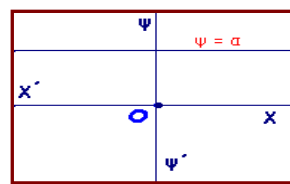
Η C είναι της μορφής $\psi = \varphi(x) = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ και επειδή περνάει από το $K(3,-2)$ πρέπει $-2 = \alpha \cdot 9$
 $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{9}$ άρα $\varphi(x) = -\frac{2}{9}x^2$

Ακολουθεί συνοπτικός πίνακας που παρουσιάζει όλα όσα αφορούν τις γνωστές συναρτήσεις .

Βασικές πραγματικές συναρτήσεις

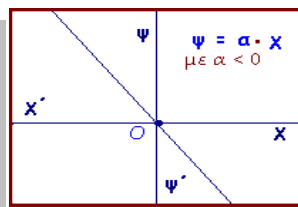
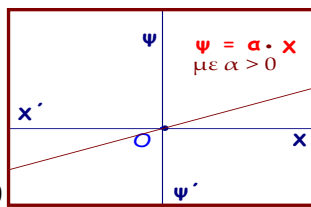
1. Σταθερή συνάρτηση $f: A \rightarrow P$ με $f(x) = \alpha$.

- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = P$.
- ✓ Σύνολο τιμών $f(P) = \{\alpha\}$
- ✓ Η γραφική παράσταση της f αν $A=P$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha$



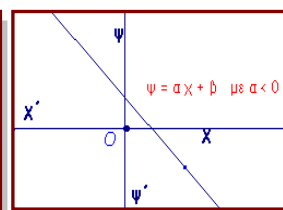
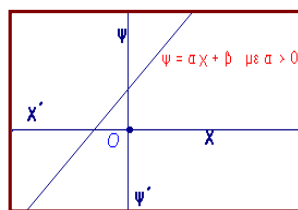
2. Συνάρτηση $f: A \rightarrow P$ με $f(x) = \alpha \cdot x$.

- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = P$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(P) = P$.
- ✓ Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = P$ είναι ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha x$.
- ✓ Γνησίως αύξουσα με $\alpha > 0$, Γνησίως φθίνουσα με $\alpha < 0$



3. Συνάρτηση $f: A \rightarrow P$ με $f(x) = \alpha x + \beta$.

- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = P$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = P$
- ✓ Η γραφική παράσταση της f αν $D_f = P$ είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = \alpha x + \beta$.
- ✓ Γνησίως αύξουσα με $\alpha > 0$, Γνησίως φθίνουσα με $\alpha < 0$.



4. Συνάρτηση 2ου βαθμού $f: A \rightarrow P$ με $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = P$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(R) = P$
- ✓ Άρτια συνάρτηση, άρα έχει άξονα συμμετρίας

Ειδικότερα για τις συναρτήσεις $(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$ ισχύουν

α) $\psi = \varphi(x) = \alpha x^2$ με $\alpha > 0$

β) $\psi = \varphi(x) = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$

Έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

Γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

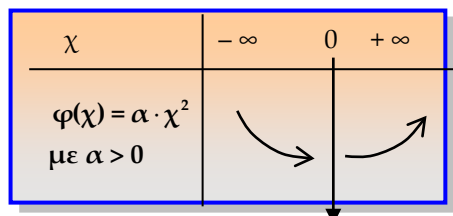
Ελάχιστο το $\psi = 0$

Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

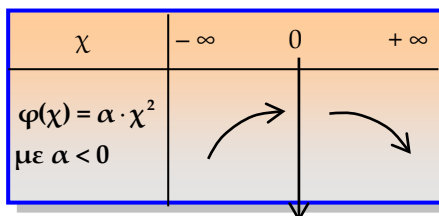
Γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Μέγιστο το $\psi = 0$

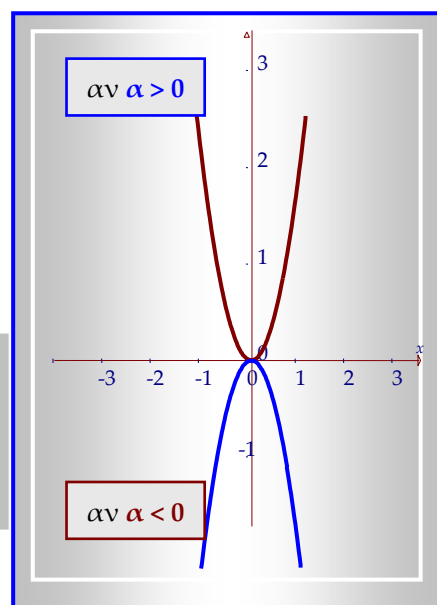
Παραβολή με κορυφή το $O(0,0)$



Ελάχιστο το 0



Μέγιστο το 0



5. Η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ όπου $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

- ✓ Λέγεται **ισοσκελής υπερβολή**.
- ✓ Πεδίο Ορισμού $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$
- ✓ Σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- ✓ Είναι **περιττή συνάρτηση**.
- ✓ Αποτελείται από δύο κλάδους συμμετρικούς ως προς το **O**
- ✓ Έχει ως ασύμπτωτες τους 4 ημιάξονες

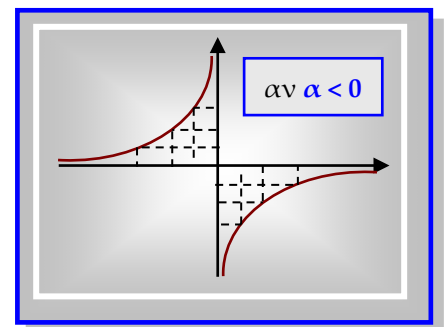
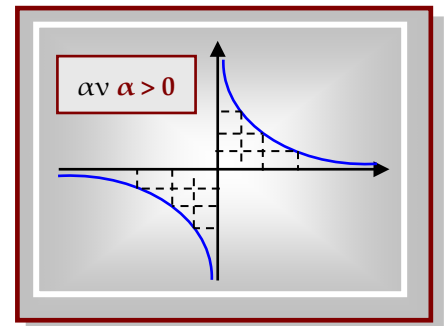
Μονότονη κατά διαστήματα

α) $\psi = f(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha > 0$ β) $\psi = f(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha < 0$

{ Γνησίως **φθίνουσα** στο $(-\infty, 0)$ } { Γνησίως **αύξουσα** στο $(-\infty, 0)$ }
 { Γνησίως **φθίνουσα** στο $(0, +\infty)$ } { Γνησίως **αύξουσα** στο $(0, +\infty)$ }

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha > 0$			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha < 0$			



Παραδείγματα

1. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

- i) $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta$ ii) $\theta(x) = \alpha x^{2\kappa} + \beta x^{2\lambda} + \gamma$
 iii) $f(x) = \alpha x^3 + \beta x$ iv) $g(x) = \alpha x^{2\kappa+1} + \beta x^{2\lambda+1} + \gamma x$
 v) $h(x) = \alpha x^2 + \beta x$ vi) $p(x) = \alpha x^{2\kappa} + \beta x^{2\lambda+1} + \gamma x + \delta$

Απάντηση: Όλες οι πιο πάνω συναρτήσεις έχουν Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$ έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $-x \in \mathbb{R}$.

Άρα για όλες ικανοποιείται η 1^η συνθήκη του ορισμού, έτσι μπορείς να εξετάσεις αν είναι άρτιες ή περιττές.

i) $\varphi(-x) = \alpha(-x)^2 + \beta = \alpha x^2 + \beta = \varphi(x)$ [διότι $(-x)^2 = x^2$] άρα **φ άρτια**

ii) $\theta(-x) = \alpha(-x)^{2\kappa} + \beta(-x)^{2\lambda} + \gamma = \alpha x^{2\kappa} + \beta x^{2\lambda} + \gamma = \theta(x)$ [διότι $(-x)^{2\kappa} = x^{2\kappa}$] άρα **θ άρτια**

iii) $f(-x) = \alpha(-x)^3 + \beta(-x) = \alpha(-x)^3 + \beta(-x) = -\alpha x^3 - \beta x = -f(x)$ [διότι $(-x)^3 = -x^3$] άρα **f περιττή**

iv) $g(-x) = \alpha(-x)^{2\kappa+1} + \beta(-x)^{2\lambda+1} + \gamma(-x) = -\alpha x^{2\kappa+1} - \beta x^{2\lambda+1} - \gamma x = -g(x)$ [διότι $(-x)^{2\kappa+1} = -x^{2\kappa+1}$] άρα **g περιττή**

v) $h(-x) = \alpha(-x)^2 + \beta(-x) = \alpha x^2 - \beta x$ άρα $h(-x) \neq h(x)$ και από το $-h(x)$ άρα η **ή ούτε άρτια ούτε περιττή**

vi) $p(-x) = \alpha(-x)^{2\kappa} + \beta(-x)^{2\lambda+1} + \gamma(-x) + \delta = \alpha x^{2\kappa} - \beta x^{2\lambda+1} - \gamma x + \delta$ άρα $p(-x) \neq p(x)$ και από το $-p(x)$ οπότε η **p ούτε άρτια ούτε περιττή**

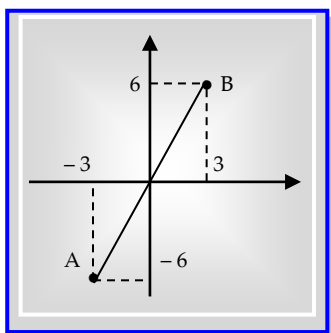
Δεν ξέρω αν το κατάλαβες αλλά μόλις διαπίστωσες ότι : αν μια πολυωνυμική συνάρτηση έχει το κατάλληλο Πεδίο Ορισμού και περιέχει μόνο άρτιες δυνάμεις είναι άρτια , αν περιέχει μόνο περιττές δυνάμεις είναι περιττή και αν περιέχει και άρτιες και περιττές δεν είναι τίποτα από τα δύο . Επίσης οι συντελεστές δεν παίζουν κανένα ρόλο στο αν είναι άρτια ή περιττή μια συνάρτηση .

2. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις .

ι) $f(x) = 2x$ με Π Ο το $A = [-3, 3]$ ιι) $\varphi(x) = 3x^2$ με Π Ο το $A = (-1, 3]$

Απάντηση :

ι) Η $f(x) = 2x$ είναι της μορφής $\psi = \alpha x$ άρα ισχύουν όλα όσα είπαμε πιο πάνω δηλαδή η f έχει Π Ο το $[-3, 3]$ (έτσι δίνεται) , είναι περιττή , είναι $\alpha = 2 > 0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα και επειδή Π Ο είναι το $[-3, 3]$ η Γ Π δεν είναι ολόκληρη ευθεία αλλά τμήμα με άκρα το $A(-3, f(-3)) = A(-3, -6)$ και $B(3, f(3)) = B(3, 6)$. Δηλ έχει Γ Π την



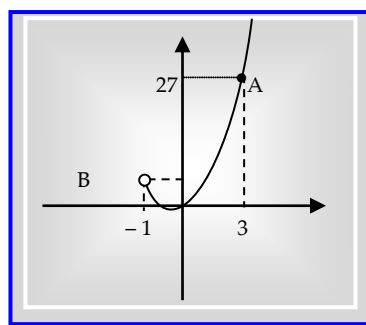
Από την Γ Π βλέπεις ότι το Π Ο επιδρά και στα ακρότατα διότι πx η $\psi = \alpha x$ δεν έχει ακρότατα αλλά εδώ η $f(x) = 2x$ επειδή το Π Ο έχει άκρα και η f γνησίως μονότονη υπάρχει μέγιστο το $f(3) = 6$ και ελάχιστο το $f(-3) = -6$

ιι) $\varphi(x) = 3x^2$ με Π Ο το $A = (-1, 3]$. Η φ είναι της μορφής $\psi = \alpha x^2$ αλλά δεν είναι **άρτια** γιατί πx ενώ $2 \in A$ το $-2 \notin A$, δεν είναι **μονότονη** αλλά **γνησίως μονότονη κατά διαστήματα** και επειδή $\alpha = 3 > 0$ είναι φθίνουσα στο $(-1, 0)$ και αύξουσα στο $(0, 3)$. Επειδή το Π Ο έχει άκρα άρα θα έχει άκρα και η Γ Π τα $A(-1, 3)$ και $B(3, 27)$ (είναι τμήμα υπερβολής). Βέβαια το A δεν ανήκει στην Γ Π γιατί το -1 δεν ανήκει στο Π Ο αλλά το βρίσκω για τις ανάγκες της Γ Π . Εκτός από το κλασικό ελάχιστο $O(0, 0)$ που έχουν όλες οι συναρτήσεις της μορφής αx^2 ετούτη έχει και μέγιστο, λόγω Π Ο, το $\varphi(3) = 27$

Γενικά ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών

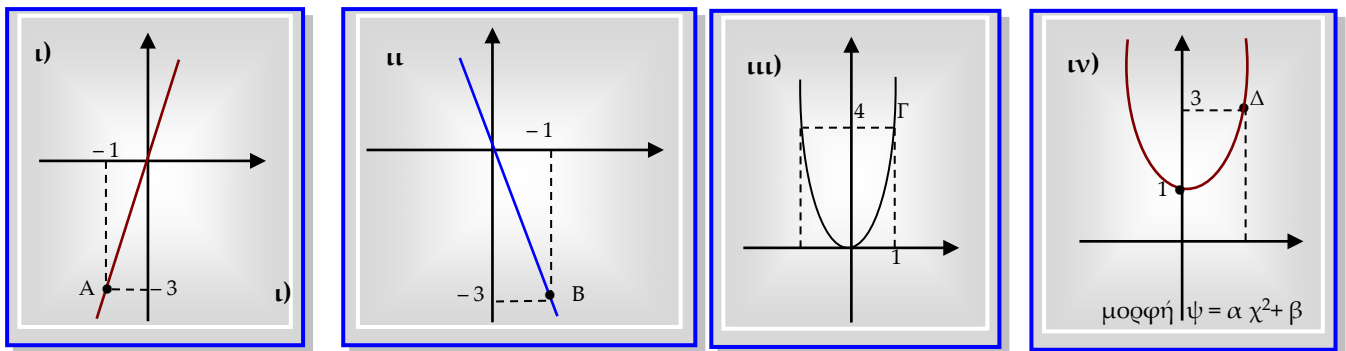
x	-1	0	3
ψ			

και έχει Γ Π την



Δεν είναι και τόσο δύσκολη η μελέτη μιας συγκεκριμένης και γνωστής συνάρτησης . Αν σκεφτείς μάλιστα ότι εσύ δεν χρειάζεται να γράψεις όλες τις επεξηγήσεις που σου παρέθεσα εγώ, για να καταλάβεις, και ότι στις περισσότερες περιπτώσεις θα σου ζητά ορισμένα μόνο πράγματα από την μελέτη πx μόνο την μονοτονία ή την μονοτονία και το άρτια – περιττή τότε νομίζω πράγματι ότι δεν είναι δύσκολο θέμα .

3. Με βάση την Γ Π να βρεις τον τύπο της συνάρτησης και να γράψεις τι συμπεραίνεις για αυτήν



Απάντηση

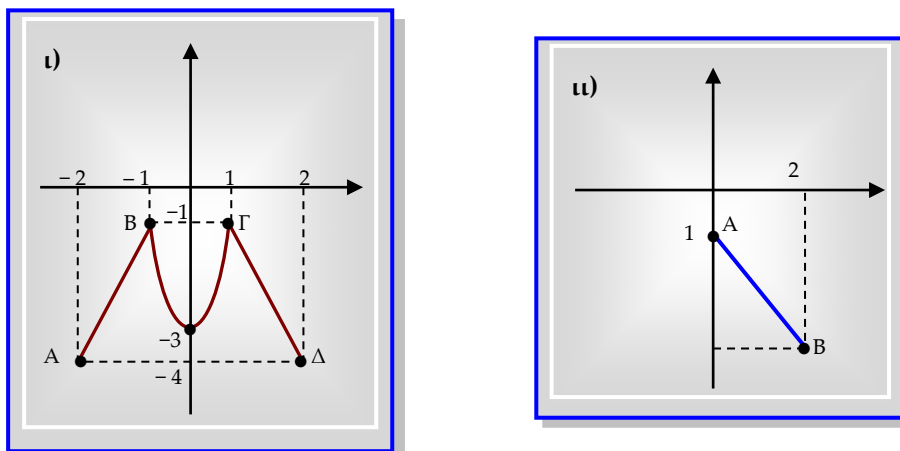
ι) Η συνάρτηση έχει Γ Π μια ευθεία άρα είναι της μορφής $\psi = \alpha\chi$. Επειδή περνάει από το $A(-1, -3)$ θα είναι $-3 = \alpha(-1) \Leftrightarrow \alpha = 3$ άρα $\psi = 3\chi$ ο τύπος της. Π Ο = $\mathbb{R}$, είναι περιττή, γνησίως αύξουσα αφού $\alpha = 3 > 0$ και δεν έχει ακρότατα.

ιι) Η συνάρτηση έχει Γ Π μια ευθεία άρα είναι της μορφής $\psi = \alpha\chi$. Επειδή περνάει από το $B(2, -3)$ θα είναι $-3 = \alpha \cdot 2 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$ άρα $\psi = -\frac{3}{2}\chi$ ο τύπος της. Π Ο = $\mathbb{R}$, είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα αφού $\alpha = -\frac{3}{2} < 0$ και δεν έχει ακρότατα.

ιιι) Η συνάρτηση έχει Γ Π μια παραβολή της μορφής $\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi^2$. Επειδή περνάει από το $\Gamma(1, 4)$ θα είναι $4 = \alpha \cdot 1^2 \Leftrightarrow \alpha = 4$ άρα $\psi = 4\chi^2$ άρα άρτια με άξονα συμμετρίας τον $\psi' \psi$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, μέγιστο το $\varphi(0) = 0$, κορυφή το $O(0, 0)$

ιν) Η συνάρτηση έχει Γ Π μια παραβολή της μορφής $\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta$. Επειδή περνάει από το $\Gamma(1, 3)$ θα είναι $3 = \alpha \cdot 1^2 + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$ και όπως φαίνεται από το σχήμα έχει κορυφή το $(0, 1)$ άρα θα είναι $1 = \alpha \cdot 0^2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε $\alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$ άρα $\psi = 2\chi^2 + 1$ ο τύπος της και είναι άρτια με άξονα συμμετρίας τον $\psi' \psi$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, και έχει ελάχιστο το $\varphi(0) = 1$. Περισσότερες λεπτομέρειες για την $\psi = \alpha\chi^2 + \beta$ δες παρ. 4 πιο κάτω.

4. Με βάση την Γ Π να βρεις τον τύπο της συνάρτησης και να την μελετήσεις.



Απάντηση :

ι) Η συνάρτηση έχει Π Ο το $[-2, 2]$ και θα την μελετήσω κατά διαστήματα.

α) Στο $[-2, -1]$ είναι της μορφής $\psi = f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ και περνάει από τα $A(-2, -4)$ και $B(-1, -1)$ άρα πρέπει $-4 = \alpha \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -4$ (1) και $-1 = \alpha \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -1$ (2) όταν λύσω το σύστημα των (1) και (2) βρίσκω $\alpha = 3$ και $\beta = 2$ άρα η συνάρτηση στο διάστημα αυτό έχει τύπο $\psi = f(x) = 3x + 2$ και έχει τοπικό ελάχιστο, λόγω Π Ο το $f(-2) = -4$.

β) Στο $[-1, 1]$ είναι της μορφής $\psi = \alpha x^2 + \beta$ και επειδή περνάει π χ από το $B(-1, -1)$ και έχει κορυφή το $(0, -3)$ θα είναι $\varphi(0) = -3 \Leftrightarrow \alpha 0^2 + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = -3$ και $\varphi(-1) = -1 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 - 3 = -1 \Leftrightarrow \alpha = 2$ άρα στο $[-1, 1]$ έχει τύπο $\psi = 2x^2 - 3$ είναι άρτια, μονότονη κατά διαστήματα, γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0)$, γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ και έχει τοπικό μέγιστο το $\varphi(-1) = -1$, τοπικό ελάχιστο το $\varphi(0) = -3$

γ) Στο $(1, 2]$ είναι της μορφής $\psi = f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ και περνάει από τα $\Delta(2, -4)$ και $\Gamma(1, -1)$ άρα πρέπει $-4 = \alpha \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4$ (3) και $-1 = \alpha \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = -1$ (4), όταν λύσω το σύστημα των (3) και (4) βρίσκω $\alpha = -3$ και $\beta = 2$ άρα στο $[-2, -1]$ έχει τύπο $\psi = f(x) = -3x + 2$ και έχει τοπικό ελάχιστο, λόγω Π Ο το $f(2) = -4$.

Άρα η συνάρτηση φ είναι πολλαπλού τύπου με

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{αν } x \in [-2, -1] \\ 2x^2-3 & \text{αν } x \in [-1, 1] \\ -3x+2 & \text{αν } x \in [1, 2] \end{cases}$$

[Αυτή η περίπτωση είναι πράγματι από τις πιο δύσκολες]

ι) Η συνάρτηση έχει Π Ο το $[0, 2]$ και επειδή έχει Γ Π το τμήμα Α Β άρα έχει τύπο της μορφής $\psi = f(x) = \alpha \cdot x + \beta$. Επειδή περνάει από το $A(0, 1)$ και το $B(2, -3)$ πρέπει (1) $1 = \alpha \cdot 0 + \beta$ (1) και $-3 = 2 \cdot \alpha + \beta$ (2). Το σύστημα των (1) και (2) έχει λύση $\alpha = -2$ και $\beta = 1$ άρα είναι $f(x) = -2x + 1$, που επειδή είναι της μορφής $\psi = \alpha \cdot x + \beta$ με $\alpha = -2 < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει, λόγω Π Ο, μέγιστο το $f(0) = 1$ και ελάχιστο το $f(2) = -3$.

5. Να μελετήσεις χωρίς να χαράξεις την Γ Π τις συναρτήσεις

ι) $f(x) = \frac{\alpha}{x^2}, \alpha > 0$ **ιι)** $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta, \alpha > 0$

Απάντηση :

ι) Η $f(x) = \frac{\alpha}{x^2}, \alpha > 0$ έχει Π Ο το $\mathbb{R}^*$ (πρέπει $x \neq 0$). Είναι $f(-x) = \frac{\alpha}{(-x)^2} = \frac{\alpha}{x^2} = f(x)$ άρα άρτια.

Για την μονοτονία έχω $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0, \lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} =$

$$\frac{\frac{\alpha}{x_1^2} - \frac{\alpha}{x_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{\alpha(x_2^2 - x_1^2)}{x_1^2 \cdot x_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1^2 \cdot x_2^2(x_1 - x_2)} = \frac{\alpha(x_2 + x_1)}{x_1^2 \cdot x_2^2}$$

Άρα όταν $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 0$ επειδή $\alpha > 0$ και $x_1^2 \cdot x_2^2 > 0$ τότε $\lambda < 0$ και

όταν $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0$ επειδή $\alpha > 0$ και $x_1^2 \cdot x_2^2 > 0$ τότε $\lambda > 0$ άρα το λ δεν διατηρεί πρόσημο άρα η f δεν είναι μονότονη. Από τα παραπάνω όμως φαίνεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ Δεν έχει ελάχιστο γιατί το $0 \notin \mathbb{R}^*$

ιι) $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta, \alpha > 0$. Έχει Π Ο το $\mathbb{R}$. $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta \Leftrightarrow \varphi(x) - \beta = \alpha x^2$. Άρα αν θέσω $\Phi(x) = \varphi(x) - \beta$ έχω $\Phi(x) = \alpha x^2$ άρα η Φ και επομένως η φ είναι της μορφής αx^2 επομένως έχουν όλα τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της αx^2 δηλαδή είναι η Φ και η φ άρτιες, γνησίως φθίνουσες στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσες στο $(0, +\infty)$ με ελάχιστο το $\Phi(0)$ και $\varphi(0)$ αντίστοιχα άρα η φ έχει ελάχιστο το $\varphi(0) = \alpha 0^2 + \beta = \beta$

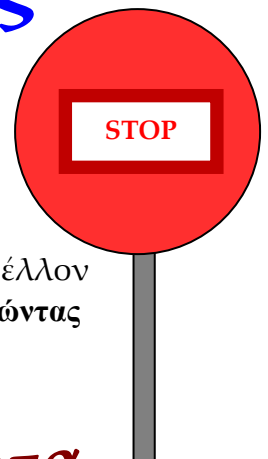
2ος τρόπος : Η $\varphi(x) = ax^2 + \beta$ είναι άρτια διότι $\forall x \in A$ είναι $-x \in A$ και $\varphi(-x) = a(-x)^2 + \beta = ax^2 + \beta = \varphi(x)$ άρα άρτια και έστω $x_1 < x_2$ τότε $\lambda = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1^2 + \beta) - (ax_2^2 + \beta)}{x_1 - x_2} = \dots$ δηλαδή κάνω ότι ακριβώς έκανα για την ax^2 οπότε το αποφεύγουμε όλο αυτό δείχνοντας ότι η $\varphi(x) = ax^2 + \beta$ μετατρέπεται στη μορφή $\Phi(x) = ax^2$ όπως κάναμε πιο πάνω .

Πρέπει να ξέρεις

1^{ον} Πολύ καλά όλους τους ορισμούς.

2^{ον} Τις ιδιότητες των γνωστών συναρτήσεων.

3^{ον} Ότι όλες τις συναρτήσεις που θα συναντήσεις στο μέλλον θα τις μελετάς με βάση τις γνωστές συναρτήσεις, ακολουθώντας πάντα την μέθοδο που εφαρμόσαμε σ' αυτές .



Ξαναδιάβασε τα παραδείγματα

γιατί ακολουθεί η χαρά του μαθητή που είναι οι . . .



1. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $\varphi(x) = 2x^2 + 7$ ιι) $f(x) = 5x^2 - 11$ ιιι) $\theta(x) = 2x^6 - 5x^2 + 3$ ιιιι) $g(x) = 2x^6 - 3x^4 + x^2$

2. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $\varphi(x) = x^3 + 7x$ ιι) $f(x) = 4x^5 - 11x$ ιιι) $\theta(x) = x^7 - 5x^5 + 3x^3$ ιιιι) $g(x) = 7x$

3. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $\varphi(x) = 2x^2 + 7x$ ιι) $f(x) = x^4 - 2x^3$ ιιι) $\theta(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ιιιι) $g(x) = 2x^6 - 3x^3 + x^2$

4. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $f(x) = \alpha \cdot |x| + \beta, \alpha \neq 0$ ιι) $g(x) = -3|x| - 5$ ιιι) $w(x) = |x + \alpha| + |x - \alpha|$

5. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $\varphi(x) = 2x^2$ με ΠΟ το $[1, 5]$ ιι) $g(x) = 3 \cdot x$ με ΠΟ το $(-5, 5]$

6. Να εξετάσεις ποιες από της συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

ι) $\varphi(x) = -\frac{5}{x^2}$ ιι) $g(x) = -\frac{2}{x}$ ιιι) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 5}$ ιιιι) $p(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

7. Να εξετάσεις την μονοτονία των συναρτήσεων :

ι) $\varphi(x) = x$ ιι) $f(x) = 5x - 3$ ιιι) $w(x) = -3x$ ιιιι) $\varphi(x) = -7x + 0,3$

8. Να εξετάσεις την μονοτονία των συναρτήσεων :

ι) $f(x) = x^2$ ιι) $u(x) = 5x^2$ ιιι) $w(x) = -3x^2$ ιιιι) $\varphi(x) = -x^2 - 3$

9. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις :

ι) $w(x) = 3x$ ιι) $f(x) = 2x + 1$ ιιι) $g(x) = -2x$ ιιιι) $\varphi(x) = -3x - 2$

10. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις :

ι) $q(x) = 2x^2$ ιι) $f(x) = -3x^2$ ιιι) $g(x) = x^2 - 1$ ιιιι) $d(x) = -3x^2 - 2$

11. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις :

ι) $f(x) = 3x$ με ΠΟ το $A = [-2, 2]$ ιι) $\varphi(x) = -5x$ με ΠΟ το $A = [2, 7]$

12. Να μελετήσεις την συνάρτηση $f(x) = 2x$ με Π Ο το :

- i) $A = [-1, 2]$ ii) $A = [-1, 2)$ iii) $A = (-1, 2]$ iv) $A = (-1, 2)$.

[Να μην γίνει η γραφική παράσταση]

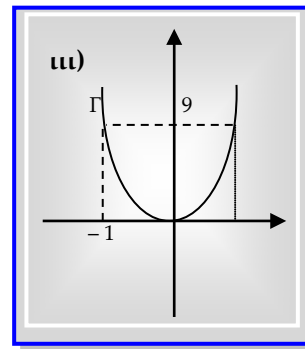
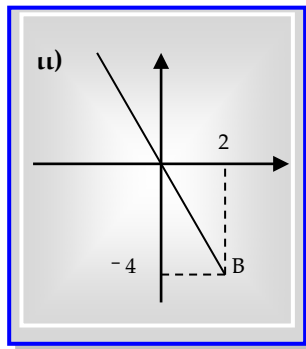
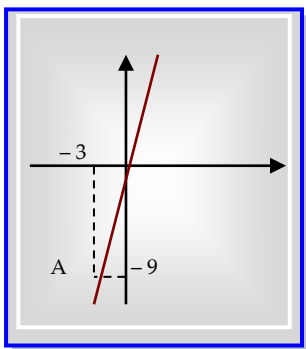
13. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις :

- i) $f(x) = \frac{\alpha}{x^2}, \alpha < 0$ ii) $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta, \alpha < 0$

14. Να μελετήσεις τις συναρτήσεις : (εκτός από την Γ Π) :

- i) $g(x) = 2x^4$ ii) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ iii) $\varphi(x) = x + \frac{2}{x}$ iv) $q(x) = 2x^4 + \frac{3}{x^4}$

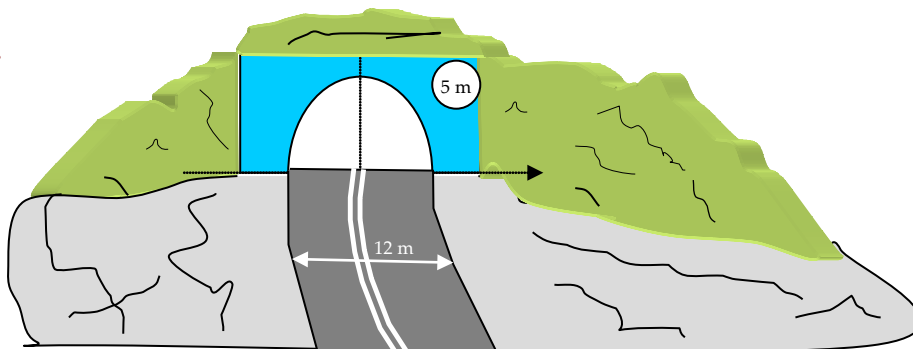
15. Από την Γ Π να βρεις τον τύπο της συνάρτησης και να την μελετήσεις



16. Να μελετήσεις την $\varphi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \in [-\infty, -3] \\ 2 & \text{αν } x \in [-3, 3] \\ -x+1 & \text{αν } x \in [3, +\infty] \end{cases}$

17. Να μελετήσεις την $\varphi(x) = |x+1| + |x-1|$

18.



Αν το πιο πάνω σκίτσο παριστάνει ένα δρόμο που περνάει μέσα από το «τούνελ» να βρεις την συνάρτηση που εκφράζει το παραβολικό τόξο του ανοίγματος και να την μελετήσεις [πλάτος δρόμου 12 m και μέγιστο επιτρεπόμενο ύψος αυτοκινήτου 5 m].

4.2 Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

- ✓ Κάθε συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ λέγεται **συνάρτηση 2^{ου} βαθμού**, η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι η αντίστοιχη εξίσωση της συνάρτησης.
- ✓ Η **διακρίνουσα** $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ και οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 της αντίστοιχης εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ λέγονται επίσης διακρίνουσα και ρίζες της συνάρτησης.

Για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι ήδη γνωστά τα εξής :

Η διακρίνουσα είναι ένας αριθμός και φυσικά, όπως για κάθε αριθμό και για αυτήν υπάρχουν 3 δυνατές περιπτώσεις.

➤ Αν $\Delta > 0$

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δυο ρίζες ρ_1 και ρ_2 , οι οποίες δίνονται από τους τύπους :

$$\rho_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ και } \rho_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ή} \quad \rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής : $ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

➤ Αν $\Delta = 0$

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει 1 διπλή ρίζα (ή δύο ρίζες ίσες) που δίνεται από τον τύπο :

$$\rho = -\frac{b}{2a}$$

Το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής : $ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho)^2$.

➤ $\Delta < 0$. Τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ δεν παραγοντοποιείται.

● **Παρατηρήσεις** ➔ Για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ ισχύουν τα εξής :

1^{ον} Αν $\Delta > 0$

Επειδή $f(\rho_1) = a\rho_1^2 + b\rho_1 + \gamma = 0$ και $f(\rho_2) = a\rho_2^2 + b\rho_2 + \gamma = 0$, μιας και ρ_1 και ρ_2 ρίζες της εξίσωσης. Άρα τα σημεία $A(\rho_1, f(\rho_1)) = A(\rho_1, 0)$ και $B(\rho_2, f(\rho_2)) = B(\rho_2, 0)$ είναι σημεία της Γραφικής Παράστασης της $f(x)$ και επειδή έχουν τεταγμένη 0 είναι ταυτόχρονα και στον άξονα x' .

Άρα αν $\Delta > 0$ η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον x' στα σημεία A και B με τετμημένες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα

2^{ον} Αν $\Delta = 0$

Υπάρχει μία ρίζα ρ της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και είναι $f(\rho) = a\rho^2 + b\rho + \gamma = 0$ άρα η $f(x)$ έχει **μόνο ένα κοινό σημείο** με τον x' το $A(\rho, 0)$.

Άρα αν $\Delta = 0$ η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ εφάπτεται με τον x' στο A με τετμημένη ρ

3^{ον} Αν $\Delta < 0$ δεν υπάρχουν ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

Άρα Αν $\Delta < 0$ η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ δεν έχει κοινά σημεία με τον x'

3^{ον} Είναι $f(0) = \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = \gamma$ άρα

Η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ τέμνει πάντα τον ψ' ψ στο Γ με τεταγμένη γ δηλ. στο $\Gamma(0, \gamma)$.

Μελέτη και Γραφική Παράσταση της $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.

Θα μελετήσουμε την $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ χρησιμοποιώντας τις γνώσεις μας από την $\phi(x) = \alpha x^2$.

Έχουμε λοιπόν τα εξής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left[x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right] =$$

$$\alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

$$\text{άρα } \phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow \phi(x) + \frac{\Delta}{4\alpha} = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \Leftrightarrow \psi + \frac{\Delta}{4\alpha} = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \quad (1)$$

$$\text{οπότε αν θέσω } \Psi = \psi + \frac{\Delta}{4\alpha} \text{ και } X = x + \frac{\beta}{2\alpha} \text{ η (1) γίνεται } \Psi = \alpha \cdot X^2$$

που σημαίνει ότι

Η $\psi = \phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μετασχηματίζεται στην $\Psi = \alpha \cdot X^2$
 Άρα η $\psi = \phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει όλα τα χαρακτηριστικά που έχει η συνάρτηση $\Psi = \alpha \cdot X^2$

Και με την σκέψη ότι έχω θέσει $\Psi = \psi + \frac{\Delta}{4\alpha}$ και $X = x + \frac{\beta}{2\alpha}$ θα ισχύει :

Η $\Psi = \alpha \cdot X^2$ είναι υπερβολή με κορυφή το $O(0,0)$.

Όμως το $O(0,0)$ κορυφή για την $\Psi = \alpha \cdot X^2$ σημαίνει ότι $X = 0$ (1) και $\Psi = 0$ (2) .

$$(1) \quad X = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \text{ και}$$

$$(2) \quad \Psi = 0 \Leftrightarrow \psi + \frac{\Delta}{4\alpha} = 0 \Leftrightarrow \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

Δηλαδή το $(0,0)$ της $\Psi = \alpha X^2$ είναι το $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right)$ της $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Άρα η $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει κορυφή το $K \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha} \right)$

Η $\Psi = \alpha \cdot X^2$ έχει άξονα συμμετρίας τον $\Psi' \Psi$

Ο $\Psi' \Psi$ έχει εξίσωση $X = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Άρα η $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Η $\Psi = \alpha \cdot X^2$ π x είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

Άρα η $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha} \right)$

Η $\Psi = \alpha \cdot X^2$ π x είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Άρα η $\phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$

Γενικότερα ισχύει ο

Συνοπτικός Πίνακας

Η $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει Π Ο το Ρ, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

όταν $\alpha > 0$ $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι

Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$
 Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

και έχει **Ελάχιστο** το $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

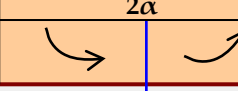
όταν $\alpha < 0$ $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι

Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$
 Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$

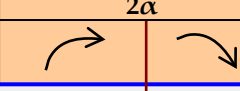
και έχει **Μέγιστο** το $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Η γραφική της παράσταση είναι Παραβολή με κορυφή το $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Συνοπτικά

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
ψ			

Ελάχιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
ψ			

Μέγιστο $-\frac{\Delta}{4\alpha}$

Δες δύο παραδείγματα για να καταλάβεις πως τα πιο πάνω εφαρμόζονται στη πράξη :

1. Να μελετηθεί η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$

Απάντηση :

Η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ έχει Πεδίο Ορισμού το Ρ.

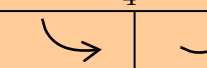
Είναι $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}{4 \cdot 2} = -\frac{9 + 16}{8} = -\frac{25}{8}$

Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{3}{4}$ και κορυφή $K\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

είναι $\alpha = 2 > 0$ και επομένως η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ είναι

Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$
 Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

έχει **Ελάχιστο** $\psi = -\frac{25}{8}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
ψ			

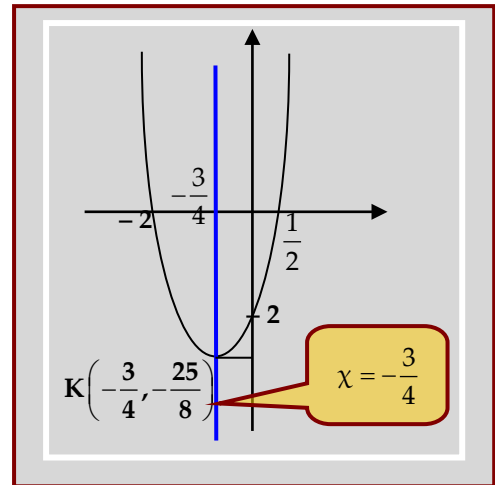
Η γραφική της παράσταση είναι Παραβολή με κορυφή το $K\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$.

Τέμνει τον άξονα ψ' ψ στο $\varphi(0) = -2$ και επειδή $\Delta = 25 > 0$, η $2x^2 + 3x - 2$ έχει ρίζες $\varrho_1 = -2$ και

$$\varrho_2 = \frac{1}{2}.$$

Για το σχεδιασμό της Γ Π φτιάχνεις ένα πίνακα τιμών, δίνοντας στο χ εκτός από τις τιμές $\chi = 0$, $\chi = -\frac{3}{4}$ και κάποιες τιμές συμμετρικές ως προς το $-\frac{3}{4}$ π χ όπως :

χ	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
ψ	0	-2	$-\frac{25}{8}$	-2	0



2. Να μελετηθεί η $\psi = \varphi(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$

Απάντηση : Η $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$ έχει Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$.

Είναι $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{5}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{2}$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{25 - 24}{-4} = \frac{1}{4}$

Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $\chi = \frac{5}{2}$ και κορυφή $K\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$

είναι $\alpha = -1 < 0$ και επομένως η $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 5\chi - 6$ είναι

Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

έχει **Μέγιστο** $\psi = \frac{1}{4}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

χ	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
ψ	$\nearrow$		$\searrow$

Η γραφική της παράσταση είναι **Παραβολή με κορυφή το**

$K\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

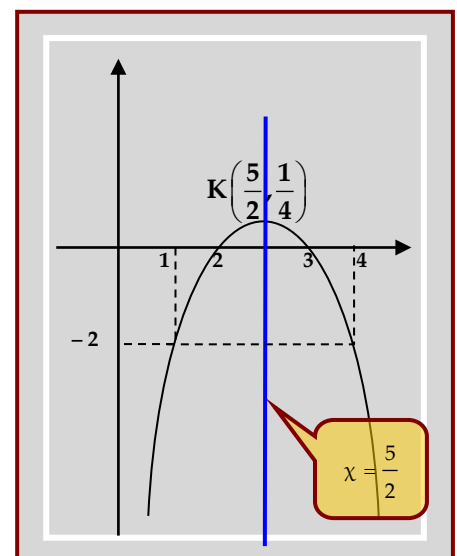
Τέμνει τον άξονα ψ' ψ στο $\varphi(0) = -6$ και επειδή $\Delta = 1 > 0$, η $-\chi^2 + 5\chi - 6$ έχει ρίζες $\chi_1 = 2$ και $\chi_2 = 3$.

Για το σχεδιασμό της Γ Π φτιάχνεις ένα πίνακα τιμών,

δίνοντας στο χ εκτός από τις τιμές $\chi = 0$, $\chi = \frac{5}{2}$ και κάποιες

τιμές συμμετρικές ως προς το $\frac{5}{2}$ π χ όπως :

χ	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4
ψ	-2	0	$\frac{1}{4}$	0	-2



- Με λίγα λόγια : Το σημαντικό είναι να βρεις τις συντεταγμένες της κορυφής και να εξετάσεις αν $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$ μετά τα πράγματα είναι γνωστά . Στις ασκήσεις κάνεις ακριβώς ότι κάναμε παραπάνω στα παραδείγματα .

3. Να μελετηθεί η μονοτονία της $\psi = \varphi(x) = 3x^2 + x + 1$

Απάντηση :

Η $\varphi(x) = 3x^2 + x + 1$ έχει Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6} \quad \text{και} \quad -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = -\frac{1-12}{12} = \frac{11}{12}$$

Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{1}{6}$ και κορυφή $K\left(-\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$

είναι $\alpha = 3 > 0$ και επομένως η $\varphi(x) = 3x^2 + x + 1$ είναι

Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$
Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$

έχει **Ελάχιστο** $\psi = -\frac{11}{12}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
ψ	↘		↗

4. Να βρεθούν τα α, β , αν είναι γνωστό ότι η $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + 6$ διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$ και έχει κορυφή το $K\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ στη συνέχεια να μελετήσεις την φ .

Απάντηση: Η $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + 6$ έχει Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$. Επειδή το $A \in$ στην $\Gamma \Pi$ της φ θα είναι

$$\begin{aligned} \varphi(2) = 0 &\Leftrightarrow \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = -6 \quad (1), \text{ επίσης } \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ 25\alpha + 10\beta + 24 &= -1 \Leftrightarrow 25\alpha + 10\beta = -25 \Leftrightarrow 5\alpha + 2\beta = -5 \quad (2). \end{aligned}$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα . Το λύνω και βρίσκω $\alpha = 1$ και $\beta = -5$.

Άρα είναι $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$. Η κορυφή K είναι ήδη γνωστή $K\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{5}{2}$.

είναι $\alpha = 1 > 0$ και επομένως η $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ είναι

Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
Γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

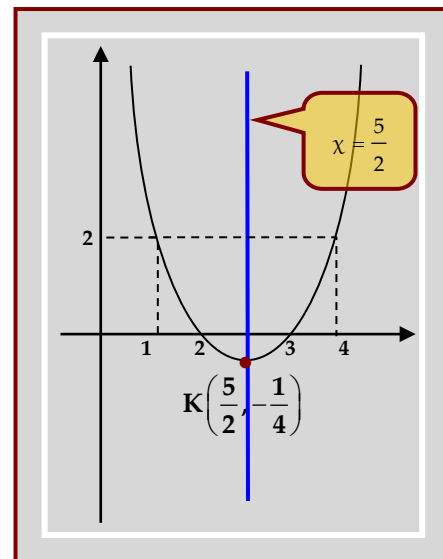
έχει **Ελάχιστο** $\psi = -\frac{1}{4}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
ψ	↘		↗

Η γραφική της παράσταση είναι Παραβολή με κορυφή το $K\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Τέμνει τον άξονα ψ' ψ στο $\varphi(0) = 6$ και επειδή $\Delta = 1 > 0$, η $\chi^2 - 5\chi + 6$ έχει ρίζες $\varrho_1 = 2$ και $\varrho_2 = 3$.
Για το σχεδιασμό της Γ Π φτιάχνεις ένα πίνακα τιμών, δίνοντας στο χ εκτός από τις τιμές $\chi = 0$, $\chi = \frac{5}{2}$ και κάποιες τιμές συμμετρικές ως προς το $\frac{5}{2}$ π χ όπως :

χ	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4
ψ	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2



5. Να βρεθούν τα α, β, γ αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$ και τέμνει τον χ' χ στα σημεία $A(2,0)$, $\Gamma(3,0)$.
Στη συνέχεια να μελετήσεις την φ .

Απάντηση : Επειδή τα A, B, Γ ανήκουν στην Γραφική Παράσταση της φ θα είναι $\varphi(2) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ (1), και $\varphi(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2$ (2) επίσης $\varphi(3) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 3^2 + \beta \cdot 3 + \gamma = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ (3).

Οι (1), (2) και (3) αποτελούν σύστημα όταν το λύσεις θα βρεις $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$.

Άρα είναι $\varphi(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 6$. Για την μελέτη δες το προηγούμενο ακριβώς παράδειγμα.

● **Παρατήρηση** ➔ Με βάση αυτά που ισχύουν για την $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ λύνονται πολλά προβλήματα.

Δεν υπάρχει καμιά ιδιαίτερη διαδικασία, απλώς κάνουμε ότι κάναμε και στα προβλήματα που λύνονται με εξίσωση 1^{ου} βαθμού ή στα προβλήματα που λύνονται με σύστημα και μας προκύπτει μια συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Στις περισσότερες δε περιπτώσεις ζητάει το μέγιστο ή το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης.

6. Έστω χ, ψ δύο αριθμοί με σταθερό άθροισμα κ να βρεις το γινόμενο τους σε συνάρτηση μόνο του χ , και να μελετήσεις την συνάρτηση αυτή.
Έχει μέγιστο ή ελάχιστο ; Πότε και πόσο ;

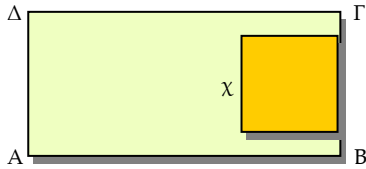
Απάντηση Αν χ και ψ οι αριθμοί τότε $\chi + \psi = \kappa$ (σταθερό) (1), έστω $\varphi(\chi) = \chi \cdot \psi$ (2) τότε (1) $\Leftrightarrow \psi = \kappa - \chi$ οπότε η (2) γίνεται $\varphi(\chi) = \chi \cdot (\kappa - \chi) \Leftrightarrow \varphi(\chi) = -\chi^2 + \kappa\chi$.

Η συνάρτηση φ είναι της μορφής $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ με $\alpha = -1 < 0$ άρα θα έχει ελάχιστο όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\kappa}{2(-1)} = \frac{\kappa}{2} \Leftrightarrow \psi = \kappa - \chi = \kappa - \frac{\kappa}{2} = \frac{\kappa}{2}$ δηλαδή η φ παρουσιάζει ελάχιστο όταν $\chi = \psi = \frac{\kappa}{2}$.

Το ελάχιστο είναι το $\varphi\left(\frac{\kappa}{2}\right) = -\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 + \kappa \cdot \frac{\kappa}{2} = -\frac{\kappa^2}{4} + \frac{\kappa^2}{2} = \frac{\kappa^2}{4}$ ή διαφορετικά όταν $\chi = \psi = \frac{\kappa}{2}$ τότε

$$\chi \cdot \psi = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{\kappa}{2} = \frac{\kappa^2}{4}$$

7. Δίνεται το σχήμα ΑΒΓΔ που απεικονίζει έναν κήπο. Αν κάποιος θέλει να φτιάξει ένα **τετράγωνο** κτίσμα με πλευρά χ όπως στο σχήμα να βρεις το χ ώστε το εμβαδόν στα πλάγια του κτίσματος να είναι μέγιστο. Δίνεται ΒΓ = 10m



Απάντηση : Τα δυο ίσα κομμάτια στα πλάγια έχουν πλευρές χ και $\frac{10-\chi}{2}$. Άρα το καθένα θα

έχει εμβαδόν $E_1 = \chi \cdot \frac{10-\chi}{2} = \frac{\chi(10-\chi)}{2} = \frac{-\chi^2 + 10\chi}{2}$. Η συνάρτηση $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 10\chi$ έχει μέγιστο όταν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{10}{2(-1)} = 5$. Άρα πετυχαίνω το μέγιστο εμβαδόν στα πλάγια όταν το κτίσμα έχει πλευρά $\chi = 5$

8. Με βάση το σχήμα να βρεις την απόσταση ΜΑ ως συνάρτηση του χ και κατόπιν να βρεις την ελάχιστη τιμή για την απόσταση ΜΑ.

Απάντηση : Όπως είναι γνωστό είναι :

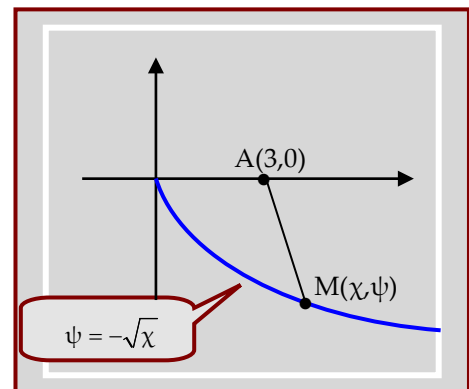
$$MA = \sqrt{(\chi-3)^2 + (\psi-0)^2} = \sqrt{(\chi-3)^2 + \psi^2} \quad (1)$$

Επειδή όμως το Μ ανήκει στην καμπύλη θα είναι $\psi = -\sqrt{\chi}$ (2)

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα, οπότε με αντικατάσταση της (2) στην (1) έχω :

$$\varphi(\chi) = MA = \sqrt{(\chi-3)^2 + (-\sqrt{\chi})^2} = \sqrt{\chi^2 - 6\chi + 9 + \chi} = \sqrt{\chi^2 - 5\chi + 9}$$

και αν θέσω $\varphi(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 9$ τότε $MA = \sqrt{\varphi(\chi)}$.



Οπότε το ΜΑ γίνεται ελάχιστο όταν η $\sqrt{\varphi(\chi)}$ γίνεται ελάχιστη δηλαδή όταν η $\varphi(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 9$ έχει ελάχιστη τιμή. Όμως η $\varphi(\chi)$ έχει κορυφή το $K\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$ και επειδή έχει $\alpha = 1 > 0$ άρα η $\varphi(\chi)$ έχει ελάχιστο το $\frac{11}{4}$ όταν $\chi = \frac{5}{2}$.

Άρα η ΜΑ έχει ελάχιστη τιμή το $\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ όταν $\chi = \frac{5}{2}$ δηλαδή η ΜΑ γίνεται ελάχιστη όταν το Μ βρεθεί στην θέση $M\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

9. Να μελετηθεί η $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi - 2$ στο διάστημα $A = [-1, 1]$

Απάντηση :

Η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ έχει Πεδίο Ορισμού το Ρ.

$$\text{Είναι } -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}{4 \cdot 2} = -\frac{9+16}{8} = -\frac{25}{8}$$

Άρα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{3}{4}$ και κορυφή $K\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

είναι $\alpha = 2 > 0$ και επομένως η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ είναι

Γνησίως φθίνουσα στο $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{3}{4}, +1\right)$

έχει **Ελάχιστο** $\psi = -\frac{25}{8}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

x	-1	$-\frac{3}{4}$	+1
ψ		↘	↗

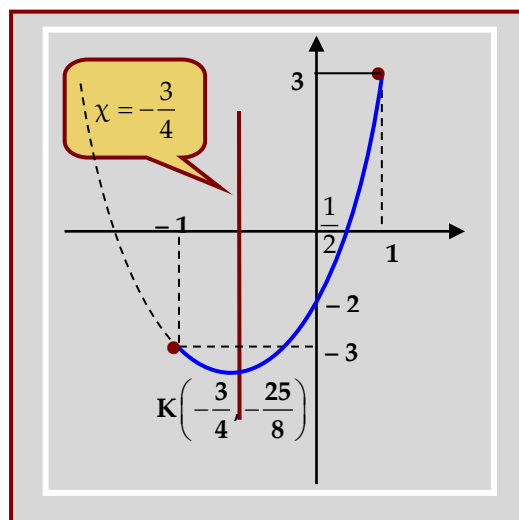
Η γραφική της παράσταση είναι **Παραβολή με κορυφή το** $K\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$.

Τέμνει τον άξονα ψ' στο $\varphi(0) = -2$ και επειδή $\Delta = 25 > 0$, η $2x^2 + 3x - 2$ έχει ρίζες $\rho_1 = -2$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$

και επειδή $-2 \notin [-1, 1]$ τέμνει τον x' μόνο στο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Για το σχεδιασμό της Γ Π φτιάχνεις ένα πίνακα τιμών, δίνοντας στο x εκτός από τις τιμές $x = 0$, $x = -\frac{3}{4}$ και κάποιες τιμές συμμετρικές ως προς το $-\frac{3}{4}$ π.χ. όπως :

x	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1
ψ	-3	$-\frac{25}{8}$	-2	0	3



10. Να μελετηθεί η $\varphi(x) = \begin{cases} -3 & \text{αν } x \leq -1 \\ 2x^2 + 3x - 2 & \text{αν } x > -1 \end{cases}$

Απάντηση :

Η φ έχει Π Ο το Ρ και θα μελετηθεί ανεξάρτητα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$

Στο $(-\infty, -1)$ η φ είναι σταθερή άρα έχει ως Γ Π ημιευθεία παράλληλη στον ψ' ψ την $\psi = -3$

Στο $(-1, +\infty)$ είναι $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi - 2$, άρα **Παραβολή με κορυφή το** $K\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ και είναι ακριβώς το προηγούμενο παράδειγμα οπότε μαζί με ότι είπαμε προηγούμενα θα είναι

$$\text{Είναι } -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}{4 \cdot 2} = -\frac{9+16}{8} = -\frac{25}{8}$$

είναι $\alpha = 2 > 0$ και επομένως η $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi - 2$ είναι

Γνησίως **φθίνουσα** στο $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$
 Γνησίως **αύξουσα** στο $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

έχει **Ελάχιστο** $\psi = -\frac{25}{8}$ και ισχύει ο πίνακας μεταβολών

χ	-1	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
ψ	$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$

Τέμνει τον άξονα ψ' ψ στο $\varphi(0) = -2$ και επειδή $\Delta = 25 > 0$, η $2\chi^2 + 3\chi - 2$ έχει ρίζες $\varrho_1 = -2$, $\varrho_2 = \frac{1}{2}$

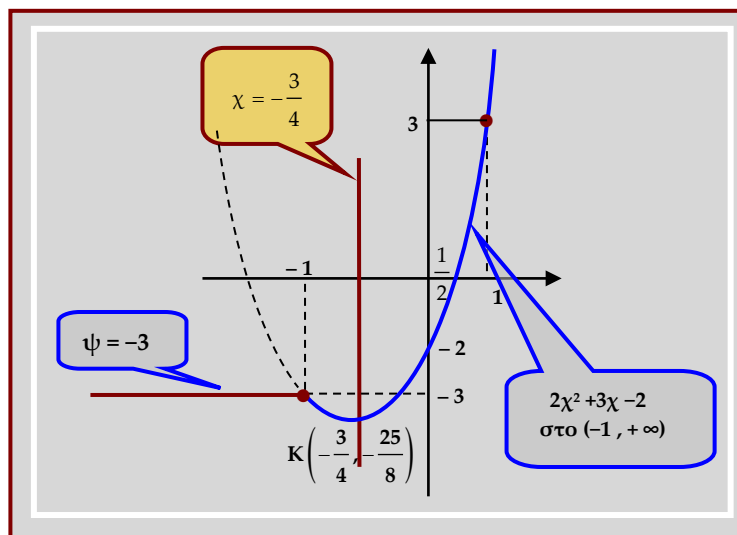
και επειδή $-2 \notin [-1, +\infty]$ τέμνει τον χ' χ μόνο στο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Για το σχεδιασμό της Γ Π φτιάχνεις ένα πίνακα τιμών, δίνοντας στο χ εκτός από τις τιμές $\chi = 0$, $\chi = -\frac{3}{4}$ και κάποιες τιμές

συμμετρικές ως προς το $-\frac{3}{4}$ π χ όπως :

χ	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1
ψ	-3	$-\frac{25}{8}$	-2	0	3

Και με το δεδομένο ότι στο διάστημα $(-\infty, -1)$ η φ έχει ως Γ Π την ημιευθεία $\psi = -3$, **συνολικά για την Γ Π θα είναι :**



Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους



Δίπλα από κάθε πρόταση να βάλετε

στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ)

- | | Σ | Λ |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 1. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta > 0$ έχει δυο κοινά σημεία με τον x' | ☐ | ☐ |
| 2. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta = 0$ έχει δυο κοινά σημεία με τον x' | ☐ | ☐ |
| 3. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta = 0$ δεν έχει σημεία με τον x' | ☐ | ☐ |
| 4. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta = 0$ εφάπτεται με τον x' | ☐ | ☐ |
| 5. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta < 0$ έχει δυο κοινά σημεία με τον x' | ☐ | ☐ |
| 6. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\Delta < 0$ δεν έχει κοινά σημεία με τον x' | ☐ | ☐ |
| 7. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha > 0$ είναι γνήσια αύξουσα στο P | ☐ | ☐ |
| 8. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha > 0$ δεν είναι γνήσια μονότονη | ☐ | ☐ |
| 9. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha < 0$ δεν είναι γνήσια μονότονη | ☐ | ☐ |
| 10. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha > 0$ είναι γνήσια μονότονη | ☐ | ☐ |
| 11. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha < 0$ είναι γνήσια φθίνουσα στο P | ☐ | ☐ |
| 12. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ | ☐ | ☐ |
| 13. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ | ☐ | ☐ |
| 14. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ | ☐ | ☐ |
| 15. Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ αν $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ | ☐ | ☐ |

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης Κενού ή



1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ αν $\Delta > 0$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση έχει _____ ρίζες, την _____ και την _____ και η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στα σημεία Α και Β με τετμημένες _____ και _____ αντίστοιχα.
2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ αν $\Delta = 0$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση έχει _____ ρίζα την _____ και η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ _____ φ _____ τ _____ στον $x'x$ στο σημείο Α με τετμημένη _____.
3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ αν $\Delta < 0$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση _____ ε _____ έχει ρίζα και η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ _____ ν _____ έχει κοινό σ _____ ε _____ με τον $x'x$.
4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Η Γραφική Παράσταση της $f(x)$ **τέμνει πάντα τον $\psi' \psi$ στο Γ με τεταγμένη _____ δηλ. στο σημείο $\Gamma(0, \text{_____})$.**
5. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ έχει κορυφή το $K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$



Μαθητής έτοιμος για όλες ...
τις ασκήσεις και όχι μόνο

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση :

ι) $\varphi(x) = x^2 - 3x + 2$

ιι) $f(x) = -x^2 + x + 6$

ιιι) $g(x) = x^2 - 7x + 12$

2. Να μελετηθεί η συνάρτηση :

ι) $w(x) = -x^2 + 6x - 9$

ιι) $\varphi(x) = x^2 - 4x + 4$

ιιι) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

3. Να μελετηθεί η συνάρτηση :

ι) $\varphi(x) = x^2 - 5x + 7$

ιι) $f(x) = 2x^2 + x + 1$

ιιι) $\theta(x) = x^2 - 3x - 5$

4. Να μελετηθεί η συνάρτηση :

ι) $f(x) = 3x^2 + 5$

ιι) $\varphi(x) = -x^2 - 3$

ιιι) $g(x) = x^2 - 1$

5. Να μελετηθεί η συνάρτηση :

ι) $f(x) = x^2 + 2x$

ιι) $\varphi(x) = -2x^2 + 3x$

ιιι) $g(x) = x^2 + x$

6. Να βρεις το μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης :

ι) $h(x) = -5x^2 + 20x$

ιι) $\varphi(x) = x^2 + x + 5$

ιιι) $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$

7. Να μελετηθεί η συνάρτηση : $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

Όπου t ο χρόνος, h το ύψος, v_0 η αρχική ταχύτητα, g η επιτάχυνση βαρύτητας σε μια κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

8. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 2$ να είναι γνωστό ότι περνάει από τα $A(1,1)$ και $B(2,4)$. Κατόπιν να μελετηθεί

9. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha \cdot x^2 - 3 \cdot x + \gamma$ να είναι γνωστό ότι περνάει από το $A(0,-2)$ και τέμνει τον x' στο $B(2,0)$. Κατόπιν να μελετηθεί

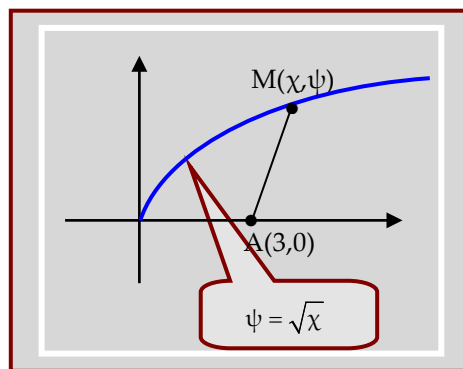
10. Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$ αν είναι γνωστό ότι περνάει από τα $A(3,-2)$ και $B(0,-2)$ και τέμνει τον x' στο σημείο με τετμημένη 1. Κατόπιν να μελετηθεί

11. Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 + 5x + 6$ με ΠΟ το $[-3,-2]$

12. Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^2 + 3x - 2$ με ΠΟ το $(-2, +\infty)$

13. Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{αν } x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 15 & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

14. Με βάση το σχήμα να βρεις την απόσταση MA ως συνάρτηση του x και κατόπιν να βρεις την ελάχιστη τιμή για την απόσταση MA .



15. Το κόστος, ανά μονάδα προϊόντος μιας βιομηχανίας, δίνεται από την συνάρτηση :
 $K(x) = x^2 - 1400x + 2000$.
 Να βρεις πόσες μονάδες πρέπει να παράγει για να ελαχιστοποιήσει το κόστος.
16. Έστω x, ψ δύο αριθμοί με σταθερή διαφορά k να βρεις το γινόμενο τους σε συνάρτηση μόνο του x , και να μελετήσεις την συνάρτηση αυτή. Έχει μέγιστο ή ελάχιστο; . Πότε και πόσο; .
17. Έστω x, ψ οι διαστάσεις ενός ορθογώνιου με σταθερή περίμετρο k . Να εκφράσεις το εμβαδόν του ως συνάρτηση μόνο του x και να την μελετήσεις βρίσκοντας πιο ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν και πόσο είναι αυτό.

σ' αυτούς που σου λένε πως

«η τεμπελιά είναι μια πάρα πολύ κακή συνήθεια»

να απαντάς ότι έπρεπε κάποιος στη ζωή να αναλάβει τα άσχημα

Σύλλογος προστασίας του δικαιώματος στην τεμπελιά ο «Αραχτός»

4.3 Μεταβολές του πρόσημου της $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Για την $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι γνωστό ότι $\Pi \cup \mathcal{O} = \mathbb{R}$ και αν :

➤ $\Delta > 0$. Η $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες ϱ_1 και ϱ_2 πραγματικές και άνισες,

παραγοντοποιείται και είναι $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$ (1)

Αν υποθέσουμε ότι $\varrho_1 < \varrho_2$, τότε για τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις :

1^{ov} $x < \varrho_1 < \varrho_2$ (το x αριστερά από τις ρίζες), τότε $x - \varrho_1 < 0$ και $x - \varrho_2 < 0 \Rightarrow (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) > 0$ οπότε επειδή, από την (1), η $\varphi(x)$ είναι γινόμενο του α και του θετικού $(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$, θα έχει ως πρόσημο το πρόσημο του α (δηλ. θα είναι ομόσημη του α)

2^{ov} $\varrho_1 < x < \varrho_2$ (το x ανάμεσα στις ρίζες), τότε $x - \varrho_1 > 0$ και $x - \varrho_2 < 0 \Rightarrow (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) < 0$ οπότε επειδή, από την (1), η $\varphi(x)$ είναι γινόμενο του α και του αρνητικού $(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$, θα έχει ως πρόσημο το αντίθετο πρόσημο από αυτό του α (δηλ. θα είναι ετερόσημη του α)

3^{ov} $\varrho_1 < \varrho_2 < x$ (το x δεξιά από τις ρίζες), τότε $x - \varrho_1 > 0$ και $x - \varrho_2 > 0 \Rightarrow (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) > 0$ οπότε επειδή, από την (1), η $\varphi(x)$ είναι γινόμενο του α και του θετικού $(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$, θα έχει ως πρόσημο το πρόσημο του α (δηλ. θα είναι ομόσημη του α)

Σχηματικά αυτά όλα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta > 0$			
	$-\infty$	ϱ_1	ϱ_2	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
		$\varphi(\varrho_1) = 0$	$\varphi(\varrho_2) = 0$	

➤ $\Delta = 0$. Η $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα έστω ϱ , παραγοντοποιείται και είναι $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \varrho)^2$ (2)

Επειδή $(x - \varrho)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα από την (2) είναι φανερό ότι η $\varphi(x)$ είναι γινόμενο του μη αρνητικού $(x - \varrho)^2$ και του α , άρα θα έχει ως πρόσημο το πρόσημο του α για κάθε $x \neq \varrho$ (όταν $x = \varrho$ τότε $\varphi(\varrho) = 0$ και δεν έχει πρόσημο)

Σχηματικά αυτά όλα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta = 0$		
	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του α	ομόσημη του α	
		$\varphi(\varrho) = 0$	

δες συνέχεια στην
άλλη σελίδα

➤ $\Delta < 0$. Η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ δεν έχει ρίζα πραγματική και δεν παραγοντοποιείται.

Για την φ με $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ είναι γνωστό από την προηγούμενη παράγραφο ότι

- * Αν $a > 0$ τότε η φ έχει ελάχιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ (γιατί $a > 0, \Delta < 0$).

Αφού όμως η ελάχιστη τιμή είναι θετική άρα όλες οι τιμές της θα είναι επίσης θετικές δηλαδή ομόσημες του a .

- * Αν $a < 0$ τότε η φ έχει μέγιστη τιμή την $-\frac{\Delta}{4a} < 0$ (γιατί $a < 0, \Delta < 0$).

Αφού η μέγιστη τιμή είναι αρνητική άρα όλες οι τιμές της θα είναι επίσης αρνητικές δηλαδή πάλι ομόσημες του a .

Άρα όταν $\Delta < 0$ η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ είναι παντού ομόσημη του a

Σχηματικά αυτά όλα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$	
	$-\infty$	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του a	

Πίνακες μεταβολών του πρόσημου της $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta > 0$			
	$-\infty$	ϱ_1	ϱ_2	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι :	ομόσημη του a	ετερόσημη του a	ομόσημη του a	
		$\varphi(\varrho_1) = 0$	$\varphi(\varrho_2) = 0$	

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta = 0$		
	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι :	ομόσημη του a	ομόσημη του a	
		$\varphi(\varrho) = 0$	

	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$	
	$-\infty$	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι :	ομόσημη του a	

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού, μορφή :

1. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$
2. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0$
3. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$
4. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$

Για να λύσεις μια ανίσωση η οποία έχει μια από τις πιο πάνω 4 μορφές κάνεις τα εξής :

- ✓ Βρίσκεις την διακρίνουσα Δ .
- ✓ Με βάση το πρόσημο της Δ και του συντελεστή α φτιάχνεις τον πίνακα μεταβολών της $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όπως πιο πάνω.
- ✓ Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκεις τα διαστήματα στα οποία ικανοποιείται η συγκεκριμένη ανίσωση.

Δες τα παραδείγματα που ακολουθούν για να καταλάβεις πως πρέπει να δουλεύεις «πρακτικά»

Παραδείγματα :

1. Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 5x + 6 > 0$.

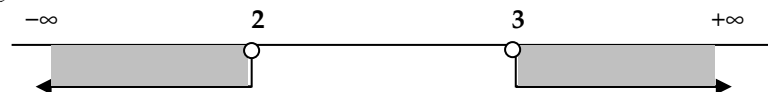
Απάντηση Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Άρα η $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = \dots = 2$ και $\rho_2 = \dots = 3$ και $\alpha = 1 > 0$ άρα θα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta > 0$			
$-\infty$	2	3	$+\infty$
ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
δηλ +	-	+	
$\varphi(2) = 0$		$\varphi(3) = 0$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Άρα $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Γραφικά οι λύσεις είναι :



Οι αριθμοί 2 και 3 **δεν** συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις γιατί είναι λύσεις της $x^2 - 5x + 6 = 0$ (στο σχήμα βάζουμε 0 κάτω από το 2 και το 3 για να δείξουμε ότι ο αριθμός δεν συμπεριλαμβάνεται).

2. Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Απάντηση Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Άρα η $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = \dots = 2$ και $\rho_2 = \dots = 3$ και $\alpha = 1 > 0$ άρα θα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

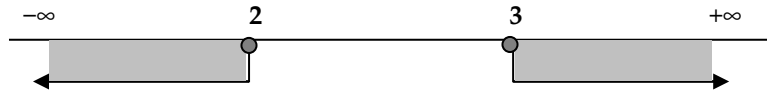
Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta > 0$			
$-\infty$	2	3	$+\infty$
ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
δηλ +	-	+	
$\varphi(2) = 0$		$\varphi(3) = 0$	

δες συνέχεια στην
άλλη σελίδα.

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

$$\text{Άρα } x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Γραφικά οι λύσεις είναι :



Οι αριθμοί 2 και 3 συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις της ανίσωσης ως λύσεις της $x^2 - 5x + 6 = 0$ (στο σχήμα βάζουμε ● κάτω από το 2 και το 3 για να δείξουμε ότι ο αριθμός συμπεριλαμβάνεται).

3. Να λυθεί η ανίσωση ι) $x^2 - 5x + 6 < 0$ και ιι) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Απάντηση : Και στις δυο περιπτώσεις είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3 (όπως και πριν) και $\alpha = 1 > 0$ επομένως ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta > 0$

$-\infty$	2	3	$+\infty$
ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
δηλ +	-	+	

$\varphi(2) = 0$ $\varphi(3) = 0$

Οπότε

ι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$. $\text{Άρα } x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$.

Γραφικά οι λύσεις είναι



Οι αριθμοί 2 και 3 **δεν** συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις γιατί είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$ και όχι της ανίσωσης $x^2 - 5x + 6 < 0$.

ιι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$. $\text{Άρα } x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$.

Γραφικά οι λύσεις είναι



Οι αριθμοί 2 και 3 συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις της ανίσωσης ως λύσεις της $x^2 - 5x + 6 = 0$.

4. Να λυθεί η ανίσωση ι) $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$ και ιι) $-x^2 + 5x - 6 > 0$

Απάντηση : Και στις δυο περιπτώσεις είναι $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$.

Άρα η $\varphi(x) = -x^2 + 5x - 6$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3 (όπως και πριν) και $\alpha = -1 < 0$ επομένως ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta > 0$

$-\infty$	2	3	$+\infty$
ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
δηλ -	+	-	

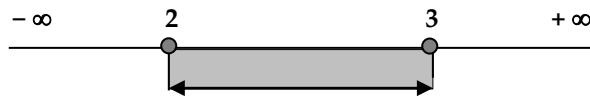
$\varphi(2) = 0$ $\varphi(3) = 0$

Δες συνέχεια ...
στην άλλη σελίδα

Οπότε

ι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$. Άρα $-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$.

Γραφικά οι λύσεις είναι



Οι αριθμοί 2 και 3 συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις της ανίσωσης ως λύσεις της εξίσωσης $-x^2 + 5x - 6 = 0$.

ιι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$. Άρα $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, 3)$.

Γραφικά οι λύσεις είναι



Οι αριθμοί 2 και 3 **δεν** συμπεριλαμβάνονται στις λύσεις γιατί είναι λύσεις της εξίσωσης $-x^2 + 5x - 6 = 0$ και όχι της ανίσωσης $-x^2 + 5x - 6 > 0$.

* Σε όλα τα πιο πάνω παραδείγματα ήταν $\Delta > 0$. Παρατήρησε ότι σ' αυτή την περίπτωση **όλες οι μορφές ανίσωσης έχουν λύση**.

5. Να λυθεί η ανίσωση ι) $x^2 - 6x + 9 > 0$ και ιι) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$

Απάντηση Είναι $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. Άρα η $\varphi(x) = x^2 - 6x + 9$ έχει μια πραγματική ρίζα, τον αριθμό 3 και $\alpha = 1 > 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών:

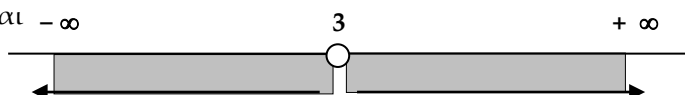
Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta =$		
$-\infty$	3	$+\infty$
ομόσημη του α		ομόσημη του α
δηλ. +		+

$\varphi(3) = 0$

ι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Άρα $x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$

Γραφικά οι λύσεις είναι



Ο αριθμός 3 **δεν** συμπεριλαμβάνεται στις λύσεις της ανίσωσης διότι είναι λύση της $x^2 - 6x + 9 = 0$.

ιι) Από τον πίνακα είναι φανερό ότι $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

6. Να λυθεί η ανίσωση $-x^2 + 6x - 9 > 0$

Απάντηση: Είναι $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$. Άρα η $\varphi(x) = -x^2 + 6x - 9$ έχει μια ρίζα τον αριθμό 3 και $\alpha = -1 < 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών:

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ αφού $\Delta =$		
$-\infty$	3	$+\infty$
ομόσημη του α		ομόσημη του α
δηλ. -		-

$\varphi(3) = 0$

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 9 > 0$ είναι αδύνατη.

7. Να λυθεί η ανίσωση $-\chi^2 + 6\chi - 9 \geq 0$

Απάντηση Είναι $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$. Άρα η $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 6\chi - 9$ έχει μια ρίζα τον αριθμό 3 και $\alpha = -1 < 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(\chi)$ αφού $\Delta =$	
$-\infty$	$+\infty$
ομόσημη του α	ομόσημη του α
δηλ. $-$	$-$
$\varphi(3) = 0$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $-\chi^2 + 6\chi - 9 \geq 0$ έχει μοναδική λύση το 3 (γιατί στην ανίσωση υπάρχει και το $= 0$ εκτός από το > 0)

❖ Προσοχή λοιπόν στην περίπτωση που η ανίσωση είναι $\leq$ ή $\geq$ γιατί τότε στις λύσεις συμπεριλαμβάνονται και οι λύσεις της εξίσωσης.

8. Να λυθεί η ανίσωση $2\chi^2 + 3\chi + 9 > 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi + 9$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, είναι $\alpha = 2 > 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(\chi)$ όταν $\Delta < 0$	
$-\infty$	$+\infty$
παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$	
το πρόσημο είναι $+$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(\chi) > 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 + 3\chi + 9 > 0$ ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

9. Να λυθεί η ανίσωση $2\chi^2 + 3\chi + 9 < 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi + 9$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, είναι $\alpha = 2 > 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(\chi)$ όταν $\Delta < 0$	
$-\infty$	$+\infty$
παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$	
το πρόσημο είναι $+$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(\chi) < 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 + 3\chi + 9 < 0$ αδύνατη

10. Να λυθεί η ανίσωση $2\chi^2 + 3\chi + 9 \leq 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(\chi) = 2\chi^2 + 3\chi + 9$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, είναι $\alpha = 2 > 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(\chi)$ όταν $\Delta < 0$	
$-\infty$	$+\infty$
παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$	
το πρόσημο είναι $+$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(\chi) \leq 0 \Leftrightarrow 2\chi^2 + 3\chi + 9 \leq 0$ αδύνατη

11. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 + 3x + 9 \geq 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(x) = 2x^2 + 3x + 9$ **δεν έχει ρίζες πραγματικές**, είναι $\alpha = 2 > 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Η $\varphi(x)$ είναι	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$	
	$-\infty$	$+\infty$
	παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$ το πρόσημο είναι +	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

12. Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2 + 3x - 9 > 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(x) = -2x^2 + 3x - 9$ **δεν έχει ρίζες πραγματικές**, είναι $\alpha = -2 < 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Η $\varphi(x)$ είναι	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$	
	$-\infty$	$+\infty$
	παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$ το πρόσημο είναι -	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 9 > 0$ είναι αδύνατη

13. Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2 + 3x - 9 \leq 0$

Απάντηση : Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 9 - 72 = -63 < 0$. Άρα η $\varphi(x) = -2x^2 + 3x - 9$ **δεν έχει ρίζες πραγματικές**, είναι $\alpha = -2 < 0$. Άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών :

Η $\varphi(x)$ είναι	Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$	
	$-\infty$	$+\infty$
	παντού ομόσημη του α , δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$ το πρόσημο είναι -	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι η $\varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 9 \leq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Συνολικά υπάρχουν 24 ανισώσεις αυτής της μορφής. Παρά το γεγονός ότι δεν είμαι οπαδός των συνοπτικών πινάκων γιατί οδηγούν στην αποστήθιση, χαμένος κόπος στην κυριολεξία, δες τις 24 αυτές περιπτώσεις με την μορφή συνοπτικού πίνακα στην επόμενη σελίδα.

Θέλω να παρατηρήσεις ότι η διαδικασία για την επίλυση μιας ανίσωσης 2^{ου} βαθμού είναι πολύ συγκεκριμένη, πολύ συνοπτική, στηρίζεται δε κυριολεκτικά στον πίνακα μεταβολών της $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Πίνακας λύσεων ανισώσεων 2^{ου} βαθμού

➤ $\alpha > 0$ ✓ $\Delta > 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες και ισχύει οΠίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta > 0$

	$-\infty$	ϱ_1	ϱ_2	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του α		ετερόσημη του α	ομόσημη του α
δηλ.	+		-	+

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι : $\varphi(\varrho_1) = 0$ $\varphi(\varrho_2) = 0$ 1) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho_1) \cup (\varrho_2, +\infty)$ 2) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho_1] \cup [\varrho_2, +\infty)$ 3) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow x \in (\varrho_1, \varrho_2)$ 4) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\varrho_1, \varrho_2]$ ✓ $\Delta = 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει μια διπλή ρίζα πραγματική (ή δυο πραγματικές και ίσες ρίζες) και ισχύει οΠίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta = 0$

	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του α		ομόσημη του α
δηλ.	+		+

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι :

 $\varphi(\varrho) = 0$ 5) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho) \cup (\varrho, +\infty) = \mathbb{R} - \{\varrho\}$ 6) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 7) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη8) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow x = \varrho$ (Προσοχή έχει μοναδική λύση)✓ $\Delta < 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ δεν έχει ρίζες πραγματικές και ισχύει οΠίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$

	$-\infty$	$+\infty$
Η $\varphi(x)$ είναι	ομόσημη του α	
δηλ.	+	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι :

9) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 10) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 11) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη12) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη.➤ $\alpha < 0$

✓ $\Delta > 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες και ισχύει ο

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta > 0$

Η $\varphi(x)$ είναι

$-\infty$	ϱ_1	ϱ_2	$+\infty$
ομόσημη του α	ετερόσημη του α	ομόσημη του α	
δηλ. -			-
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$\varphi(\varrho_1) = 0$	$\varphi(\varrho_2) = 0$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι :

- 13) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow x \in (\varrho_1, \varrho_2)$
 14) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\varrho_1, \varrho_2]$
 15) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho_1) \cup (\varrho_2, +\infty)$
 16) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho_1] \cup [\varrho_2, +\infty)$

✓ $\Delta = 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ έχει μια διπλή ρίζα πραγματική (ή δυο πραγματικές και ίσες ρίζες) και ισχύει ο :

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta = 0$

Η $\varphi(x)$ είναι

$-\infty$	ϱ	$+\infty$
ομόσημη του α		ομόσημη του α
δηλ. -		-
	$\downarrow$	
	$\varphi(\varrho) = 0$	

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι :

- 17) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη
 18) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow x = \varrho$ (Προσοχή μοναδική λύση)
 19) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \varrho) \cup (\varrho, +\infty) = \mathbb{R} - \{\varrho\}$
 20) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

✓ $\Delta < 0$ τότε η $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ δεν έχει ρίζες πραγματικές και ισχύει ο

Πίνακας μεταβολών πρόσημου της $\varphi(x)$ όταν $\Delta < 0$

Η $\varphi(x)$ είναι

$-\infty$	$+\infty$
ομόσημη του α	ομόσημη του α
δηλ. -	-

Από τον πίνακα είναι φανερό ότι :

- 21) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma > 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη
 22) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \geq 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη
 23) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
 24) Η ανίσωση $ax^2 + bx + \gamma \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού, μορφή :

1. $A(x) \cdot B(x) \cdots \Phi(x) > 0$
2. $A(x) \cdot B(x) \cdots \Phi(x) \geq 0$
3. $A(x) \cdot B(x) \cdots \Phi(x) < 0$
4. $A(x) \cdot B(x) \cdots \Phi(x) \leq 0$

Για να λύσεις μια ανίσωση η οποία έχει μια από τις πιο πάνω 4 μορφές κάνεις τα εξής :

- 1^{ον} Μελετάς το πρόσημο κάθε παράγοντα $A(x)$, $B(x)$,... κλπ ξεχωριστά
- 2^{ον} Φτιάχνεις συνολικό πίνακα για να βρεις το πρόσημο του γινομένου και
- 3^{ον} Από τον πίνακα πολύ εύκολα βρίσκεις τις λύσεις τις ανίσωσης

Δες τα παραδείγματα για να καταλάβεις

Παραδείγματα :

1. Να λυθεί η ανίσωση $(2x+1)(x^2-5x+6)(x-2) \leq 0$

Βήμα 1^{ον} Μελετάω το πρόσημο του κάθε παράγοντα ξεχωριστά :

- * $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ άρα $x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+1 < 0$
- * Για το x^2-5x+6 έχω $\Delta = 1 > 0$ άρα ρίζες οι αριθμοί 2 και 3, $\alpha = 1 > 0$ και ισχύει ο πίνακας

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	-	-	

- * $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ άρα $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$

Βήμα 2^{ον} Για το γινόμενο ισχύει ο πίνακας

χ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$		
$2\chi+1$	-	0	+	+	+		
$\chi^2-5\chi+6$	+		0	-	0	+	
$\chi-2$	-		-	0	+	+	
Γινόμενο	+	0	-	0	-	0	+

Βήμα 3^{ον} Λύσεις της $(2x+1)(x^2-5x+6)(x-2) \leq 0$ είναι τα $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$.

2. Να λυθεί η ανίσωση $(2x+1)(x^2-5x+6)(x-2) > 0$

Γι' αυτήν ισχύουν τα 2 πρώτα βήματα πιο πάνω οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι λύσεις της $(2x+1)(x^2-5x+6)(x-2) > 0$ είναι τα $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$

Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού, μορφή :

1. $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$
2. $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$
3. $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$
4. $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$

Πρέπει $B(x) \neq 0$. Βρίσκω λοιπόν όπως πάντα πρώτα τους περιορισμούς.

Έστω ότι θέλω να λύσω μια ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ τότε

Εξετάζω το πρόσημο του πηλίκου κατ' ευθείαν, φτιάχνοντας πίνακα μεταβολών πρόσημου όπως ακριβώς έκανα με την ανίσωση $A(x) B(x) > 0$

Προσοχή : αυτά δεν ισχύουν για ανισώσεις της μορφής $\pi x \frac{A(x)}{B(x)} > \kappa$ ή για ανισώσεις της

μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} + \kappa > 0$. Αυτές θα εξεταστούν ξεχωριστά.

Παραδείγματα :

1. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} < 0$

Απάντηση : Βρίσκω πρώτα τους περιορισμούς. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0$.

Όμως $x^2 - 5x + 6 = 0$ είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Ρίζες $\rho_1 = \dots = 2$ και $\rho_2 = \dots = 3$.

Άρα πρέπει $x \neq 2$ και $x \neq 3$. Ταυτόχρονα φτιάχνω πίνακα μεταβολών πρόσημου για τον παρονομαστή που τον έχω έτοιμο και είναι $\alpha = 1 > 0$ ρίζες το 2 και 3 άρα

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+	

Κάνω τα ίδια για τον αριθμητή $x^2 - 4x + 3$ και έχω : $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

Οπότε ρίζες οι αριθμοί 1 και 3, $\alpha = 1 > 0$ άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών πρόσημου

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+	

Άρα ισχύει ο συνολικός πίνακας :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	-	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	-	-	+
Πηλίκο	+	0	-	+	+

Από τον πίνακα βρίσκω τις λύσεις της $\frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\chi^2 - 5\chi + 6} < 0$ που είναι το διάστημα **(1, 2)** δηλαδή με εξαίρεση του 1 γιατί είναι λύση της εξίσωσης, του 2 και 3 λόγω περιορισμών.

- 2.** Αν είχα την $\frac{\chi^2 - 4\chi + 3}{\chi^2 - 5\chi + 6} \leq 0$ θα έκανα τα ίδια ακριβώς αλλά λύσεις θα ήταν το **[1, 3)** δηλαδή θα περιλάμβανα και το 1 που μηδενίζει τον αριθμητή.

* Μια ιδιαίτερη μορφή είναι οι ανισώσεις $\frac{\Gamma(\chi)}{B(\chi)} + \kappa > 0$ ή $\frac{\Gamma(\chi)}{B(\chi)} > \kappa$.

Σ' αυτήν την περίπτωση πρώτα μετασχηματίζω με πράξεις την ανίσωση στην μορφή $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} > 0$ δηλαδή φέρνω το κ στο 1^ο μέλος κλπ και μετά την λύνω όπως πριν

Παράδειγμα : Να λυθεί η ανίσωση $\frac{2\chi + 5}{\chi - 3} > -1$ (1)

Απάντηση : Πρέπει $\chi - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 3$. Τότε $\frac{2\chi + 5}{\chi - 3} > -1 \Leftrightarrow \frac{2\chi + 5}{\chi - 3} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi + 5 + (\chi - 3)}{\chi - 3} > 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{3\chi + 2}{\chi - 3} > 0. (2) \text{ Είναι } 3\chi + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{2}{3} \text{ και } \chi - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\chi \geq 3$ οπότε ισχύει ο πίνακας

χ	$-\infty$	$-2/3$	3	$+\infty$
$2\chi + 5$	-	0	+	+
$\chi - 3$	-	-	+	+
Πηλίκο	+	0	-	+

Λύσεις της (2) άρα και της (1) είναι τα $\chi \in (-\infty, -2/3) \cup (3, +\infty)$

Φ **Άλλες εφαρμογές της ανίσωσης 2^{ου} βαθμού**

Παραδείγματα :

- 1.** Να συναληθεύσεις τις $\chi^2 - 5\chi + 4 < 0$ και $\chi^2 - 5\chi + 6 \geq 0$ (Συναληθεύουσες ανισώσεις)

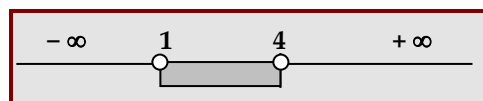
Απάντηση Λύνεις τις ανισώσεις ξεχωριστά και κάνω κοινή γραφική λύση όπως

Για το $\chi^2 - 5\chi + 4$ έχω $\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$. Ρίζες $\rho_1 = \dots = 1$ και $\rho_2 = \dots = 4$.

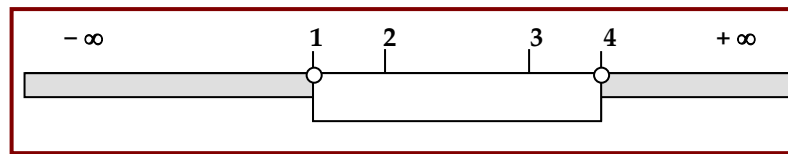
Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών

χ	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$\chi^2 - 5\chi + 6$	+	-	+	+

Γραφικά οι λύσεις της $\chi^2 - 5\chi + 4 < 0$ είναι



Η κοινή γραφική λύση δίνει τα εξής αποτελέσματα



Άρα κοινές λύσεις των $x^2 - 5x + 4 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ είναι τα $x \in (1, 2] \cup [3, 4)$

2. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $-2x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda + 1$ έχει δύο ρίζες .

Απάντηση Για να έχει η εξίσωση $-2x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda + 1$ δύο ρίζες πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$$[-(\lambda - 1)]^2 - 4(-2)(\lambda + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 8(\lambda + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 8\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)^2 \geq 0$ άρα όταν $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3\}$ η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές, ενώ όταν $\lambda = -3$ είναι $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες.

3. Να απαλλάξεις την παράσταση $A = |x - 1| + |x^2 - 5x + 6|$ από τα απόλυτα .

Απάντηση Είναι $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Τότε $|x - 1| = x - 1$ και $x < 1 \Leftrightarrow |x - 1| = -x + 1$

Επίσης για το $x^2 - 5x + 6$ έχω : $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ άρα λύσεις ... οι αριθμοί 2 και 3 . Άρα ισχύει ο πίνακας μεταβολών

Πίνακας 1

χ	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$\chi^2-5\chi+6$	+			+	
$ \chi^2-5\chi+6 $	$\chi^2-5\chi+6$	0	$-\chi^2+5\chi-6$	0	$\chi^2-5\chi+6$

Οπότε ισχύει ο συνολικός πίνακας

χ	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$ \chi-1 $	$-\chi+1$	0	$\chi-1$	$\chi-1$	$\chi-1$		
$ \chi^2-5\chi+6 $	$\chi^2-5\chi+6$	$\chi^2-5\chi+6$	0	$-\chi^2+5\chi-6$	0	$\chi^2-5\chi+6$	
A	$\chi^2-6\chi+7$	0	$\chi^2-4\chi+5$	0	$-\chi^2+4\chi+7$	0	$\chi^2-4\chi+7$

4. Να μελετήσεις την συνάρτηση $\varphi(x) = |x - 1| + |x^2 - 5x + 6|$

Απάντηση Θα έκανα κατ' αρχήν ακριβώς τα ίδια με πριν για να απαλλάξω την συνάρτηση από τα απόλυτα . Οπότε από τον πίνακα είναι φανερό ότι

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 7 & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{αν } 1 < x \leq 2 \\ -x^2 + 4x + 7 & \text{αν } 2 < x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 7 & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα μελετούσα την συνάρτηση κατά διαστήματα Πx

1^ο Στο $(-\infty, 1]$ είναι $\varphi(x) = x^2 - 6x + 7$. $\Delta = \dots 8 > 0$ άρα ρίζες ... Πίνακας μεταβολών κλπ
 2^ο Στο $(1, 2]$

Γενικά δηλαδή όταν υπάρχει απόλυτο που περιέχει παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ φτιάχνω ένα πίνακα μεταβολών όπως ο **Πίνακας 1** που είναι και πίνακας μεταβολών του πρόσημου της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ή μια γραμμή) και στην επόμενη απαλλάσσεις το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ από το απόλυτο

5. Να βρεθεί το ΠΟ της συνάρτησης $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ και της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$

Απάντηση : Επειδή η φ και η f έχουν ρίζα ανεξάρτητα από τον εκθέτη της ρίζας (σύμφωνα με το σχολικό πάντα) θα πρέπει η υπορίζη ποσότητα να είναι μη αρνητική.

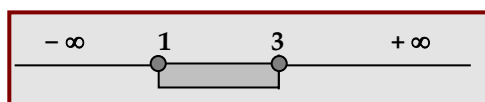
Άρα πρέπει $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ από δω και πέρα ισχύουν τα γνωστά, δηλ είναι

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ επομένως δύο ρίζες τους αριθμούς 1 και 3 άρα ισχύει ο πιο κάτω πίνακας μεταβολών του πρόσημου :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+	

δηλαδή είναι ΠΟ και για τις δύο συναρτήσεις το **A** = $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

Η γραφικά



6. Να μελετήσεις την μονοτονία της συνάρτησης $\varphi(x) = \alpha \cdot x^3$ με $\alpha > 0$

Απάντηση Είναι ΠΟ = $\mathbb{R}$. Για να μελετήσω την μονοτονία μιας συνάρτησης φ , αν θυμάσαι μελετάω το πρόσημο το $\lambda = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2}$ όταν $x_1 < x_2$.

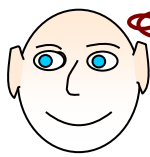
Όταν λοιπόν $x_1 < x_2$ είναι :

$$\lambda = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha x_1^3 - \alpha x_2^3}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1^3 - x_2^3)}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Το $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ μπορώ να το θεωρήσω ως τριώνυμο με μεταβλητή το x_1 και συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = x_2$, $\gamma = x_2^2$ οπότε $\Delta = (x_2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot x_2^2 = x_2^2 - 4x_2^2 = -3x_2^2 < 0$ για κάθε $x \neq 0$ και είναι $\Delta = 0$ όταν $x_2 = 0$. Άρα το $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$ (επειδή έχει $\alpha = 1 > 0$) για κάθε $x_1 < x_2$ άρα

$$\lambda = \alpha(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \geq 0.$$

Όμως $\lambda \geq 0$ σημαίνει ότι το λ διατηρεί το πρόσημο. Έτσι λοιπόν η $\varphi(x) = \alpha \cdot x^3$ με $\alpha > 0$ είναι μονότονη στο $\mathbb{R}$.



α σκήσεις

Καθηγητής που σκέφτεται...
τις ασκήσεις γιατί οι μαθητές
σκέφτονται τις διακοπές

1. Να κάνεις τον πίνακα μεταβολών για τις συναρτήσεις :

$$\begin{array}{llll} \text{ι) } \varphi(x) = 2x^2 + x - 6 & \text{ιι) } g(x) = x^2 - 8x + 16 & \text{ιιι) } \theta(x) = -x^2 - x + 2 & \text{ιν) } f(x) = x^2 - 3x \\ \text{ν) } \varphi(x) = 3x^2 + 11 = 0 & \text{νι) } \varphi(x) = -2x^2 + 8 & \text{νιι) } f(x) = -x^2 - 5 & \end{array}$$

2. Να «λύσεις» τις ανισώσεις

$$\begin{array}{llll} \text{ι) } 3x^2 + 11 \geq 0 & \text{ιι) } -2x^2 + 8 > 0 & \text{ιιι) } -x^2 - 5 \leq 0 & \text{ιν) } -x^2 - x + 2 \geq 0 \\ \text{ν) } 2x^2 + x - 6 > 0 & \text{νι) } 2x^2 + x - 6 \geq 0 & \text{νιι) } 2x^2 + x - 6 < 0 & \text{νιιι) } 2x^2 + x - 6 \leq 0 \\ \text{ιχ) } -x^2 - x + 2 > 0 & \text{χ) } -x^2 - x + 2 \leq 0 & \text{χι) } -x^2 - x + 2 \geq 0 & \text{χιι) } -x^2 - x + 2 < 0 \end{array}$$

3. Να «λύσεις» τις ανισώσεις

$$\begin{array}{llll} \text{ι) } x^2 - 6x + 9 > 0 & \text{ιι) } x^2 - 6x + 9 < 0 & \text{ιιι) } x^2 - 6x + 9 \leq 0 & \text{ιν) } x^2 - 6x + 9 \geq 0 \end{array}$$

4. Να «λύσεις» τις ανισώσεις

$$\begin{array}{llll} \text{ι) } -x^2 + 4x - 4 > 0 & \text{ιι) } -x^2 + 6x - 9 < 0 & \text{ιιι) } -2x^2 - 12x - 18 \leq 0 & \text{ιν) } -x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{array}$$

5. Να «λύσεις» τις ανισώσεις

$$\begin{array}{llll} \text{ι) } 3x^2 - 5x + 7 > 0 & \text{ιι) } x^2 + 3x + 5 \geq 0 & \text{ιιι) } 5x^2 - 4x + 2 < 0 & \text{ιν) } 2x^2 + 3x + 4 \leq 0 \\ \text{ν) } -3x^2 - 2x - 7 > 0 & \text{νι) } -x^2 + 3x - 9 \geq 0 & \text{νιι) } -4x^2 + 4x - 2 < 0 & \text{νιιι) } -2x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{array}$$

6. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x - \lambda = 0$ έχει μία ρίζα και στη συνέχεια να βρεις αυτή τη ρίζα

7. Να βρεις τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 1)x - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες .

8. Να βρεις το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2\lambda x + 3 = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ

9. Να «λύσεις» τις ανισώσεις :

$$\begin{array}{ll} \text{ι) } (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3)(x - 1) \geq 0 & \text{ιι) } (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3)(x - 1) \leq 0 \end{array}$$

10. Να «λύσεις» τις ανισώσεις :

$$\begin{array}{ll} \text{ι) } (2x + 3)(x^2 - 5x + 4)(x + 2) < 0 & \text{ιι) } (2x + 3)(x^2 - 5x + 4)(x + 2) > 0 \end{array}$$

11. Να «λύσεις» τις ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{ι) } \frac{3x + 1}{x^2 + 7x + 10} < 0 & \text{ιι) } \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} \geq 0 & \text{ιιι) } \frac{-x^2 + 9}{x^2 + 3x + 2} > 0 \end{array}$$

12. Να «λύσεις» τις ανισώσεις :

$$\begin{array}{lll} \text{ι) } \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} \geq -2 & \text{ιι) } \frac{x^2 + x + 2}{3x + 1} + 1 \geq 0 & \text{ιιι) } \frac{x + 2}{3x + 1} - 3 \leq 0 \end{array}$$

13. Να συναληθεύσεις τις ανισώσεις :

ι) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ και $x^2 + 5x - 6 > 0$

ιι) $x^2 - 2x + 1 > 0$ και $2x^2 + x + 6 \leq 0$

ιιι) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ και $x^2 - 5x + 4 > 0$

ιν) $-2x^2 + 3x + 5 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

ν) $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ και $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$

14. Να απαλλάξεις την παράσταση $A = |2x + 3| + |x^2 - 5x + 4|$ από τα απόλυτα .

15. Να απαλλάξεις την παράσταση $A = |-3x + 1| + |-x^2 + 3x - 2|$ από τα απόλυτα .

16. Να μελετήσεις την συνάρτηση $f(x) = |-3x + 1| + |-x^2 + 3x - 2|$.

17. Να βρεθεί το ΠΟ της συνάρτησης $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ και της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - x - 2}$

18. Να βρεθεί το ΠΟ της συνάρτησης $g(x) = \sqrt[2002]{2x^2 + x - 6}$ και της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[2001]{x^2 - x - 20}$

19. Να βρεθεί το ΠΟ της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{-2x^2 - x + 6}$ και της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[2003]{x^2 + x + 2}$

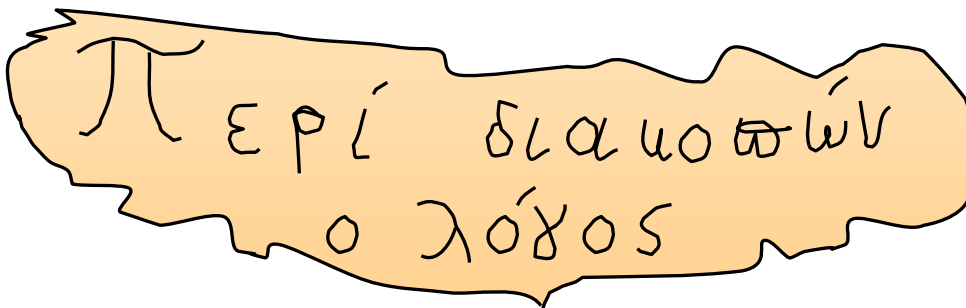
20. Να γίνει η μελέτη της συνάρτησης : $\varphi(x) = \alpha \cdot x^3$ με $\alpha < 0$

21. Να γίνει η μελέτη των συναρτήσεων :

ι) $g(x) = 2x^3$

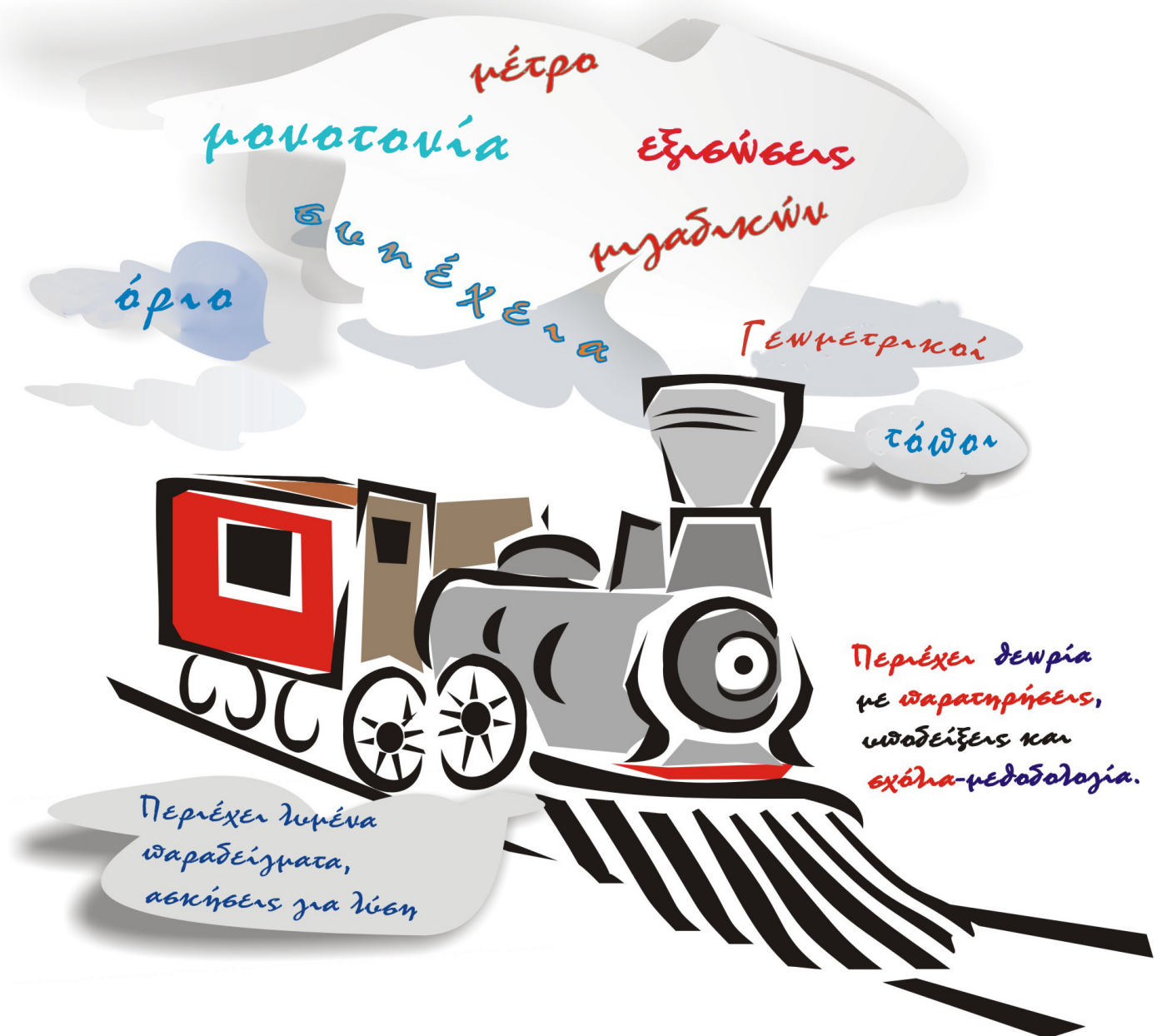
ιι) $\varphi(x) = x^3 + x$

ιιι) $\theta(x) = x^3 + 1$



Δαριανός Μυραΐτης

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Τόμος 1^{ος}



Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Μαθηματικά
Θετικής και Τεχνολογικής
Τόμος 2ος

Παράγωγο
ακρότατα
αδύναμτες ολοκλήρωμα
μελέτη συνάρτησης
οριζόμενο
De L'Hospital



Περιέχει θεωρία
με παρατηρήσεις,
υποδείξεις και
ελάχιστα μεθοδολογία.

Περιέχει κυρίως
παραδείγματα,
ασκήσεις για λύση

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

1^{ος} Τόμος



Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Το Θέμα

Θετικής - Τεχνολογικής

2^{ος} Τόμος



Περιέχει όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1975 μέχρι το 2008

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέμα

βιβλίων βιβλιοθήκες
στη βιβλιοθήκη
και βιβλίο γνώση

ιστορία
από την
μέση τμή
Παιδεία



Περιέχει όλα τα θέματα
όλων των ειδών των
Πανελληνίων εξετάσεων
από το 2000 μέχρι
σήμερα, αυθεντικά με
αναλυτικό και
υποδειγματικό τρόπο

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

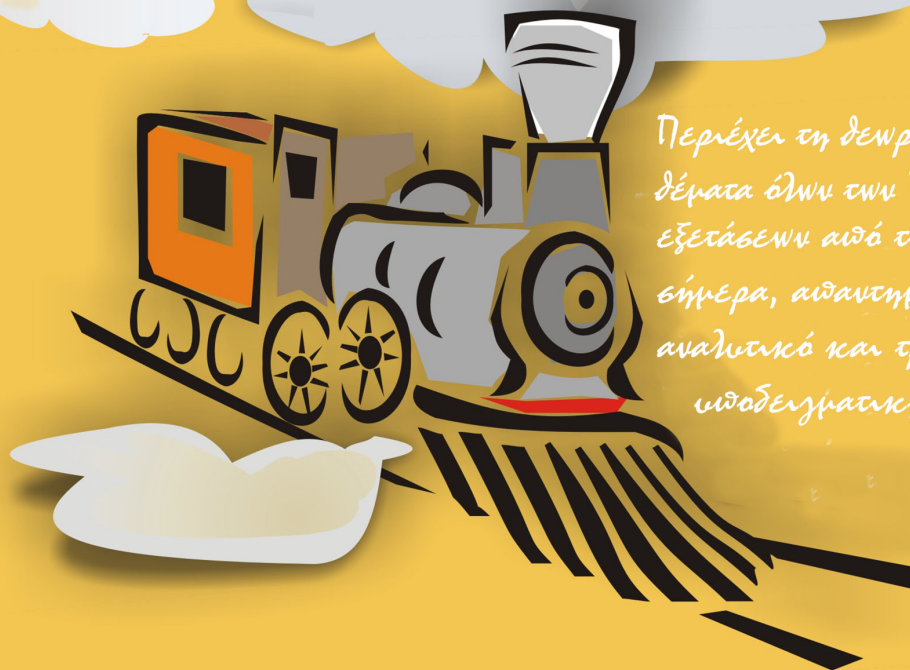
Δαριανός Μωραΐτης

Τα Θέματα
Αρχές Οργάνωσης
και
Διοίκησης Επιχειρήσεων

Η Επιχειρήσιμη

Κοινωνική Ευθύνη

Η οικονομική λειτουργία



Περιέχει τη θεωρία και όλα τα θέματα όλων των Πανελληνίων εξετάσεων από το 2004 μέχρι σήμερα, αδειοδοτημένα με αναλυτικό και τρόπο υποδειγματικό

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

Δαμιανός Μωραΐτης

Τα Θέματα Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

αζαδά
ωληδωρισμός
μέθο συνολικό κόστος
ελαστική ζήτηση

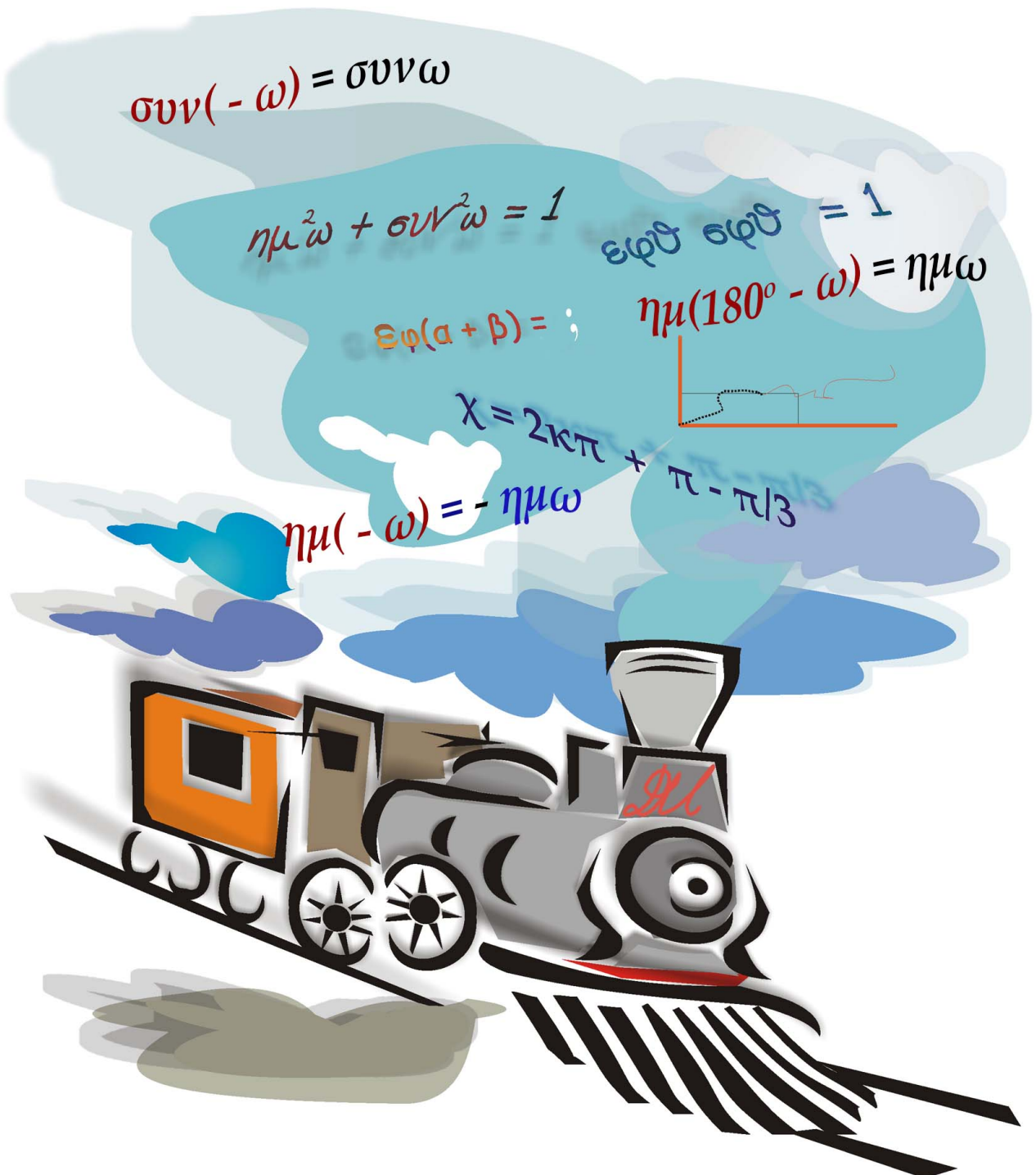


Περιέχει τη θεωρία και όλα τα
δέματα όλων των Πανελληνίων
εξετάσεων από το 1994 μέχρι
το 2006.

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας

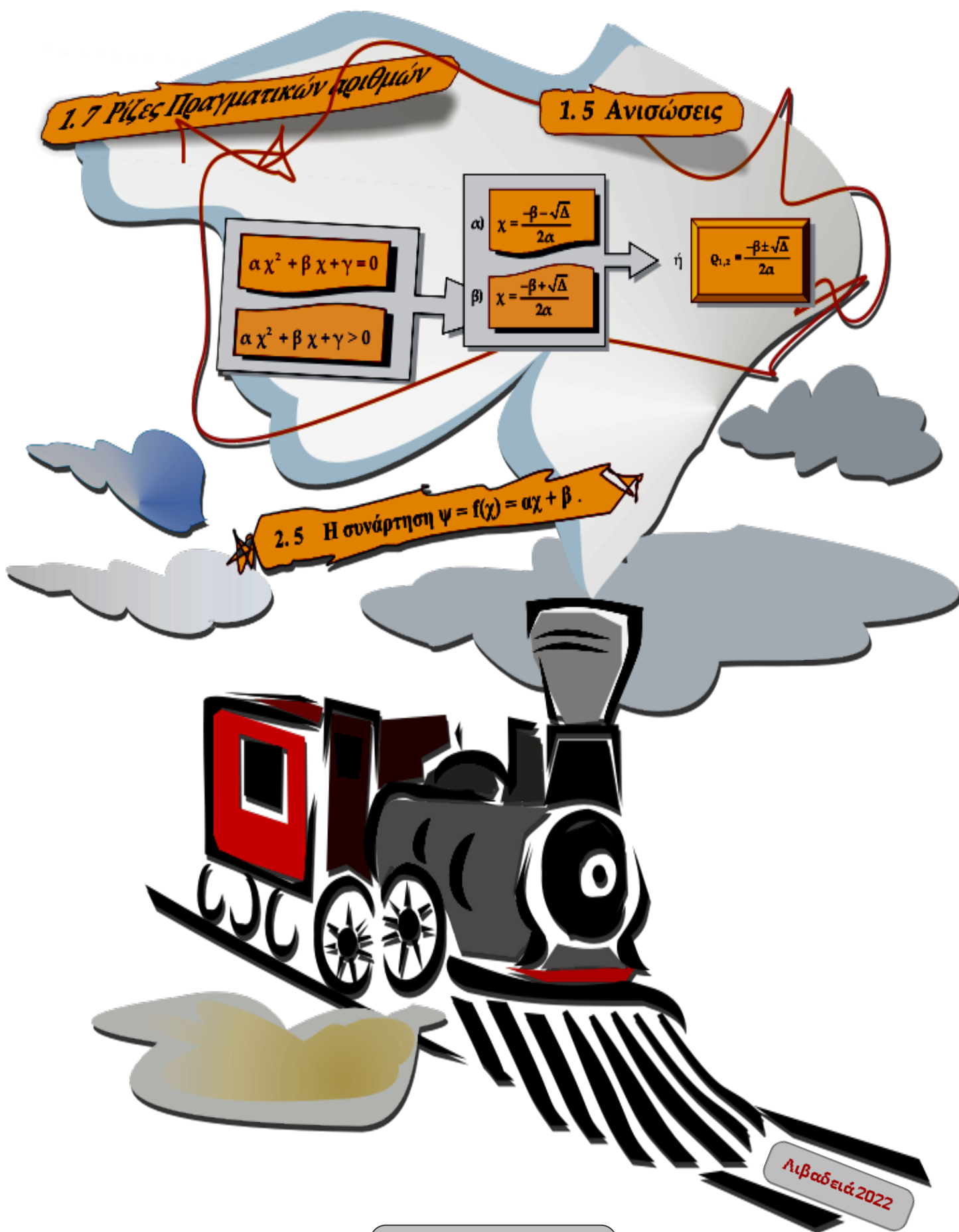
Δαμιανός Μυραΐτης

Ανάλεκτη Τριγωνομετρίας



Περιέχει όλη την ύλη για την Α! και Β! Λυκείου

Φίλοι της Βιβλιοθήκης Λεβαδείας



Δαμιανός Μωραΐτης

Συλλογή ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ ΛΕΒΑΔΕΙΑΣ